

# Praktická geometrie

---

## 4. Vytyčování oblouků

In: Pavel Potužák (author): Praktická geometrie. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1949. pp. 61–69.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403236>

### Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## 4. VYTYČOVÁNÍ OBLOUKŮ

Osy pozemních staveb jako silnic, železnic, tunelů, koryt vodních toků a pod. jsou složeny z úseček (částí přímek) a a oblouků. Oblouky mohou mít tvar kruhový, parabolický, lemniskátový, oválný atd. podle účelu stavby.

Kruhové oblouky jsou u silničních a železničních staveb. Vrchní stavba železnic vyžaduje vzhledem k rychlosti jízdy vlaků na přechodu z přímký do oblouku přechodnice. Za přechodnicí se volí parabola 3. stupně, jejíž křivost se mění plynule od  $R = \infty$  u koncového bodu přímký do  $R$ , který má oblouk. Rovnice paraboly je  $y = x^3 : C$ , kde  $C$  je veličinou závislou na rychlosti vozu (odstředivé síle a převýšení kolejnic) a je předepsáno železničními předpisy. Vytyčování přechodnic se děje od tečny souřadnicemi.

Při úpravách vodních toků pro plavební koryta se užívá za křivku oblouk lemniskaty, v němž se koryto řeky nezanáší. Též zde musí být přechodnice.

Měřické práce s vypracováním návrhů spojené se dělí na zaměřovací, kancelářské a vytyčovací. V poli se vykoná polygonové měření, k jehož stranám se zaměří pruh území polohově a výškově v rozsahu, který odpovídá plánování navržené stavby (trasy). Polygonové body se osadí kolíky nebo kameny a případně se zajistí místopisně čili topograficky k pevným bodům ve svém okolí, jako k mezníkům na držebnostních hranicích a pod.

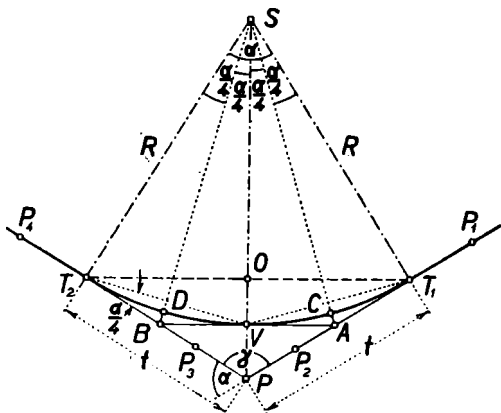
Výsledky měřických prací se zobrazí v plánu v určitém měřítku zmenšení a v něm se vypracuje návrh stavby. Osy stavby se zobrazí přímkami a oblouky. V podélném profilu se zobrazí počátky a konce oblouků, poloměry křivosti a kilometrování stavby.

Po vypracování návrhu se vytyčuje osa stavby v poli. Pokud nebyly přímé osy v poli již dány, vytyčí se podle návrhu vzhledem k polygonovým stranám. Vytyčovací prvky se vypočtou v kanceláři nebo se v měřítku na plánu odměří. Mezi přímkami se vloží oblouk a pro jeho vytyčení se užije buď výsledků odvozených z plánu nebo z doplňovacího měření.

Postup prací početních a vytyčovacích bude ukázán na několika příkladech bez zřetele k přechodnicím.

*Základní pojmy* (obr. 27). V území jsou dány přímé osy  $P_1P_2$  a  $P_3P_4$  nějaké stavby nebo jsou v poli vytyčeny podle

zobrazení na plánu. Mezi uvedenými přímnými osami je vytyčiti osu oblouku o poloměru  $R$  tak, aby přímé osy byly tečnami oblouku. — Prvním úkolem je stanovení dotykových bodů  $T_1$  a  $T_2$ , které představují počátek a konec oblouku. Bod  $V$  je vrcholem oblouku a obdrží se jako průsečík oblouku



Obr. 27. Vytyčení dotykových bodů oblouků.

s osou úhlu  $\gamma$ , který svírají obě tečny. Bod  $V$  pólí oblouk. Body  $T_1, T_2$  a  $V$  jsou hlavní obloukové body a někdy se k nim počítají i čtvrtobloukové body  $C$  a  $D$ .

Hlavní body se musí vytyčit velmi pečlivě, neboť slouží za východiska pro další vytyčování podrobných bodů obloukových. K výpočtu je nutno znáti poloměr oblouku  $R$ , který je předepsán silničními a železničními předpisy na desetiometry a někdy i na celé stometry zaokrouhlený.

Úhel obou tečen se značí  $\gamma$  a středový úhel  $\alpha$ . Středový úhel se nikdy neměří, neboť se vypočte z měřených úhlových hodnot. Často by nebylo ani možno pro územní překážky střed  $S$  vytyčit. Podle toho, které veličiny byly měřeny, volí se početní postup.

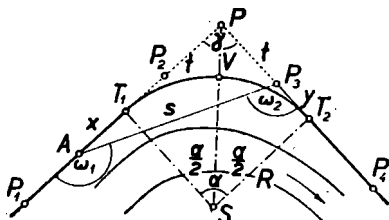
1. (Obr. 27.) Je-li průsečík  $P$  stanoven prodloužením tečen, změří se na něm úhel  $\gamma$  a úhel  $\alpha$  se vypočte z výrazu  $\alpha = 180^\circ - \gamma$ , neboť úhly u bodů  $T_1$  a  $T_2$  ve čtyřúhelníku  $ST_1PT_2$  jsou pravé.

Vytyčovací prvky pro body  $T_1$  a  $T_2$  se vypočtou z délek tečen

$$t = \overline{PT_1} = \overline{PT_2} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$$

a z měřených stran  $\overline{PP_2}$  a  $\overline{PP_3}$ :

$$\overline{P_2T_1} = t - \overline{PP_2}, \quad \overline{P_3T_2} = t - \overline{PP_3}.$$



Obr. 28. Vytyčení dotkových bodů oblouku v území s překážkami.

Délku  $P_2T_1$  odměříme od bodu  $P_2$  do bodu  $T_1$  a podobně délku  $P_3T_2$  od bodu  $P_3$  do bodu  $T_2$ . Oba body označíme kolíky. Takovým způsobem se vytyčí počátek a konec oblouku na daných tečnách.

2. (Obr. 28.) Pro územní překážky není často možno měřit tečnový úhel  $\gamma$ , neboť tečny nelze prodloužit. V takovém případě se úhel  $\gamma$  stanoví počtářsky. Na tečnách se zvolí body ku př.  $A$  a  $P_3$  tak, aby s nich bylo na sebe vzájemně vidět. Změří se úhly  $\omega_1, \omega_2$  a vzdálenost obou bodů  $s = P_2P_3$ . Z  $\triangle APP_3$  se vypočte úhel  $\gamma$  a neznámé strany:

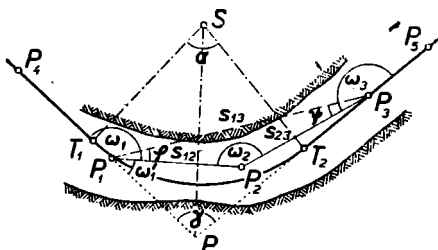
$$\gamma = \omega_1 + \omega_2 - 180^\circ, \quad \alpha = 360^\circ - (\omega_1 + \omega_2) = 180^\circ - \gamma,$$

$$\overline{AP} = s \frac{\sin \omega_2}{\sin \gamma}, \quad \overline{PP_3} = s \frac{\sin \omega_1}{\sin \gamma}.$$

Délka tečen se vypočte jako v prvném případě z výrazu  $t = \overline{PT_1} = \overline{PT_2} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$  a vytyčovací prvky dotykových bodů jsou:

$$x = \overline{AT_1} = \overline{AP} - t, \quad y = \overline{P_3T_2} = t - \overline{PP_3}.$$

3. (Obr. 29.) Nelze-li na tečnách najít body, s nichž je vzájemně na sebe vidět nebo jejich spojnice se nedá přímo měřit,



Obr. 29. Vytyčení dotykových bodů oblouku v nepřehledném území.

zvolí se jeden nebo více polygonových bodů, spojených v pořadí a změří se všechny délky a úhly. V obrazci je zvolen jeden bod  $P_2$ . Změřeny byly strany  $s_{12}$  a  $s_{23}$  a vrcholové úhly  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  a  $\omega_3$ . Úhel  $\gamma$  se vypočte ze čtyřúhelníka  $PP_1P_2P_3$  jako doplněk na  $360^\circ$

$$\gamma = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 360^\circ$$

a středový úhel

$$\alpha = 540^\circ - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 180^\circ - \gamma.$$

V  $\triangle P_1P_2P_3$  jsou dány dvě strany  $s_{12}$ ,  $s_{23}$  a sevřený úhel  $\omega_2$ . Neznámé úhly  $\varphi$  a  $\psi$  se vypočtou ku př. tangentskou větou nebo některým způsobem uvedeným v I. dílu. Třetí strana  $s_{13}$  se nato vypočte sinovou větou. Neznámé délky v  $\triangle PP_1P_3$

se stanoví z vypočtených úhlů a délky  $s_{13}$ . Vytyčovací prvky pro body  $T_1$  a  $T_2$  se vypočtou po určení délek tečen

$$t = \overline{PT_1} = \overline{PT_2} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\overline{P_1T_1} = t - \overline{PP_1}, \quad \overline{P_2T_2} = \overline{PP_2} - t.$$

**4.1. Vytyčení vrcholu oblouku.** Je několik způsobů užívaných při vytyčování vrcholu  $V$  a užije se vždy ten, který je pro dané území nejvhodnější. Vrchol se vytyčuje od tětiny, tečny, vrcholové tečny nebo u oblouků o malém poloměru se vytyčuje též pásmem, půlením tečnového úhlu. K vytyčování lze s výhodou užítí prvků vyjmutých z tabulek.

*Vytyčení vrcholu od tětiny* (obr. 30). Rozpůlením spojnice dotykových bodů  $T_1$  a  $T_2$  se obdrží bod  $O$ . Na kolmici v něm vztyčenou se odměří délka  $OV$ , zvaná vzepětí oblouku, vypočtená podle vzorce:

$$\overline{OV} = \overline{SV} - \overline{SO} = R - R \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha = R (1 - \cos \frac{1}{2}\alpha). \quad (1)$$

*Vytyčení vrcholu od tečny* (obr. 30). V pravouhlém  $\triangle T_1VV_1$  se vypočtou délky odvěsen  $T_1V_1$  a  $VV_1$  ze vzorců:

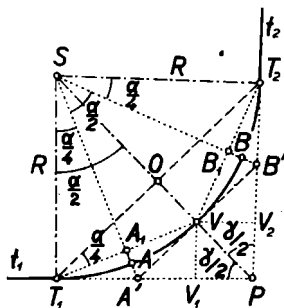
$$\overline{T_1V_1} = \overline{T_2V_2} = \overline{T_1O} = \overline{T_2O} = R \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha, \quad (2)$$

$$\overline{VV_1} = \overline{VV_2} = \overline{OV} = R (1 - \cos \frac{1}{2}\alpha). \quad (3)$$

Na tečně  $t_1$  se odměří délka  $T_1V_1$ , v bodě  $V_1$  se vztyčí kolmice a na ni se odměří délka  $VV_1$ . Obdobně se postupuje u tečny  $t_2$  a musí se dospět do téhož bodu  $V$ .

*Vytyčení vrcholu rozpůlením úseku vrcholové tečny* (obr. 30). K sestrojení vrcholové tečny se vypočtou vytyčovací prvky:

$$\overline{T_1A'} = \overline{A'V} = \overline{B'V} = \overline{T_2B'} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4}\alpha. \quad (4)$$



Obr. 30. Vytyčení vrcholu oblouku a čtvrtobloukových bodů.

Od bodu  $T_1$  se odměří délka  $T_1A'$  do bodu  $A'$ , od bodu  $T_2$  táž délka do bodu  $B'$ . Oba body se osadí kolíčky a vzdálenost  $A'B'$  se změří a rozpůlí. Půlicí bod je vrcholem oblouku  $V$ .

*Vytyčení oblouku od průsečíku tečen  $P$*  (obr. 30). V přístupném a vytyčeném bodě  $P$  se při měření úhlu  $\gamma$  vytyčí směr osy úhlu  $PS$ . Z pravoúhlého  $\triangle PT_1S$  nebo  $\triangle PT_2S$  se vypočte délka  $\overline{PS}$ :

$$\overline{PS} = \frac{R}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{R}{\cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Délka

$$\begin{aligned} \overline{P\bar{V}} &= \overline{PS} - \overline{VS} = \overline{PS} - R = \\ &= \frac{R}{\cos \frac{1}{2}\alpha} - R = R (\sec \frac{1}{2}\alpha - 1), \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \frac{R}{\sin \frac{1}{2}\gamma} - R = R (\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\gamma - 1) \quad (6)$$

nebo též

$$\overline{P\bar{V}} = \overline{A'\bar{V}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4}\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha. \quad (7)$$

Osa úhlu  $\gamma$  se dá též vytyčit pásmem. Na tečny se odměří od bodu  $P$  stejné délky, ku př. do bodů  $A'$  a  $B'$ . Začátek a konec pásma se podrží na bodech  $A'$  a  $B'$ , střed pásma se napne a v polovině délky pásma je bod ležící na ose úhlu. Tohoto způsobu se dá užít jen u plochých oblouků a o malém poloměru.

*Vytyčení čtvrtobloukových bodů.* Čtvrtobloukové body  $A'$  a  $B'$  se vytyčí zcela obdobně, jak plyne z obrazce 30. Do výpočetních vzorců se dosadí funkce úhlu  $\frac{1}{4}\alpha$ .

**4.2. Vytyčení podrobných bodů obloukových.** Je několik způsobů vytyčovací. Některé z nich budou v dalším podány.

*Vytyčování pravoúhlými souřadnicemi od tečny* (obr. 31). Se zřetelem k tečně je každý bod oblouku určen úsečkou  $x_n$

a pořadnicí  $y_n$ . Úsečka  $x$  se vhodně volí a pořadnice  $y$  se vypočte. Tak ku př. bod 1 má souřadnice  $x_1$  a  $y_1$ . Pro zvolené  $x_1$  se vypočte  $y_1$  podle vzorce:

$$y_1 = R - \sqrt{R^2 - x_1^2} = R - R \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R^2}} \quad (8)$$

čili

$$y_1 = R - R \left(1 - \frac{x_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Po rozvinutí členu v závorce v řadu a při omezení se jen na dva členy řady obdržíme

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2R} + \frac{x_1^4}{8R^3} + \dots \quad (9)$$

Položíme-li výraz

$$\frac{x_1^2}{2R} = y_0,$$

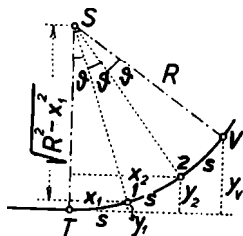
obdržíme pohodlný výraz pro číselný výpočet

$$y_1 = y_0 + \frac{x^4}{4R^2} \cdot \frac{1}{2R} = y_0 + \frac{y_0^2}{2R}. \quad (10)$$

Obdobně se vypočtou hodnoty  $y_2, y_3$  atd. Za hodnoty  $x$  se volí celé metry 5, 10, 20 a pod., k nimž se vypočtou příslušné  $y$  nebo se vyjmou z vytyčovací tabulek pro zaokrouhlené hodnoty  $x$  a  $R$ .\*)

Uvedeným způsobem se vytyčí body na kružnici, avšak délky oblouků nejsou stejné. Mají-li vytyčované body míti od sebe stejnou vzdálenost, musí se předem stanovit středový úhel pro zvolený obloukový dílec  $s$ :

$$\vartheta'' = \varrho'' \frac{s}{R}. \quad (11)$$



Obr. 31. Vytyčení podrobných bodů obloukových od tečny.

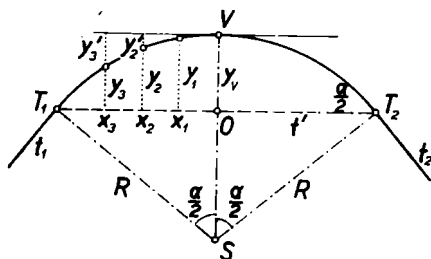
\* Inž. Kristián Petrlík, Vytyčovací tabulky, Praha 1903.



Se zřetelem k vypočtenému úhlu  $\vartheta$  se stanoví souřadnice z rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cdot \sin \vartheta, & y_1 &= R - R \cdot \cos \vartheta = R \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ x_2 &= R \cdot \sin 2\vartheta, & y_2 &= R - R \cdot \cos 2\vartheta = R \cdot 2 \sin^2 \frac{2\vartheta}{2}, \\ x_3 &= R \cdot \sin 3\vartheta, & y_3 &= R - R \cdot \cos 3\vartheta = R \cdot 2 \sin^2 \frac{3\vartheta}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

atd. atd.



Obr. 32. Vytyčení podrobných bodů obloukových od tětivy.

*Vytyčování pravouhlými souřadnicemi od tětivy* (obr. 32). Nejdříve se stanoví vzepětí oblouku nad tětivou  $y_V = \overline{OV}$  z daného  $R$  a vypočteného úhlu  $\alpha$ :

$$\overline{y_V} = \overline{OV} = R - R \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha = R \left( 1 - \cos \frac{1}{2}\alpha \right) = R \cdot \sin^2 \frac{1}{4}\alpha \quad (13)$$

nebo se zřetelem k délce tětivy  $\overline{T_1T_2} = 2l'$  a vzorci (9)

$$\overline{y_V} = \overline{OV} = \frac{l'^2}{2R} + \frac{l'^4}{8R^3} + \dots \quad (14)$$

Podrobné body 1, 2, 3 atd. se určí souřadnicemi  $x_1, y_1; x_2, y_2$  atd. počínaje od bodu  $O$  jako počátku souřadnic. Úsečky  $x$  se volí vhodné velikosti a pořadnice  $y$  se vypočtou ze vztahů

$$y_1 = yv - y'_1, y_2 = yv - y'_2, \text{ atd.},$$

kde hodnoty  $y'_1, y'_2, \dots$  jsou dány výrazy

$$y'_n = R - \sqrt{R^2 - x_n^2} = \frac{x_n^2}{2R} + \frac{x_n^4}{8R^3} + \dots \quad (15)$$

jež jsou obdobné výrazům (8) a (9) při vytyčování bodů od tečny. Stejný výpočet i vytyčování se provede v druhé části oblouku nad úsekem tětivy  $OT_2$ .

Podrobné body se dají vytyčovati též polárními souřadnicemi a řadou jiných způsobů, jež pro nedostatek místa nejsou uvedeny.

Při vytyčování obloukových bodů podle tabulek je třeba si přečísti návod k užití tabulek a výrazů, podle nichž byly tabulky sestaveny.