O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů

5. Cyklografie

In: Josef Holubář (author): O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. pp. 42–84.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403216

5. CYKLOGRAFIE

Že mnohé planimetrické úlohy, zvláště o kružnicích, lze s úspěchem řešiti na základě prostorových útvarů, vhodně přiřaděných k rovinným útvarům, tedy transformací útvarů rovinných v útvary prostorové, ukazuje zvláště t. zv. cyklické nebo kruhové promítání, které zavedl do deskriptivní geometrie s dokonalým využitím jeho konstruktivních možností německý geometr W. Fiedler.[26]) Toto promítání sahá ovšem daleko za mez pouhého užití k řešení planimetrických úloh,[27]) k němuž směřují naše výklady základů cyklografie. Ale i tak ukáže cyklografická methoda řešení planimetrických úloh současně, jak se jí rozšíří jejich počet, neboť mnohé úlohy, které cyklograficky snadno řešíme, přímo vznikly z cyklografických vztahů.

5,1. Základní vlastnosti cyklického promítání. a) *Cyklický průmět bodu.* Rovinu, v níž máme řešiti planimetrické úlohy, považujme za průmětnu π. Je-li dána v průmětně kružnice $a_0(A_1, z)$, vztyčme v jejím středu A_1 kolmici k π a nanesme na tuto kolmici úsečku $\overline{A_1A} = \overline{A_1A^*} = z$, jednou nad π a po druhé pod π. Ke kružnici a_0 je tím přiřaděna v prostoru dvojice bodů A, A^*, souměrně sdružených podle roviny π. Naopak je tak přiřaděna ke každému bodu A, v prostoru libovolně vytčenému, v π kružnice $a_0(A_1)$, jejíž střed je orthogonální průmět A_1 bodu A a jejíž poloměr se rovná vzdálenosti A od π, t. j. kótě z bodu A. Kružnice a_0 se nazývá kruhový čili cyklický průmět bodu A. Bodu tak přísluší jedna kružnice jako cyklický průmět, ale kružnici dva body, které tato kružnice cyklicky zobrazuje. Přiřadění bude vzájemně jednoznačné, zavedeme-li orientované kružnice, t. j. cykly.[28])

---

[26]) Viz Lit. I; české pojednání o cyklografii viz Lit. V, kap. III, str. 56 a n.

[27]) Viz zvláště obsahem bohaté dílo novější, Lit. IV.

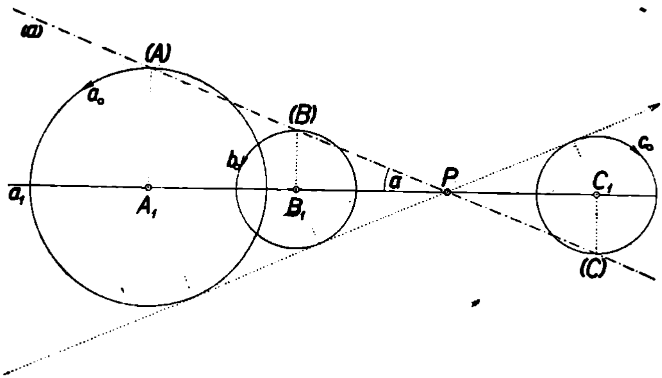
[28]) Viz M. rov. k., str. 19.

Pak cyklus kladný zobrazuje bod nad průmětnou s kladnou kótou z a záporný cyklus bod pod průmětnou, jehož kóta z je záporná. Přímka p v π, jakožto mezní případ kružnice s nekonečně velkým poloměrem, zobrazuje cyklicky dva úběžné body, které náležejí přímkám kolmým k p a které s π svírají úhel rovný 45°; orientované přímce p v π jest pak přiřaděn jediný úběžný bod přímek k ní kolmých, které svírají 45° s kladnou polorovinou π, stanovenou vzhledem k orientované přímce p.

Toto vzájemně jednoznačné přiřadění cyklů roviny π a bodů prostoru se nazývá cyklografické nebo cyklické promítání, krátce cyklografie.

b) *Cyklický průmět přímky.* Cyklickým průmětem přímky, t. j. nekonečného množství bodů na ní ležících neboli lineární bodové řady prostoru, je skupina cyklů, t. zv. *lineární cyklická řada.* Je to řada cyklů se společným středem podobnosti ve stopníku přímky.

Důkaz vyplývá z obr. 19, kde přímka a je určena body A, B, jejichž cyklické průměty jsou cykly a_0, b_0. Přímku a



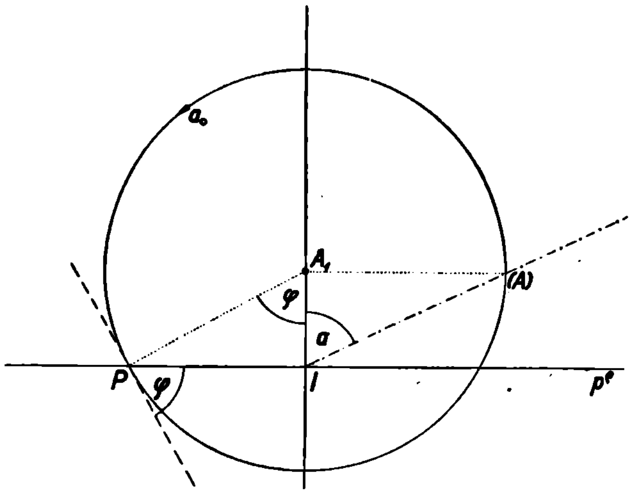
Obr. 19. Cyklický průmět přímky.

jsme sklopili do π a sestrojili její stopník P a naopak s pomocí sklopeného bodu (C) na (a) jeho cyklický průmět c_0, je-li dána jeho kóta. Na obr. je dále viděti, že stopník přímky jest vnějším středem podobnosti cyklů, jsou-li cykly souhlasného smyslu jako cykly a_0, b_0, anebo vnitřním středem podobnosti, jsou-li smyslu nesouhlasného, jako na př. a_0, c_0. Velikost odchylky α přímky a od π rozhoduje dále o poloze středu podobnosti P: Je-li $\alpha < 45°$, leží P vně všech cyklů a je možno z něho vésti společné tečny těchto cyklů, pro $\alpha > 45°$ padne P dovnitř všech cyklů a společné tečny cyklů jsou imaginární. Pro $\alpha = 45°$ jest P společným bodem dotyku příslušných cyklů. Hodnota cotg α nazývá se *modul lineární cyklické řady*. Jsou-li společné tečny lineární cyklické řady reálné, možno těmito společnými tečnami, tedy dvojicí orientovaných přímek v π, určiti lineární cyklickou řadu a tím i příslušnou přímku prostoru.

c) *Cyklický průmět roviny.* Body roviny ϱ neboli rovinné pole bodové promítá se cyklicky v *cyklické pole*; stopa p^ϱ roviny ϱ spojuje středy podobnosti všech lineárních cyklických řad, které jsou cyklickým průmětem přímek ležících v rovině ϱ. Přímka p^ϱ se nazývá *osa podobnosti cyklického pole*. Uvedená vlastnost vyplývá z jednoduché věty deskriptivní geometrie, že stopníky všech přímek roviny leží na stopě této roviny.

α) Velikost odchylky α roviny ϱ od π rozhoduje o jakosti cyklického pole. Je-li $\alpha < 45°$, pak žádný cyklus takového pole neprotíná osu podobnosti p^ϱ, neboť ze stopníků všech přímek roviny lze vésti k příslušným řadám cyklů reálné tečny; vždyť odchylky všech přímek roviny od π jsou menší anebo nejvýše rovny α. Pro $\alpha > 45°$ protínají naopak všecky cykly pole osu podobnosti p^ϱ a pro $\alpha = 45°$ dotýkají se všecky cykly pole jeho osy podobnosti, jak plyne z délek stran promítacích trojúhelníků úseček, ležících na spádových přímkách roviny ϱ. Hodnota cotg α nazývá se *modul cyklického pole*.

β) Budiž dáno cyklické pole (obr. 20) cyklem a_0, který zobrazuje libovolný bod A roviny ϱ, a osou podobnosti p^ϱ, která a_0 protíná. Stopník spádové přímky roviny ϱ označme I. Pak úhel $A_1I(A)$ je roven odchylce α roviny ϱ od π. Protíná-li a_0 osu p^ϱ v bodě P v úhlu φ, platí:



Obr. 20. Cyklické pole dané osou podobnosti p^ϱ a cyklem a_0.

$$\frac{\overline{A_1I}}{\overline{A_1P}} = \frac{\overline{A_1I}}{\overline{A_1(A)}},$$

čili $\cos\varphi = \operatorname{cotg}\alpha$. Z toho plyne: *Všecky cykly téhož cyklického pole protínají jeho osu podobnosti ve stejných úhlech; kosinus těchto úhlů se rovná modulu pole.* Úhly ty jsou jen tehdy reálné, pokud $\cos\varphi \leqq 1$, tedy pokud i $\operatorname{cotg}\alpha \leqq 1$, t. j. pokud $\alpha \geqq 45°$. Ale platnost věty můžeme rozšířiti i na případ, že úhel φ je imaginární, ježto známe hodnotu jeho kosinu, ovšem větší než 1, která je určena poměrem vzdálenosti A_1 od p^ϱ k poloměru příslušného cyklu a_0.

γ) Ježto rovina ϱ je určena třemi body A, B, C, je cyklické pole v π určeno třemi cykly a_0, b_0, c_0. Středy podobnosti tří dvojic cyklů určují osu podobnosti p^ϱ cyklického pole.

Jestliže však jsou dány v π tři kružnice a orientujeme-li je v cykly kladné i záporné, určíme tak v prostoru tři dvojice bodů: A, A^*; B, B^*; C, C^*. Dostaneme tudíž $2^3 = 8$ rovin, které možno sestaviti v čtyři dvojice: $ABC, A^*B^*C^*$; A^*BC, AB^*C^*; AB^*C, A^*BC^*; ABC^*, A^*B^*C. Každá dvojice rovin, souměrně sdružených podle π, má společnou stopu, která je osou podobnosti dvou cyklických polí. Celkem dospějeme k šesti středům podobnosti dvojic cyklů a k čtyřem osám podobnosti osmi cyklických polí, kde *každá osa podobnosti daných tří kružnic obsahuje jejich tři středy podobnosti*, t. j. k větě Mongeově, vyslovené již v M. rov. k. na str. 23.

5,2. Geometrická místa bodů v prostoru. Nyní uvedeme některá jednoduchá g. m., jež vyplývají z předcházejících výkladů.

a) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice* (cykly obojího smyslu), *které procházejí daným bodem* A_1, jest rotační plocha kuželová s vrcholem v A_1 a s osou kolmou k π, jejíž tvořící přímky svírají s π (a též s osou) úhel 45°. Protože každá rovina procházející osou protíná tuto kuželovou plochu v povrchových přímkách k sobě kolmých, nazývá se *rotační kuželová plocha pravoúhlá.*

b) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice dotýkající se kružnice* k dané v π, jsou dvě rotační kuželové plochy pravoúhlé, podle π vzájemně souměrné, s řídicí kružnicí k.

c) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou *kružnice dotýkající se přímky* p dané v π, jsou dvě roviny se společnou stopou p, odchýlené od π o úhel $\alpha = 45°$.

Platnost těchto tří vět plyne přímo z definice cyklického zobrazení. Věty a) a c) jsou zvláštními případy věty b), a to pro nulový poloměr dané kružnice k, resp. nekonečně velký její poloměr.

d) G. m. bodů, jejichž cyklické průměty jsou *kružnice, které přímky p* danou v π *protínají v úhlu velikosti* φ, který je dán svým kosinem ($\cos\varphi = n$), jsou dvě roviny se společnou stopou p, souměrně sdružené podle π, jejichž odchylka α od π je dána vztahem $\cotg\alpha = \cos\varphi = n$.

Tato věta je obrácená k větě odst. 5,1 sub c), β) a lze její platnost snadno potvrditi.

5,3. Cyklografické řešení planimetrických úloh. G. místa, obsažená v uvedených větách ve spojení s vlastnostmi lineárních cyklických řad a cyklických polí, umožňují už řešiti mnohé planimetrické úlohy jednoduchými prostorovými konstrukcemi.

a) Jako příklad uvedeme především *tři jednoduché úlohy*, z nichž druhá a třetí jsou označeny v knize M. rov. k. symboly (kpp) a (ppp^{φ}).[29])

α) Ve dvou lineárních cyklických řadách, daných vždy dvěma cykly, a to a_0, b_0, resp. c_0, d_0, máme nalézti takové cykly, aby měly s daným cyklem k_0 společný střed podobnosti.

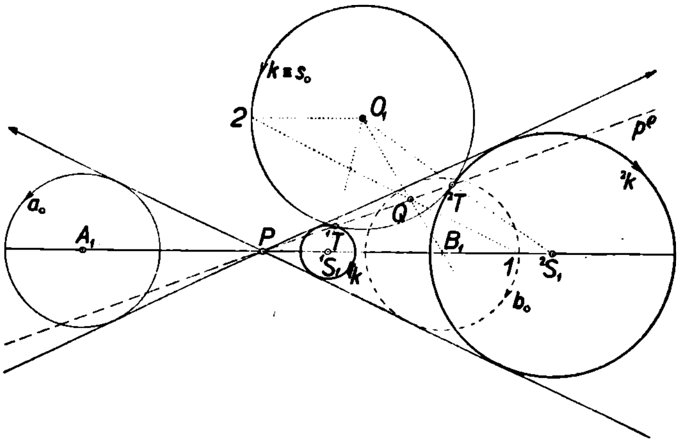
Řešení provedeme tak, že v prostoru vedeme bodem K, jehož cyklický průmět je k_0, příčku k přímkám a, b, obecně mimoběžným, které jsou v prostoru určeny danými dvěma lineárními cyklickými řadami, t. j. přímka a body A, B a přímka b body C, D. Cyklické průměty průsečíků příčky s mimoběžkami a, b jsou hledané cykly.

β) V lineární cyklické řadě, dané cyklem a_0 a středem podobnosti P, máme sestrojiti cyklus, který se dotýká dané kružnice $k(O_1)$ (obr. 21).

---

[29]) Na str. 15 a 17. I později použité zkratky pro text úloh příbuzných s Apolloniovou úlohou jsou ve svazku M. rov. k. na str. 15—17.

Zvolme pro kružnici k určitý smysl, na př. nejprve kladný, aby zobrazovala jediný bod O (nad π). Cykly, které se dotýkají cyklu k, zobrazují podle odst 5,2, b) body v prostoru, které vyplňují rotační kuželovou plochu pravoúhlou s vrcholem O a s řídicí kružnicí k. Hledané cykly budou tedy cyklickými průměty průsečíků přímky PA s touto plochou.



Obr. 21. Cyklus, který náleží lineární cyklické řadě (P, a_0) a který se dotýká kružnice k.

Konstrukci provedeme takto: Body A, P, O proložíme rovinu ϱ a sestrojíme její stopu p^ϱ. Ta prochází stopníkem P přímky AP a stopníkem Q přímky OB, jež je spojnicí bodu O a bodu B, zvoleného na přímce AP. Na obraze jsme zvolili bod B_1 souměrný s A_1 podle P, takže příslušný cyklus b_0 má stejný poloměr jako a_0, ale je záporného smyslu. Stopa p^ϱ protíná cyklus k v dotykových bodech ${}^1T$, ${}^2T$ hledaných cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$ s cyklem k, takže jejich středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ na A_1P jsou jimi určeny. Daná kružnice k, orientovaná záporně, vedla by k dalším dvěma výsledným cyklům, které jsou na našem obraze imaginární.

V našem případě lze vésti z bodu P k cyklu a_0 tečny a těch se výsledné cykly dotýkají, neboť náležejí téže lineární cyklické řadě. Máme zde tedy zvláštní Apolloniovu úlohu, a to (kpp), jak již bylo řečeno na začátku, ovšem jen pro orientované tečny cyklu a_0. Ale tečny vedené z P k a_0 mohou býti jindy imaginární. Lze tedy vyloženým způsobem řešiti i úlohu, jak sestrojiti cykly, které se dotýkají dvou imaginárních přímek, daných bodem P, který je uvnitř daného cyklu a_0, a dané kružnice k. Tato úloha by však měla vždycky čtyři reálné výsledky; vždyť obě osy podobnosti p^ϱ protínají reálně cyklus a_0 a tedy i danou kružnici k, neboť jsou stopami rovin procházejících také příslušným bodem O.

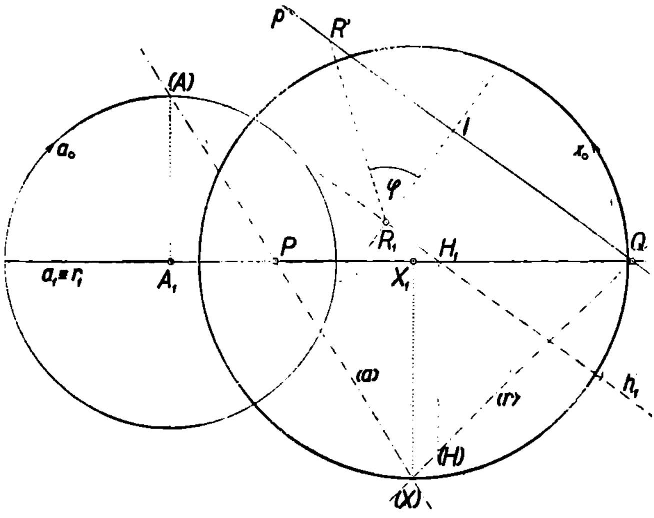
γ) V lineární cyklické řadě dané cyklem a_0 a středem podobnosti P máme sestrojiti cyklus, který danou přímku p protíná v úhlu φ ($\cos\varphi = \frac{3}{5}$) (obr. 22).

Bod X, jehož cyklický průmět je hledaný cyklus x_0, leží na přímce $a \equiv PA$ a v rovině ϱ, která má stopu v dané přímce p a odchylku α od π, pro niž platí vztah $\operatorname{cotg}\alpha = \cos\varphi$. Najdeme tedy bod X jako průsečík přímky a s rovinou ϱ. Roviny ϱ jsou však dvě, souměrně sdružené podle π, takže úloha je dvojznačná.

Zvolíme-li na našem obraze pro přímku p určitý smysl, pak sestrojíme jen jednu rovinu ϱ. Určíme ji bodem R, jehož půdorys R_1 zvolíme ve vzdálenosti $\overline{R_1I}$ od stopy p, rovné třem dílům v kladné polorovině π, stanovené orientovanou přímkou p. Cyklický průmět bodu R je kladný cyklus r_0 s poloměrem $\overline{R_1R'}$, rovným pěti zvoleným dílům. Pak skutečně je úhel $IR_1R' = \varphi$. K sestrojení průsečíku X s rovinou ϱ použijeme krycí přímky r, jejíž půdorys $r_1 \equiv a_1$, a sklopíme rovinu (r, a) s oběma přímkami do π. Sklopená přímka (r) jde stopníkem Q na p a sklopeným bodem (H), když jsme H_1 určili na r_1 v průsečíku půdorysu h_1 hlavní přímky h roviny ϱ

procházejícího R_1, takže $z_H = z_R$. Sklopená přímka a je $(a) \equiv \equiv P(A)$. Průsečík přímek (a), (r) je bod (X), z něhož na a_1 sestrojíme X_1, což je střed hledaného cyklu x_0, který opíšeme poloměrem $\overline{X_1(X)}$.

Můžeme také říci, že jsme rozřešili úlohu, jak sestrojiti cyklus x_0, který se dotýká dvou přímek, tečen určených



Obr. 22. Cyklus, který náleží lineární cyklické řadě (P, a_0) a který protíná přímku p v úhlu φ.

cyklem a_0 a středem podobnosti P, tedy v našem obraze imaginárních, a který protíná přímku p v daném úhlu φ — úlohu, jak již bylo řečeno, (ppp^φ).

Úloha 28. Jsou dány tři lineární cyklické řady, které zobrazují dvě přímky a, b spolu rovnoběžné a další přímku c, která neleží v rovině přímek a, b. V každé řadě určete takový cyklus, aby se výsledné tři cykly dotýkaly v jednom bodě.

[V prostoru řešíme úlohu: Průsečíkem přímky c s rovinou (a, b) vedeme v této rovině přímku, odchýlenou od π o úhel $\alpha = 45°$.]

Úloha 29. V lineární cyklické řadě dané dvěma cykly a_0, b_0 sestrojte cykly, a) které procházejí daným bodem, b) které se dotýkají dané přímky. [a) úloha (ppB), b) úloha (ppp), kde dané dvě tečny jsou po případě imaginární.]

Úloha 30. Řešte cyklograficky úlohu a) (ppr), b) $(pp^{\varphi}r)$, sestrojiti kružnici daného poloměru r, která kromě toho splňuje další dvě podmínky, a to a) p, p; b) p, p^{φ}.

Úloha 31. Podobně řešte úlohy, sestrojiti kružnici, která danou přímku (na př. orientovanou) protíná v daném úhlu φ_1 (dáno $\cos\varphi_1 = n$), t. j. splňuje podmínku p^{φ} a mimo to další dvě podmínky, a to a) p, p^{φ}; b) p^{φ}, p^{φ}. [Volte na př. v úloze b): $\cos\varphi_i = -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{3}$; $i = 1, 2, 3$.]

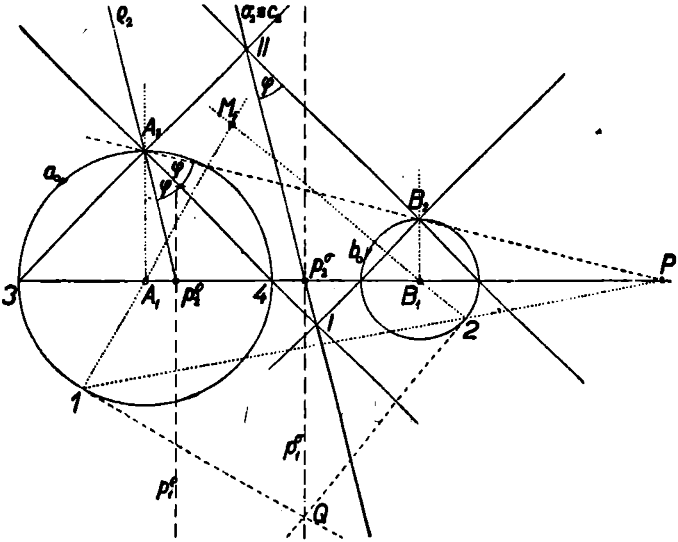
Úloha 32. Zvolte v předcházející úloze $\cos\varphi_1 > 1$, na př. $\frac{4}{3}$, a řešte pak obě úlohy. [Určete příslušnou rovinu její odchylkou α od π podle vztahu $\cotg\alpha = \cos\varphi$.]

b) *Úloha Apolloniova.* Nyní přikročíme k cyklografickému řešení obecné úlohy Apolloniovy (kkk). Dané kružnice se středy A_1, B_1, C_1 orientujme třebas nejprve vesměs kladně v cykly a_0, b_0, c_0 a tyto cykly považujme za cyklické průměty bodů A, B, C. Abychom vyhověli podmínce dotyku hledaných cyklů s cykly a_0, b_0, c_0, sestrojíme podle odst. 5,2, b) tři rotační kuželové plochy pravoúhlé $\varkappa_a, \varkappa_b, \varkappa_c$ s vrcholy A, B, C a s řídicími křivkami a_0, b_0, c_0 a najdeme společné body těchto ploch. Jejich cyklické průměty jsou pak hledané dotykové cykly. Seznáme, že při zvolené orientaci daných kružnic budou tyto cykly dva, někdy však také imaginární.

α) Napřed se zabývejme v přípravném obr. 23 jen dvěma kuželovými plochami, a to $\varkappa_a, \varkappa_b$, a sestrojme jejich nárys, při čemž zvolme za druhou průmětnu společnou rovinu souměrnosti obou ploch. Protože obě plochy mají na každé své povrchové přímce společný úběžný bod, neboť lze vždy na druhé ploše vésti jednu povrchovou přímku rovnoběžnou s vytčenou přímkou prvé plochy,[30]) mají společnou úběžnou

[30]) Takové plochy se nazývají rovnoběžné.

kružnici. Zbytek jejich pronikové čáry jest kuželosečka c v rovině σ, kolmé k společné rovině souměrnosti obou ploch, takže její nárys je přímka σ_2. Na našem obraze je kuželosečka c hyperbolou, protože má reálné body úběžné, společné s úběžnou kružnicí obou ploch, a to na úběžné přímce roviny



Obr. 23. Určení roviny hyperboly, která leží na dvou rotačních kuželových plochách (pravoúhlých).

σ a na povrchových přímkách, na př. plochy $\varkappa_a$, které leží v rovině ϱ, vedené bodem A rovnoběžně se σ. Půdorys kuželosečky c je známé g. místo středů kružnic, které se dotýkají cyklů a_0, b_0.

Určeme nyní blíže rovinu σ. Její *první stopa* p^σ je *chordála* cyklů a_0, b_0. Kdyby se totiž cykly a_0, b_0 protínaly, byla by to jednoduše spojnice jejich společných bodů, neboť oba cykly leží právě v π. Když se však tyto cykly neprotínají, vyplývá tato vlastnost z této souvislosti: Abychom dospěli k nějakému bodu kuželosečky c, použijme výhodně společné vrcholové roviny ploch $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, jejíž stopa *12* prochází stopníkem P vrcholové přímky AB, t. j. středem podobnosti cyklů a_0, b_0. Průsečík povrchových přímek $A1$, $B2$, t. j. bod M ležící na obou plochách, má půdorys M_1, který je středem cyklu m_0, dotýkajícího se cyklů a_0, b_0 v bodě *1*, resp. *2*. Průsečík Q tečen cyklů a_0, b_0 v bodě *1*, resp. *2*, leží proto na chordále těchto cyklů, jak plyne na př. z vlastnosti tří chordál tří kružnic, zde cyklů m_0, a_0, b_0. Ale bod Q je průsečíkem prvních stop tečných rovin kuželových ploch, dotýkajících se jich podél přímek $A1$, resp. $B2$, tedy prvním stopníkem tečny kuželosečky c, a proto leží na první stopě roviny σ, která je tudíž chordálou cyklů a_0, b_0.

Dále ještě promítejme rovinu σ centrálně z bodu A do π a určeme její *úběžnici*, t. j. první stopu p^ϱ roviny ϱ rovnoběžné s rovinou σ a procházející A, o níž jsme se již prve zmínili. Pak z rovnosti úhlů φ na obrazci zatržených — úhly φ jsou totiž rovny úhlům úhlopříček σ_2, A_2B_2 obdélníka A_2IB_2II s jeho stranami — vyplývá, že p_1^ϱ je *polára* středu podobnosti P vzhledem k cyklu a_0. Vždyť průsečík p_1^ϱ s A_1B_1, na obraze označený p_2^ϱ jako nárys stopy p^ϱ, a bod P jsou sdružené póly vzhledem k cyklu a_0, tvoříce s body *3*, *4* harmonickou čtveřinu bodovou.[31])

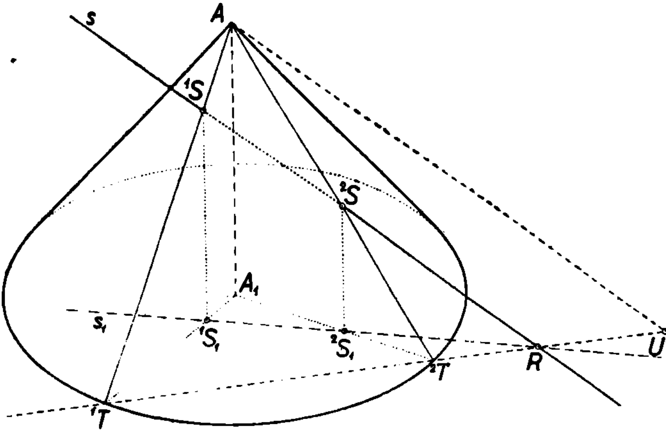
β) Sestrojíme-li nyní podobně rovinu σ', která obsahuje opět kuželosečku c' společnou kuželovým plochám $\varkappa_a$, $\varkappa_c$, bude průsečnice s obou rovin σ, σ' obsahovati právě ty dva body ${}^1S$, ${}^2S$, které jsou společné všem třem kuželovým plochám. Můžeme je určiti jako průsečíky přímky s na př. s plochou $\varkappa_a$; jejich cyklické průměty řeší tedy Apolloniovu úlohu pro cykly a_0, b_0, c_0.

Centrální průměty bodů ${}^1S$, ${}^2S$ z bodu A do π padnou na cyklus a_0 do bodů ${}^1T$, ${}^2T$ na spojnici ${}^1S_1A_1$, resp. ${}^2S_1A_1$, což

[31]) Viz GV, str. 122.

znamená, že body ^1T, ^2T jsou body dotyku cyklu a_0 s hledanými cykly (viz náčrt na obr. 24).

Stopník R přímky s je průsečík stop p^{σ}, $p^{\sigma'}$, t. j. průsečík chordál cyklů a_0, b_0, resp. a_0, c_0, čili *potenční střed* těchto cyklů.



Obr. 24. Průsečíky přímky s s rotační plochou kuželovou — dotyk jejich cyklických průmětů s cyklem a_0.

Úběžník U^s přímky s je průsečík úběžnic p^{ϱ}, $p^{\varrho'}$, polár to středu podobnosti P cyklů a_0, b_0, resp. P' cyklů a_0, c_0, tedy *pól* osy podobnosti PP' daných cyklů vzhledem k cyklu a_0.

Dospíváme tím z našich prostorových vztahů ke klasickému Gergonnovu planimetrickému řešení Apolloniovy úlohy.[32])

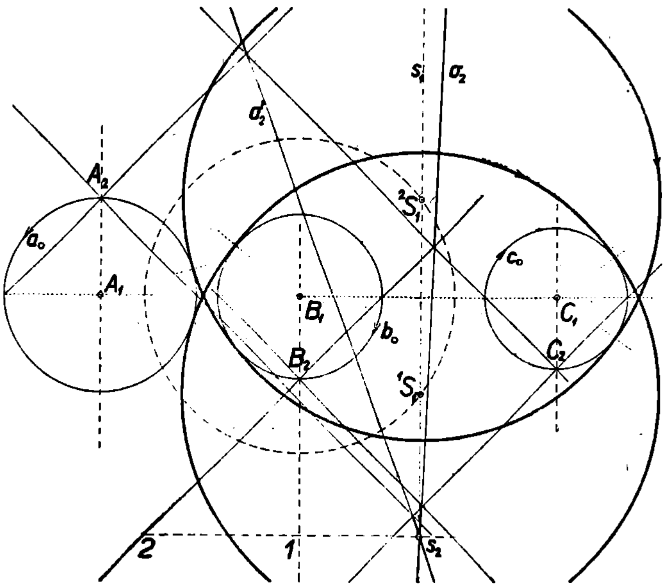
Vystřídáním orientace daných kružnic dospěli bychom k všem osmi výsledným cyklům, a to ze čtyř kombinací znamének daných cyklů, protože v souhlase s diskusí plani-

[32]) Viz M. rov. k. str. 23 a n.

metrickou poskytnou vždy dvě kombinace vesměs různých znamének, na př. (+—+) a (—+—), touž dvojici výsledků, a to jen opačně orientovaných kružnic, jak vyplývá ze souměrnosti příslušných ploch kuželových podle roviny π.

γ) Bylo by ovšem možno hledati body ${}^1S$, ${}^2S$ přímo v prostoru, což provedeme v případě, když dané cykly mají středy na jediné přímce a kdy planimetrický postup Gergonnův selhává (obr. 25).

Dané kružnice se středy A_1, B_1, C_1 orientujme v cykly a_0, b_0, c_0 třebas v pořadí (+——) a volme za druhou průmětnu ν společnou rovinu souměrnosti všech tří příslušných kuželových ploch. Kuželosečka společná plochám $\varkappa_b, \varkappa_c$ leží



Obr. 25. Řešení Apolloniovy úlohy, když dané cykly mají středy na přímce.

v rovině σ kolmé k ν a kuželosečka společná plochám $\varkappa_c, \varkappa_a$ v rovině σ' rovněž k ν kolmé; jest tedy průsečnice s také kolmá k ν. Její nárys je bod s_2 v průsečíku σ_2 a σ'_2 a půdorys s_1 je kolmice vedená bodem s_2 k středné $A_1B_1C_1$. Na s_1 budou již středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ hledaných cyklů. Body ${}^1S$, ${}^2S$ sestrojíme jako průsečíky přímky s s plochou na př. $\varkappa_b$. Vedeme-li bodem s_2 nárys rovnoběžky plochy $\varkappa_b$, jest úsečka $\overline{12}$ poloměr této rovnoběžky; její půdorys, t. j. kružnice opsaná z B_1 poloměrem rovným $\overline{12}$, stanoví již na s_1 hledané středy ${}^1S_1$, ${}^2S_1$ dvou výsledných cyklů. Podobně bychom sestrojili i ostatní dvojice celkového řešení.

Úloha 33. Řešte cyklograficky zvláštní úlohy Apolloniovy, a to zejména a) (kkp), b) (kkB), c) (kpB), d) (kBB).

Úloha 34. Co je g. m. bodů, jejichž cyklické průměty jsou kružnice, které se dotýkají a) dané kružnice v jejím daném bodě, b) dané přímky v jejím daném bodě? Řešte na základě těchto g. m. cyklograficky Pappovu úlohu (kk_B).

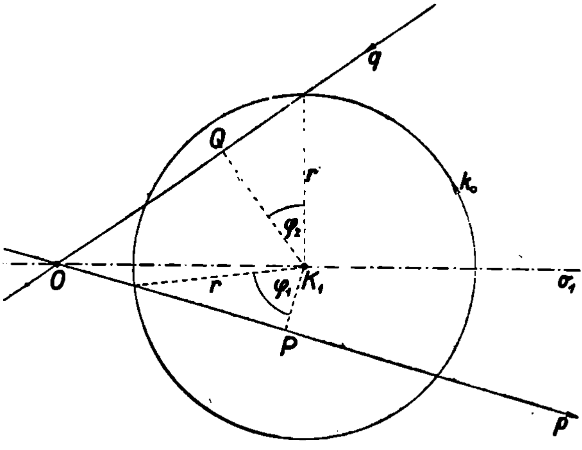
Úloha 35. Určete cyklograficky druhé ohnisko G_1 kuželosečky, je-li dáno jedno její ohnisko F_1 a tři její body A, B, C. [Z bodu F_1 opište cyklus f_0 jdoucí třebas A a na pravoúhlé rotační ploše kuželové (F_1, f_0) sestrojte body B, C a příslušné cykly b_0, c_0. Hledaná kuželosečka jest půdorysem řezu roviny $\varrho \equiv ABC$ s plochou (F, f_0). Jí proložená druhá cyklicky promítací plocha kuželová (G, g_0) určí ohnisko G_1.] Proveďte diskusi úlohy.

Úloha 36. Určete cyklograficky kuželosečku, známe-li její jedno ohnisko a ještě a) dva body a tečnu, b) jeden bod a dvě tečny.

Úloha 37. Podobně sestrojte kuželosečku, známe-li její ohnisko, směr osy a mimo to ještě a) dva body, b) bod a tečnu.

5,4. Další geometrická místa bodů v prostoru a příslušné planimetrické úlohy. a) Pro řešení dalších planimetrických úloh užitím cyklického promítání bude výhodné odvoditi ještě další *geometrická místa* bodů v prostoru, získaná spojením dvou jednoduchých podmínek, kterými jsme určovali skupiny cyklů v odst. 5,2, po případě zavedením ještě jiné podmínky pro žádané cykly.

α) G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají dvě přímky p, q dané v π v stejných úhlech, jsou dvě roviny souměrnosti ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ přímek p, q, k sobě kolmé a kolmé k π. Přitom může býti podle odst. 5,1, c), β) úhel φ také imaginární. Při orientovaných přímkách p, q jest ovšem g. m. jen jedna jejich rovina souměrnosti σ. Důkaz věty je zřejmý z vlastnosti cyklů, které náležejí cyklickým polím stejných modulů.



Obr. 26. Geom. místo středů cyklů, které protínají přímky p, q v úhlech, jejichž kosiny mají daný poměr.

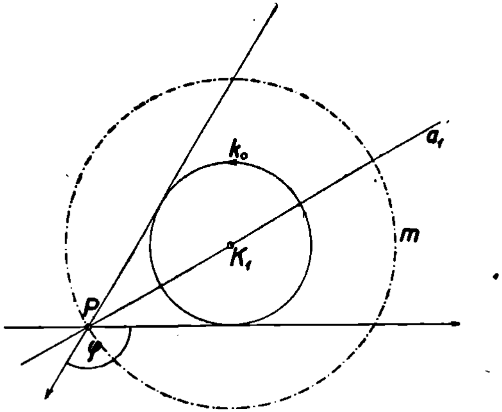
β) Mějme nyní v π dvě orientované přímky p, q (obr. 26), z nichž první je protata cyklem $k_0(K_1, r)$ v úhlu φ_1 tak, že $\cos\varphi_1 = n_1$, a druhá týmž cyklem v úhlu φ_2, pro nějž $\cos\varphi_2 = n_2$. Na obraze jsou úhly φ_1 a φ_2 reálné. Poměr

$$\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = \frac{\overline{K_1P}}{r} : \frac{\overline{K_1Q}}{r} = \overline{K_1P} : \overline{K_1Q} = n_1 : n_2 = k$$

je tedy roven poměru vzdáleností K_1 od přímek p, q. Spojíme-li tedy K_1 s průsečíkem O přímek p, q přímkou σ_1, mají všecky její body a žádný jiný bod poměr vzdáleností od p, q roven k. Číslo k udává také dělicí poměr přímky σ_1 k přímkám p, q, neboť

$$\sin \widehat{p\sigma_1} : \sin \widehat{q\sigma_1} = \overline{K_1P} : \overline{K_1Q} = k.$$

Platí tedy věta: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které protínají dvě přímky* (orientované) p, q *dané v* π



Obr. 27. Cykly, které mají s cyklem k_0 společné tečny svírající daný úhel φ.

v úhlech, jejichž kosiny mají daný poměr k, *jest rovina* σ *kolmá k* π, *jejíž půdorys* σ_1 *je určen dělicím poměrem* $(pq\sigma_1) = k$.

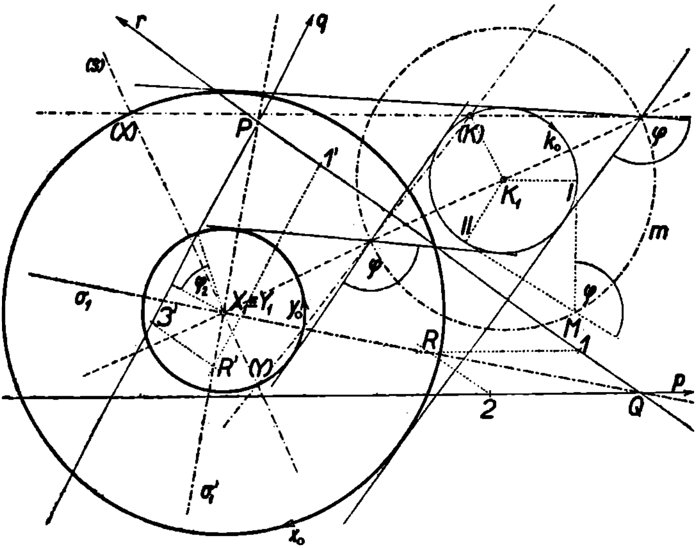
γ) Dále zvolme v π cyklus $k_0(K_1, r)$ a sestrojme z bodu P k němu tečny, které nechť tvoří úhel φ (obr. 27). Spojnice PK jest přímka a a její body se zobrazují v cykly, tvořící lineární cyklickou řadu, a jejich společné tečny s cyklem k_0 jsou sestrojené tečny. Sestrojíme-li tedy kružnici m ze středu K_1 a poloměrem $\overline{K_1P}$ a proložíme-li jí plochu kuželovou $\varkappa$ s vrcholem K, mají všecky body této plochy tu vlastnost, že jejich cyklické průměty jsou cykly, jejichž společné tečny s cyklem k_0 tvoří úhly rovné φ. A také každý cyklus a_0, jehož společné tečny s cyklem k_0 svírají úhel velikosti φ, je cyklickým průmětem bodu A, který náleží ploše $\varkappa$, neboť spojnice AK určuje vždy přímku plochy $\varkappa$. Tím jsme dokázali větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které mají s cyklem k_0 daným v π společné tečny svírající daný úhel φ, je plocha kuželová s vrcholem K, jejíž řídicí kružnice v π obsahuje body, z nichž vedené tečny k cyklu k_0 svírají úhel rovný φ.*

b) Řešme nyní tuto *úlohu*: V π jsou dány tři orientované přímky p, q, r a cyklus k_0. Máme sestrojiti cyklus, který protíná dané přímky v úhlech, jejichž kosiny jsou v poměru: $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = 3 : (-2) : 6$, a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají úhel $\varphi = 120°$ (obr. 28).

Použijeme g. m. bodů odvozených v tomto odst. sub a), β), a to dvakráte, a sub a), γ) a sestrojíme průsečíky X, Y příslušných dvou rovin σ, σ' a kuželové plochy $\varkappa$; cykly x_0, y_0 zobrazující body X, Y jsou pak hledané cykly.

Konstrukce: Půdorys roviny σ, kolmé k π, pro přímky p, r a poměr kosinů úhlů $3 : 6$ dostaneme takto: Naneseme od průsečíku Q těchto přímek libovolnou úsečku $\overline{Q1}$ na r a úsečku $\overline{Q2} = 2 . \overline{Q1}$ na p v příslušném smyslu, vedeme body $1, 2$ rovnoběžky s p, resp. r, které se protínají v bodě R, a spojíme Q s R; spojnice $QR \equiv \sigma_1$. Všimněme si, že bod R leží v kladné polovině jak vzhledem k orientované přímce p, tak vzhledem k orientované přímce r, což vyhovuje kladnému poměru kosinů úhlů φ_i. To také rozhodovalo o smyslu, v jakém jsme nanášeli úsečky $\overline{Q1}, \overline{Q2}$. Podobně sestrojíme půdorys roviny σ' pro přímky q, r a příslušný poměr kosinů úhlů, zde záporný, hodnoty $-2 : 6$. Použijeme úseček $\overline{P1'}$, $\overline{P3'} = 3 . \overline{P1}$ a bodu R'; spojnice $PR' \equiv \sigma'_1$. Půdorys průsečnice s rovin σ, σ' obsahuje půdorysy hledaných bodů; ty jsou $X_1 \equiv Y_1 \equiv s_1$.

Pak sestrojíme v daném cyklu k_0 dva jeho poloměry K_1I, K_1II svírající úhel φ, v bodech I, II tečny cyklu k_0 a jejich průsečík M. Tímto bodem prochází kružnice $m(K_1)$, řídicí kružnice kuželové plochy $\varkappa$, která má vrchol K.



Obr. 28. Cyklus, který protíná přímky p, q, r v úhlech, jejichž kosiny jsou v daném poměru, a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají úhel φ.

Abychom určili průsečíky X, Y přímky s s plochou $\varkappa$, sklopíme rovinu (s, K) do π, a v průsečících sklopené přímky (s) a sklopených povrchových přímek kužele dostáváme sklopené body (X), (Y). Jimi procházejí hledané cykly x_0, y_0, spolu soustředné, se středem v $X_1 \equiv Y_1$.

V našem případě protíná jen cyklus x_0 všecky tři dané přímky reálně, kdežto cyklus y_0 protíná jen přímku q reálně v úhlu φ_2. Jest totiž $\cos\varphi_2$ asi $-\frac{1}{2}\frac{5}{2}$, takže $\cos\varphi_1$ musí býti asi $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{5}{2}=\frac{4}{4}\frac{5}{4}$ a $|\cos\varphi_3|$ asi $3\cdot\frac{1}{2}\frac{5}{2}=\frac{4}{2}\frac{5}{2}$; tedy jsou obě hodnoty větší než 1. Pro úhel cyklu x_0 s přímkou q vychází $\cos\varphi_2{}'$ zhruba $-\frac{1}{4}$, takže $\cos\varphi_1{}'$ je asi $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ a $|\cos\varphi_3{}'|$ asi $3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, oba tedy menší než 1.

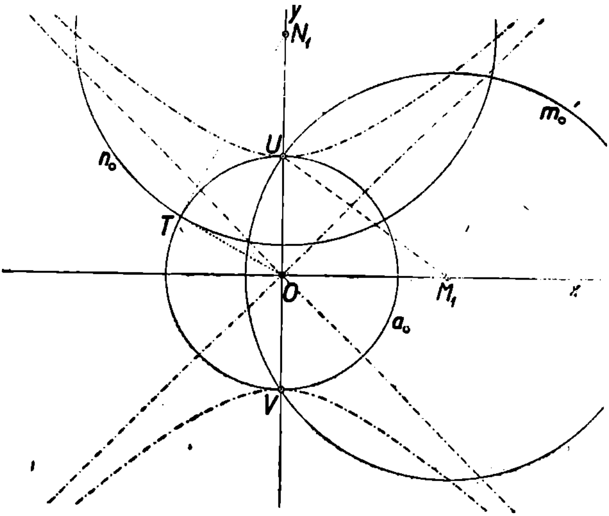
Úloha 38. V π jsou dány čtyři orientované přímky a_i, $i = 1, \ldots, 4$. Určete cyklus, který protíná první tři přímky v úhlech φ_i, pro něž $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = 2 : (-3) : 1$, a přímku a_4 v úhlu, jehož $\cos\varphi_4 = -\frac{1}{2}$.

Úloha 39. V π jsou dány dvě orientované přímky p, q a cyklus k_0. Sestrojte cyklus, který se dotýká p, q a jehož tečny společné s cyklem k_0 svírají daný úhel.

Úloha 40. Pro dané útvary v předcházející úloze sestrojte cyklus, který se p dotýká, q protíná v úhlu daném jeho kosinem a jehož tečny společné s k_0 svírají daný úhel.

5,5. Svazky a sítě kružnic. a) Zvolme v π *svazek kružnic* se základními body U, V (obr. 29). Podle věty odst. 5,2, a) dostaneme g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice tohoto svazku, jako křivku společnou dvěma kuželovým plochám pravoúhlým $\varkappa_u$, $\varkappa_v$ s vrcholy U, V. Jejich proniková čára jest (mimo úběžnou kružnici) opět jako v obecnějším případě, popsaném v odst. 5,3, b), α), hyperbola h, a to při zvláštní poloze shodných kuželových ploch $\varkappa_u$, $\varkappa_v$ rovnoosá, která leží v rovině souměrnosti bodů U, V, jež je také rovinou souměrnosti obou ploch. O tom se lze přesvědčiti snadno i analyticky zavedením pravoúhlých os souřadnicových x, z ve zmíněné rovině souměrnosti. Osu x zvolme v π v ose souměrnosti bodů U, V a osu z v kolmici, vztyčené k π ve středu O úsečky UV. Půdorys M_1 libovolného bodu M křivky leží na x, takže $\overline{OM_1} = x_M$ a poloměr kružnice $m_0(M_1, \overline{M_1U})$ jest roven z_M se znaménkem určeným orientací kružnice m_0. Označíme-li délku $|\overline{OU}| = |\overline{OV}| = a$, pak vyplývá přímo z pravoúhlého trojúhelníka M_1UO vztah $z^2 - x^2 = a^2$, což je rovnice hyperboly h. Nejmenší kružnice $a_0(O, a)$ svazku (UV) zobrazuje cyklicky vrcholy A, B hyperboly h.

Opíšeme-li dále z bodu N_1, libovolně zvoleného na spojnici UV, kružnici n_0, která protíná orthogonálně kružnici a_0 a tedy i ostatní kružnice svazku (UV), jest její poloměr $\overline{N_1T} = z_N$, a to + nebo — pro dva body N v prostoru souměrně sdružené podle π. Zavedeme-li v rovině k π kolmé a pro-



Obr. 29. Orthogonální svazky kružnic — cyklický průmět dvou hyperbol.

ložené přímkou UV soustavu souřadnic y, z, při čemž leží osa y v přímce UV, jest $\overline{ON_1} = y_N$. Z pravoúhlého trojúhelníka N_1OT plyne pak vztah: $y^2 - z^2 = a^2$, což je rovnice g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku, protínající orthogonálně kružnice dřívějšího svazku (UV).[33]) Je to opět rovnoosá hyperbola $\overline{h}$ v rovině (yz) s vrcholy

[33]) Viz M. rov. k. str. 44 a n.

v bodech U, V. Na obrazci je čerchovaně vyrýsována hyperbola $\bar{h}$ po sklopení do π kolem osy y a je současně obrazem hyperboly h, sklopené do π kolem osy x.

Celkem dostáváme tedy tento výsledek: *Dva svazky kružnic v π protínajících se navzájem orthogonálně jsou cyklickým průmětem bodů, které tvoří dvě rovnoosé hyperboly v rovinách k sobě kolmých a kolmých k π, jejichž osy jsou v osách obou svazků.* Reálné základní body jednoho svazku jsou vrcholy hyperboly, jejíž body mají cyklické obrazy v kružnicích druhého svazku; krajní body imaginární osy této hyperboly jsou vrcholy druhé hyperboly a její body mají cyklické obrazy v kružnicích prvého svazku.

Z rovnic obou hyperbol, které jsme odvodili v rovinách (xz) a (yz), plyne také naopak, že rovnoosé hyperboly h a $\bar{h}$ určují cyklickým průmětem svých bodů dva svazky vzájemně orthogonálních kružnic se základními body reálnými, resp. imaginárními.

b) Pozorujme nyní obr. 29 se zřetelem ke kružnici a_0.

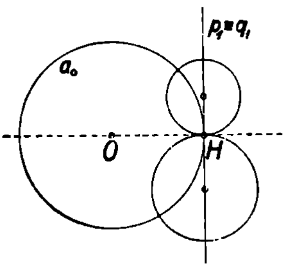
α) Hyperbola $\bar{h}$ obsahuje body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku se středy na průměru UV, které protínají a_0 orthogonálně. Rotací této hyperboly kolem osy z vznikne *plocha rotačního rovnoosého hyperboloidu jednodílného s hrdlem a_0* jakožto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají kružnici a_0 orthogonálně.*

Souhrn všech těchto kružnic se nazývá *síť kružnic*, a je určena v π základní kružnicí a_0, kterou protínají kružnice sítě orthogonálně. Síť kružnic obsahuje nekonečně mnoho svazků kružnic, z nichž je úplně složena.

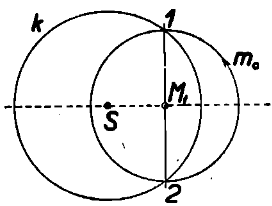
Ale z vlastnosti plochy rotačního jednodílného hyperboloidu, který je plochou přímkovou (viz výklad kap. 2, odst. 2,2), můžeme tuto síť kružnic odvoditi jinak, a to z nesčíslného množství lineárních řad kružnic (cyklů obojí orientace) takto: Mysleme si v libovolném bodě H hrdla hyperboloidu (obr. 30) jeho tečnou rovinu τ, tedy kolmou k π, a v ní dvě přímky plochy p, q. Jejich odchylky od π jsou rovny 45° a přímky jsou souměrně sdružené podle roviny π. Cyklickým průmětem jejich bodů jest proto dotykový svazek kružnic, které mají středy na $p_1 \equiv q_1$ a společný bod dotyku H; obsahují dvě lineární řady dotykových cyklů, které protínají kružnici a_0 orthogonálně. Rotací přímky p, resp. q, kolem osy z vznikne náš hyperboloid. Celkem tedy poskytují lineární řady dotykových cyklů, které cyklicky zobrazují jednak přímky plochy jedné soustavy, a řady cyklů, které zobrazují přímky druhé soustavy, celou síť kružnic ke kružnici a_0 orthogonálních.

β) Hyperbola h obsahuje body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice svazku (UV), které půlí kružnici a_0 neboli které protínají a_0 diametrálně. Rotací hyperboly h kolem osy z vznikne *plocha rotačního rovnoosého hyperboloidu dvojdílného* s vrcholy na ose z a s reálnou osou, která se rovná délce $\overline{UV}$, jakožto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají kružnici a_0 diametrálně.* Tvoří opět *síť* kružnic, stanovenou základní kružnicí a_0 a podmínkou diametrálního protínání této kružnice.

γ) Ze svazku kružnic (UV) (obr. 29) můžeme dospěti k jiné soustavě kružnic v π, posouváme-li svazek v π ve směru UV. Vzniklý nekonečný počet svazků kružnic poskyt-



Obr. 30. Cykly, které protínají kružnici a_0 orthogonálně.



Obr. 31. Cykly, které protíná kružnice k diametrálně.

ne soustavu kružnic, které vytínají na přímce y tětivy stálé délky rovné $\overline{UV}$. Myslíme-li si, že se posouvá současně i hyperbola h, jejíž body zobrazuje cyklicky náš svazek kružnic, můžeme prosloviti větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice soustavy určené přímkou y a podmínkou, že mají vytínati na y tětivy dané délky, jest hyperbolická válcová plocha*, jejíž řídicí křivkou je hyperbola h a jejíž povrchové přímky mají směr y.

δ) Jak vidíme, jsou přiřaděny k sítím kružnic sub α), β) i k soustavě kružnic sub γ) v prostoru body, které vyplňují plochu. Takové soustavy kružnic v rovině se nazývají *kongruence kružnic*. I cyklické pole je takovou kongruencí. Síť kružnic je mezi kongruencí vyznačena vlastností, že její kružnice, které procházejí daným bodem, tvoří svazek.

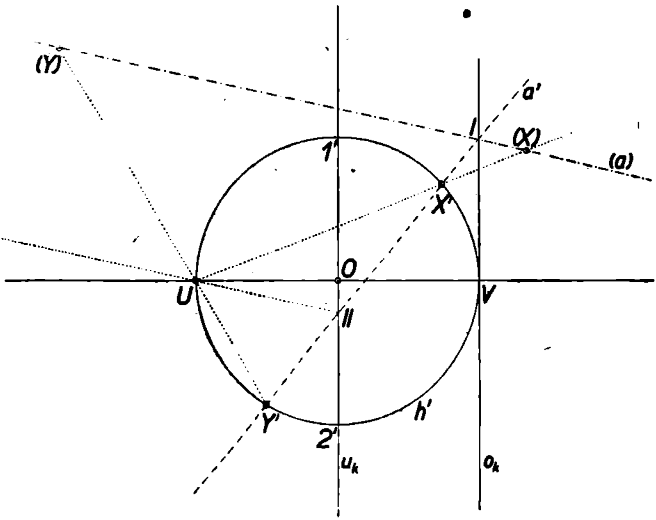
Jinou jednoduchou kongruenci kružnic v π poskytne cyklický průmět bodů plochy kulové $\varkappa$, která má v kružnici $k(S)$ dané v π svůj rovník (obr. 31). Vedeme-li půdorysem M_1 libovolného bodu M plochy kulové tětivu rovníku k, kolmou k spojnici SM_1, určuje svou délkou $\overline{12}$ průměr příslušného cyklu m_0 (na obraze je m_0 kladného smyslu, tedy M je nad π); cyklus m_0 jest kružnicí k rozpůlen. Naopak je každá kružnice m_0, půlená danou kružnicí k, cyklickým průmětem dvou bodů M, M' spolu souměrných podle π, které leží na ploše kulové $\varkappa$. Proto *g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice půlené kružnicí k danou v π, neboli které kružnice k protíná diametrálně, je plocha kulová, sestrojená nad kružnicí k jako rovníkem.* (Srovnej s obr. 9.)

c) Podle vět odvozených v tomto odstavci řešme nyní prostorově jako příklad *některé planimetrické úlohy.*

α) V π jsou dány dvě orientované přímky p, q a kružnice $k(S)$. Máme sestrojiti cyklus, který se dotýká přímek p, q a který protíná kolmo kružnici k. (Úloha ppk^0; viz pozn. 29.)

Víme, že cykly, které se dotýkají p, q, tvoří lineární cyklickou řadu, která zobrazuje body přímky a, určené stopníkem P v průsečíku p, q a bodem A, jehož cyklickým průmětem je zvolený cyklus a_0, dotýkající se p, q. Vyhledáme proto v prostoru průsečíky X, Y přímky a s rotačním hyperboloidem, určeným kružnicí k podle odst. b), α). Hledané cykly x_0, y_0 jsou cyklické průměty bodů X, Y.

Konstrukce: Přímkou a proložíme rovinu α kolmou k π, která protne zmíněný hyperboloid v rovnoosé hyperbole h^*, a nalezneme průsečíky X, Y přímky a s hyperbolou h^*. Za tím účelem sklopíme rovinu α s přímkou a i s hyperbolou h^* do π a použijeme výhodně středové kolineace hyperboly h^* s kružnicí h', sestrojenou nad hlavní osou $\overline{UV}$ hyperboly h^* jako nad průměrem (obr. 32). Vrchol U, jakožto bod dotyku obou křivek považujme za střed kolineace a tudíž tečnu ve



Obr. 32. Průsečíky přímky a s rotačním hyperboloidem — cykly, které se dotýkají dvou daných přímek a které protínají kolmo danou kružnici.

vrcholu V za osu kolineace o_k. Myslíme-li si bodem U paprsky kolineace svírající s UV úhel 45°, tedy procházející úběžnými body hyperboly h^*, seznáváme, že sdružené body na h' jsou body $1'$, $2'$, krajní to body sklopené vedlejší osy hyperboly h^*; spojnice $1'2'$ je tedy úběžnicí kolineace u_k. Protože hledáme průsečíky přímky (a) s h^*, sestrojíme napřed přímku a', kolineárně sdruženou s (a), a to užitím samodružného bodu I na o_k a úběžníku II na u_k. Bod II je průsečík paprsku kolineace UII, k (a) rovnoběžného, s úběžnicí u_k. Přímka a' protíná h' v bodech X', Y', kolineárně sdružených s hledanými body (X), (Y), které dostáváme na (a) a na paprscích kolineace UX', resp. UY'.

Protíná-li rovina α hrdlo k, vycházejí vrcholy U, V v π, ovšem na k. Kdyby půdorys přímky a neprotínal hrdlo a vrcholy U, V by tedy nevyšly v π, což by znamenalo, že je hlavní osa hyperboly kolmá k π, sestrojili bychom délku této osy a tím určili hyperbolu tak jako v obr. 12 v kapit. 3, odst. 3,2, b).

β) V π jsou dány dvě kružnice ${}^1k({}^1O, {}^1r)$, ${}^2k({}^2O, {}^2r)$ a orientovaná přímka p. Máme sestrojiti cyklus, který protíná ${}^1k$ i ${}^2k$ diametrálně a přímku p v úhlu φ, když $\cos\varphi = n$ (na př. $= -\frac{1}{4}$). Máme tedy řešiti úlohu $(k^d k^d p^\varphi)$ z M. rov. k. (Viz pozn. 29.)

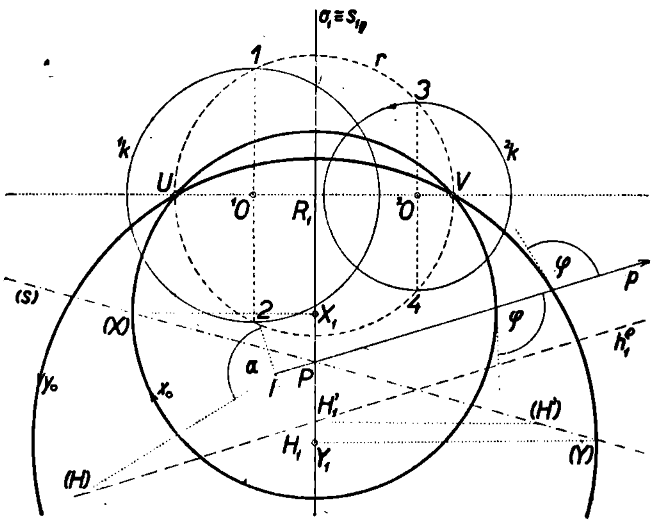
Nejdříve prostorově dokážeme, že cykly (kružnice) k, které protínají dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ diametrálně, tvoří svazek kružnic se základními body vždycky reálnými, jež leží na středné kružnic ${}^1k$, ${}^2k$.[34])

Podle věty odst. b), β) jsou kružnice k cyklickým průmětem bodů společných plochám dvou rovnoosých rotačních hyperboloidů dvojdílných ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ s reálnými osami kolmými k π, se středy v bodech ${}^1O$, resp. ${}^2O$, a s poloosami délek ${}^1r$, resp. ${}^2r$. Pronikavá čára mimo úběžnou kružnici, jež je společná i oběma shodným asymptotickým kuželovým plochám

[34]) Srovnej M. rov. k., str. 46.

hyperboloidů $^1\varkappa$, $^2\varkappa$, jest kuželosečka v rovině σ, kolmé k středné $^1O^2O$, neboť mají plochy $^1\varkappa$, $^2\varkappa$ dvě společné roviny souměrnosti, a to rovinu π a rovinu obsahující spojnici $^1O^2O$, kolmou k π; i mají tedy také společnou osu, průsečnici obou rovin souměrnosti, t. j. přímku $^1O^2O$. Je proto rovina σ kolmá k této přímce. Ale kuželosečka v rovině σ, náležející oběma hyperboloidům, jest hyperbola h, odvozená v odst. a), jejíž body mají cyklický průmět v kružnicích svazku (U, V), se základními body reálnými, jak jsme měli dokázati.

Nyní se vraťme k řešení úlohy. Protože g. m. bodů, jejichž cyklický průmět jsou cykly protínající orientovanou přímku p v úhlech velikosti φ, jest rovina ϱ s odchylkou α a modulem $\cot g\, \alpha = \cos \varphi$ (viz odst. 5,2, α), vyhledáme průsečíky X, Y hyperboly h v rovině σ s rovinou ϱ, t. j. společné body hyper-



Obr. 33. Cyklus, který protíná kružnice ^1k, ^2k diametrálně a přímku p v úhlu φ.

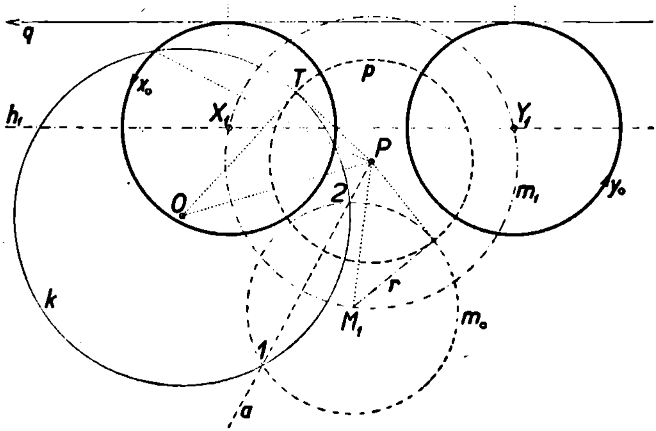
boly h a průsečnice s rovin σ, ϱ. Cyklický průmět x_0, y_0 bodů X, Y poskytuje již hledané cykly.

Konstrukce (obr. 33): Nejprve sestrojme půdorys roviny σ, přímku σ_1 kolmou k ${}^1O{}^2O$. Vedeme ji bodem R_1, který je středem kružnice r, protínající ${}^1k$ a ${}^2k$ diametrálně v bodech *1, 2*, resp. *3, 4*, a střednou těchto kružnic v bodech U, V. Přitom jsou body *1, 2* a *3, 4* krajní body průměru kružnice ${}^1k$, resp. ${}^2k$, kolmého k středné, a body U, V základní body svazku kružnic, které ${}^1k$ a ${}^2k$ protínají diametrálně. Pak určíme rovinu ϱ, procházející stopou $p^\varrho \equiv p$, a to ještě hlavní přímkou h^ϱ s pomocí modulu roviny ϱ, aby $\cotg \alpha = -\frac{1}{4}$. Na obr. bylo použito sklopeného trojúhelníka $I(H)H_1$, v němž odvěsna $\overline{IH_1}$ má délku zvolené jednotky a odvěsna $\overline{H_1(H)} = z_H$ délku 4 takových jednotek. (Srovn. obr. 22.) Půdorys průsečnice s rovin ϱ, σ je přímka $s_1 \equiv \sigma_1$; přímku s pak určíme jejím stopníkem $P \equiv (p \,.\, \sigma_1)$ a bodem H', jehož půdorys $H'_1 \equiv (h_1^\varrho \,.\, \sigma_1)$. Konečně sklopíme rovinu σ s hyperbolou h a přímkou s do π, abychom sestrojili průsečíky s a h, což provedeme třebas užitím kolineace hyperboly (h) s kružnicí r $(R_1, \overline{R_1U})$ podle obr. 32. Dokončení konstrukce jest již jasné z obrazce.

γ) V π je dána kružnice $k(O)$, mimo ni bod P a orientovaná přímka q. Máme sestrojiti cyklus daného poloměru r, který určuje s kružnicí k chordálu procházející bodem P a který se dotýká přímky q.

1. Nechť leží bod P nejprve vně kružnice k (obr. 34). Je-li přímka a, procházející bodem P a sekoucí k v bodech *1, 2*, chordálou kružnice k a jedné kružnice $m_0(M_1, r)$, pak seče kružnice p, sestrojená ze středu P a protínající k orthogonálně, i kružnici m_0 v pravém úhlu. Naopak každá kružnice m_0 (zde daného poloměru r), která seče orthogonálně kružnici p, určuje s kružnicí k chordálu, která prochází bodem P, protože bod P má stejnou mocnost M ke kružnici k i m_0, rovnu $\overline{PT}^2$, t. j. čtverci délky tečny vedené z P ke k. Protože pak

body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice protínající p orthogonálně, tvoří rovnoosý rotační hyperboloid jednodílný $\varkappa$, jehož hrdlem je kružnice p, zobrazují cykly m_0 daného poloměru r ty body plochy $\varkappa$, které jsou vzdáleny od π o délku $\pm r$, tedy body dvou shodných kružnic (rovnoběžek) plochy $\varkappa$, ležících v rovinách rovnoběžných s π a vzdálených



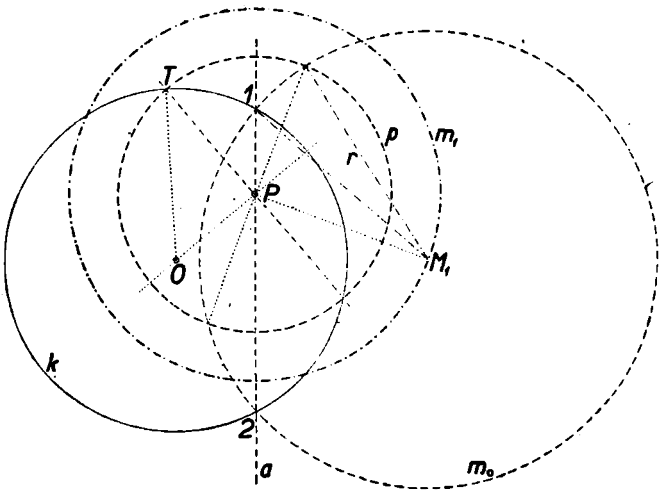
Obr. 34. Cyklus daného poloměru, který určuje s kružnicí k chordálu procházející bodem P a který se dotýká přímky q.

od π o délku $\pm r$. Splývající středy vždy dvou cyklů m_0 vyplňují v π kružnici m_1, půdorys oněch dvou rovnoběžek; tato kružnice je soustředná s p a má poloměr $\overline{PM}_1 = \sqrt{\overline{PT}^2 + r^2}$.

Abychom ještě vyhověli podmínce, že se hledaný cyklus daného poloměru má dotýkati přímky q, proložíme touto přímkou rovinu ϱ s odchylkou $\alpha = 45°$ a určíme v ϱ její hlavní přímku h, která má půdorys h_1, vzdálený od q v kladném smyslu o délku r.

Průsečík kružnice m_1 a přímky h_1 jsou body X_1, Y_1, středy hledaných cyklů x_0, y_0, na našem obraze reálných.

2. Všimněme si ještě případu, když leží daný bod P uvnitř dané kružnice k (obr. 35). Pak je možno z bodu P sestrojiti kružnici p poloměrem $\overline{PT}$, kterou kružnice k protíná dia-



Obr. 35. Kružnice, které určují s kružnicí k chordály procházející bodem P.

metrálně. Ale potom i každá kružnice m_0, která stanoví s kružnicí k chordálu 12 procházející P, protíná p diametrálně a zase i naopak. Protože body, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají p diametrálně, vyplňují rovnoosý rotační hyperboloid dvojdílný $\varkappa'$, jehož hlavní osa kolmá k π má délku $2 \,.\, \overline{PT}$, zobrazují cykly m_0 daného poloměru r ty body plochy $\varkappa'$, které na ní tvoří opět shodné kružnice v rovinách s π rovnoběžných, majících od π vzdálenost $\pm r$. A středy M_1 těchto cyklů určují v π opět kružnici m_1, soustřednou s p, jejíž poloměr $\overline{PM_1} = \sqrt{r^2 - \overline{PT}^2}$. Aby kružnice m_1 byla reálná, musí býti $r \geqq \overline{PT}$, jak je viděti hned na ploše $\varkappa'$, má-li na ní vzniknouti ve vzdálenosti od π rovné $\pm r$ reálná rovnoběžka, v mezním případě ovšem s poloměrem nulovým.

Poznámka k předcházejícímu příkladu: Kružnice k a bod P podmínkou, aby chordála každého hledaného cyklu a kružnice k procházela bodem P, určují kružnici p, kterou buď k protíná orthogonálně, anebo která je kružnicí k diametrálně protata, což záleží na poloze bodu P vzhledem ke kružnici k. Označme tuto podmínku (k^B).

Jsou-li tedy dány dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ a dva body P, Q, můžeme hledati cykly m_0 takové, aby určovaly s ${}^1k$ a ${}^2k$ chordály tak, že chordála vždy m_0 a ${}^1k$ prochází bodem P a že chordála m_0 a ${}^2k$ prochází vždy Q, t. j. které vyhovují dvěma podmínkám (k^B).

Z vlastností prostorových útvarů, jejichž body jsou zobrazeny v π cykly m_0, je patrno, že tyto cykly tvoří svazek kružnic se středy na přímce kolmé k spojnici PQ.[35])

Podmínka (k^B) jest zobecněním podmínky diametrálního protínání kružnice k hledanými cykly, neboť učiníme-li daný bod P středem kružnice k, dospějeme k podmínce (k^d), diametrálního protnutí kružnice k.

A také spojení podmínky (k^B) s podmínkou (k^d) nebo k^0 (orthogonálního protnutí) vede opět k svazku kružnice v π, takže možno vyloženým způsobem řešiti i úlohy o kružnicích obecnější povahy, než byly úlohy uvedené v M. rov. k. na str. 16.

---

[35]) Viz též důkaz provedený projektivní geometrií v článku *F. Kadeřávka*: Sestrojení kružnic za daných podmínek, Příloha k Čas. JČMF, XX (1912), str. 71 a n.

Úloha 41. Sestrojte cyklus, který se dotýká dvou orientovaných přímek daných v π a protíná diametrálně daný cyklus. [Úloha ppk^d.]

Úloha 42. V π jsou dány dvě kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ a orientovaná přímka p; sestrojte cyklus, který protíná ${}^1k$ i ${}^2k$ orthogonálně a který se dotýká p. [Úloha k^0k^0p.]

Úloha 43. Řešte úlohy 41, 42 s tou změnou, že dané přímky mají býti proťaty v úhlu φ, který je dán svým kosinem. [Úlohy $k^dp^\varphi p^\varphi$, $k^0k^0p^\varphi$.]

Úloha 44. Sestrojte cyklus, který jednu danou kružnici protíná orthogonálně, druhou diametrálně a buď a) se dotýká dané přímky p, nebo b) protíná p v daném úhlu ($\cos\varphi = n$). [Úlohy k^0k^dp, $k^0k^dp^\varphi$.]

Úloha 45. Sestrojte cyklus, který protíná jednu danou kružnici orthogonálně, druhou diametrálně a třetí tak, aby jeho chordála s touto kružnicí procházela daným bodem.

Úloha 46. V lineární cyklické řadě, dané dvěma cykly a_0, b_0, nalézti cyklus, který přímku p danou v π protíná v úsečce dané délky. [Průsečíky přímky s hyperbolickou válcovou plochou.]

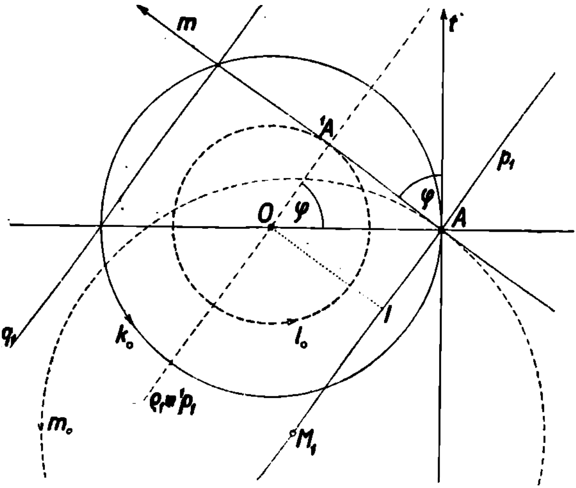
Úloha 47. Jakou plochu vytvoří body, jejichž cyklický průmět jsou cykly, protínající kružnici k danou v π tak, že tětivy společné cyklům a kružnici k mají danou délku. [Plocha 4. stupně.]

Úloha 48. V lineární cyklické řadě, dané středem podobnosti a cyklem, sestrojiti cyklus, který je kružnicí k danou v π proťat diametrálně. [Průsečíky přímky s kulovou plochou nad rovníkem k.]

Úloha 49. Užitím kulové plochy řešte úlohu: Sestrojiti kružnici, která protíná diametrálně tři kružnice dané v π.

5,6. Kružnice proťaté v daném úhlu. a) Především odvoďme g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které protínají danou kružnici $k(O, r)$ v daném úhlu φ.

Na obr. 36 orientujme kružnici k danou v π v cyklus k_0 třebas kladně a zvolme na ní bod A. V něm sestrojme cyklus $m_0(M_1)$, který seče k v úhlu $\varphi = \widehat{tm}$. Takových cyklů jest nekonečně mnoho. Dotýkají se v bodě A přímky m, takže jejich středy M_1 vyplňují přímku p_1, kolmou k m. Body M v prostoru přiřaděné cyklům m_0 leží na přímce p, která má stopník v bodě A a odchylku od π rovnou 45°. Opisuje-li bod A cyklus k_0, otáčí se přímka p kolem osy o, která prochází bodem O a je kolmá k π. Přitom vytvoří přímka p plochu rotačního hyperboloidu jednodílného $\varkappa$ o ose o. Ježto odchylka od π tvořících přímek p je rovna 45°, jest hyperboloid $\varkappa$ rovnoosý. Přímka m je první stopou roviny $\tau \equiv (mp)$, která je tečnou rovinou plochy $\varkappa$ a dotýká se jí v úběžném bodě přímky p. Rovina τ protíná totiž plochu $\varkappa$ kromě



Obr. 36. Kružnice, které protínají cyklus k_0 v úhlu φ.

přímky p ještě v přímce q, souměrné s přímkou p podle poledníkové roviny ϱ, rovnoběžné s p; jest tedy přímka q rovnoběžná s p a úběžný bod přímek p, q jest dotykovým bodem τ s $\varkappa$. Dotýká se tedy rovina τ i kuželové plochy asymptotické náležející ploše $\varkappa$, a to podél přímky ${}^1p$, která má stopník ${}^1A$ na m. Cyklus l_0, soustředný s k a dotýkající se m v bodě ${}^1A$, poskytuje tedy kružnici asymptotické kuželové plochy, která leží v π. Poloměr $\overline{O^1A}$ je roven $r \cos \varphi$, jak vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka OA^1A, který má při vrcholu O

úhel velikosti φ. K cyklu l_0 je cyklograficky přiřaděn v prostoru bod L, jakožto vrchol asymptotické kuželové plochy a jakožto střed plochy $\varkappa$. Úsečka $\overline{OI}$ na kolmici vedené z O k p určuje poloměr hrdla plochy $\varkappa$ a tedy i délku poloosy a této plochy; platí

$$a = \overline{O_1 I} = r \sin \varphi.$$

Tím je plocha $\varkappa$ úplně určena.

Kdybychom orientovali danou kružnici k záporně, dospěli bychom stejným postupem k ploše rotačního hyperboloidu $\varkappa^*$, která je souměrná s plochou $\varkappa$ podle roviny π, takže obě plochy mají v π společnou rovnoběžku k. A všecky body ploch $\varkappa, \varkappa^*$ mají svým cyklickým průmětem cykly, které protínají k v úhlu velikosti φ, a ovšem jedině tyto body.

Můžeme tedy prosloviti větu: *G. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou kružnice, které kružnici $k(r)$ danou v π protínají v úhlech velikosti φ, jsou plochy dvou rotačních jednodílných hyperboloidů rovnoosých se společnou rovnoběžkou k, jejichž střed jest od π vzdálen o délku* $\pm r \cos \varphi$ *a jejichž poloosa má délku* $a = r \sin \varphi$.

Zvláštní případy.

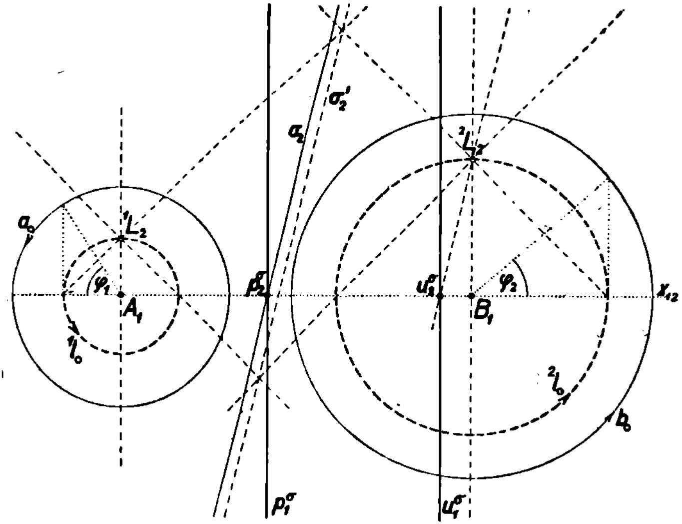
1. Pro $\varphi = 90°$, t. j. pro kružnice, které protínají danou kružnici orthogonálně, dostaneme plochu hyperboloidu, jejímž hrdlem je daná kružnice ve shodě s větou odst. 5,5, b, α).

2. Pro $\varphi = 0$, t. j. při dotyku kružnic s danou kružnicí, přejdou plochy $\varkappa, \varkappa^*$ v rotační kuželové plochy, odvozené v odst. 5,2, b).

3. Jestliže se poloměr dané kružnice stane nekonečně velikým, takže přejde daná kružnice v přímku, změní se plochy $\varkappa, \varkappa^*$ v roviny. To bychom mohli ukázati limitním přechodem, sledujícím vztah tečné roviny ploch hyperboloidů o stopě m; dokázali jsme však větu již samostatně v odst. 5,2, c).

b) Užitím právě odvozené věty můžeme nyní cyklograficky řešiti *zobecněnou Apolloniovu úlohu* ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$), t. j. sestrojiti kružnici, která dané tři kružnice k_i protíná v úhlech velikosti φ_i, $i = 1, 2, 3$. (Srovn. planimetrické řešení v M. rov. k., str. 91 a n.) Zde půjde obecně o sestrojení průsečíků tří hyperboloidů $\varkappa_i$.

α) V přípravném obr. 37 všimneme si nejprve pronikové čáry dvou ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, použitých pro dané kružnice $a_0(A_1, r_1)$,



Obr. 37. Určení roviny hyperboly, která leží na dvou rotačních jednodílných hyperboloidech (rovnoosých).

$b_0(B_1, r_2)$ při daných úhlech φ_1, resp. φ_2, když obě kružnice orientujeme, a to na př. kladně.

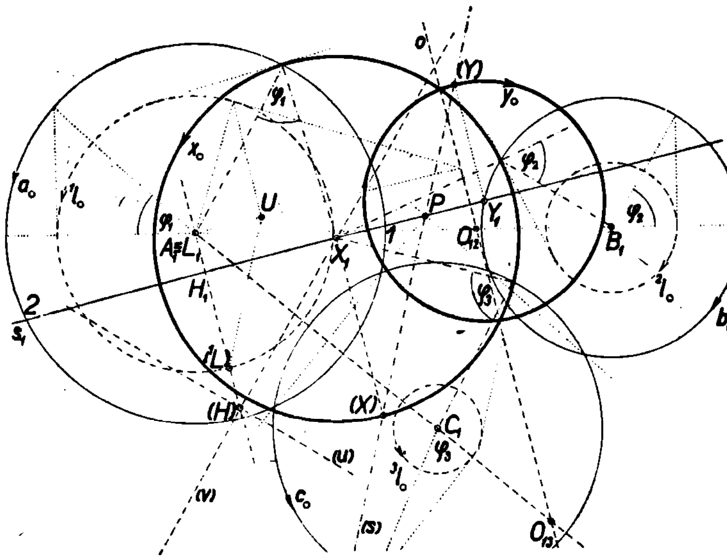
Druhou průmětnu zvolme v rovině souměrnosti obou ploch. V π sestrojme cykly $^1l_0$, $^2l_0$, soustředné a souhlasně orientované s cykly a_0, resp. b_0, a to s poloměry $r_1 \cos \varphi_1$, resp. $r_2 \cos \varphi_2$; poskytují kružnice, náležející příslušným asymptotickým plochám kuželovým s vrcholy ^1L resp. ^2L. Na obraze je sestrojen jejich nárys $^1L_2$ a $^2L_2$. Společná úběžná kružnice těchto kuželových ploch náleží též plochám $\varkappa_1, \varkappa_2$, takže další částí pronikové čáry ploch $\varkappa_1, \varkappa_2$ je kuželosečka c ležící v rovině σ, kolmé k společné rovině souměrnosti obou ploch, tedy kolmá k druhé průmětně. Kuželosečka c je podobná s pronikovou čarou c' asymptotických kuželových ploch a tato kuželosečka c' leží v rovině σ', rovnoběžné s rovinou σ.[36]) Podle toho určíme rovinu σ jednak první stopou p^σ a úběžnicí u^σ v π, kterou mají obě roviny společnou. Stopa p^σ je chordálou cyklů a_0, b_0, protože spojuje průsečíky těchto cyklů, třeba na obr. imaginární. Promítáme-li centrálně na př. z bodu ^2L, je pak úběžnice u^σ podle obr. 23 polárou středu podobnosti cyklů $^1l_0, {}^2l_0$ vzhledem k cyklu $^2l_0$. Na našem obraze je určena jako první stopa roviny vedené středem promítání ^2L rovnoběžně s rovinou σ'. Půdorysy bodů kuželosečky c jsou středy cyklů, které protínají dané cykly a_0, b_0 v daném úhlu φ_1, resp. φ_2.

Při nesouhlasně orientovaných daných kružnicích protnou se příslušné plochy $\varkappa_1, \varkappa_2{}^*$, anebo $\varkappa_1{}^*, \varkappa_2$ ve dvou kuželosečkách souměrně sdružených podle π, z nichž třeba první je c^*, takže můžeme označiti jejich společný půdorys $c_1{}^*$. I poznáváme, že *g. m. středů kružnic, které protínají dané dvě kružnice v úhlech velikosti* φ_1, φ_2, *jsou dvě kuželosečky* $c_1, c_1{}^*$. Jsou-li to hyperboly, pak jejich asymptoty jsou kolmé k společným tečnám kružnic $^1l_0, {}^2l_0$, protože tyto tečny jsou mezní kružnice s nekonečně dlouhými poloměry, které protínají dané kružnice v úhlech velikosti φ_1, resp. φ_2.

β) *Řešení úlohy* ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$). Orientujeme-li dané kružnice v cykly a_0, b_0, c_0 se středy A_1, B_1, C_1 a s poloměry r_i, $i = 1, 2, 3$, na př. v pořadí $(+-+)$, pak stanovíme plochy hyperboloidů $\varkappa_A, \varkappa_B{}^*, \varkappa_C$ a hned sestrojíme průsečnici s rovin σ_{AC}, σ_{BC}, v nichž leží kuželosečky c_{AC}, c_{BC}, a to první kuželosečka jako v α) uvedená proniková čára ploch $\varkappa_A, \varkappa_C$

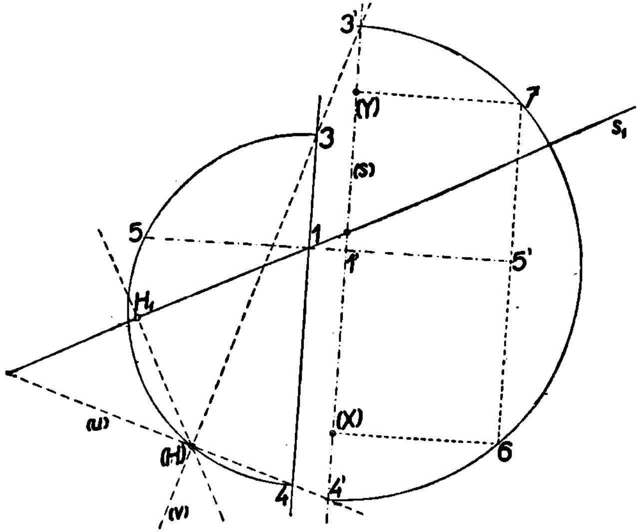
[36]) Viz Dg VI—VII, str. 134.

a druhá kuželosečka společná plochám $\varkappa_B^*$, $\varkappa_C$. Pak sestrojíme průsečíky přímky s třebas s plochou $\varkappa_A$, tedy dva body X, Y společné, jak patrno, všem třem plochám hyperboloidů, takže příslušné cykly x_0, y_0 poskytují při zvolené orientaci daných kružnic dvě řešení naší úlohy.



Obr. 38a). Cykly, které protínají cykly a_0, b_0, c_0 v úhlech φ_i, $i = 1, 2, 3$.

Konstrukci uspořádáme takto (obr. 38a): Nejprve sestrojíme chordály cyklů a_0, c_0 a b_0, c_0, jakožto stopy rovin σ_{AC} a σ_{BC} a jejich průsečík P, tedy potenční střed daných cyklů. Ten je stopníkem průsečnice s obou rovin. Pak sestrojíme cykly $^il_0$, soustředné postupně s a_0, b_0, c_0 s poloměry dlouhými $r_i \cos \varphi_i$, které určují příslušné asymptotické kuželové plochy hyperboloidů $\varkappa_A, \varkappa_B^*, \varkappa_C$. Promítáme-li centrálně roviny σ_{AC}, σ_{BC} z bodu ${}^1L$, který je vrcholem prvé asymptotické kuželové plochy, protínají se úběžnice těchto rovin v úběžníku U průsečnice s, jenž jest podle předchozích výkladů pólem osy podobnosti o cyklů ${}^il_0$ vzhledem k cyklu ${}^1l_0$. Osa podobnosti o jest na obraze určena jako spojnice středů podobnosti $O_{1,2}$



Obr. 38b). Průsečíky přímky (s) s hyperbolou.

cyklů ${}^1l_1, {}^2l_1$ a $O_{1,3}$ cyklů ${}^1l_1, {}^3l_1$. Půdorys s_1 přímky s prochází pak bodem P a je rovnoběžný se spojnicí ${}^1L_1U$; je tedy s_1 kolmé k o. Nyní jde již jen o to, určiti průsečíky X, Y přímky s s plochou $\varkappa_A$. Přímkou s myslíme si vedenu promítací rovinu, která protíná $\varkappa_A$ v rovnoosé hyperbole h, jejíž dva body $1, 2$ určuje s_1 na a_0. Střed H hyperboly h, jehož půdorys H_1 půlí úsečku $\overline{12}$, má kótu z_H rovnou kótě z_{1L}, t. j. kótě vrcholu ${}^1L$ asymptotické kuželové plochy, čímž jest již hyperbola určena. Její rovinu sklopíme do π s hyperbolou h i s přímkou s. Sklopená hyperbola (h) jest pak určena bodem 1 nebo 2 a asymptotami (u), (v) k sobě kolmými, které procházejí bodem (H). Sklopená přímka (s) prochází stopníkem P a jest rovnoběžná se spojnicí $({}^1L)U$, sklopenou to přímkou ${}^1LU$.

Průsečíky přímky (s) s hyperbolou (h) sestrojíme buď podle obr. 32, anebo aniž hyperbolu dále určujeme, užitím poučky: Vedeme-li různými body hyperboly rovnoběžky libovolného směru a stanovíme-li na každé rovnoběžce její průsečíky s asymptotami, je součin úseků mezi bodem hyperboly a těmito průsečíky na všech rovnoběžkách konstantní, ale pro různé směry rovnoběžek jiný.[37])

Pro jasnost vysuňme konstrukci do obr. 38b): Vedeme tedy pomocnou rovnoběžku s (s) bodem 1, sestrojíme geometrický průměr úseků $\overline{13}, \overline{14}$, a to úsečku $\overline{15}$; pak vyrýsujeme pomocnou kružnici nad průměrem $\overline{3'4'}$, který jest úsekem na (s) vyťatým asymptotami (u), (v) a nalezneme na této kružnici body $6, 7$ takové, aby byly od (s) vzdáleny o délky rovné úsečce $\overline{1'5'} = \overline{15}$. Kolmice spuštěné z bodů $6, 7$ na (s) protínají tuto přímku v hledaných bodech (X), (Y), sklopených to středech výsledných cyklů.

Půdorysy X_1, Y_1 bodů X, Y určují pak středy a kóty $\overline{X_1(X)}$, resp. $\overline{Y_1(Y)}$ poloměry hledaných cyklů x_0, y_0. Všimněme si, že potenční střed P daných kružnic je středem podobnosti cyklů x_0, y_0, protože tyto cykly jsou cyklickým průmětem dvou bodů přímky s; dalo by se dokázati, že osa podobnosti o cyklů ${}^il_0$ jest jejich chordálou.

Na obraze jsou vyznačeny též úhly φ_i v průsečících cyklu x_0 s danými cykly a pak jako kontrola přesnosti konstrukce

[37]) Tato poučka je zobecněním stále používané věty při přímkách rovnoběžných s osami hyperboly, kdy se konstantní součin úseků rovná a^2, resp. $-b^2$. Důkaz zobecněné poučky viz v Lit. III, díl I, str. 17.

také tečny cyklu x_0 v týchž bodech; jsou totiž také tečnami příslušných cyklů ${}^il_0$, protože tyto cykly tvoří obálky přímek, které protínají dané cykly v úhlech φ_i.

Změnou orientace daných kružnic dostali bychom pro čtyři podstatně různé kombinace znamének cyklů tak jako při řešení Apolloniovy úlohy v odst. 5,3, b), β) osm výsledných cyklů, po dvou po případě imaginárních. Body v prostoru přiřaděné těmto cyklům leží po dvou na čtyřech přímkách. Ty jsou průsečnicemi rovin obsahujících kuželosečky, společné plochám hyperboloidů, které jsou kombinovány po dvou ve čtyřech trojicích, z nichž žádné dvě nejsou souměrně sdružené podle π, tedy na př.: $\varkappa_A\varkappa_B\varkappa_C$; $\varkappa_A{}^*\varkappa_B\varkappa_C$; $\varkappa_A\varkappa_B{}^*\varkappa_C$; $\varkappa_A\varkappa_B\varkappa_C{}^*$.

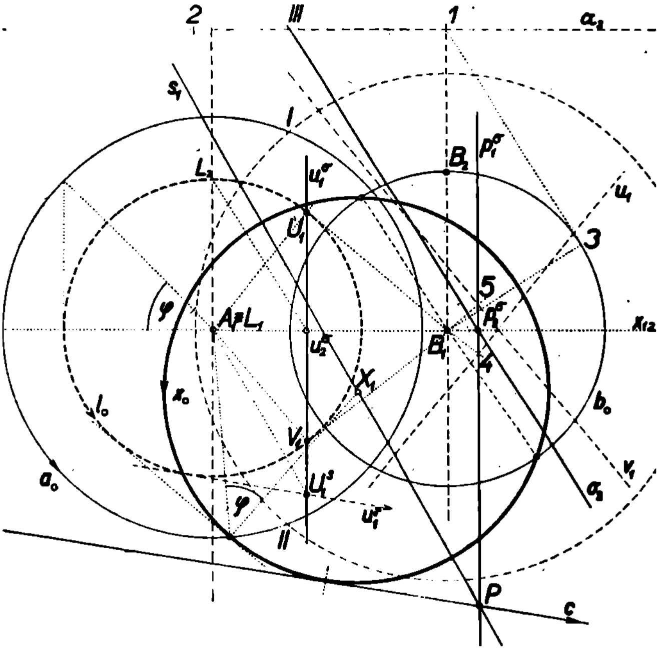
c) Z velkého množství úloh, které jsou přehledně uvedeny v M. rov. k. na str. 17 a n. a jež možno řešiti cyklograficky, rozřešíme jako příklad ještě úlohu ($k^\varphi k^d p$): Máme sestrojiti kružnici, která protíná danou kružnici $a_0(A_1, r_1)$ v úhlu velikosti φ, jinou danou kružnici $b_0(B_1, r_2)$ diametrálně a která se dotýká dané přímky c.

Je třeba určiti v prostoru společné body plochy rotačního jednodílného hyperboloidu rovnoosého $\varkappa_A$ nebo $\varkappa_A{}^*$, který určuje prvá podmínka, plochy dvojdílného rotačního hyperboloidu rovnoosého $\varkappa_B$, určeného druhou podmínkou a roviny γ nebo γ^*, kterou vyžaduje splnění třetí podmínky.

Konstrukci provedeme na obr. 39 pro plochy $\varkappa_A, \varkappa_B$ a γ, čímž dospějeme k dvěma výsledkům, a uspořádáme ji takto:

Najdeme kuželosečku h, společnou plochám $\varkappa_A, \varkappa_B$, pak průsečnici s roviny γ s rovinou σ, v níž leží kuželosečka h, a konečně průsečíky X, Y přímky s s kuželosečkou h. Jejich cyklický průmět poskytne výsledné cykly.

Při konstrukci použijeme též druhé průmětny, zvolené v rovině souměrnosti ploch $\varkappa_A, \varkappa_B$, k níž rovina σ je kolmá; osa x je tedy spojnice A_1B_1. Nejprve sestrojíme cyklus l_0 ($L_1 \equiv A_1$; $r_1 \cos \varphi$), a to kladný jako a_0, pak poláru bodu B_1 vzhledem k l_0, což je úběžnice u^σ roviny σ (podle b), α) tohoto odstavce), jestliže jsme zvolili střed promítání pro pomocný centrální průmět v bodě L. Protože u^σ protíná na obr. kružnici asymptotické kuželové plochy v bodech U, V, jest kuželosečka h hyperbolou. Její dva body I, II vyhledáme v rovině α, rovnoběžné s π a od π vzdálené výhodně o dvojnásobek kóty z_L bodu L. Tato rovina protíná plochu $\varkappa_A$ v rovnoběžce shodné s a_0, takže její půdorys se ztotožňuje s a_0, a plochu $\varkappa_B$ protíná v rovnoběžce, jejíž poloměr $\overline{12}$ snadno určíme bodem 2, který náleží hlavnímu poledníku plochy $\varkappa_B$;



Obr. 39. Cyklus, který protíná cyklus a_0 v úhlu φ, b_0 diametrálně a který se dotýká přímky c.

učiníme proto $\overline{12} = \overline{13}$, při čemž $\overline{13}$ je délka tečny vedené z *1* k b_0, neboť bod *2* náleží rovnoosé hyperbole se středem B_1 a s vrcholem B_2. Půdorysy rovnoběžek obou ploch se protínají v půdorysech bodů I, II (index je vynechán). Nárys σ_2 roviny σ prochází pak bodem III, který je nárysem bodů I, II; σ_2 je rovnoběžný se spojnicí $L_2u_2{}^\sigma$; protíná osu x v bodě $p_2{}^\sigma$, což je nárys první stopy p^σ. Tím je určen i první průmět této stopy, kolmý k x. Protože body U, V jsou úběžníky asymptot u, v hyperboly h, dostaneme první stopníky asymptot, body *4*, *5*, na stopě p^σ a na stopách tečných rovin asymptotické kuželové plochy sestrojených podél přímek LU, resp. LV, tedy na tečnách kružnice l_0 v bodech U_1, resp. V_1. První průměty asymptot procházejí body *4*, *5* rovnoběžně s L_1U_1, resp. L_1V_1. Půdorys h_1 hyperboly h je tedy dostatečně určen asymptotami u_1, v_1 a body I, II; h_1 jest *g. m. středů kružnic* (cyklů obou smyslů), *které protínají kružnici a_0 v úhlu φ a kružnici b_0 diametrálně.*

Nyní přímkou c, kterou jsme orientovali a jíž se mají výsledné cykly dotýkati, proložíme rovinu γ s první odchylkou $\alpha = 45°$. Určíme ještě úběžnici u^γ této roviny, totiž tečnu cyklu l_0 rovnoběžnou s orientovanou přímkou c. Pak půdorys s_1 průsečnice rovin σ, γ prochází stopníkem $P \equiv (c \,.\, p_1{}^\sigma)$ a je rovnoběžný se spojnicí $L_1U_1{}^s$, kde značí bod $U_1{}^s \equiv$ $\equiv (u_1{}^\gamma \,.\, u_1{}^\sigma)$ půdorys úběžníku přímky s.

Posléze vyhledáme průsečíky X_1, Y_1 přímky s_1 s hyperbolou h_1, třebas konstrukcí uvedenou v odst. b), β), a vyrýsujeme výsledné cykly $x_0(X_1)$, $y_0(Y_1)$, náležející lineární cyklické řadě, která je přiřaděna přímce s. Kontrola řešení jest obdobná té, jíž bylo použito při řešení úlohy ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$) v odst. b), β). (Na obr. je vyrýsován jen cyklus x_0.)

Je patrno, že by rovina γ^*, souměrná s rovinou γ podle π, poskytla ještě další dva výsledné cykly.

Diskusi a konstrukce výsledků při zvláštní poloze daných útvarů v úlohách uvedených v odst. b) a c) nebudeme již sledovati a odkazujeme čtenáře na obsažné dílo Fiedlerovo a Müllerovo, Lit. I a IV.

Úloha 50. Z úloh o kružnicích, kde se vyskytuje podmínka protnutí dané kružnice v daném úhlu, řešte cyklograficky zvláště úlohy: $k^{\varphi}k^{\varphi}p^{\varphi}$; $k^{\varphi}k^{\varphi}B$; $k^{\varphi}p^{\varphi}p^{\varphi}$; $k^{\varphi}p^{\varphi}B$; $k^{\varphi}BB$. (Viz přehled v M. rov. k., str. 17.)

Úloha 51. V lineární cyklické řadě dané cykly a_0, b_0 (střed podobnosti uvnitř) najděte cyklus, který protíná daný cyklus c_0 v daném úhlu ($\cos\varphi = n$). [Úloha ppk^{φ}, při níž dané tečny cyklů a_0, b_0 i cyklů výsledných jsou imaginární.]

Úloha 52. Všimněte si, že na obr. 36 jest délka tečny cyklu l_0 a kteréhokoliv cyklu m_0 rovna konstantní délce $\overline{A^1A}$. Délka společné tečny dvou cyklů mezi body dotyku nazývá se *tečnová (tangenciální) vzdálenost dvou cyklů.*

Co je g. m. bodů, jejichž cyklickým průmětem jsou cykly, které od daného cyklu mají danou tečnovou vzdálenost? [Rotační jednodílný hyperboloid rovnoosý.]

Úloha 53. V lineární cyklické řadě, dané cyklem a středem podobnosti, najděte cyklus, který má od jiného daného cyklu danou tečnovou vzdálenost.

Úloha 54. K daným třem cyklům najděte cyklus, který má od nich tečnové vzdálenosti postupně t_i, $i = 1, 2, 3$.

Úloha 55. Jest dán cyklus a_0, orientovaná přímka p a bod B; sestrojte cyklus, který má od a_0 danou tečnovou vzdálenost, přímku p protíná v daném úhlu a který prochází bodem B.

Úloha 56. Jakou změnu cyklů v π, které zobrazují body v prostoru, způsobí posunutí těchto bodů ve směru kolmém k π o délku ϱ? [Dilatace cyklů v π; viz M. rov. k., str. 74.] Použijte této transformace jednak na kužel uvedený v odst. 5,2, a), jednak na hyperboloid z odst. 5,5, b).