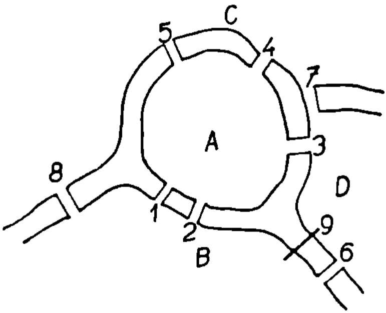
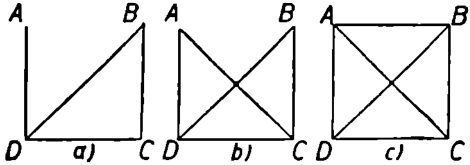
Mytický *Midas* svým dotekem vše měnil ve zlato; a čeho se dotkla geniální mysl *Eulerova*, to měnilo se v matematický problém. Uvedeme úlohu, jež jest jednou z prvních řešenou v topologii (analysis situs); jest to část matematiky, jež se zabývá uspořádáním geometrických útvarů v prostoru. Takovým problémem jest i jiná úvaha *Eulerova*, a to o počtu stěn, hran a vrcholů jistých mnohostěnů, vyjádřená vztahem $s + v = h + 2$.

a) Město Královec jest protékáno řekou, jež vytvořuje ostrov (viz obr. 63); přes ramena této řeky vedlo za časů *Eulerových* sedm mostů (v obr. jsou označeny 1, 2, . . ., 7). I byla nadhozena úloha, zdaž jest možno jedinou procházkou projíti všemi mosty, avšak každým jen jednou. *Euler* dokázal, že nikoliv. Jeho tvrzení objasníme na jednoduchých příkladech.



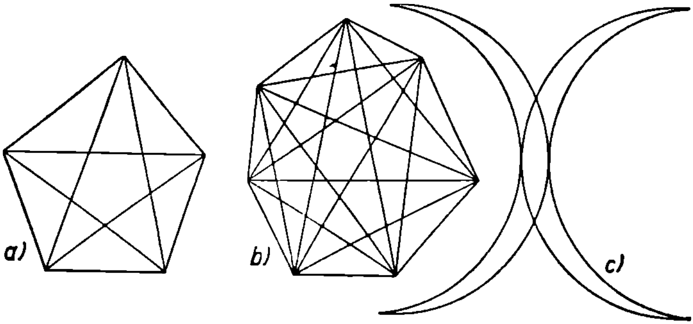
Obr. 63.

Obrazec 64a snadno nakreslíme jedním tahem, vyjdeme-li z bodů A neb D; rovněž obr. 64b nám nečiní žádných nesnází,



Obr. 64.

musíme však vyjíti z bodu C nebo D. Avšak obr. 64c jedním tahem nakresliti se nám nepodaří, vždy nejméně jedna z úseček zůstane nedokreslena. Všimněme si, že v obr. 64a a 64b jsou vždy dva vrcholy, v nichž se stýká lichý počet úseček, totiž body A, D, resp. C, D a právě ty jsme volili za bod výchozí a konečný. Obr. 64c pak obsahuje čtyři body, v nichž se stýká lichý počet úseček. Vyšetřte si, zdaž lze pětiúhelník i s jeho úhlopříčkami nebo sedmiúhelník i s úhlopříčkami, nebo obr. 65c („znak Mohamedův") nakreslit jedním tahem.

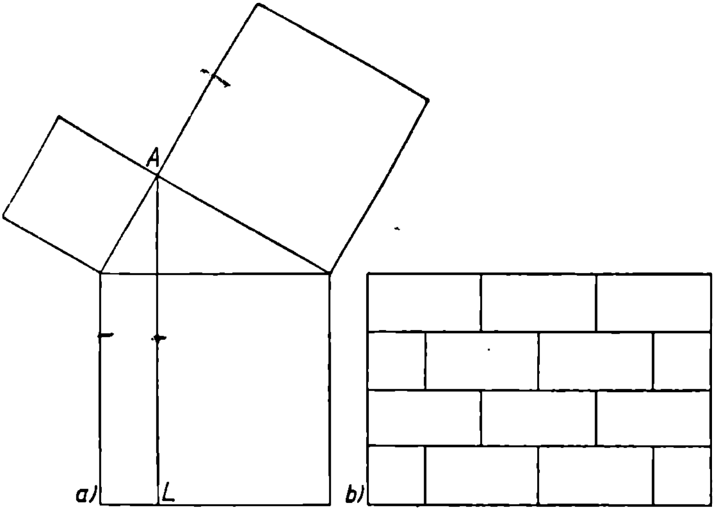


Obr. 65.

Ve všech těchto třech obrazcích ve všech bodech se stýká pak sudý počet úseček. *Eulerovo* pravidlo pak zní: Obrazce, které neobsahují žádných bodů, v nichž by se stýkal lichý počet úseček nebo které obsahují pouze dva takové body, lze nakresliti jedním tahem. Takové obrazce na př. jsou: 66a, není jím obrazec 66b znázorňující spáry ve zdi, poněvadž až na čtyři vrcholy má vesměs body, v nichž se stýkají tři úsečky.

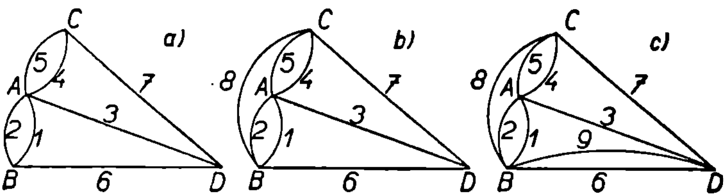
Vraťme se nyní k úloze *Eulerově*. Prostory A, B, C, D lze nahraditi prostě body, takže dospějeme k obrazci 67a a poněvadž tento má ve všech bodech lichý počet úseček, jest úloha neřešitelná. Později byl postaven most osmý a ještě později devátý; ukažte, že v těchto případech úloha řešitelná jest (obr. 67b, c).

Jest zajímavo, že úloha „jedním tahem“ se vyskytuje i v hádankách lidových; uveďme zde tyto tři: Do prkna jest



Obr. 66.

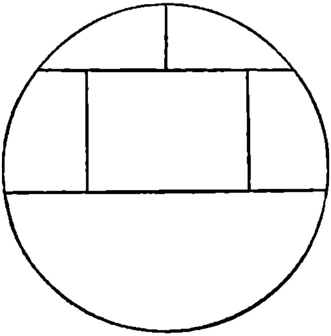
zaraženo pět hřebíčků, tvořících pětiúhelník; jest na ně napjati niť tvořící strany i uhlopříčky pětiúhelníka, avšak tak, že mezi každými dvěma hřebíčky jde niť jen jednou.



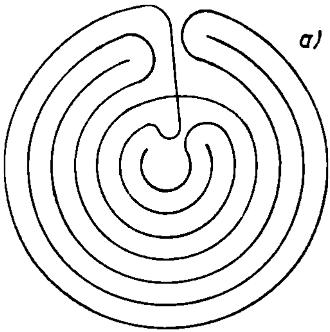
Obr. 67.

Lze smazati „přesku“ (obr. 68) na třikráte? Proč nikoliv?

Šibalstvím zavání úloha narýsovati obr. 64c přec jen jedním tahem. Počneme v bodě A, pak do D a nyní *podložíme prst*, po němž přejdeme do bodu C a pak B, A, C, D, B.



Obr. 68.

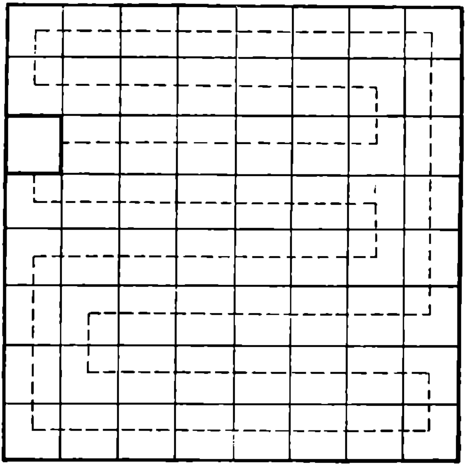


Obr. 69a.

b) Dále sem patří úlohy o bludištích. Tak nazývají se spleti cest od sebe oddělených křovinami, takže poutník snadno ztrácí přehled, kudy již šel a kudy ještě má jíti, aby dosáhl buď středu, nebo aby ze středu vyšel zpět, případně aby prošel všemi cestami bludiště.

Nejstarším známým bludištěm jest doupě *Minotaurovo* na ostrově Knossu, jež bylo znázorňováno i na starých mincích (obr. 69a). V parcích se rovněž setkáváme s bludišti, na př. v Květné zahradě kroměřížské byla původně dvě, z nichž jedno (v rozloze 50 m × 50 m) se zachovalo ještě nyní; podobné „bludníky“ byly i v zámeckých parcích ve Strážnici, Bzenci, Napajedlech a j. Zjednodušených bludišť užívá se ještě nyní na př. v pokusech o zvířecí psychologii. Návod, jak projíti bludištěm, jest velmi jednoduchý (*Chr. Wiener*, slavný deskriptivní geometr, 1873). „Půjdeme tak, aby naše levá ruka se ustavičně dotýkala křovin; přirozeně, že lze voliti i ruku pravou". Druhá úloha projíti všemi cestami bludiště jest mnohem těžší.

Posléze patří sem i tato úloha: Věznice jest vystavěna jako šachovnice (obr. 69b), všechny cely mají dveře do sousedních cel, takže jest možno buď směrem jedním nebo k němu kolmým celou věznicí projíti. Kam jest umístiti



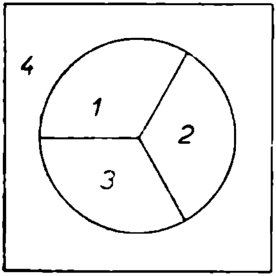
Obr. 69b.

strážnici, aby dozorce mohl projíti všemi celami, žádné nevynechávaje a každou procházeje jen jednou?

c) Při pokládání map barvou naskytl se tento problém: Uvažujeme-li pouze oblasti hraničící spolu podél křivky (nebo přímky), kolik jest nutno míti nejméně barev, aby tyto oblasti byly od sebe ostře odlišeny?

Jest dávná zkušenost, že nelze vždy vystačiti se čtyřmi barvami, avšak důkaz, že by čtyři barvy skutečně ve všech případech (k jakým při mapách nedochází) stačily, dosud podán nebyl; lze však dokázati, že pět různých barev skutečně stačí.

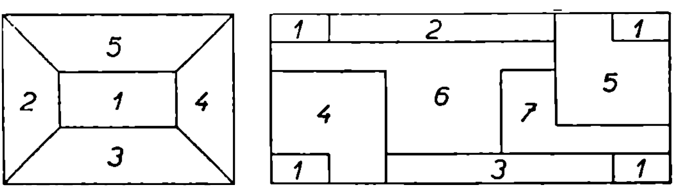
S touto úlohou „čtyř barev“ úzce souvisí úloha podobná: Kolik nejvíce lze v rovině nakresliti oblastí stýkajících se podél křivky tak, aby se všechny mezi sebou dotýkaly?



Obr. 70a.

Lze dokázati, že této úloze na rovině (a také na kouli) vyhovují oblasti čtyři, viz obr. 70a. Jest tedy úloha, kterou *Möbius* před více než sto lety dával, neřešitelna: Indický maharadža umíraje odkazuje svou říši pěti synům s tou však podmínkou, že se o ni rozdělí takovým způsobem, že všech pět nástupních říší bude každá s každou míti hranice podél křivky. Otec prý tak vlastně synům naznačil, že si nepřeje, aby říši po jeho smrti dělili.

Plochu, jakou jest na př. gumový plovací nebo záchranný pás, nazýváme pro její prstencovitý tvar prstencem. Kdežto rovina i koule každou uzavřenou křivkou rozpadnou se ve dvě části mezi sebou nesouvisející, existují na prstenci (anuloidu) křivky uzavřené — snadno je naleznete — které tuto plochu nedělí v takové části. Na této ploše úloha o sousedních oblastech se utváří zcela jinak. Obdélník v obr. 70b lze — předpoklád. je vhodnou pružnost rovinné blány — svinout do prstence, takže na této ploše bychom mohli



Obr. 70b, c.

poslední vůli maharadžovu vyplniti, ba ještě více: dle obr. 70c bychom mohli poděliti sedm synů tak, že by každý sousedil s každým.

d) Úlohy, které jsme vyložili v předchozím odstavci jako hry na sítích, lze rovněž pokládati za úlohy topologické.

Až budete ovazovat motouzem krabici tvaru rovnoběžnostěnu, všimněte si, že vlastně motouzem vytvořujete uzavřené prostorové systémy čar „jedním tahem“, a to i tenkráte, když motouz podkládáte, aby vazba byla pevnější.