THEORIE TYPŮ

V tomto úseku svých úvah si promluvíme o jistém velmi obecném pravidle logickém, jež mělo a má své důsledky nejen pro matematiku, nýbrž i pro theorii řeči. Tímto pravidlem si zjednáme brzy formální podklad pro řešení některých antinomií, jež jsme své doby uvedli na začátku svých rozhovorů. Řešení jsme tam jen obsahově naznačili — tu je budeme moci také formálně objasniti. Jde o typovou theorii, myšlenku, kterou pojal první anglický matematik a logik Russell a skoro současně s ním König. Typová theorie byla původně nalezena jako prostředek, jak odstraniti některá paradoxa theorie množin. Aby byla podstata věci jasnější a nezávislá na ryze matematických úvahách theorie množin, uvedeme věci, které budeme potřebovati, stručně na tomto místě.

Matematická theorie množin byla od svého založení G. Cantorem až do axiomatických vyšetřování Zermelových a jeho pokračovatelů v t. zv. naivním stadiu svého vývoje. Cantor objevil v této theorii celou řadu velmi duchaplných vět, z nichž některé patří k nejsmělejším výkonům matematiky vůbec. Nedovedl však zabrániti vzniku některých nepříjemných paradox, jež si vynutila očistnou práci v základech theorie.

Co je množinou ve smyslu Cantorově? Množina je soubor dobře rozeznatelných předmětů, shrnutých v celek. Upozornili jsme již na počátku, při zmínce o paradoxu „hromady", že takové zdánlivé předměty, jež nejsou řádně definovány, nýbrž jen intuitivně tušeny, se vrací do matematiky i v její moderní fázi. Zdánlivá definice Cantorova je toho příkladem; nevíme zatím jen, kde se její nedostatky projeví. To na svém místě ukážeme. S těmito předměty, množinami, je možno prováděti velmi složité logické úvahy. Množiny je možno sčítati, násobiti, je možno tvořiti podmnožiny dané množiny a z těch zase množiny nové a mnohé jiné operace. Množině je možno přiřaditi nový druh čísel, číslo kardinální, a množiny podle těchto kardinálních čísel srovnávati „co do velikosti". Význam theorie množin je v tom, že je podkladem pro řadu oborů čisté matematiky, jako na příklad theorie funkcí, topologie, theorie grup a j.

Kardinální čísla, přiřazená množinám, nejsou definována tak jako obyčejná celá čísla, alespoň ne na první pohled. Na definici kardinálních čísel je to zajímavé, že se vlastně vůbec nevyřkne, co je kardinální číslo — vyjádří se pouze okolnost, kdy dvě množiny mají stejné kardinální číslo. Dvě množiny mají stejné kardinální číslo tehdy, je-li možno elementy obou množin vzájemně jedno-jednoznačně přiřaditi. To znamená, že jednomu elementu jedné množiny odpovídá jeden a jen jeden element druhé množiny a také naopak. Ukážeme si známý příklad takového přiřazení. Dokážeme tím současně, že množina všech racionálních čísel má stejné kardinální číslo jako množina všech čísel celých.

Napišme racionální čísla (celá i zlomky) do této tabulky:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & & 5 \rightarrow \ldots\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \ldots\ldots\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Napišme teď čísla tabulky v pořadí, jež určuje naznačená lomená čára. (Na každé diagonální úsečce leží racionální lomená čísla taková, že součet hodnot čitatele i jmenovatele je na ní konstantní, myslíme-li si pro tu chvíli i čísla prvé řádky ve tvaru

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{4}{1}, \ldots\ldots)$$

Vynecháme vždy takové číslo, jež bylo již v předcházejícím úseku napsáno, a to po případném krácení. Je patrno, že dostaneme všechna racionální čísla právě jen jednou

$$1, 2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 3, 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\ldots$$

Pod tato čísla možno napsati posloupnost všech celých čísel kladných

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

Je patrno, že každému číslu první množiny odpovídá jednoznačně číslo druhé množiny, platí to také obráceně a množiny jsou tedy na sebe zobrazeny. Proto jsou obě množiny, jak se někdy říká, ekvivalentní, jinak řečeno, mají stejné kardinální číslo. Toto kardinální číslo je ze všech transfinitních čísel nejmenší a je charakteristické pro všechny množiny, jež se nazývají spočetné.

Své doby vypadalo toto zjištění, že uvedené množiny mají stejné kardinální číslo (jak bychom teď řekli), velmi podivně. Množina celých čísel byla považována za menší než množina všech čísel racionálních, protože některá z racionálních čísel jsou svojí hodnotu rovna číslům celým a ostatních je ještě nad to „mnohem" více. Ještě nápadnější byl tento zjev u dvojnásobků celých čísel: ty lze ještě jednodušeji přiřaditi k originálům, z nichž vznikly. Pak má množina dvojnásobků celých čísel stejné kardinální číslo jako množina všech čísel celých (pod každým číslem celým je jeho dvojnásobek jako jeho obraz). A při tom množina dvojnásobků je obsažena v množině celých čísel jako část v celku. Tak se na tyto věci své doby nahlíželo. Zásada, že část je menší než celek, byla zásadou platnou v logice starověku i středověku. Proto považovali matematikové (mezi jinými i Leibniz sám!) za nemožné, zabývati se nekonečnými čísly, jak to jmenoval, protože nekonečno prý implikuje spory (proti uvedené zásadě o celku a části). V takových úvahách hrála značnou roli okolnost, že se nikdo nezeptal, co je vlastně to nekonečno, nezeptal se po výstižné definici, nýbrž spokojoval se neurčitými obrazy a metafysickými opisy. Jedním z prvních průkopníků nových myšlenek o nekonečnu byl náš velký matematik a filosof Bernard Bolzano.

Okolnost, že nekonečnou množinu lze samu na její část zobraziti, a to jedno-jednoznačně, jak jsme viděli na posledních příkladech, bylo užito i pro definici nekonečných množin. Takové množiny, jež lze zobraziti na nějakou jejich podmnožinu, se někdy nazývají reflexivní. Množina je pak tehdy nekonečná, je-li reflexivní. Je okamžitě patrno, že vlastnost reflexivnosti nemají konečné množiny. Množinu, obsahující 5 elementů nelze zobraziti na žádnou z podmnožin, tak jak zobrazení žádá. Není však známo, existují-li množiny, jež by reflexivní nebyly a při tom byly prokazatelně nekonečné.

Reflexivnosti nekonečných množin bylo užito i k důkazu, že existuje nekonečná množina. Kdyby tento důkaz byl správný, mělo by to důsledky pro axiom nekonečna. Důkaz však správný není. Pro zajímavost však nastíníme jeho hlavní myšlenku (Dedekind): mysleme si vůbec všechny možné předměty, ať již vnějšího světa, ať již z oblasti duševního života. Každému takovému předmětu musí zase odpovídati idea toho předmětu. Ideje předmětu tvoří podmnožinu všech předmětů vůbec, takže je tu množina reflektována sama na sebe a je tedy nekonečná.

Slabina uvedeného zdánlivého důkazu spočívá v tom, že předpokládá svět myšlenkový, svět idejí, jak se důkaz vyjadřuje, jako něco hotového; jako sbírku obrazů všech možných předmětů. Tento předmět, nejasně určený, připomíná nepříjemné stránky Cantorovy definice množiny. Druhá obtíž spočívá v nejasném vyjádření předmětu a ideje o předmětu. Není pochyby, že kdybychom vhodně definovali takové pojmy, mohli bychom důkazu dáti tak přesnou formu, že by vskutku důkazem pro nekonečnou množinu byl. Ale při tom bychom do definicí vnesli právě to, co bychom teprve dokázati měli. Od podrobné kritiky upouštím pro zastaralost tohoto způsobu úvahy.

Podíváme-li se po všem, co jsme se dozvěděli o kardinálních číslech, na definice celých čísel, nebudou se nám již oba druhy čísel, konečných a nekonečných, zdáti již tak odlišné. Co je kardinální číslo? Je to společná vlastnost všech množin, jež se dají na sebe jedno-jednoznačně zobraziti. Co je na příklad číslo 2? Je to společná vlastnost všech predikátů ‚*F*', jež vyhovují podmínce, vyřčené pravou stranou definiční rovnice pro číslo 2. Číslo 2 není než společnou vlastností *všech* skupin, z nichž každá má jeden pár předmětů.

Souhlas docílený tak v pojetí konečných i nekonečných čísel jako pojmových konstrukcí, je také pěkným výsledkem logického rozboru pojmu čísla.

K dané množině můžeme tvořiti podmnožiny, ukážeme si teď na příkladě, jak mohou podmnožiny vypadati. Vzpomeneme si brzo, že jsme tohoto postupu užili již jednou, při zdánlivém důkazu axiomu nekonečna. Nechť množina má tři elementy, označíme ji (a_1, a_2, a_3). Podmnožiny vytvoříme tak, že sestavíme v našem případě 8 $(= 2^3)$ trojic, z nichž každá má psanou nulu na tom místě, kde příslušný element není. Jinak je to místo elementem obsazeno. Již tu, v případě konečné množiny, je patrno, že počet podmnožin je větší než počet elementů původní množiny. Způsob, jakým se tvoří podmnožiny u konečných množin, lze bez obtíží přenésti na množiny nekonečné. Také u těchto množin platí, že kardinální číslo všech podmnožin je větší než kardinální číslo množiny původní. Obecný důkaz této věty provedl Cantor (t. zv. diagonální methodou) a od té doby patří k základním poznatkům theorie množin. Důkazu samého nepotřebujeme, zjednali jsme si již povšechnou orientaci o základních pojmech theorie množin, abychom mohli uvažovati o logické struktuře jistých vět, ke kterým se právě obracíme.

Věta o kardinálním čísle množiny M a kardinálním čísle množiny všech jejích podmnožin N má tento důsledek: všechny myslitelné předměty vůbec (nejen tedy předměty matematické) je možno podle Cantorovy zdánlivé definice množiny shrnouti v celek, vyhovují-li požadavku, aby byly rozeznatelné. Dostaneme tak největší možnou množinu — tato největší možná množina musí míti také největší kardinální číslo.

Tato množina však není největší, nebo přesněji, nemá největší kardinální číslo, protože o ní platí Cantorova věta o množině podmnožin. Podle ní je tedy množina o kardinálním čísle *ještě* větším.

Paradoxní výsledek, jejž jsme tak dostali, je možno kriticky rozebrati v několikerém směru. Především přihlédnutím k definici množiny, jak ji stanovil Cantor.

Upozornil jsem již na počátku našich úvah, že neúplně stanovené zdánlivé pojmy jako shluk, hromada a pod. byly kritisovány antickými dialektiky, viděli jsme také, jak brzo vedou k rozporům. Cantorova zdánlivá definice množiny se od jmenovaných zdánlivých pojmů podstatně neliší. To je právě patrno při vzniku antinomie, již jsme si teď uvedli. Mohlo by se říci — patrně není taková množina, obsahující *všechny* myšlené předměty, přípustná — ale Cantorův opis toho, co má býti množina, nijak neupozorňuje, že by taková množina nesměla býti utvořena. A přece není možná, protože involvuje spor.

Tímto směrem by se dala snad nedostatečná definice množiny napraviti. Cesta však není schůdná a nezajišťuje než část dobrého výsledku. Nevíme, odkud se může vynořiti nebezpečí znovu, když definice množiny se zdá již býti zcela v pořádku. Hlubší řešení je řešení axiomatické, jež v theorii množin zavedl po prvé Zermelo. Množina je podle tohoto pojetí předmětem, který vyhovuje podmínkám, postulátům, jež se na ten předmět současně kladou. Při tom se vlastně přímo nevyřkne, co vlastně je množina — pro tento zvláštní charakter se někdy označují takové definice jako definice implicitní. Tímto řešením se nebudeme zabývati, poznáme v dalším příklad jiné axiomatické soustavy s vlastnostmi podobnými, na které si povahu implicitní definice ukážeme.

Velmi obecný způsob, jak odstraniti podobné rozpory i v jiných, zdánlivě odlehlých případech, našel Russell ve své typové theorii. Myšlenkou této theorie se budeme teď zabývati. Abychom si získali širší východisko, rozmnožíme počet příkladů ještě o jeden a uvedeme na paměť příklady starší. Nový příklad vznikl z úvah o „největší množině", o níž jsme před nedávnem mluvili. Tato množina je také předmětem. Největší množina by tedy měla obsahovati také tento předmět jako element. Protože však není žádná větší, musila by sebe samu obsahovati jako element. V každém případě má smysl, ptáme-li se po množinách, jež sebe samy obsahují jako element anebo ne. Jsou-li takové množiny možné, nebo jsou-li sporné a tedy nesmyslné, nás zatím nezajímá. Náš dosavadní postup využívá pouze Cantorovy definice množiny dovoleným způsobem. Množiny lze patrně podle principu vyloučené třetí možnosti rozděliti na dva druhy: množiny, jež samy sebe obsahují jako element a množiny, jež sebe samy neobsahují. Má tedy také smysl mluviti o množině množin, jež sebe samy jako element neobsahují. Budiž to množina *K*. Pak jsou možné dva závěry:

1. *K* obsahuje sebe samu jako element,
2. *K* neobsahuje sebe samu jako element.

První případ je nemožný, protože je přímo proti definici množiny *K*. Druhý také, protože *K* má míti všechny množiny, jež sebe samy neobsahují jako element; pro ni samu tedy nezbývá, než aby sebe samu obsahovala.

Toto paradoxon pochází od Russella a bylo jednou z nejsilnějších pobídek, jíti věci na kloub a theorii množin, jež přes krásné výsledky žila v naivním období, nějak podstatně podložiti. Cantor sám nenašel tehdy prostředky, jak těmto paradoxům čeliti.

Vzpomeňme na tomto místě paradoxa o Kréťanovi a Grelling-Nelsonovy antinomie „heterologické".

Všechny tyto antinomie mají jeden společný rys, který lze nejlépe vyjádřiti formalisací. Všimněme si nejprve antinomie Russelovy. Okolnost, že nějaký prvek je v množině, lze formálně přepsati takto: $M(x)$ čteno: ‚x' je elementem ‚M'. Predikát ‚M' množinu určuje, v případě, že by dva predikáty určovaly tutéž množinu, musí býti ekvivalentní. Vyjádření, jež bylo uvedeno, platí samozřejmě v každém případě, t. j. ať jsou prvky množiny jakékoli, v obecném případě jsou tyto elementy zase množinami. Důsledně tedy musíme vyjádřiti formou $M(M)$ okolnost, že množina je svým vlastním elementem (že obsahuje sebe samu jako element).

Grellingova antinomie o „heterologickém" řadí pojmenování pojmů podle toho, patří-li pod skupinu, již samy vyjadřují nebo ne. Uvedli jsme své doby, že pojem, odpovídající slovu „abstraktní" je abstraktní, stejně tak pojem „konkrétní". Fysikální rychlost „v" je také abstraktní pojem stejně jako druhá věta thermodynamiky. Buďtež všechny abstraktní pojmy shrnuty predikátem (funkcí) „A". Formální přepis případů právě uvedených je: $A(A)$, $A(K)$, $A(v)$, A(II. v. t.).

Lhář z Kréty: občan z Kréty pronáší úsudek o celém kolektivu, všech Kréťanech. Kdyby stál mimo a byl občanem jiné země, pak by platilo: $(x)[K(x) \rightarrow L(x)]$, značíme-li funkcí „$K$" výrok občana z Kréty a funkcí „L" výrok lživý. Z toho, co jsme si své doby uvedli v theorii funkčního počtu, víme, že napsaný vztah dvou predikátů lze jednodušeji označiti jako implikaci dvou predikátů takto: Impl (K,L). Tento poslední výrok však musí býti jedním z výroků „x", t. j. argumentem funkce „K", jestliže úsudek vyslovuje Kréťan. Platí tedy v tomto případě $K[\mathrm{Impl}(K,L)]$.*)

*) Zajímavé souvislosti a podrobnější osvětlení antinomií tohoto druhu se dají získati, vezmeme-li v úvahu vztah mezi předmětem a jeho pojmenováním. Obtížné problémy s tím spojené by nás tu vedly daleko.

Uvažme ještě nakonec, že antinomie o největší množině vede k podobnému výsledku. Aby taková množina byla vskutku největší, musila by obsahovati množinu všech svých podmnožin, množinu všech podmnožin této množiny atd. V každém případě je jednou z podmnožin také množina sama. Potom by měla funkce M, jíž bychom jako predikátem stanovili největší možnou množinu, jako argument také M samo, takže bychom měli případ podobný jako v antinomii Russellově.

Ve všech případech, jichž jsme se tu dotkli, je to společné, že funkce je sama svým vlastním argumentem, ať již přímo, anebo v další funkci, jež stojí na místě argumentu (v případě Kréťanovy antinomie). Jinak řečeno, uvnitř závorky pro argument se někde vyskytne funkční znak, postavený před závorkou pro argument. Nejjednodušším tvarem tohoto výrazu, který budeme dále zkoumati, je výraz ‚$A(A)$' (bez újmy obecnosti). Ukážeme si teď, že každý výraz uvedeného tvaru vede ke sporu.

Víme z výrokového počtu, že je-li ‚A' výraz, je také ‚$\overline{A}$' výraz, je-li ‚$f(x)$' výraz, je jím také ‚$\overline{f}(x)$'. Užijme toho na svůj případ: předpokládáme-li na chvíli, že výraz ‚$A(A)$' má smysl, musí míti smysl také výraz ‚$\overline{A}(A)$'. Tento poslední výraz se dá dokonce interpretovati tak, že logická funkce nemůže býti svým vlastním argumentem, což je výsledek, ke kterému směřujeme. Zaveďme definicí novou funkci $N(A) \equiv_{Df} \overline{A}(A)$. Protože víme, že je možno dosaditi za proměnné, volme substituci tak, aby ‚A' bylo nahrazeno ‚N'. Dostaneme tak spornou formuli $N(N) \equiv \overline{N}(N)$.

Úvaha posledního odstavce pochází v podstatě od Behmanna, jejím účelem je drasticky ukázati, že funkce může býti svým vlastním argumentem. Funkce je logicky vyššího typu než její argument, jako predikát shrnuje totiž všechny svoje argumenty, vytvářejíc z nich třídu, proto nemůže býti mezi nimi. Funkce má tu povahu pořádající, chceme-li třídící, odděluje jisté předměty od jiných a shrnuje je k sobě. Russell vyjádřil velmi přiléhavě zákaz porušiti typové pravidlo slovy: „What ever involves all of the collection must not be one of the collection". To je podmínka, jež zabrání, aby se nedefinovalo „bludným kruhem".

Úvahy o theorii typů by vyplnily celou knihu. Na tomto místě nám zcela postačí, když si uvědomíme, jak dochází k různým typům v hierarchii logických forem. Mysleme si nějaká individua, shrnuta predikátem ‚*P*'. Tímto predikátem ‚*P*' vyslovíme o všech těch individuích nějakou společnou vlastnost. Individua jsou zatím základem pro určení typu, přisoudíme jim tedy prozatím typ *O*. Predikátů jako je ‚*P*', může býti více, další třeba ‚*Q,R,S,...*'. Některé z nich můžeme zase shrnouti novým predikátem (vysloviti o nich společnou vlastnost), třeba ‚*A*'. Platí pak ‚*A*(*P*), *A*(*Q*), *A*(*R*),...'. Predikáty jako *je ‚P,Q,...'* jsou vůči předmětům, o nichž se vyjadřují, stupně 1. Predikát ‚*A*', jenž je predikátem o predikátech, musí býti tedy stupně 2. Tak by bylo možno pokračovati. Úvaha je složitější, máme-li místo jednoduchých predikátů složité relace, funkce o větším počtu argumentů. Pak je nutno vyjádřiti přesně pravidla, jež umožní v každém případě bezpečné stanovení a rozeznání typu. Těmito technickými otázkami logiky se dále zabývati nebudeme, poněvadž naším cílem bylo, upozorniti pokud možno jednoduchými prostředky na theorii typů.

Účinnost Russellova pravidla o dodržení stupně výrazu je taková, že je možno zameziti celé řadě antinomií, s nimiž jsme se setkali. Na některých jsme již ukázali, kde je nedostatek. Antinomie, jichž společnou vlastností jest, že porušují typové pravidlo, zkonstruují jisté zdánlivé předměty, na jejichž účet pak kladou otázky. Tyto otázky však nejsou otázkami, na něž by byly rozumné odpovědi, protože konstruované předměty v antinomiích jsou sporné.

Vraťme se ještě k antinomii Richardově, kterou jsme zahájili první kroky po naší myšlenkové oblasti. Její řešení jsme si tehdy neudali a odkázali jsme je na pozdější dobu. Definice Richardova čísla, jak nazveme ono nejmenší celé číslo, jež není možno definovati větou, obsahující méně než jedno sto slov, je *třídícím* principem. Tento třídící princip musíme nechati pevný po tu dobu, co číslo hledáme. Čísla, jež vyhovují tomuto třídícímu principu, jsou argumenty tohoto predikátu. Nemůže tedy tento třídící princip býti svým vlastním argumentem. Zeptáme-li se tedy, která z obou argumentací, uvedených u Richardovy antinomie, je falešná, tedy zcela jistě druhá; nedbá typového pravidla.

Dodržíme-li typové pravidlo, neobjeví se obtíže, jež jsou osvětleny uvedenými antinomiemi. Objeví se však obtíž jiná, kterou si ukážeme nejlépe na theorii reálných čísel. Reálné číslo se zavádí do analysy různými způsoby: Dedekindovým řezem nebo Cantorovou fundamentální posloupností, nehledíc k methodám jiným, jež jsou na oba zmíněné způsoby převeditelné.

Jde-li o sestrojení reálného čísla neracionálního, předpokládáme theorii celých racionálních i racionálních čísel jako podklad pro další hotovou. Definici racionálních čísel celých jsme uvedli, definice racionálních zlomků nečiní formalisaci žádné obtíže. Jde teď o Dedekindův řez, jímž je stanoveno reálné číslo iracionální. Iracionální číslo je stanoveno vždy tehdy, jsou-li rozdělena všechna racionální čísla do dvou skupin a to tak, že

1. každé číslo jedné skupiny (říkejme jí dolní skupina) je menší než každé číslo druhé skupiny (říkejme jí horní skupina),

2. v dolní skupině není číslo největší a v horní skupině není číslo nejmenší.

Obě skupiny čísel určují reálné číslo iracionální.

Všechna racionální čísla dolní skupiny je nutno shrnouti nějakým predikátem, na příklad ‚D', takže platí pro čísla dolní skupiny $(x)D(x)$, mluvíme-li o všech. Podobně platí pro racionální čísla hoření skupiny $(y)H(y)$. Racionální čísla, jež vystupují v operátorech a v argumentech obou funkcí, jsou definována pomocí predikátů, jež stanovily celá čísla, t. j. nakonec predikáty $0(F)$, $1(F)$, $2(F)$, ... Funkcím ‚D' i ‚H' lze předepsati jisté formální podmínky, aby vyjadřovaly, že spolu vytvořily Dedekindův řez. Pak lze formálně vyjádřiti závislost definovaného reálného čísla ‚R' na obou funkcích ‚D,H' na př. takto ‚$R(D,H)$'. Je zcela zřejmé, že reálné číslo tak definované je jistě vyššího typu, logicky vzato, než racionální číslo celé. Toto racionální celé číslo je určitě již v argumentech funkcí ‚D' resp. ‚H'. Přicházíme tak do zvláštní situace, o které jsme již jednou mluvili. Na čísla reálná jsme ochotni nahlížeti jako na homogenní třídu a to proto, že se všechna řídí týmiž početními pravidly. Z předchozí úvahy však vychází, že o homogennosti nemůže býti ani řeči, naopak, kdežto celá racionální čísla jsou dána ještě poměrně jednoduchými predikáty, racionální již predikáty vyššího stupně, a reálná zřejmě ještě podstatně vyššího stupně. Situace se zostřuje, půjdeme-li dále v sestrojování obvyklých předmětů analysy, jako je třeba bod zhuštění bodové množiny na ose reálných čísel. Takový bod obsahuje ve svém libovolném okolí (sebemenším intervalu zde) vždy nekonečně mnoho bodů té množiny. Podobně jako je reálné číslo stanoveno jistými množinami čísel racionálních, je také bod zhuštění stanoven množinou nebo množinami reálných čísel. Typově tedy musí býti zase ještě vyšší než „obyčejné" reálné číslo, ale jen po tu chvíli, co o něm jako o bodu zhuštění uvažujeme, jinak není vskutku ničím jiným, než obyčejným reálným číslem.

Je tu tedy jistá obtíž, jak zařaditi předmět, konstruovaný pomocí nižších předmětů zase do třídy těchto nižších předmětů se stanoviska typového. Uvedu na tomto místě jedno řešení Russellovo, které má svůj historický význam, ač dnes již není tak nutné, jak se své doby zdálo. Russell odstranil obecně obtíže, jež plynou z typového pravidla axiomem, jejž nazval „axiom of reducibility". V původním tvaru tento axiom neuvedeme, potřeboval by ještě mnohé doplniti o typové theorii a není toho také třeba. Ale snadno pochopitelný je jeden důsledek stále ještě dosti obecný, který se hodí právě pro náš případ theorie reálných čísel. Budiž ‚x' předmět našeho logického počtu. O tomto ‚x' mohou platiti nejen predikáty prvního stupně $A_1(x)$, nýbrž i vyššího stupně — třeba n-tého — tedy $A_n(x)$. Důsledek z řečeného Russellova axiomu reducibility zní

$$(A_n)\,(EA_1)\,(x)\,[A_n(x) \rightarrow A_1(x)].$$

To znamená, že ke každému, jakkoli vysokému stupni predikátu existuje predikát prvního stupně, na nějž se predikát n-tého stupně převede. To postačí pro náš případ reálných čísel. Také tam by tedy existoval predikát téhož stupně pro číslo stanovené Dedekindovým řezem jako pro číslo racionální a konečně i jako pro číslo, jež odpovídá bodu zhuštění bodové množiny na ose reálných čísel. Tak by bylo docíleno žádoucí homogennosti čísel, vyjádřené tím, že pro ně pro všechna platí stejná početní pravidla.

Stojí za upozornění, že axiom reducibility nezruší výhody, jež s sebou přináší typová theorie, t. j. jeho užitím nepřivodíme znovu staré antinomie, jež theorie typů měla odstraniti. Ale cena, zaplacená přijetím nového axiomu, mimologické povahy (netautologické), je příliš veliká. Okolo tohoto axiomu byla vedena celá řada duchaplných výzkumů, byla snaha, nahraditi jej vhodnějším a méně násilným pravidlem. Bylo zjištěno mimo jiné, že lze zcela dobře mysliti v soustavách, kde tento axiom neplatí. V pozdější době také Russell od používání tohoto axiomu ustoupil; typovou theorii je možno tak zjednodušiti, že není nutný.

V myšlence typové theorie je však zachycen podstatný rys lidského myšlení a tento objev je ceny trvalé. Je to pořádající princip v našem myšlení, jenž nedovolí směšování předmětů získaných různými cestami a potom uměle včlenovaných do jednoho souboru. Na tomto místě se zmíníme jen poznámkou o zdánlivém důkazu axiomu nekonečna, kde jsme na typovou theorii upozornili. Z toho, co bylo až dosud uvedeno, je patrno, že nejsme oprávněni v případě, tam projednávaném, sestaviti soubor z členů typově naprosto rozdílných bez jakéhokoli kritického zřetele. I se stanoviska typové theorie by důkaz padl, nejen tedy z důvodů, jež jsme již na místě samém uvedli.