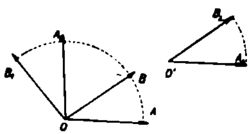
O mnohoúhelnících a mnohostěnech

I. Úhly a mnohoúhelníky v rovině

I. ÚHLY A MNOHOÚHELNÍKY V ROVINĚ

1. Úhel jakožto velikost otočení. a) Přímka, kterou si představujeme v jednom i opačném smyslu do nekonečna prodlouženou, nazývá se také *paprsek.* Každý bod O paprsku dělí jej na dvě části, které nazýváme *polopaprsky;* polopaprsku vycházejícímu z O přisuzujeme určitý smysl $\overrightarrow{OA}$ (od O ku A), je-li A libovolný jeho bod různý od O.

Nechť jsou OA a OB dva polopaprsky vycházející z téhož bodu O. Část roviny jimi omezená nazývá se *úhel* AOB (obr. 1). Měrou úhlu AOB je velikost otočení (kolem bodu O), kterým se převádí polopaprsek OA do polohy OB; srovnáváme-li různé úhly co do velikosti, nemáme na mysli plošné obsahy částí roviny takových jako na př. AOB, nýbrž jen příslušné velikosti otočení. Polopaprsky OA a OB jsou *ramena* úhlu, bod O je jeho *vrchol.*



Obr. 1.

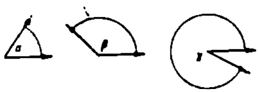
b) Otočme každé rameno úhlu AOB o stejně veliký úhel a to každé ve stejném smyslu (na př. proti smyslu pohybu, který mají hodinové ručičky) kolem bodu O. Nové polohy OA_1 a OB_1 ramen OA resp. OB tvoří úhel A_1OB_1 rovný úhlu AOB; úhel A_1OB_1 vzniká otočením úhlu AOB (obr. 1).

Budiž nyní O' bod různý od O a veďme polopaprsek $O'A_2$ souhlasně rovnoběžný s OA a polopaprsek $O'B_2$ souhlasně rovnoběžný s OB; tak vznikne úhel $A_2O'B_2$ rovný úhlu AOB.

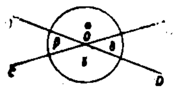
Z obr. 1 jsou zřejmé tyto vztahy mezi úhly: Dva úhly, jež mají společný vrchol O, jsou si rovny, odvodí-li se každé rameno jednoho úhlu stejným (i co do smyslu) otočením kolem bodu O z odpovídajícího ramena druhého úhlu; dva úhly o různých vrcholech, jejichž odpovídající si ramena jsou souhlasně rovnoběžná, jsou si rovny.

c) *Plný úhel* je název pro úhel, jenž se vytvoří úplným otočením polopaprsku OA kolem O, takže jeho konečná poloha splývá s počáteční. Polovina plného úhlu je *přímý úhel;* obě ramena BO a OA přímého úhlu leží v jedné a téže přímce. Polovina přímého úhlu je *pravý úhel. Ostrý úhel* (α v obr. 2) je úhel, který je menší než pravý. *Tupý* (β v obr. 2) je úhel, který je menší než přímý a větší než pravý. Úhel, který je buď pravý nebo ostrý nebo tupý, nazývá se *dutý. Vypuklý* (γ v obr. 2) je úhel, který je menší než plný a větší než přímý.

Dva paprsky protínající se v bodě O vytvořují čtyři úhly α, β, γ, δ (obr. 3). Dva sousední s jedním společným ramenem neboli *styčné* úhly dávají dohromady úhel přímý:



Obr. 2.



Obr. 3.

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = \text{přímému úhlu};$$

dva protější (neboli *vrcholové*) jsou si rovny:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

2. Jak se měří úhly. Abychom přirovnali různé úhly co do velikosti, volíme určitý úhel za jednotku úhlové míry. Uveďme dva způsoby měření úhlů:

a) *Obyčejná stupňová míra:* Jednotkou úhlu je devadesátina pravého úhlu neboli 1 stupeň, který značíme 1°. Přímý úhel má pak 180°, plný úhel 360°.

b) *Absolutní neboli oblouková míra;* Úhel se měří délkou oblouku, který vytínají ramena úhlu na kružnici k opsané poloměrem rovným 1 kolem vrcholu úhlu. Jednotkou úhlu je zde *radián,* t. j. úhel takový, že příslušný oblouk na kružnici k má délku rovnou jednotce.

Budiž α_1 měrné číslo nějakého úhlu v obyčejné stupňové míře a α jeho měrné číslo v míře absolutní. Pak platí rovnice

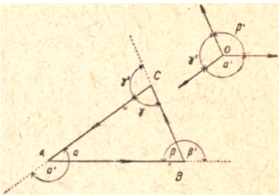
$$\frac{\alpha_1}{180} = \frac{\alpha}{\pi},$$

která vyjadřuje vztah mezi měrnými čísly jednoho a téhož úhlu v oněch dvou soustavách.

Pokud nebude výslovně jinak stanoveno, vyjadřujeme v dalším úhly v míře obloukové.

3. Úhly v trojúhelníku. a) Tři body A, B, C neležící v jedné přímce určují *trojúhelník*. Body A, B, C jsou jeho vrcholy; úsečky AB, BC, CA jsou jeho strany. Úhel α sevřený stranami AB a AC je *vnitřní úhel* trojúhelníka při vrcholu A; podobně jsou β a γ vnitřní úhly při vrcholech B resp. C (obr. 4).

Prodlužme stranu CA za vrchol A; prodloužená strana (v obr. 4 vytečkovaná) svírá se stranou AB úhel α', který se nazývá *vnější úhel* trojúhelníka při vrcholu A; podobně jsou β' a γ' vnější úhly při vrcholech B, resp. C.



Obr. 4.

b) *Součet vnějších úhlů v trojúhelníku rovná se úhlu plnému*, tedy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi.$$

Abychom to dokázali, přeneseme úhly α', β', γ' tak, aby měly společný vrchol O. Za tím účelem volíme podél obvodu trojúhelníka určitý smysl oběhu (v obr. 4 vyznačený šipkami na stranách) takto: od A k B, od B k C a od C k A. Volíme pak pevný bod O a sestrojíme tři polopaprsky vybíhající z O a po řadě rovnoběžné s CA, AB a BC. Podle odst. 1b) je úhel sevřený prvním a druhým polopaprskem roven α', úhel mezi druhým a třetím je β' a úhel mezi třetím a prvním je γ'. Z obrazce je patrno, že součet všech tří úhlů je 2π, čímž je věta dokázána.

c) Znajíce součet vnějších úhlů odvodíme součet vnitřních takto:

$$\alpha + \alpha' = \pi, \quad \beta + \beta' = \pi, \quad \gamma + \gamma' = \pi,$$

tedy

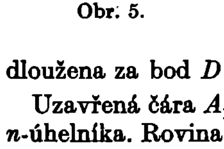
$$\alpha + \beta + \gamma = 3\pi - (\alpha' + \beta' + \gamma') = \pi.$$

Součet vnitřních úhlů trojúhelníka rovná se úhlu přímému.

d) Trojúhelník se nazývá *ostroúhlý*, jsou-li všechny jeho vnitřní úhly ostré. Trojúhelník je *pravoúhlý*, má-li jeden úhel pravý; součet zbývajících dvou rovná se pravému úhlu. Trojúhelník je *tupoúhlý*, je-li jeden jeho úhel tupý; součet zbývajících dvou je menší než úhel pravý.

4. O mnohoúhelníku. a) V rovině budiž dáno n různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Spojme A_1 s A_2, A_2 s A_3, ..., A_{n-1} s A_n. Tak dostaneme $(n - 1)$ úseček, které dohromady tvoří *neuzavřenou lomenou čáru* $A_1A_2 \ldots A_n$; A_1 je její počáteční bod, A_n koncový. Připojíme-li k ní ještě úsečku A_nA_1, dostaneme uzavřenou lomenou čáru $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ neboli *mnohoúhelník* o n stranách $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, jinak též n-úhelník.

Podle toho, jak byly body A_k voleny, protíná uzavřená čára $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ sama sebe nebo neprotíná. První případ nastává na př. pro čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 v obr. 5a, druhý případ v obr. 5b. V dalších úvahách se budeme zabývati jen mnohoúhelníky, jichž strany se mimo vrcholy neprotínají. Tato podmínka platí ovšem pro uzavřenou čáru $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ složenou z *úseček* A_1A_2, A_2A_3 atd.; některé z nich *prodlouženy* za svoje koncové body mohou ji protínati v dalších bodech (tak v obr. 7b strana CD čtyrúhelníka $ABCD$ prodloužena za bod D protíná stranu AB v bodě E).



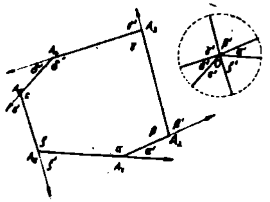
Obr. 5.

Uzavřená čára $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ nazývá se také určitěji *obvod* n-úhelníka. Rovina dělí se obvodem n-úhelníka na dvě části; jedna část je vnitřek n-úhelníka a druhá je jeho vnějšek.

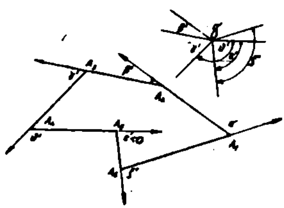
Délku obvodu n-úhelníka nazýváme také zkrátka jeho obvodem, plošný obsah jeho vnitřku jeho obsahem.

b) Věty dokázané v odst. 3 o součtu úhlů vnějších nebo vnitřních pro trojúhelníky dají se jednoduše zobecniti tak, že platí pro mnohoúhelníky.

Všimněme si nejprve šestiúhelníka, jehož všechny vnitřní úhly jsou duté, takže i každý jeho vnější úhel je dutý (obr. 6a). Při vrcholu A_1 jsou vnitřní úhel α a vnější úhel α' sevře-



Obr. 6a.



Obr. 6b.

ný prodlouženou stranou A_6A_1 a stranou A_1A_2; při vrcholu A_2 jsou vnitřní úhel β a vnější β' atd. Veďme pomocným bodem O přímky rovnoběžné po řadě se stranami A_1A_2, A_2A_3, … A_6A_1 šestiúhelníka. Tak obdržíme šest polopaprsků vybíhajících z O; první s druhým svírá úhel α', druhý se třetím úhel β' atd. Součet všech šesti vnějších úhlů je tedy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \zeta' = 2\pi.$$

Poněvadž pak

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = \varepsilon + \varepsilon' = \zeta + \zeta' = \pi,$$

je součet všech vnitřních úhlů

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 6\pi - \\ -(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \zeta') = 4\pi.$$

Přejděme nyní k šestiúhelníku, jenž má při jednom vrcholu (A_5 v obr. 6b) vnitřní úhel ε vypuklý, takže příslušný vnější úhel ε' je záporný, neboť $\varepsilon + \varepsilon' = \pi$. Zase bude součet všech vnějších úhlů roven 2π. K důkazu sestrojíme jako dříve polopaprsky vedené bodem O rovnoběžně k jednotlivým stranám A_1A_2, A_2A_3, ... Rozdíl proti předešlému případu, kdy byly všechny vnější úhly kladné, je v tom, že nyní je úhel ε' záporný. Sečteme-li kladné úhly α', β', γ', δ', ζ' a odečteme-li od součtu číselnou hodnotu úhlu ε', dostaneme plný úhel, jak je patrno z obr. 6b. Součet vnitřních úhlů bude zase roven 4π.

c) Budiž dán obecně n-úhelník, jehož obvod nikde sám sebe neprotíná. Každý jeho vnější úhel α' počítáme podle rovnice

$$\alpha' = \pi - \alpha,$$

kde α je příslušný úhel vnitřní (dutý nebo vypuklý); je-li $\alpha < \pi$, je $\alpha' > 0$; je-li $\alpha > \pi$, je $\alpha' < 0$. Označme znakem $\Sigma\alpha$ součet úhlů vnitřních a znakem $\Sigma\alpha'$ součet úhlů vnějších. Pak bude

$$\Sigma\alpha' = 2\pi, \quad \Sigma\alpha = (n - 2)\,\pi,$$

neboť součet všech vnitřních i vnějších dohromady dává $n\pi$. Slovy: *Součet vnějších úhlů v n-úhelníku rovná se* 2π. *Součet vnitřních úhlů v n-úhelníku rovná se* $(n - 2)\,\pi$.