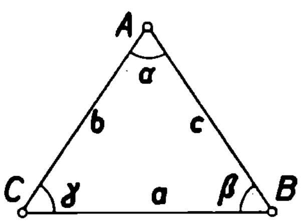
Při řešení trigonometrických úloh vycházíme od měřených délek a úhlů. Někdy je třeba vypočítati délky (příp. úhly) předem ze souřadnic daných bodů. K řešení se užívá základních i upravených vzorců pro goniometrické funkce. Výpočetní postup musí být přesný, přehledný a ryohlý, aby se dal provésti snadno logaritmicky nebo počítacím strojem. Úhly se počítají na jednotky vteřin a délky na centimetry. Proto se užívá k výpočtu šestimístných logaritmických tabulek nebo šestimístných tabulek přirozených hodnot úhlových funkcí. Při výpočtu polygonových pořadů postačí tabulky přirozených hodnot s pěti desetinnými místy nebo jiné tabulky a pomůcky, určující souřadnicové rozdíly s přesností na centimetry.

Nejjednodušším geometrickým obrazcem je trojúhelník a způsob jeho řešení se dá užíti i u složitějších obrazců. Probereme proto řešení trojúhelníka s hlediska praktické geometrie podrobněji.

8,1. Řešení trojúhelníka (obr. 134). Podle toho, které určovací prvky (veličiny) jsou dány, volí se početní postup. Trojúhelník je určen buď



Obr. 134. Řešení trojúhelníka.

1. jednou stranou a dvěma úhly, na př. c, α a β, nebo
2. dvěma stranami a sevřeným úhlem, na př. a, b a γ, nebo
3. třemi stranami a, b a c.

Mezi určovacími prvky musí býti dána vždy aspoň jedna strana, aby trojúhelník byl řešitelný.

Případ 1. Je-li trojúhelník dán jednou stranou a dvěma úhly, použije se k výpočtu dalších stran sinové věty

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c,$$

odtud

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Z rovnic plyne

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta), \ \sin\gamma = \sin(\alpha + \beta).$$

Sinové věty se užije též v případě, kdy je trojúhelník dán dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich.

Případ 2. V praktické geometrii se vyskytuje velmi často případ, kdy trojúhelník je dán dvěma stranami a sevřeným úhlem. Před výpočtem třetí strany je nutno určiti oba neznámé úhly. Je-li trojúhelník dán na př. stranami a, b a sevřeným úhlem γ, platí pro neznámé (hledané) úhly jediný vztah:

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Ve shodě s pozdějším výkladem budeme neznámé úhly nazývati φ a ψ, a v našem případě je $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$. Výpočet neznámých úhlů lze provésti mnoha způsoby, z nichž nejužívanější budou uvedeny.

Řešení 1. K výpočtu užijeme tangentové věty. Známe a, b a γ, hledáme φ, ψ a c. Postupujeme takto:

$$\varphi + \psi = 180° - \gamma, \text{ z čehož } \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tfrac{1}{2}(180° - \gamma) = p.$$

Utvoříme součet a rozdíl daných stran $a + b = \ldots$, $a - b = \ldots$, a použijeme tangentové věty ve tvaru

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

V posledním výrazu neznáme jen levou stranu, na pravé straně jsou všechny veličiny známé a výpočet lze provésti logaritmicky i počítacím strojem. Tak obdržíme

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = q,$$

kde q je vypočtená hodnota,

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = p,$$

tento výraz je dán shora.

Sečtením obou výrazů určíme

$$\varphi = p + q$$

a odečtením dostaneme

$$\psi = p - q.$$

Kontrolou je $\varphi + \psi + \gamma = 180°$.

Neznámou stranu c vypočteme podle sinové věty dvakráte:

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} = b\frac{\sin\gamma}{\sin\psi}.$$

Oba výsledky musí být stejné; vznikne-li nějaký rozdíl v posledním desetinném místě, je to zaviněno zaokrouhlováním míst logaritmické mantisy nebo přirozené hodnoty goniometrické funkce.

Řešení 2. Poměr daných stran položíme rovný tangentě neznámého úhlu, který ve shodě s označováním v geodesii nazveme μ, takže $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\mu$. Podle pouček platných o úměrách, lze poslední výraz psáti takto:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\mu - 1}{\operatorname{tg}\mu + 1} = \frac{\operatorname{tg}\mu - \operatorname{tg}45°}{\operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}45° + 1} = \operatorname{tg}(\mu - 45°).$$

Dosadíme-li za $\frac{a-b}{a+b}$ do tangentové věty uvedené v řešení 1, obdržíme

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg}(\mu - 45°)\,.\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

Z posledního výrazu vypočteme

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \ldots;$$

další postup je stejný jako v řešení 1.

Řešení 3. Poměr obou daných stran položíme rovný určitému číslu k;

$$k = \frac{a}{b} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Úpravou obdržíme

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{k-1}{k+1},$$

čili

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi - \psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{k-1}{k+1}$$

a po zjednodušení

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{k-1}{k+1}.$$

Výsledná rovnice zní

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{k - 1}{k + 1} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

Pro výpočet hledaných úhlů máme pak dvě rovnice

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) &= \ldots, \\ \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) &= \ldots, \end{aligned} \quad \text{z nichž plyne} \quad \begin{aligned} \varphi &= \ldots \\ \psi &= \ldots \end{aligned}$$

Řešení 4. Poměr sinů obou úhlů φ a ψ položme rovný kotangentě úhlu μ. Pro výpočet máme dáno

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tfrac{1}{2}(180° - \gamma) = p,$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \mu.$$

Odečteme-li od posledního výrazu jednou jednotku a po druhé ji přičteme, nato vytvoříme podíl obou, obdržíme

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - 1 = \operatorname{cotg} \mu - 1,$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} + 1 = \operatorname{cotg} \mu + 1;$$

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{\operatorname{cotg} \mu - 1}{\operatorname{cotg} \mu + 1}.$$

Upravíme-li levou stranu rovnice jako v řešení 3 a na pravé straně rovnice vložíme $\operatorname{cotg} 45° = 1$, dostaneme

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{cotg} \mu \operatorname{cotg} 45° - 1}{\operatorname{cotg} 45° + \operatorname{cotg} \mu} = \operatorname{cotg} (\mu + 45°),$$

z toho

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \operatorname{cotg} (\mu + 45°).$$

Další postup je stejný jako v řešení 1.

Řešení 5. Položíme-li poměr sinů obou úhlů roven tangentě úhlu μ, obdržíme stejným postupem jako v řešení 4 výrazy

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \mu,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} (\mu - 45°) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi),$$

což je výraz shodný s výsledkem v řešení 2.

Jiná řešení nejsou pro výpočet pohodlná a nebude o nich pojednáno.

Případ 3. Je-li trojúhelník dán třemi stranami, určíme velikost úhlů ze vzorců

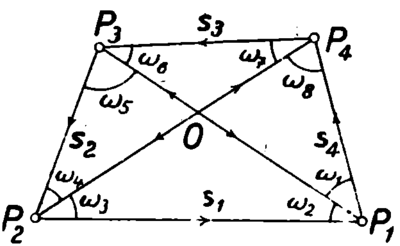
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r}{s-c},$$

kde

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \text{ a } r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

při čemž r je poloměr vepsané kružnice.

8,2. Řešení čtyrúhelníka a složitějších obrazců (obr. 135). Před řešením složitějších obrazců se musíme přesvědčiti, jsou-li danými prvky určeny, t. j. byl-li změřen potřebný počet veličin k určení obrazce. Každý p-úhelník je jak známo určen $n = 2p - 3$ nezávislými veličinami délkovými a úhlovými. Mezi určujícími prvky musí být aspoň jedna délka a nesmí mezi nimi být geometrické vztahy.



Obr. 135. Řešení čtyrúhelníka.

Ve skutečnosti se měří více veličin než je nezbytně nutno, jednak pro kontrolu, jednak proto, aby bylo lze měření vyrovnati a tak stanoviti přesnější výsledky.

V složitějším obrazci, ve kterém nejsou měřeny všechny veličiny, vyskytnou se úhly, které je nutno vypočísti. K tomu užíváme velmi často upravené věty sinové ve znění: „Součin sinů úhlů stejnosměrných rovná se součinu sinů úhlů protisměrných.“ K snadnému psaní této věty zvolíme si v obrazci jeden bod za pól, z něhož vedeme paprsky ke všem vrcholům obrazce. Pólem může být kterýkoliv bod, ale někdy je jeho volba omezena polohou neznámých úhlů, jež je třeba určiti.

Paprsky vedené z pólu ke všem bodům (vrcholům obrazce) orientujeme kladně od pólu k vrcholům a nato zvolíme kladný smysl po obvodě obrazce. Stejnosměrným úhlem je ten, jehož obě ramena mají kladný smysl směřující k vrcholu nebo od vrcholu; úhel s jinými rameny je protisměrný. Na př. v obr. 135 byl za pól O zvolen průsečík úhlopříček. Smysl oběhu po obvodě byl zvolen proti chodu ručiček hodinových; stejnosměrné úhly jsou: $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8$ a protisměrné jsou: $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ a ω_7. Sinová věta zní

$$\sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_7 = \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6 \sin \omega_8$$

čili

$$\frac{\sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_7}{\sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6 \sin \omega_8} = 1.$$

Správnost věty sinové v tomto případě dokážeme užitím věty sinové na trojúhelníky $P_1P_4P_3$, $P_4P_3P_2$, $P_3P_2P_1$, $P_2P_1P_4$; dostaneme

$$\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_6} = \frac{s_3}{s_4}, \quad \frac{\sin \omega_7}{\sin \omega_4} = \frac{s_2}{s_3}, \quad \frac{\sin \omega_5}{\sin \omega_2} = \frac{s_1}{s_2}, \quad \frac{\sin \omega_3}{\sin \omega_8} = \frac{s_4}{s_1}.$$

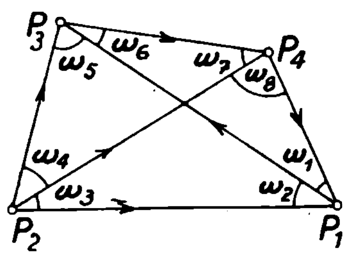
Vynásobíme-li levé i pravé strany rovnic mezi sebou, obdržíme

$$\frac{\sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \omega_7}{\sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6 \sin \omega_8} = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} = 1.$$

V obr. 136 je čtyrúhelník se zvoleným pólem v bodě P_2, jak ukazuje směr šipek. Zbývající strany je možno označiti buď ve směru nebo proti směru chodu ručiček hodinových. Rovnice vyjadřující větu sinovou zní:

$$\frac{\sin \omega_2 \sin (\omega_5 + \omega_6) \sin \omega_8}{\sin (\omega_1 + \omega_2) \sin \omega_5 \sin \omega_7} = 1.$$

V rovnici nejsou přímo zastoupeny úhly ω_3 a ω_4 u pólu P_2.



Obr. 136. Jiné řešení čtyrúhelníka.

Plyne-li z obrazců možnost výpočtu neznámých dvou úhlů

φ a ψ, pro něž známe jejich součet a poměr $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$, je početní postup stejný jako při řešení trojúhelníka. Známe-li vedle součtu dvou neznámých úhlů ještě jejich násobek sinů, zvolíme tento postup:

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= p \\ \sin \varphi \sin \psi &= k \\ \cos (\varphi - \psi) &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \cos (\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \end{aligned}$$

odečteme-li poslední rovnici od předposlední, dostaneme

$$\begin{aligned} \cos (\varphi - \psi) - \cos (\varphi + \psi) &= 2 \sin \varphi \sin \psi = 2k \\ \cos (\varphi - \psi) &= 2k + \cos (\varphi + \psi) \end{aligned}$$

a z toho vypočteme

$$\varphi - \psi = q,$$

mimo to platí

$$\varphi + \psi = p$$

a konečně

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(p + q), \quad \psi = \tfrac{1}{2}(p - q).$$

Obecné věty sinové lze použíti při řešení mnohých trigonometrických úloh, jak bude ještě ukázáno.

8,3. Řešení dalších trigonometrických úloh. Řešení složitějších obrazců se dá často převésti na řešení trojúhelníka nebo se s výhodou užije obecné věty sinové. Obecně řešíme trigonometricky čtyrúhelník nebo pětiúhelník a složitější úlohy řešíme souřadnicově.

Nepřístupná vzdálenost (obr. 137). Na břehu řeky byla změřena délka (základna) $a = \overline{AB}$. V bodech A a B byly změřeny theodolitem úhly ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4. Je určiti nepřístupnou vzdálenost mezi body C a D (hroty věží a pod.).

Při řešení volíme ten postup, který je nejkratší a početně nejjednodušší. V našem případě bude postup tento:

Z $\triangle ADB$ vypočteme

$$\omega_5 = 180° - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3),$$

$$d = a \frac{\sin (\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_5}.$$

Z $\triangle ABC$ plyne

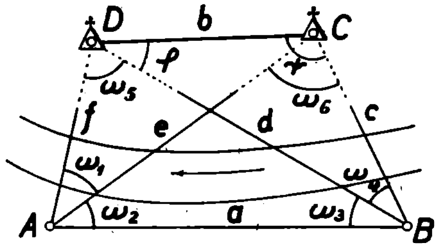
$$c = a \frac{\sin \omega_2}{\sin (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)},$$

kde

$$\omega_6 = 180^\circ - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)$$

a z $\triangle BCD$ obdržíme

$$\varphi + \psi = 180^\circ - \omega_4 = p.$$



Obr. 137. Nepřístupná vzdálenost.

Úhly φ a ψ volíme vždy tak, aby byly v jednom trojúhelníku, v němž je možno určiti dvě strany. V $\triangle BCD$ známe dvě strany c a d a naproti nim zvolené polohy neznámých úhlů φ a ψ. K výpočtu užijeme tangentové věty:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{c - d}{c + d} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

Z poslední rovnice vypočteme

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = q$$

k tomu

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = p,$$

takže

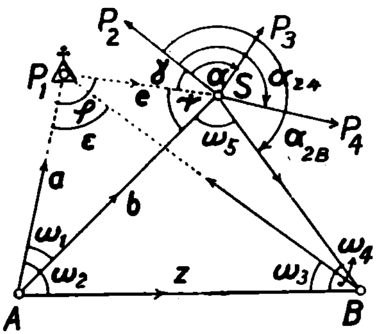
$$\varphi = p + q, \quad \psi = p - q.$$

Ve čtyrúhelníku známe nyní všechny úhly a nepřístupnou vzdálenost b vypočteme sinovou větou

$$\overline{CD} = b = c \frac{\sin \omega_4}{\sin \varphi} = d \frac{\sin \omega_4}{\sin \psi}.$$

Chceme-li vypočísti délku e, vypočteme ji z $\triangle ABC$ a délku f z $\triangle ABD$.

Určení dostřeďovacích (centračních) prvků (obr. 138). Trigonometrický bod P_1 je dán středem makovice věže a tím je nepřístupný. Směrníková osnova na okolní body P_2, P_3 až P_n byla měřena na mimostředném stanovisku (excentru) S a to v okně věže. Z bodu S není vidět na bod P_1. Pro převedení úhlů měřených mimostředně na střed (jako by byly měřeny přímo na bodu P_1) je třeba určiti dostřeďovací prvky a to délku e (excentricitu, výstřednost), která je tu nepřístupnou vzdáleností a úhel γ. K určení dostřeďovacích prvků byla zvolena pod věží základna z tak, aby její délka byla rovna přibližně vzdálenosti od věže a z jejích koncových bodů bylo vidět na bod P_1 i na stanovisko S. V bodě A byly změřeny úhly ω_1 a ω_2, v bodě B úhly ω_3, ω_4 a v bodě S úhel ω_5. Základna z byla měřena několikráte a pro výpočet bylo užito aritmetického průměru.



Obr. 138. Určení centračních prvků.

Ve čtyrúhelníku je třeba znáti k řešení $n = 2p - 3 = 5$ veličin a bylo jich měřeno šest. Přebytečná veličina byla měřena v $\triangle ABS$ a to úhel ω_5. Úhly v trojúhelníku musí vyhověti podmínce

$$(\omega_2 - \omega_1) + \omega_4 + \omega_5 - 180^\circ = 0.$$

Místo nuly však obdržíme určitou odchylku, jejíž velikost musí být omluvitelna pouze nevyhnutelnými chybami při měření úhlů. Je-li omluvitelná, rozdělí se stejnoměrně na všechny měřené úhly daného trojúhelníka. Nato se vypočte vrcholový úhel

$$\varepsilon = 180^\circ - (\omega_2 + \omega_3).$$

Další postup výpočtu je:

$$a = z\,\frac{\sin\omega_3}{\sin\varepsilon} = z\,\frac{\sin\omega_3}{\sin(\omega_2 + \omega_3)},\quad b = z\,\frac{\sin\omega_4}{\sin\omega_5},$$

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \omega_1).$$

Úhly φ a ψ vypočteme některým ze způsobů uvedených při řešení trojúhelníka. V použitém vzorci dosadíme za a a b:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b}{a} = \frac{\sin (\omega_2 + \omega_3) \sin \omega_4}{\sin \omega_3 \sin \omega_5} = \operatorname{cotg} \mu,$$

odtud určíme

$$\mu = \ldots \text{ a } \mu + 45^\circ = \ldots$$

Potom platí

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{cotg} (\mu + 45^\circ);$$

odtud plyne

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = q$$

a mimo to je

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = p.$$

Sečtením a odečtením dostáváme

$$\varphi = p + q, \quad \psi = p - q.$$

Excentricita (výstřednost)

$$e = a \frac{\sin \omega_1}{\sin \psi} = b \frac{\sin \omega_1}{\sin \varphi}.$$

Hledaný úhel

$$\gamma = 360^\circ - (\alpha_{2B} + \omega_5 + \psi).$$

Tím jsou určeny všechny prvky pro přepočtení směrníkové osnovy měřené na stanovisku S do směrníkové osnovy, kterou bychom měřili na stanovisku P_1.

Úloha se dá řešit též obecnou větou sinovou. Zvolme za pól na př. bod A. (Pólem nesmí být bod, v jehož vrcholu je neznámý úhel.) Obdržíme:

$$1 = \frac{\sin \varphi \sin \omega_3 \sin \omega_5}{\sin \psi \sin \omega_4 \sin \varepsilon}$$

čili

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \varepsilon \sin \omega_4}{\sin \omega_3 \sin \omega_5} = \frac{\sin (\omega_2 + \omega_3) \sin \omega_4}{\sin \omega_3 \sin \omega_5}.$$

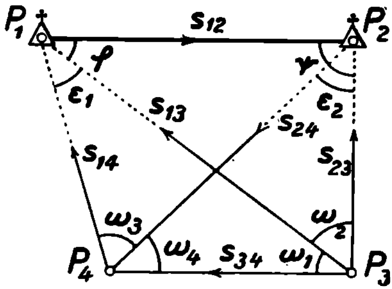
Výsledek je shodný s prvým řešením.

8,4. Hansenova úloha. Je známa vzdálenost dvou nepřístupných bodů a úhly, které byly měřeny v bodech, jichž vzdálenost určujeme. Je to obrácená úloha k určení nepřístupné vzdálenosti. V podstatě je to opět řešení čtyrúhelníka, v němž známe jednu stranu a čtyři úhly. Početní postup je závislý na poloze strany dané i hledané.

Řešení 1 (obr. 139). Je dána strana $s_{12} = \overline{P_1P_2}$ a úhly ω_1, ω_2 měřené v bodě P_3 a úhly ω_3, ω_4 měřené v bodě P_4. Je určiti vzdálenost $s_{34} = P_3P_4$.

Podle obrazce vypočteme další dva úhly

$$\varepsilon_1 = 180° - (\omega_1 + \omega_3 + \omega_4)$$
$$\varepsilon_2 = 180° - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_4).$$



Obr. 139. Hansenova úloha 1.

V bodě P_3 se sbíhají strany tří trojúhelníků a v nich platí věty sinové:

$$\begin{array}{ll} (\triangle\, P_1P_2P_3) & s_{23} : s_{13} = \sin\varphi : \sin\psi \\ (\triangle\, P_1P_3P_4) & s_{13} : s_{34} = \sin(\omega_3 + \omega_4) : \sin\varepsilon_1 \\ (\triangle\, P_2P_3P_4) & s_{34} : s_{23} = \sin\varepsilon_2 : \sin\omega_4. \end{array}$$

Vynásobením obdržíme

$$\frac{s_{13}s_{23}s_{34}}{s_{13}s_{23}s_{34}} = \frac{\sin\varphi\,\sin(\omega_3 + \omega_4)\,\sin\varepsilon_2}{\sin\psi\,\sin\omega_4\,\sin\varepsilon_1} = 1.$$

Poznámka. Tutéž rovnici obdržíme z obecné věty sinové, zvolíme-li si za pól bod P_3. Kdybychom zvolili za pól bod P_4, měli bychom v $\triangle\, P_1P_2P_4$ jiné neznámé úhly. Kdybychom zvolili za pól průsečík úhlopříček, byla by volba neznámých úhlů opět jiná.

Z rovnice vypočteme

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\omega_4\,\sin\varepsilon_1}{\sin(\omega_3 + \omega_4)\,\sin\varepsilon_2}$$

a tedy

$$\mu = \ldots,$$

a dále

$$\mu - 45° = \ldots$$

Potom

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tfrac{1}{2}(180° - \omega_2) = p$$

a

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{tg} (\mu - 45°).$$

Dostaneme tedy

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = q \text{ a } \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = p;$$

odtud

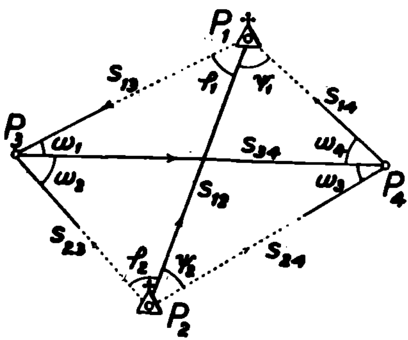
$$\varphi = p + q, \ \psi = p - q.$$

Výpočtem φ a ψ známe v daném čtyrúhelníku všechny úhly a podle sinové věty stanovíme délky stran:

$$s_{13} = s_{12} \frac{\sin \psi}{\sin \omega_2}, \quad s_{23} = s_{12} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_2}, \quad s_{24} = s_{12} \frac{\sin (\varphi + \varepsilon_1)}{\sin \omega_3},$$

$$s_{14} = s_{12} \frac{\sin (\psi - \varepsilon_2)}{\sin \omega_3}, \quad s_{34} = s_{14} \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \omega_1} = s_{13} \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin (\omega_3 + \omega_4)}$$

$$= s_{24} \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin (\omega_1 + \omega_2)} = s_{23} \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \omega_4}.$$



Obr. 140. Hansenova úloha 2.

Délku s_{34} je možno vypočísti čtyřmi způsoby a výsledky se musí ovšem shodovat. Případné odchylky mohou vzniknout jen vlivem zaokrouhlování posledních míst logaritmické mantisy nebo přirozených hodnot. Za správnou délku považujeme tu, která je vypočtena z větších číselných hodnot, ostatní považujeme za kontrolu. Proto postačí, když uvažovanou délku vypočteme z toho trojúhelníka, který je tvarově pro výpočet nejvhodnější.

Řešení 2 (obr. 140). Je dána strana $s_{12} = \overline{P_1P_2}$ a měřené úhly ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 v bodech P_3 a P_4. Strana daná i určovaná se protínají a tak vznikají čtyři neznámé úhly φ_1, ψ_1, φ_2 a ψ_2.

Postup výpočtu:

Nejdříve se vypočtou úhly φ_1 a ψ_1. Předně platí

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) = \tfrac{1}{2}[180° — (\omega_1 + \omega_4)] = p.$$

Z $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_3P_1P_4$ a $\triangle P_1P_4P_2$ plynou úměry

$$s_{12} : s_{23} = \sin(\omega_1 + \omega_2) : \sin\varphi_1,$$
$$s_{23} : s_{24} = \sin\omega_3 : \sin\omega_2,$$
$$s_{24} : s_{12} = \sin\psi_1 : \sin(\omega_3 + \omega_4);$$

vynásobením dostaneme

$$\frac{s_{12}s_{23}s_{24}}{s_{12}s_{23}s_{24}} = 1 = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)\sin\omega_3\sin\psi_1}{\sin\omega_2\sin(\omega_3 + \omega_4)\sin\varphi_1}.$$

Poznámka. Týž výsledek obdržíme, zvolíme-li za pól bod P_2 a směr, jak je vyznačeno na obr. 140 a dle něho sestavíme obecnou větu sinovou.

Vypočteme poměr sinů neznámých úhlů:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\psi_1} = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)\sin\omega_3}{\sin\omega_2\sin(\omega_3 + \omega_4)} = \operatorname{tg}\mu;$$

poslední rovnice dává

$$\mu = \ldots,$$

a tedy známe

$$\mu — 45° = \ldots$$

Potom

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 — \psi_1) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) \,.\, \operatorname{tg}(\mu — 45°).$$

Odtud

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 — \psi_1) = \ldots,$$

k tomu připojíme

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) = \ldots \text{ atd.}$$

Úhly φ_2 a ψ_2 vypočteme potom jako výplňky

$$\varphi_2 = 180° — (\omega_1 + \omega_2 + \varphi_1),\quad \psi_2 = 180° — (\omega_3 + \omega_4 + \psi_1),$$

nebo je lze vypočísti z $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_3P_1P_4$ a $\triangle P_1P_4P_2$ užitím úměr

$$s_{12} : s_{13} = \sin(\omega_1 + \omega_2) : \sin\varphi_2,$$
$$s_{13} : s_{14} = \sin\omega_4 : \sin\omega_1,$$
$$s_{14} : s_{12} = \sin\psi_2 : \sin(\omega_3 + \omega_4).$$

Vynásobením jich dostaneme

$$\frac{s_{12}s_{13}s_{14}}{s_{12}s_{13}s_{14}} = \frac{\sin\psi_2\sin\omega_4\sin(\omega_1 + \omega_2)}{\sin\varphi_2\sin\omega_1\sin(\omega_3 + \omega_4)} = 1.$$

Týž výraz dostaneme, zvolíme-li za pól bod P_1 a použijeme-li obecné věty sinové. Z posledního výrazu obdržíme

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \psi_2} = \frac{\sin \omega_4 \sin (\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_1 \sin (\omega_3 + \omega_4)} = \operatorname{tg} \mu',$$

z poslední rovnice plyne $\mu' = \ldots$, takže $\mu' - 45° = \ldots$

Dále platí

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2) = \tfrac{1}{2}[180° - (\omega_2 + \omega_3)]$$

a konečně

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \psi_2) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2) \operatorname{tg} (\mu' - 45°)$$

z toho

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \psi_2) = \ldots$$

atd.

Kontrolou vypočtených úhlů je uzávěr na 360°:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2 = 360°.$$

Znajíce všechny úhly, vypočteme sinovou větou strany; pro hledanou stranu s_{34} obdržíme čtyři výsledky, jež se musí opět shodovati:

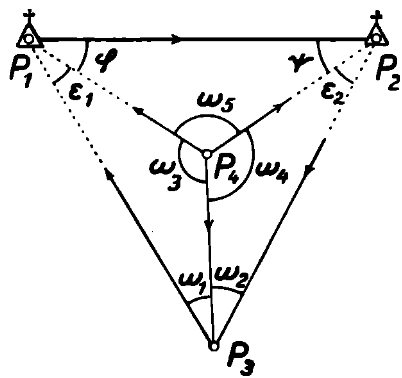
$$s_{13} = s_{12} \frac{\sin \varphi_2}{\sin (\omega_1 + \omega_2)}, \quad s_{24} = s_{12} \frac{\sin \psi_1}{\sin (\omega_3 + \omega_4)},$$

$$s_{14} = s_{12} \frac{\sin \psi_2}{\sin (\omega_3 + \omega_4)}, \quad s_{23} = s_{12} \frac{\sin \varphi_1}{\sin (\omega_1 + \omega_2)},$$

$$s_{34} = s_{13} \frac{\sin (\varphi_1 + \psi_1)}{\sin \omega_4} = s_{14} \frac{\sin (\varphi_1 + \psi_1)}{\sin \omega_1} =$$

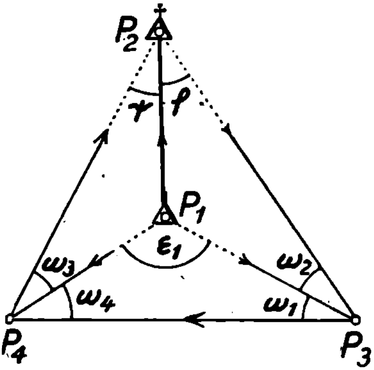
$$= s_{24} \frac{\sin (\varphi_2 + \psi_2)}{\sin \omega_2} = s_{23} \frac{\sin (\varphi_2 + \psi_2)}{\sin \omega_3}.$$

V obr. 141 a 142 jsou znázorněny případy, kdy se strana daná a určovaná neprotínají, jsou k sobě buď kolmé nebo kosé. Postup řešení je úplně stejný jako v případě předešlém. Podle toho, který z bodů zvolíme za pól, je třeba vyznačiti neznámé úhly φ a ψ, aby byly oba v jednom trojúhelníku a dal se určiti jejich součet i jejich poměr. V obr. 141 je možno zvolit za pól bod P_3 i P_4, kdežto v obr. 142 může být pólem bod P_1, P_3 i P_4.

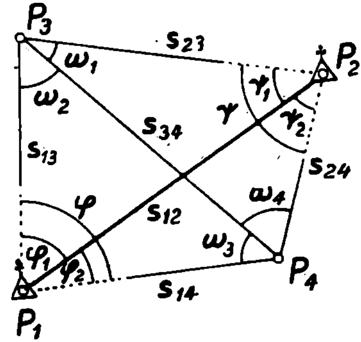


Obr. 141. Hansenova úloha 3.

Řešení 3 (obr. 143). Jiný způsob řešení Hansenovy úlohy. Je dána strana $s_{12} = \overline{P_1P_2}$ a úhly ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 měřené v bodech P_3 a P_4. Určiti délku strany $s_{34} = \overline{P_3P_4}$.



Obr. 142. Hansenova úloha 4.



Obr. 143. Hansenova úloha.

Postup výpočtu. Vyjdeme od strany s_{34}, kterou máme určiti a její délku zvolíme rovnou jednotce, na př. 100 nebo 1000 m. Na rozdíl od skutečné délky ji označíme S_{34}. V jednotce této délky vypočteme délky ostatních stran užitím věty sinové a měřených úhlů. V $\triangle\, P_1P_3P_4$ známe délku S_{34}, úhly ω_2 a ω_3, vypočteme $\varphi = 180° - (\omega_2 + \omega_3)$ a ostatní strany

$$S_{14} = S_{34}\,\frac{\sin\omega_2}{\sin\varphi},\quad S_{13} = S_{34}\,\frac{\sin\omega_3}{\sin\varphi}.$$

V $\triangle\, P_2P_4P_3$ známe tutéž stranu, přilehlé úhly ω_1, ω_4 a vypočteme $\psi = 180° - (\omega_1 + \omega_4)$, strany

$$S_{23} = S_{34}\,\frac{\sin\omega_4}{\sin\psi},\quad S_{24} = S_{34}\,\frac{\sin\omega_1}{\sin\psi}.$$

V $\triangle\, P_1P_2P_3$ známe nyní jednotkové délky S_{13} a S_{23} a sevřený úhel $\omega_1 + \omega_2$. Pro neznámé úhly φ_1 a ψ_1 známe jejich součet

$$\varphi_1 + \psi_1 = 180° - (\omega_1 + \omega_2).$$

Podle tangentové věty vypočteme poloviční rozdíl obou úhlů φ_1 a ψ_1

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \psi_1) = \frac{S_{23} - S_{13}}{S_{23} + S_{13}}\,.\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1);$$

odtud

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \psi_1) = \dots$$

Z polovičního součtu a rozdílu těchže úhlů vypočteme úhly φ_1 a ψ_1.

V dalším trojúhelníku $P_1P_2P_4$ známe dvě strany S_{14} a S_{24} a sevřený úhel $\omega_3 + \omega_4$. Pro úhly φ_2 a ψ_2 známe jejich součet

$$\varphi_2 + \psi_2 = 180° - (\omega_3 + \omega_4).$$

Podle tangentové věty vypočteme opět poloviční rozdíl obou úhlů φ_2 a ψ_2

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \psi_2) = \frac{S_{24} - S_{14}}{S_{24} + S_{14}} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2);$$

z toho

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \psi_2) = \dots$$

Ze známého součtu a vypočteného rozdílu polovičních úhlů stanovíme hledané úhly φ_2 a ψ_2. Kontrolou výpočtu je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

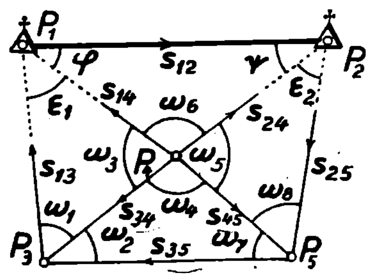
Znajíce nyní danou stranu s_{12} a všechny úhly, vypočteme podle sinové věty skutečné délky $s_{13}, s_{23}, s_{14}, s_{24}$ a s_{34}. Vynásobíme-li délky $S_{13}, S_{23}, \dots, S_{34}$ poměrem $\frac{s_{12}}{S_{12}}$, obdržíme též skutečné délky $s_{13}, \dots, s_{34}$.

Složená úloha Hansenova (obr. 144). Je známa vzdálenost $\overline{P_1P_2} = s_{12}$ nepřístupných bodů P_1, P_2 a úhly $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_8$ v bodech P_3, P_4 a P_5. Určiti je vzdálenosti s_{34}, s_{35} a s_{45}.

Pětiúhelník je určen, známe-li pro něho

$$n = 2 \,.\, 5 - 3 = 7$$

nezávislých veličin. V našem případě je jich dáno 8 (úhel ω_6 se nepočítá, je závislý na ostatních dávaje s nimi součet 360°) a přebytečné hodnoty užijeme k vyrovnání měřených hodnot



Obr. 144. Složená úloha Hansenova.

$$\omega_2 + \omega_4 + \omega_7 - 180° = U.$$

Je-li odchylka U malá a vyplývá z nevyhnutelných chyb při měření, rozdělí se stejnoměrně na všechny úhly v daném trojúhelníku. Nato určíme úhly ε_1 a ε_2

$$\varepsilon_1 = 180° - (\omega_1 + \omega_3), \quad \varepsilon_2 = 180° - (\omega_5 + \omega_6).$$

Z $\triangle\, P_1P_2P_4$ stanovíme součet neznámých úhlů φ a ψ:

$$\varphi + \psi = 180° - \omega_6,$$

nebo ze čtyrúhelníka $P_1P_2P_5P_3$

$$\varphi + \psi = 360° - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_7 + \omega_8 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

a poloviční součet

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \dots$$

Zvolíme-li za pól bod P_4, obdržíme podle obecné věty sinové

$$1 = \frac{\sin\varphi \sin\varepsilon_2 \sin\omega_1 \sin\omega_7}{\sin\psi \sin\varepsilon_1 \sin\omega_2 \sin\omega_8},$$

z čehož

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\varepsilon_1 \sin\omega_2 \sin\omega_8}{\sin\varepsilon_2 \sin\omega_1 \sin\omega_7} = \operatorname{tg}\mu;$$

odtud určíme $\mu = \dots$ a $\mu - 45° = \dots$

Konečně vypočteme

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\operatorname{tg}(\mu - 45°).$$

Po výpočtu polovičního rozdílu neznámých úhlů vypočtou se známým způsobem oba úhly φ a ψ. Z dané strany a úhlů měřených i vypočtených se sinovou větou vypočtou všechny strany daného pětiúhelníka.

8,5. Protínání zpětné.*) Úloha Snelliova (Pothenotova) (obr. 145). Jsou dány dvě strany s_{12} a s_{23} a úhel jimi sevřený γ; v bodě P_4,

*) Protínání zpětného se užívá při určování souřadnic bodů. Rozeznáváme protínání vpřed, zpět a kombinované. Při protínání vpřed se měří úhly jen v daných bodech, při zpětném v bodě hledaném a při protínání kombinovaném se měří úhly v bodě určovaném i v bodech daných.

jehož polohu hledáme, byly změřený úhly ω_1 a ω_2. Je určiti délky stran s_{14}, s_{24} a s_{34}.

Postup výpočtu je tento: Vnitřní úhly čtyrúhelníka $P_1P_2P_3P_4$ u bodů P_1 a P_3 nazveme φ a ψ. Jejich součet je dán výrazem

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tfrac{1}{2}[360^\circ - (\omega_1 + \omega_2 + \gamma)] = p.$$

Z $\triangle\, P_1P_2P_4$ plyne

$$\sin\varphi = s_{24}\,\frac{\sin\omega_1}{s_{12}}.$$

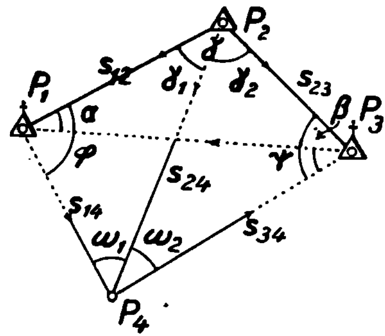
Z $\triangle\, P_2P_3P_4$ plyne

$$\sin\psi = s_{24}\,\frac{\sin\omega_2}{s_{23}}.$$

Poměr obou výrazů dává

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{s_{23}\sin\omega_1}{s_{12}\sin\omega_2} = \operatorname{tg}\mu;$$

poslední rovnice určuje $\mu = \ldots$, takže můžeme vypočísti $\mu - 45^\circ = \ldots$



Obr. 145. Snelliova úloha 1.

Poloviční rozdíl obou neznámých úhlů vypočteme opět tangentovou větou

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\operatorname{tg}(\mu - 45^\circ);$$

odtud

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \ldots$$

a známým způsobem vypočteme úhly φ a ψ. Potom dostaneme úhly γ_1 a γ_2 z rovnic

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\varphi + \omega_1),\quad \gamma_2 = 180^\circ - (\psi + \omega_2),$$

při čemž musí

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma,$$

což je kontrolou.

Strany určíme rovnicemi

$$s_{14} = s_{12}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\omega_1},\quad s_{34} = s_{23}\frac{\sin\gamma_2}{\sin\omega_2},$$

$$s_{24} = s_{12}\frac{\sin\varphi}{\sin\omega_1} = s_{23}\frac{\sin\psi}{\sin\omega_2}.$$

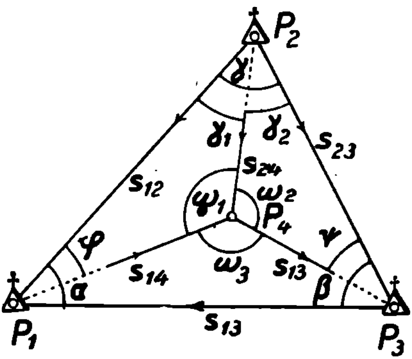
Poznámky. 1. Poměr $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$ lze obdržeti též z obecné věty sinové. Bod P_2 zvolíme za pól a pro úplnost spojíme bod P_1 s bodem P_3, abychom mohli vyznačiti úhly α a β. Obdržíme

$$1 = \frac{\sin\varphi \sin\omega_2 \sin\beta}{\sin\psi \sin\omega_1 \sin\alpha}, \quad \text{kde poměr } \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{s_{12}}{s_{23}}$$

a po dosazení a úpravě máme

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{s_{23}\sin\omega_1}{s_{12}\sin\omega_2},$$

což je výraz shodný s rovnicí získanou prvým postupem.



Obr. 146. Snelliova úloha 2.

2. V obr. 146 je hledaný bod uvnitř trojúhelníka $P_1P_2P_3$. Pro řešení je nutno znáti 5 veličin na sobě nezávislých a skutečně bylo jich dáno 5, dvě strany, sevřený úhel γ a měřené úhly ω_1, ω_2. Úhly α a β a měřený úhel ω_3 se nesmí tudíž bráti v počet. Postup výpočtu je jinak stejný jako v předešlém případě.

3. Úloha Snelliova se stává neřešitelnou, jsou-li všechny body — dané i určovaný — na kružnici. Početně se dá o tom provést důkaz tím, že součet úhlů $\varphi + \psi = 180°$ a tím pomocný úhel $\mu = 45°$. V důsledku toho $\text{tg}\,(\mu - 45°) = \text{cotg}\,(\mu + 45°) = 0$ a výraz na pravé straně rovnice

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\,\text{tg}\,(\mu - 45°)$$

se stává neurčitý. Tento případ se vyskytne sice ojediněle, avšak úloha se stává nejistou, jakmile se určovaný bod blíží opsané kružnici a součet úhlů φ a ψ se blíží 180°. Ve skutečnosti se zaměřuje na více známých bodů a pro výpočet se použije těch, které zaručují dobré výsledky. Ostatních měřených veličin se použije k vyrovnání souřadnic podle methody nejmenších čtverců.

V případě, kdy určovaný bod je uvnitř trojúhelníka, jehož vrcholy tvoří dané body, může se státi, že tg μ dává úhel, který může být stejně μ jako $180° + \mu$. Pomocný úhel μ považujeme vždy za kladný ostrý úhel a hodnota tg $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ podrží znaménko, které vyjde na pravé straně rovnice. Obdržíme-li pro hledané úhly φ a ψ dvojí hodnoty, podržíme ty, které poskytují kladné délky.

Protínání zpětné při zvláštním zaměření úhlů (obr. 147). Jsou dány strany s_{12}, s_{23} a sevřený úhel γ. V bodě P_1 byl změřen pouze úhel ω_1 a v bodě P_4 úhel ω_2. Vypočísti délky ostatních stran čtyrúhelníka $P_1P_2P_3P_4$. Úloha je určitá, neboť známe 5 veličin na sobě nezávislých. Zvolme za pól bod P_2 a podle obecné věty sinové pišme

$$1 = \frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\alpha}{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\beta}$$

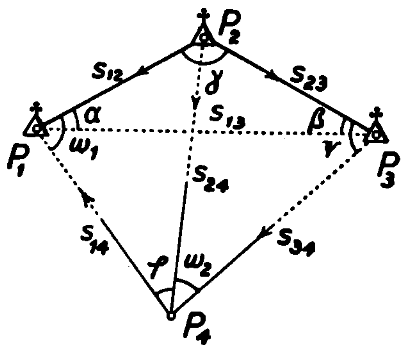
čili

$$\sin\varphi \sin\psi = \frac{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\beta}{\sin\alpha} = k.$$

Za

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{s_{12}}{s_{23}}$$

dosadíme do výrazu pro k. Součet obou neznámých úhlů φ a ψ je určen rovnicí



Obr. 147. Snelliova úloha 3.

$$\varphi + \psi = 360° - (\omega_1 + \omega_2 + \gamma),$$

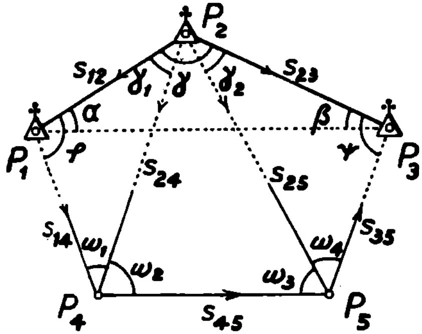
takže podle výkladu na str. 140 obdržíme

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos(\varphi + \psi) + 2k,$$

z toho $\varphi - \psi = \ldots$, a k tomu $\varphi + \psi = \ldots$; odtud vyplývá φ a ψ.

Další postup je stejný jako v předešlých případech.

(Obr. 148.) Úplně stejně postupujeme, máme-li z daných dvou stran P_1P_2, P_2P_3 a sevřeného úhlu $P_1P_2P_3$ vypočísti strany P_1P_4, P_4P_5, P_5P_3 směřující k dalším dvěma bodům P_4, P_5, v nichž byly měřeny potřebné úhly. Vždy se předem přesvědčíme, je-li obrazec určitý. V tomto případě jde o pětiúhelník, pro který potřebujeme znáti 7 veličin; vskutku dvě dané strany, sevřený úhel jimi a 4 měřené úhly v bodech P_4, P_5, jak k určení postačují, ukazuje obr. 148.



Obr. 148. Složená úloha Snelliova.

Složený případ protínání zpětného (obr. 149). Mezi danými třemi body P_1, P_2 a P_3 jsou známy délky stran s_{12}, s_{23} a sevřený úhel γ. Na vložených bodech P_4, P_5 a P_6 byly změřeny úhly ω_1, ω_2, ω_3 až ω_6. Určiti délky stran s_{14}, s_{45} až s_{36} polygonu vloženého mezi body P_1 a P_3.

V šestiúhelníku je nutno znáti 9 veličin nezávislých a známe jich vskutku 9. V obrazci vyznačíme úhly α a β a neznámé úhly φ a ψ u bodů P_1 a P_3; pro jejich součet platí

$$\varphi + \psi = 720° - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \gamma) = \\ = 720° - ([\omega] + \gamma).$$

Z věty sinové, užité na vzniklé trojúhelníky, vyplývá

$$s_{24} : s_{12} = \sin \varphi \ : \sin \omega_1,$$
$$s_{25} : s_{24} = \sin \omega_2 : \sin \omega_3,$$

$$s_{26} : s_{25} = \sin \omega_4 : \sin \omega_5,$$
$$s_{23} : s_{26} = \sin \omega_6 : \sin \psi;$$

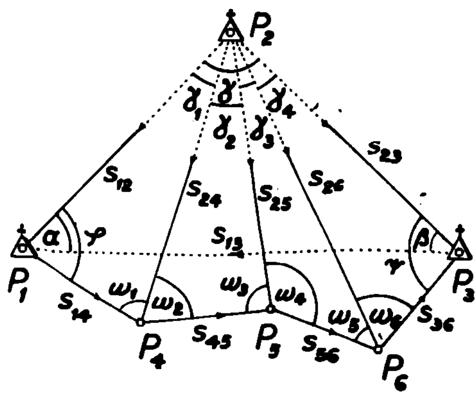
vynásobením obdržíme

$$\frac{s_{23}s_{24}s_{25}s_{26}}{s_{12}s_{24}s_{25}s_{26}} = \frac{\sin \varphi \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6}{\sin \psi \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5} = \frac{s_{23}}{s_{12}},$$

z toho

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_{23} \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5}{s_{12} \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6} = \operatorname{tg} \mu;$$

poslední rovnice poskytuje $\mu = \dots$.



Obr. 149. Složené protínání zpětné.

Poznámka. Poměr $\dfrac{\sin \varphi}{\sin \psi}$ obdržíme též podle obecnější věty sinové, zvolíme-li za pól bod P_2. Obdržíme

$$1 = \frac{\sin \varphi \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6 \sin \beta}{\sin \psi \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5 \sin \alpha}$$

a po dosazení za

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{s_{12}}{s_{23}}$$

vypočteme

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_{23} \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5}{s_{12} \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6}.$$

Známým způsobem vypočteme dále

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = q, \quad \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = p,$$

odkud dostaneme konečně $\varphi = p + q$, $\psi = p - q$.

Z vypočtených a daných úhlů a stran lze vypočísti podle sinové věty všechny délky stran v šestiúhelníku.