K tomuto zobrazení, které je v úzké souvislosti s pohybem neproměnné rovinné soustavy v její rovině, dospěli téhož roku 1911 dva autoři a to W. Blaschke a J. Grünwald. Základním prvkem pro zobrazení je tu opět přímka; její zobrazení obdržíme z jejího zobrazení dvojstopního (odst. **9,1**, obr. 42), při němž stopní roviny ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ jsou souměrně položeny ve vzdálenosti $d$ rovnoběžně k průmětně $\pi$, na niž kolmo promítáme.

Přímka $a$ se v tomto dvojstopním zobrazení zobrazuje v pár bodový ${}^1A_1$, ${}^2A_1$ (obr. 42). Abychom dostali kinematický obraz přímky $a$, otočme úsečku $\overline{{}^1A_1{}^2A_1}$ kolem jejího středu $A_1$ o 90° ve smyslu kladném; tu přejde půdorys prvého stopníku v levý a druhého stopníku v pravý kinematický obraz přímky $a$, jež označíme $A_l$, $A_p$. Tomuto zobrazení se vymykají, podobně jako v dvojstopním zobrazení, všechny přímky, jež jsou rovnoběžny s průmětnou $\pi$, neboli protínají úběžnou přímku $x_\infty$ průmětny $\pi$.

**11,1. Kinematický obraz bodu.** Bod $P$ se zobrazoval v dvojstopním zobrazení (odst. **9,1**; obr. 42) v homothetičnost mezi půdorysy prvních a druhých stopníků. I lze nyní ukázati, že všechny páry $A_lA_p$, $B_lB_p$, ... kinematického zobrazení přímek $a, b, \ldots$, jdoucích bodem $P$, spatřují se z půdorysu $P_1$ pod týmž úhlem $\omega$.

V obr. 42 je:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\overline{A_1A_p}}{\overline{A_1P_1}} = \frac{\overline{A_2{}^1A_2}}{\overline{A_2P_2}} = \frac{d}{z}, \text{ takže } \tfrac{1}{2}\omega = \operatorname{arctg}\frac{d}{z} + n\,.\,180°$$

$$\text{a } \omega = 2\operatorname{arctg}\frac{d}{z} + n\,.\,360°, \text{ kde musí } -180° \leqq \omega \leqq 180°.$$

Je tedy úhel $\omega$ pro bod $P$ a všechny body téže vzdálenosti $z$ od průmětny $\pi$ týž.

Pro zvláštní polohy bodu $P$ dostaneme: Je-li bod $P$ v průmětně $\pi$ ($z = 0$), je $\omega = 180°$. Pro bod $P$ v stopní rovině ${}^1\sigma$, (${}^2\sigma$) je $z = d$, ($- d$) a tedy $\omega = 90°$, ($- 90°$). Jestliže bod $P$ je úběžným bodem, odpovídají si páry ${}^1A_1{}^2A_1$, ${}^1B_1{}^2B_1$, ... v translaci a tedy též páry $A_lA_p$, $B_lB_p$ odpovídají si v translaci ($\omega = 0°$). Pole bodové levých obrazů přímek trsu o středu $P$ je souhlasně shodné s polem jejich pravých obrazů. I dostáváme:

*Body prostoru, vyjma úběžné body průmětny $\pi$, zobrazují se v otáčení kolem kolmých průmětů těchto bodů do průmětny $\pi$; úběžným bodům v prostoru odpovídají translace. Úhel otočení závisí na vzdálenosti bodu od průmětny při daných stopních rovinách.*

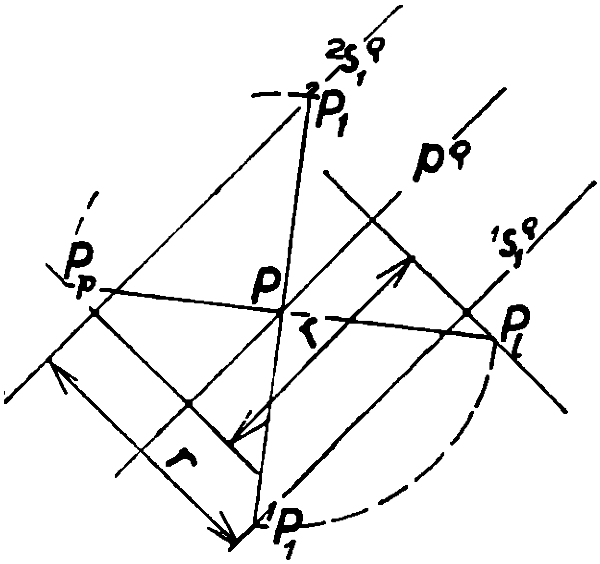
Také obrácená věta je správná.

**11,2. Kinematický obraz roviny.** Rovinu $\varrho$ je třeba považovati za pole paprskové a vyšetřiti v jakém vztahu je pole pravých obrazů těchto paprsků k poli jejich levých obrazů. Prvé stopníky paprsků pole $\varrho$ jsou na prvé stopě ${}^1s^\varrho$ a druhé stopníky na druhé stopě ${}^2s^\varrho$, patrně v půdoryse je ${}^1s_1{}^\varrho \parallel {}^2s_1{}^\varrho$ (obr. 46). Zvolme si přímku $p$ v rovině $\varrho$ obrazy ${}^1P_1$, ${}^2P_1$ jejích stopníků a otočme tyto kolem stopníku $P$ přímky $p$, ležícím na stopě $p^\varrho$, o $+90°$. Obrazy stopníků přejdou v levý a v pravý kinematický obraz $P_l$, $P_p$ přímky $p$ pole $\varrho$. Označíme-li vzdálenost půdorysů stop ${}^1s^\varrho$, ${}^2s^\varrho$ písmenem $r$, vidíme, že pravý obraz $P_p$ dostaneme z levého obrazu $P_l$, jestliže k poslednímu sestrojíme bod souměrně sdružený podle osy $p^\varrho$ a pak tento posuneme ve směru stopy $p^\varrho$ o délku $r$, jež je pro všechny přímky roviny $\varrho$ konstantní. Toto překlopení pole ($P_l$) kolem $p^\varrho$ a posunutí ve směru $p^\varrho$ o délku $r$, označme si jedním slovem *převrácením* pro osu převrácení $p^\varrho$ a vektor $r$. Pole ($P_p$) a ($P_l$) jsou nesouhlasně shodná. Dostáváme:

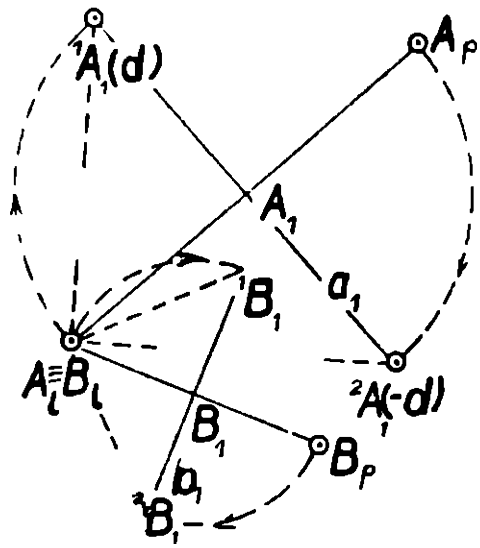
*Roviny zobrazují se kinematicky ve všechna převrácení průmětny považované za bodové pole.*

Je-li vektor převrácení $r = 0$, t. j. rovina $\varrho$ je kolma k průmětně $\pi$, tu převrácení přejde v překlopení kolem $p^\varrho$, neboli v souměrnost podle osy $p^\varrho$.

**11,3. Vzájemná poloha přímek.** Dvě *různoběžné* přímky $a(A_l, A_p)$, $b(B_l, B_p)$ mají společný bod a jsou v téže rovině, proto musí si jejich pravé obrazy $A_p$, $B_p$ a levé obrazy $A_l$, $B_l$ odpovídati jak v souhlasné tak nesouhlasné shodnosti, t. j. musí $\overline{A_lB_l} = \overline{A_pB_p}$. Při *rovnoběžnosti* přímek $a$, $b$, musí $\overrightarrow{A_pA_l} = \overrightarrow{B_pB_l}$. *Svazek paprskový* se zobrazuje ve dvě shodné řady bodové, z nichž jedna obsahuje pravé a druhá levé obrazy paprsků svazku.



Obr. 46. Kinematický obraz roviny.



Obr. 47. Kinematické obrazy levorovnoběžných přímek.

Zde mluvíme ještě o tak zvaných levo- případně pravorovnoběžných přímkách. Na př. levorovnoběžné přímky jsou takové, které mají týž levý obraz $A_l \equiv B_l$ (obr. 47). Vrátíme-li se od kinematického zobrazení k dvojstopníkovému, poznáme, že trojúhelníky ${}^1A_1A_l{}^2A_1$, ${}^1B_pB_l{}^2B_1$ jsou pravoúhlé a rovnoramenné a přímky $a$, $b$ náležejí tedy podle odst. **10,1** rotační paprskové síti, jež má osu v přímce kolmé k průmětně $\pi$ v společném levém obraze.

*Přímky levorovnoběžné* (pravorovnoběžné) *tvoří rotační paprskovou síť pravotočivou* (levotočivou), *jež má osu v přímce kolmé k průmětně v společném levém* (pravém) *obrazu.*

**II,4. Užití kinematického zobrazení.** Kinematické zobrazení může sloužiti *především* k přenesení různých vět o prostorových útvarech ve věty kinematické geometrie. Uvedeme zde jen dva jednoduché případy:

1. a) Dva body v prostoru určují jedinou spojnici.

b) Dvě různá otáčení v rovině mají jediný pár bodový společný, t. j. existuje jediný bod v rovině, který v obou otáčeních dává týž bod.

2. a) Dvě roviny mají jedinou přímku společnou.

b) Dvě různá převrácení v rovině mají jediný společný pár bodový.

Konstrukci bodových párů v případech b) ponecháváme laskavému čtenáři.

Za *druhé* lze tohoto zobrazení použíti pro spojitý pohyb rovinné neproměnné soustavy v její rovině. Za tím účelem mysleme si nákresnu $\pi$ jako stálou soustavu a označme ji $\pi_l$ a jako pohyblivou v sobě označme ji $\pi_p$. Každé poloze roviny $\pi_p$ vzhledem k $\pi_l$ přísluší jistý bod $P$ prostoru, který dostaneme tak, že body soustavy $\pi_p$ považujeme za pravé obrazy a odpovídající body shodného stálého pole $\pi_l$ za levé obrazy přímek trsu $P$. Když pole $\pi_p$ se spojitě pohybuje v pevném poli $\pi_l$, bod $P$ opíše v prostoru křivku $p$, kterou jmenujeme *obrazem pohybu*. Obráceně každé křivce $p$ v prostoru, jež je spojitá a jež má v každém bodě určitou tečnu (která se spojitě mění, mění-li se bod na křivce), odpovídá v nákresně spojitý pohyb neproměnné rovinné soustavy $\pi_p$ v rovině $\pi$.

Vytkněme si v pohybující soustavě $\pi_p$ bod $A_p$ a vyšetřme co odpovídá dráze toho bodu, pohybuje-li se rovina $\pi_p$ spojitě v $\pi$. Bodu $A_p$ odpovídá v shodné soustavě $\pi_l$ bod $A_l$; tyto body mohou případně splynouti, je-li $\pi_l$ počáteční polohou pohybující se soustavy $\pi_p$. Pár $A_l$, $A_p$ je obrazem přímky $a$, jež jde bodem $P$ odpovídajícím této poloze $\pi_p$ na obrazu $p$ pohybu. Pohybuje-li se soustava $\pi_p$ spojitě v $\pi$, tu opíše bod $A_p$ v rovině $\pi$ dráhu $(A_p)$ a příslušná přímka $a$ prochází odpovídajícími body $P$ na obrazu $p$. Dostáváme:

*Dráha libovolného bodu $A_p$ pohybující se soustavy $\pi_p$ je místem pravých obrazů všech přímek, jež protínají křivku p a patří síti levorovnoběžných přímek, jež mají levý obraz v odpovídajícím bodě $A_l$ shodné pevné soustavy $\pi_l$.*

Zvolíme-li $A_l$ v levém obraze tečny $a$ obrazu pohybu $p$, tu zůstane $A_p$ při přechodu k soumeznému obraznému bodu $P'$ na křivce $p$ týž, ježto levorovnoběžná přímka k přímce $a$ bodem $P'$ je táž přímka $a$. Bod $A_p$ zůstane v tom okamžiku pohybu pevný a je tudíž okamžitým středem otáčení, jež převádí polohu $\pi_p$ v soumeznou polohu $\pi_p'$. Tyto okamžité středy vyplní v rovině $\pi$ t. zv. *pevnou pólovou křivku* $p_p$ *pohybu*. Levý obraz $A_l$ tečny $a$ je v soustavě $\pi_l$ bodem, který při pohybu splyne s okamžitým středem $A_p$ a body ty vyplňují t. zv. *hybnou pólovou křivku* $p_l$ *pohybu*, jejímž kotálením po pevné křivce pólové $p_p$ dá se pohyb v rovině $\pi$ uskutečniti.

*Pohybuje-li se rovinná neproměnná soustava, jejíž body považujeme za pravé obrazy přímek po shodné rovinné soustavě pevné, jejíž body jsou levými obrazy přímek, při čemž obrazy téže přímky jsou v odpovídajících si bodech obou soustav, pak pólové křivky tohoto pohybu jsou v pravém a levém obrazu plochy tečen prostorového obrazu p tohoto pohybu. Pravý obraz je pevnou a levý obraz hybnou pólovou křivkou pohybu.*

Je-li křivka $p$ přímkou, tu příslušný pohyb je rotací kolem jejího pravého obrazu $P_p$. Potvrďte to obrazem!

Ježto soumezné tečny křivky $p$ se protínají, tu z podmínky různoběžnosti (odst. **11,3**) plyne, že odpovídající si oblouky obou pólových křivek jsou stejně dlouhé.

Přestaneme na těchto vlastnostech kinematického zobrazení, z nichž již plyne odůvodnění jeho pojmenování.