Jak se studují útvary v prostoru? I. část

I. O homogenních rovnoběžkových souřadnicích bodu v rovině; rovnice přímky a kuželosečky

In: Jiří Klapka (author): Jak se studují útvary v prostoru? I. část. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 5–20.

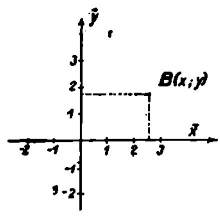
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403020

I.

O HOMOGENNÍCH ROVNOBĚŽKOVÝCH SOUŘADNICÍCH BODU V ROVINĚ; ROVNICE PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY.

1. **Homogenní souřadnice.** O dvojici čísel pravíme, že je uspořádaná, když je určeno, které z obou čísel je první a které je druhé. Označme prvé z nich x, druhé y, a současně zvolme známým způsobem v rovině, již nazveme ζ, pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnic. Jsou to dvě navzájem kolmé osy souřadnic $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ (šipky značí, že přímky jsou *orientovány*, t. j. že je na nich vytčen kladný smysl), jejichž body jsou očíslovány dvěma shodnými měřítky, která mají své nulové body v průsečíku O obou os, čili v počátku soustavy souřadnic.

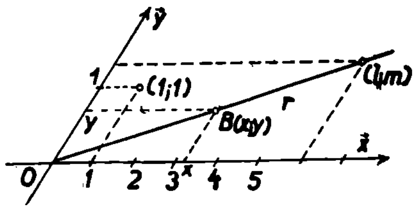
Vedeme-li bodem x osy $\overrightarrow{x}$ rovnoběžku s $\overrightarrow{y}$ (obr. 1) a bodem y na $\overrightarrow{y}$ rovnoběžku s $\overrightarrow{x}$, protínají se obě rovnoběžky v bodě, který označme $(x; y)$, což čteme: bod o úsečce x a o pořadnici y. Obdélník, jehož strany jsou souřadnicové osy a obě rovnoběžky, o nichž právě byla řeč, nazývejme souřadnicovým obdélníkem bodu $(x; y)$. Někdy označujeme bod v rovině ještě jistým písmenem, na př. $A, B, C, \ldots$, které pak píšeme před závorku se souřadnicemi onoho bodu, na př. $B\,(x; y)$.



Obr. 1. Pravoúhlá soustava souřadnic bodu v rovině.

Body v rovině a uspořádané dvojice souřadnic jsou danou souřadnicovou soustavou uvedeny v korespondenci oboustranně jednoznačnou, t. j. bodu v rovině náleží jediná dvojice souřadnic v této soustavě, a obráceně, kteroukoliv uspořádanou dvojici čísel lze pokládati za dvojici souřadnic jediného bodu v rovině v téže souřadnicové soustavě.

Pravoúhlé kartézské souřadnice bodu v rovině jsou zvláštním druhem t. zv. nehomogenních souřadnic rovnoběžkových. Obecné nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu B (obr. 2) určíme opět vedením rovnoběžek



Obr. 2. Rovnoběžková soustava souřadnic bodu v rovině.

bodem B se dvěma osami $\vec{x}$ a $\vec{y}$, které však nemusí býti navzájem kolmé a na nichž ležící měřítka nemusí býti shodná. Soustava je pak kosoúhlá a souřadnicový obdélník je zde zobecněn v souřadnicový rovnoběžník bodu B. Tuto soustavu lze určiti polohou obou os a t. zv. jednotkovým bodem, t. j. bodem (1; 1), který s počátkem (0; 0) postačuje k určení obou měřítek na souřadnicových osách a tím i k určení jejich orientace.

I tato obecná soustava rovnoběžkových souřadnic zprostředkuje oboustranně jednoznačnou korespondenci mezi uspořádanými dvojicemi čísel a body v rovině.

Povšimněme si blíže pojmu „směr přímky v rovině“.

V uvažované rovině buďtež dány osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a jednotkový bod, čímž obecná soustava rovnoběžkových souřadnic je určena. V dalším patrně postačí uvažovati pouze o přímkách procházejících počátkem O souřadnicové soustavy; směry paprsků tohoto svazku totiž vyčerpávají směry všech přímek v rovině.

Buď tedy r jeden z těchto paprsků; je jednoznačně určen dalším svým bodem $(l; m)$, různým od počátku O. Pak ovšem i bod

$$(\lambda l; \lambda m), \tag{1,1}$$

kde $\lambda \neq 0$, spolu s O určuje týž paprsek r, neboť každému z uspořádaných dvojčíslí (1,1) náleží jeden z bodů paprsku r. Skutečně, mění-li se λ, bod (1,1) opisuje r, neboť jeho souřadnicový rovnoběžník (obr. 2) vzniká z rovnoběžníku bodu $(l; m)$ stejnolehlostí o středu O a poměru λ. Směr přímky r závisí tudíž pouze na poměru $m : l$, jehož udavatele nazveme **směrnice** přímky r; $(m : l = k)$. Čísla l, m jsou **směrové parametry** přímky r. Směrnice a směrové parametry přímky q, která je s r rovnoběžná, jsou tytéž jako přímky r.

Zde připomeňme, že axiom, kterého mlčky používáme a který zní: „bodem lze vésti k dané přímce jedinou rovnoběžku", vyjadřujeme často slovy: „dvě rovnoběžky mají jediný společný bod v nekonečnu", t. zv. **bod nevlastní**. Z toho však plyne, že v každém směru existuje jediný bod nevlastní, náležející celé osnově rovnoběžných přímek. Jsou tedy **nevlastní body roviny a směry jejích přímek** ve vzájemné korespondenci oboustranně jednoznačné.

Uvedený tvar axiomu o rovnoběžkách je podkladem zjednodušené geometrické terminologie, ve které je možno množství výroků o směrech přímek vysloviti jako výroky o bodech. Na př. větu: „přímka je určena dvěma body, nebo bodem a směrem" lze vysloviti stručněji: „přímka je určena dvěma body", připustíme-li, že jeden z obou bodů může býti nevlastní.

Protože nám velmi záleží na stručnosti vyjadřování, použijeme i my této terminologie. Projeví se to tím, že celá soustava vět (t. zv. *projektivní geometrie*) bude platit bezvýjimečně pro všechny body, přímky, roviny a z nich sestrojené útvary v prostoru, kdežto bez doplnění prostoru body nevlastními by tomu tak nebylo. Proto říkáme, že nevlastní body doplňují rovinu, resp. prostor na **projektivní rovinu**, resp. na **projektivní prostor**.

Buď nyní

$$x_1; x_2; x_3 \tag{1,2}$$

uspořádaná trojice čísel, z nichž alespoň jedno není nula.

Je-li $x_3 \neq 0$, pak čísla (1,2) nazveme **homogenními rovnoběžkovými souřadnicemi** bodu, jehož nehomogenní souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1,3}$$

Je-li $x_3 = 0$, čísla (1,2) jsou **homogenní rovnoběžkové souřadnice nevlastního bodu ve směru určeném směrovými parametry**

$$l = x_1, \quad m = x_2. \tag{1,4}$$

Tato definice homogenních rovnoběžkových souřadnic zřejmě předpokládá, že je dána a jednoznačně určena rovnoběžková soustava souřadnic; vzhledem k ní jsou (1,2) homogenní, (1,3) nehomogenní rovnoběžkové souřadnice uvažovaného bodu. Z definice plyne:

Každé trojici (1,2) náleží jediný bod v rovině. Avšak obráceně, kterémukoliv bodu roviny náleží celé množství uspořádaných trojic jeho homogenních rovnoběžkových souřadnic vzhledem k dané soustavě souřadnic. Je-li (1,2) jedna z nich, a je-li $\lambda \neq 0$, pak $\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3$ je jiná z trojic tohoto množství, jež budeme stručně označovati

$$\{x_1; x_2; x_3\}, \tag{1,5}$$

nebo ještě stručněji

$$\{x\}. \tag{1,6}$$

Body na ose $\vec{x}$ jsou charakterisovány rovnicí $x_2 = 0$, body na $\vec{y}$ rovnicí $x_1 = 0$ a body nevlastní rovnicí $x_3 = 0$. Poslední rovnice je **lineární**; proto říkáme, že množství všech nevlastních bodů v rovině je t. zv. **nevlastní přímka roviny**. Nelze jí ovšem přisuzovati všechny vlastnosti, které mají ostatní přímky. Na př. nevlastní přímka nemá žádného směru a dvojice jejích bodů neurčuje úsečku.

V homogenních souřadnicích bod se zpravidla označuje týmž písmenem jako jeho souřadnice, avšak bez indexu. Jsou tedy x_1; x_2; x_3 souřadnice bodu x, což stručně zapisujeme symbolem

$x\,(x_1; x_2; x_3)$. Podobně $y\,(y_1; y_2; y_3)$ značí bod y o homogenních souřadnicích $y_1; y_2; y_3$, nebo $z'\,(z'_1; z'_2; z'_3)$ značí bod z' o homog. souřadnicích $z'_1; z'_2; z'_3$ a t. p.

Rovnice (1,3) a (1,4) nás poučují, jak z homogenních rovnoběžkových souřadnic bodu vypočteme jeho souřadnice nehomogenní vzhledem k téže soustavě souřadnic, resp. jaké jsou jeho směrové parametry, jde-li o bod nevlastní. Obráceně, jsou-li dány nehomogenní souřadnice $(x; y)$ bodu v rovině, pak trojice jeho homogenních rovnoběžkových souřadnic vzhledem k téže soustavě tvoří množství $\{x; y; 1\}$.

Jde-li o bod nevlastní, charakterisovaný směrovými parametry l, m, pak trojice jeho homogenních souřadnic v téže souř. soustavě tvoří množství $\{l; m; 0\}$.

Dva body $x\,(x_1; x_2; x_3)$ a $y\,(y_1; y_2; y_3)$ jsou totožné jen tehdy, když obě množství $\{x\}$ a $\{y\}$ jsou složena z týchž uspořádaných trojic, což vyjadřujeme symbolickou rovnicí $\{x\} = \{y\}$. Jsou-li oba body různé — a jen tehdy — píšeme $\{x\} \neq \{y\}$.

2. Přímka a kuželosečka v homogenních rovnoběžkových souřadnicích.

a) Píšeme-li lineární rovnici přímky p v nehomogenních souřadnicích ve tvaru

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \tag{2,1}$$

obdržíme z něho tvar homogenní

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \tag{2,2}$$

nahradíme-li v (2,1) x a y podle (1,3) a násobíme-li celou rovnici faktorem x_3. Alespoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 v rovnici (2,2) musí býti od nuly různý; je-li to pouze a_3, obdržíme rovnici přímky nevlastní. Zavedeme-li označení

$$p(x) \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

čili

$$p(x) \equiv \sum_i a_i x_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

lze rovnici přímky p psáti zkráceně

$$p(x) = 0. \tag{2,3}$$

Podobně nehomogenní rovnici kuželosečky f

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0 \tag{2,4}$$

upravme na homogenní tvar dosazením za x a y podle (1,3) a násobením celé rovnice faktorem x_3^2. Vychází rovnice

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + a_{33}x_3^2 = 0, \qquad (2,5)$$

kde je vyznačeno, že polynom na levé straně budeme stručně označovati $f(x, x)$. Za předpokladu, že pro všechny dvojice indexů i, k platí

$$a_{ik} = a_{ki}, \ (i, k = 1, 2, 3), \qquad (2,6)$$

lze stručně klásti

$$f(x, x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \ (i, k = 1, 2, 3),$$

a rovnici kuželosečky f lze psáti zkráceně $f(x, x) = 0$.

Je zřejmé, že nová rovnice (2,5) kuželosečky f je opět druhého stupně, avšak homogenní. Postup, který vedl od nehomogenní rovnice k homogenní rovnici přímky p, resp. kuželosečky f, budeme nazývati *homogenisací* rovnice čáry.

Stejně jako lineární rovnice vyjadřuje přímku a rovnice druhého stupně kuželosečku, homogenní rovnice stupně n ($n > 0$, celistvé) mezi běžnými homogenními souřadnicemi bodu jest rovnicí **algebraické křivky stupně** n.

Přímka protíná algebraickou křivku stupně n, **jejíž částí není, v** n **bodech**. Tuto často používanou větu musíme chápati v tom smyslu, že v souřadnicích homogenních určení společných bodů přímky a alg. křivky stupně n vždy vede na algebraickou homogenní rovnici stupně n o dvou (homogenních) neznámých. Kořeny této rovnice jsou s uvažovanými průsečíky v korespondenci oboustranně jednoznačné; aby věta byla správná, je nutno počítati k-násobnému kořeni korespondující průsečík za k průsečíků splývajících a nevylučovati z počtu průsečíky imaginární, korespondující komplexním kořenům.

Na příklad přímky p a q o rovnicích

$$\left.\begin{aligned} p(x) &\equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ \text{a} \quad q(x) &\equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2,7)$$

mají obecně jediný společný bod x, jehož homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3 jsou v poměrech

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2,8}$$

kde

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = a_i b_k - a_k b_i, \tag{2,9}$$

jsou t. zv. **determinanty druhého řádu.**

V determinantu (2,9) a_i, a_k, b_i, b_k jsou jeho *prvky*, a_i, a_k, je jeho *prvý řádek*, b_i, b_k *druhý řádek*, a_i, b_i *prvý sloupec*, a_k, b_k *druhý sloupec*, $a_i b_k$ jeho *hlavní úhlopříčka*.

Schema

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} \tag{2,10}$$

se nazývá *matice*. Na rozdíl od determinantu nemusí býti čtvercové a nemá žádné hodnoty. Matice (2,10) je dvojřádková a o třech sloupcích. Vynecháváme-li po jednom sloupci, vznikají tři determinanty druhého řádu této matice. Je-li alespoň jeden z nich od nuly různý, pak matice má hodnost 2; obecně hodnost matice je číslo, udávající nejvyšší ze všech řádů od nuly různých determinantů, vznikajících z matice vynecháním některých jejích řádků a sloupců.

Úměru (2,8) vyjadřujeme ještě stručněji ve tvaru

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}. \tag{2,11}$$

Kuželosečka f je křivka druhého stupně, proto přímka p, která není její částí, ji protíná ve dvou bodech. K určení obou průsečíků třeba řešiti soustavu rovnic (2,5) a (2,2). Specielně přímka nevlastní $x_3 = 0$ protíná f v dvojici nevlastních bodů, charakterisovaných rovnicí

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{2,12}$$

Rovnici (2,12) snadno nahradíme rovnicí pro směrnice k_1, k_2 obou směrů, v nichž leží oba tyto průsečíky

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \tag{2,13}$$

Podle reálnosti jejích kořenů třídíme kuželosečky v rovině na kuželosečky typu hyperbolického, parabolického nebo eliptického. V prvém případě je diskriminant rovnice (2,13)

$$\Delta = a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}$$

kladný, v druhém nula, v třetím záporný.

Kuželosečka typu hyperbolického má tedy dva reálné různé body nevlastní (ve směru asymptot, resp. ve směru obou jejích přímek, je-li singulární).

Kuželosečka typu parabolického má jediný bod nevlastní, který je však nutno pokládati za dva body splývající. Je-li to parabola, leží tento bod ve směru její osy.

Konečně kuželosečka eliptického typu nemá žádných reálných bodů nevlastních.

Je-li f skutečně hyperbola, parabola nebo elipsa, nebo je-li f kuželosečka degenerovaná (rozpadlá nebo někdy zvaná singulární), t. j. složená ze dvou reálných různých, reálných splývajících, nebo sdruženě imaginárních přímek, o tom rozhoduje hodnota t. zv. diskriminantu rovnice kuželosečky f

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - \\ - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Lze jej zjednodušiti, béřeme-li ohled na (2,6).

Jen tehdy, když $A \neq 0$, kuželosečka f není degenerovaná, t. j. je to elipsa, kružnice, hyperbola nebo parabola. Naproti tomu $A = 0$ je nutná a postačující podmínka toho, aby kuželosečka f byla degenerovaná.

Diskriminant A lze psáti ve tvaru determinantu třetího řádu

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

čili

$$A \equiv | a_{ik} |;$$

poněvadž pro jeho prvky platí rovnice (2,6), nazývá se souměrný; (skutečně jeho prvky položené souměrně podle jeho hlavní diagonály $a_{11}a_{22}a_{33}$ jsou stejné). I v něm prvky jsou sestaveny do řádků a sloupců.

Vyčíslování, t. j. výpočet hodnoty determinantu třetího řádu, je patrné ze schematu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

(pravidlo *Sarrusovo*). Jinak lze vyčísliti determinant A jeho rozvedením podle některého jeho řádku nebo sloupce podle této věty, patné pro determinant kteréhokoliv řádu n (t. j. o jakémkoli počtu řádků):

Hodnota determinantu rovná se součtu ze součinů prvků jednoho jeho řádku (nebo sloupce) s jejich minory.

Při tom minorem A_{ik} prvku a_{ik} rozumíme faktorem $(-1)^{i+k}$ násobený determinant, který vznikne z A, vynecháme-li v něm řádek i sloupec, obsahující prvek a_{ik}.

Je tedy podle věty právě uvedené

$$A = \sum_i a_{ik}A_{ik}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nebo

$$A = \sum_k a_{ik}A_{ik}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Na př. determinant

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

podle pravidla Sarrusova vyčíslíme takto:

$$A = 1 \,.\, 9 \,.\, 25 + 4 \,.\, 16 \,.\, 9 + 9 \,.\, 4 \,.\, 16 - 16 \,.\, 16 \,.\, 1 - 25 \,.\, 4 \,.\, 4 - 9 \,.\, 9 \,.\, 9 = -8.$$

Podle pravidla o rozvádění determinantů podle řádků nebo sloupců vychází (rozvádíme podle 1. řádku)

$$\Delta = 1\,.\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 16 \\ 16 & 25 \end{vmatrix} + 4\,.\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 9 & 25 \end{vmatrix} +$$

$$+ 9\,.\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} = -31 + 176 - 153 = -8.$$

Vraťme se k rovnici (2,12). Je to — kromě již uvedeného významu — společná rovnice obou přímek, které jsou rovnoběžné s asymptotami kuželosečky f a procházejí počátkem O. Její levá strana je rozložitelná v součin ($a_{22} \neq 0$)

$$a_{22}\left(x_2 + \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x_1\right)\left(x_2 + \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x_1\right),$$

z něhož jsou patrny rovnice obou přímek. V nehomogenních souřadnicích podle (1,3) tyto rovnice jsou

$$y + \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x = 0, \tag{2,14}$$

a

$$y + \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x = 0. \tag{2,15}$$

Je-li f kružnice, je $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ a předchozí dvě rovnice znějí

$$y \pm ix = 0, \text{ kde } i = +\sqrt{-1}.$$

Jsou to rovnice dvou imaginárních přímek, protínajících se v reálném bodě (sdruženě imaginární přímky), jež se nazývají isotropické (též minimální) přímky.

V jejich směrech ležící imaginární nevlastní body jsou kruhové body roviny. Název pochází patrně z toho, že každá kružnice v rovině jimi prochází; nikoli však jiné kuželosečky nedegenerované (nesingulární). Kruhové body, resp. isotropické přímky jsou důležity pro metrické vztahy v rovině a umožňují jejich jednoduchý výklad.

Každým bodem v rovině procházejí dvě sdružené isotropické přímky.

b) Stejně jako dvě různé přímky určují svazek přímek, je dvěma různými kuželosečkami f, g určen svazek kuželoseček. Je-li (2,5) opět rovnice kuželosečky f, kdežto

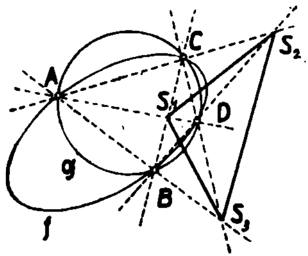
$$g(x, x) \equiv \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2,16}$$

kde $b_{ik} = b_{ki}$, rovnice kuželosečky g, pak rovnice každé další kuželosečky h svazku má tvar

$$h(x, x) \equiv f(x, x) - \varrho g(x, x) = 0, \tag{2,17}$$

kde ϱ je konstanta.

Je zřejmé, že kuželosečka h (obr. 3) prochází všemi společnými body kuželoseček f, g. Předpokládejme, že to jsou pouze čtyři body A, B, C, D, tvořící t. zv. basi svazku. Některé z nich mohou ovšem splývati, na př. když kuželosečky f a g se dotýkají.



Obr. 3. Svazek kuželoseček s kuželosečkami rozpadlými.

Obráceně, každá kuželosečka procházející všemi body base náleží svazku. Proto mu náležejí i obecně tři rozpadlé kuželosečky h_1, h_2, h_3, složené z dvojic přímek AB, CD, resp. AC, BD, resp. AD, BC. Jejich singulární body označme S_1, S_2, S_3.

Jaké musí býti ϱ v rovnici (2,17) kuželosečky h svazku, aby to byla kuželosečka degenerovaná? Jak víme, nutná i postačující podmínka pro to je, aby diskriminant kuželosečky měl hodnotu 0, t. j. aby bylo

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho b_{11} & a_{12} - \varrho b_{12} & a_{13} - \varrho b_{13} \\ a_{21} - \varrho b_{21} & a_{22} - \varrho b_{22} & a_{23} - \varrho b_{23} \\ a_{31} - \varrho b_{31} & a_{32} - \varrho b_{32} & a_{33} - \varrho b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{2,18}$$

Rozvedeme-li determinant $D(\varrho)$ a uspořádáme-li vzniklý výraz podle mocnin ϱ, obdržíme v ϱ kubickou rovnici

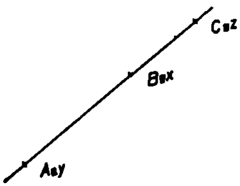
$$B\varrho^3 - I\varrho^2 + J\varrho - A = 0, \tag{2,19}$$

kde $B = | b_{ik} |$ atd. Její kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ charakterisují singulární kuželosečky h_1, h_2, h_3 svazku (2,17).

c) Čára v rovině nemusí vždy býti dána jedinou rovnicí; je též možno souřadnice bodu čáry vyjádřiti jako funkce nezávisle proměnné, t. zv. **parametru**. Mění-li se parametr, mění se i souřadnice bodu na čáře, který ji opisuje.

Příkladem tohoto t. zv. **parametrického vyjádření čáry** jsou známé rovnice

$$x = \frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}, \tag{2,20}$$



Obr. 4. Bod C na spojnici bodů A, B.

vyjadřující nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu $C\,(x; y)$, který leží na spojnici (obr.4) bodů $A\,(x'; y')$ a $B\,(x''; y'')$, při čemž $\lambda = \overline{AC} : \overline{BC}$ je dělicí poměr bodu C vzhledem k dvojici bodů A, B. Mění-li se λ bez omezení, bod $C\,(x; y)$ opisuje přímku AB.

Vyloučením parametru λ z rovnic (2,20) bychom došli k lineární rovnici mezi x, y přímky AB. Homogenní souřadnice bodu C označme x_1, x_2, x_3. Pak jest

$$\{x_1; x_2; x_3\} = \left\{\frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}; \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}; 1\right\}$$

a

$$\{x\} = \{x' - \lambda x'', y' - \lambda y'', 1 - \lambda\}. \tag{2,21}$$

Homogenisujme předchozí výrazy kladouce

$$1. \quad x' = \frac{y_1}{y_3}, \quad y' = \frac{y_2}{y_3}; \qquad 2. \quad x'' = \frac{z_1}{z_3}, \quad y'' = \frac{z_2}{z_3},$$

takže uvažované body přímky AB jsou 1. $A \ldots y\,(y_1; y_2; y_3)$; 2. $B \ldots z\,(z_1; z_2; z_3)$; 3. $C \ldots x\,(x_1; x_2; x_3)$. Současně položme

$$\lambda = -\frac{\lambda_2 z_3}{\lambda_1 y_3}. \tag{2,22}$$

Pak z (2,21) vychází

$$\{x\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1;\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2;\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3\},$$

což — nedbáme-li geometricky bezvýznamného faktoru úměrnosti při x — lze vyjádřiti symbolickou rovnicí

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \tag{2,23}$$

kde λ_1 a λ_2 nejsou současně nuly.

Bod x leží tedy na spojnici (yz) bodů y a z jen tehdy, existují-li dvě čísla λ_1 a λ_2, z nichž alespoň jedno není nula, která vyhovují symbolické rovnici (2,23), zastupující tři skutečné rovnice

$$x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i, \ (i = 1, 2, 3).$$

Nutná a postačující podmínka pro existenci čísel λ_1, λ_2 je

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2,24}$$

Je-li splněna, říkáme, že body x, y, z jsou **lineárně závislé**, nebo že některý z nich je lineární kombinací obou zbývajících. Jinak body x, y, z jsou **lineárně nezávislé**. V prvém z obou případů všechny tři body náležejí jediné přímce, v druhém nikoliv.

Buď u čtvrtý bod na (yz); je to jiná lineární kombinace bodů y, z než (2,23), označme ji

$$u = \mu_1 y + \mu_2 z,$$

při čemž musí býti $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, aby nebylo $\{x\} = \{u\}$. Dělicí poměr bodu u vzhledem k y, z je podle (2,22)

$$\mu = -\frac{\mu_2 z_3}{\mu_1 y_3}. \tag{2,25}$$

Poměr $\lambda : \mu$ se nazývá **dvojpoměr** bodové čtveřiny $(yzxu)$. Zřejmě je

$$\lambda : \mu = \frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}. \tag{2,26}$$

Je-li tento dvojpoměr roven -1, čili je-li $\lambda = -\mu$, **čtveři-**

na $yzxu$ se nazývá **harmonická**. Též říkáme v tomto případě, že dvojice bodů x, u odděluje harmonicky dvojici y, z a obráceně. Nutná a postačující podmínka pro to je

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0, \tag{2,27}$$

jak z (2,26) ihned vychází.

Všechny tyto vztahy zůstávají v platnosti, když jeden nebo více z uvažovaných bodů jsou nevlastní, jak dokážeme později (odst. 6).

Příklady k cvičení.

1. Dokažte, že podmínka rovnoběžnosti přímek (2,7) je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$! [Vychází ihned z (2,8), kde $x_3 = 0$.]

2. Dokažte, že násobením všech prvků jednoho řádku (sloupce) týmž číslem násobí se jím i hodnota onoho determinantu! [Myslete si determinant rozveden podle onoho řádku (sloupce)!]

3. Dokažte, že výměna dvou řádků (sloupců) determinantu má za následek změnu znaménka jeho hodnoty! [Pro determinant druhého řádu je to zřejmé, pro det. třetího řádu je to též zřejmé, myslíme-li si jej rozveden podle nevyměněného řádku (sloupce); odtud plyne, že tomu je tak i pro determinant čtvrtého, pak pátého atd., tedy každého řádu.]

4. Dokažte, že determinant, jehož jeden řádek (sloupec) je a) shodný s druhým; b) násobkem druhého, má hodnotu nula [a) Plyne z př. 3! b) Plyne z a) a z příkl. 2.]

5. Odvoďte, že kuželosečka (2,5) má v bodě x o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|$$

střed, nevlastní bod osy, nebo singulární bod podle toho, je-li to kuželosečka středová, parabola nebo rozpadlá kuželosečka. [Zkoumejte průsečíky kuželosečky s přímkami svazku o středu x]!

6. Dokažte, užívajíce výrazů pro souřadnice středu kuželosečky, uvedených v příkl. 5 a rovnice (2,12), že společná rovnice obou asymptot středové kuželosečky (2,5) zní

$$\Delta f(x; x) + A x_3^2 = 0.$$

Co praví tato rovnice, je-li kuželosečka (2,5) parabola ($\Delta = 0$, $A \neq 0$), nebo degenerovaná kuželosečka ($A = 0$)?

7. Dokažte, že rovnice poláry bodu y (y_1, y_2, y_3) vzhledem ke kuželosečce (2,5) je $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je kterýkoliv z výrazů

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + \\ &\quad + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + \\ &\quad + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) \equiv \\ &\equiv x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) + \\ &\quad + x_3(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) \equiv \\ &\equiv y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ &\quad + y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned}$$

Ukažte, že souřadnice bodu x v příkl. 5 náleží pólu nevlastní přímky!

8. Dokažte, že $A = 0$ je nutná podmínka pro to, aby se kuželosečka rozpadla tak, že určíte hodnotu diskriminantu A pro degenerovanou kuželosečku o rovnici

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \, . \, (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0!$$

9. Jaké rovnici vyhovuje ϱ, je-li kuželosečka h svazku (2,17) parabola? $\left[\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho b_{11}, & a_{12} - \varrho b_{12} \\ a_{21} - \varrho b_{21}, & a_{22} - \varrho b_{22} \end{vmatrix} = 0.\right]$ Kolik je obecně parabol ve svazku kuželoseček? [Dvě.]

Obsahuje svazek (2,17) vždy kružnici? [Obecně nikoliv.] Dokažte, že obsahuje-li dvě, je složen pouze z kružnic!

10. Co je místem středů kuželoseček svazku (2,17)? [Kuželosečka. — Vyjděte od výrazů pro střed v příkl. 5!]

11. Dokažte, že trojúhelník $S_1S_2S_3$ o vrcholech v singulárních bodech degenerovaných kuželoseček svazku (2,17) je společný polární trojúhelník všech kuželoseček svazku (t. j. že jeho strany jsou poláry protějších vrcholů vzhledem ke všem kuželosečkám svazku). [Volte vhodně souřadnicovou soustavu a za základní kuželosečky f, g svazku (2,17) jeho kuželosečky složené z přímek.] Viz obr. 3.

12. Dokažte, že lineární kombinace bodů nevlastních je bod nevlastní! [Je-li v (2,23) $y_3 = z_3 = 0$, je i $x_3 = 0$.]

13. Dokažte, že dvě přímky jsou kolmé, když jejich nevlastní body oddělují harmonicky body kruhové! [Jsou-li (2,7) uvažované přímky, jsou jejich nevlastní body x $(a_2; -a_1; 0)$ a u $(b_2; -b_1; 0)$. Kruhové body naproti tomu jsou y $(i; 1; 0)$ a $z(-i; 1; 0)$. Je $x = -(a_1 + a_2i)\, y + (-a_1 + a_2i)\, z$, $u = -(b_1 + b_2i)\, y + (-b_1 + b_2i)\, z$; z podmínky kolmosti obou přímek $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ plyne (2,27) a obráceně, což bylo dokázati].

14. Dokažte, že koncové body úsečky, její bod půlící a nevlastní bod přímky jí určené tvoří čtveřinu harmonickou! [Dělicí poměr půlícího bodu je -1, děl. pom. nevlastního bodu je $+1$.]

15. Dokažte:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k_1 & a_{12}+k_2 & \dots & a_{1n}+k_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[Rozvedením podle prvního řádku. Dokažte vztah též pro jiný řádek (sloupec) než prvý a výsledek formulujte ve větu!]

16. Dokažte, že hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k prvkům jednoho řádku (sloupce) stejnolehlé prvky jiného řádku (sloupce), násobené libovolným společným faktorem! [Plyne z příkladu 15.] Rozšiřte na přičítání několika znásobených řádků (sloupců)!