Spojnicové nomogramy

Dodatek

In: Václav Pleskot (author): Spojnicové nomogramy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 108–115.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402999

Danou rovnici přepišme na

$$\frac{T - H}{0 + G} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{a}{g \cos \alpha} + \psi}{\dfrac{1}{\cos \alpha} + 0}.$$

Vynásobíme-li levou stranu rovnice v čitateli konstantou m ve jmenovateli n, pravou stranu rovnice v čitateli mp, ve jmenovateli np a srovnáme přepsanou rovnici s rovnicí (K_6), dostaneme zobrazovací rovnice

$$\begin{aligned} &\xi_1 = 0, && \eta_1 = mT; \\ &\xi_2 = -nG, && \eta_2 = mH; \\ &\xi_3 = np\frac{1}{\cos \alpha}, && \eta_3 = mp\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{g \cos \alpha}\right); \\ &\xi_4 = 0, && \eta_4 = -mp\psi. \end{aligned}$$

Moduly: $m = 0{,}000\,42$ cm, $n = 0{,}000\,42$ cm, $p = \dfrac{6{,}25}{0{,}000\,42}$; $mp = 6{,}25$ cm, $np = 6{,}25$ cm. Obr. 66.

Stupnice sestrojované podle souřadnic ξ_3, η_3 a ξ_4, η_4 zakreslujeme v soustavě o 90° otočené proti soustavě, v níž kreslíme stupnice podle souřadnic ξ_1, η_1 a ξ_2, η_2!

Binární stupnice: Z výrazů pro souřadnice ξ_2, η_2 vidíme, že proměnná G se zobrazuje (isopletami) soustavou rovnoběžek s osou η a proměnná H soustavou rovnoběžek s ξ. Z výrazů pro souřadnice ξ_3, η_3 vyplývá jednak, že proměnná α se zobrazuje soustavou rovnoběžek s η' (v otočené soustavě souřadnic o 90°) a potom, vyloučíme-li z těchto výrazů α, zjistíme, že proměnná a se zobrazuje soustavou hyperbol [o rovnici $\xi^2 (a^2 - g^2) + g^2\eta^2 - 2ag\xi\eta + g^2m^2p^2 = 0$; při $m = n$!].

Soustavu těchto čar narýsujeme pohodlně, všimneme-li si, že rovnoběžky s osou η' je protínají v měřítkách. Položíme-li za α určitý stupeň, vyjadřuje pak η_3 lineární funkci (v podstatě měřítko). Na př. pro $\alpha = 30°$ najdeme na rovnoběžce

$$\xi_3 = \frac{6{,}25}{\cos 30°} \text{ cm} \doteq 7{,}25 \text{ cm}$$

body lineární funkce

$$\eta_3 = 6{,}25 \left(\operatorname{tg} 30° + \frac{a}{9{,}81 \cos 30°}\right),$$

takže od $\eta_3 = 6{,}25 \,.\, \operatorname{tg} 30°$ cm $\doteq 3{,}61$ cm vyneseme měřítko o modulu rovném $\dfrac{6{,}25}{9{,}81 \,.\, \cos 30°}$ cm $\doteq 0{,}74$ cm.

Dodatek.

Determinanty. Pro usnadnění i zkrácení výpočtů, a k lepší přehlednosti výsledků užívá se v matematice různých značek a schemat.

Příklady běžného symbolického označení jsou každému známy, i když si je snad neuvědomuje. Každý ví, že výrazem a^3 rozumíme součin $a \,.\, a \,.\, a$, podobně $(a+b)^5$, že vyznačuje zkráceně součin pěti stejných činitelů $(a+b)$. Pomocí symbolu pro označení mocnění t. zv. mocnitele, exponentu, zkrátili jsme si podstatně způsob naznačení výpočtu. V dalším se seznámíme s důležitým symbolem pro určitý součet součinů, který bude mít pro naše výklady podstatnou důležitost.

Máme-li utvořit ze čtyř čísel a_1, a_2, b_1, b_2 následující rozdíl součinů

$$a_1b_2 - b_1a_2, \qquad (s)$$

zavedeme si přehlednější způsob jeho vypsání, totiž tabulku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (d)$$

k níž si připojíme návod, jak jí rozuměti, aby udávala uvedený součet (s). Abychom poznali na prvý pohled, že neběží o pouhé sestavení čtyř čísel do tabulky, nýbrž o početní útvar (symbol), opatříme tabulku dvěma svislými úsečkami. Symbolu (d) budeme říkat determinant a číslům v ní stojícím prvky determinantu. Při tom říkáme, že čísla stojící ve „vodorovné“ řadě jsou prvky determinantu z téhož řádku, podobně čísla stojící pod sebou (v sloupci) jsou prvky determinantu z téhož sloupce.

Má-li determinant (d) udávat součet součinů (s), musí o jeho vyčíslení (rozvedení) platit pravidlo vyjádřené rovnicí

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2,$$

kde na levé straně rovnice šipka směřující vpravo určuje součin prvků opatřený znaménkem + a šipka směřující vlevo určuje součin prvků opatřený znaménkem —.

Protože v determinantu (d) máme dva řádky a dva sloupce, říkáme, že máme determinant druhého stupně nebo řádu.

Zaměníme-li v determinantu spolu dva řádky nebo dva sloupce, změní hodnota determinantu [t. j. rozdíl (s)] svoje znamení, neboť

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

V závorce je rozdíl (s), čímž je věta potvrzena.

Podobně

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

Ukažme větu na determinantu obsahujícím čísla zvláštní

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 91 = -71$$

a

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 91 - 20 = 71.$$

V našich úvahách se význačným způsobem uplatňuje determinant třetího stupně, t. j. určitý součet součinů, který pohodlně dostaneme z tabulky

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3. \end{matrix}$$

Nyní běží o tabulku sestavenou z devíti prvků napsaných do tří řádků a tří sloupců. Prvky, stojící v témže sloupci značíme stejným písmenem a indexem u písmen vyznačíme řádek, ve kterém prvek stojí.

Pravidlo pro vyčíslení uvedeného součtu součinů udáme následujícím schematem

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

(k předchozí tabulce byly připsány ještě jednou první dva sloupce). Schematu budeme rozumět tak, že každý součin je utvořen násobením prvků téže spojnice a ty, jejichž spojnice směřuje k pravé ruce, jsou opatřeny znamením $+$, druhé, jejichž spojnice směřuje k levé ruce, znamením $-$. Takže hledaný součet součinů je

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3. \qquad (1)$$

Tento součet, pro který budeme užívat znaku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (D)$$

nazýváme determinantem třetího stupně nebo řádu (podle počtu řádků nebo sloupců čili podle počtu řad, jak nazýváme společně řádky a sloupce). Způsob, kterého jsme užili ke stanovení hodnoty determinantu, nazýváme pravidlem Sarrusovým.

Všimneme-li si pozorně výrazu (1) poznáme, že hodnotu determinantu tvoří součiny utvořené vždy z tří prvků, které jsou vzaty po jednom z každého řádku a z každého sloupce, zvláště pak, že vyčíslení determinantu lze psát též takto:

$$D = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3), \qquad (2)$$

což naznačuje, že každý prvek prvního řádku jest násobiti výrazy, které jsou sestaveny z prvků determinantu vybraných z řádků a sloupců, do nichž prvek, jejž násobíme, nenáleží, ovšem v udaném pořádku; součiny jsou pak po řadě opatřeny znaménky $+ - +$.

Užijeme-li znaků pro determinant druhého stupně, lze výpočet determinantu třetího stupně vyznačit takto:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Uvažovaný způsob výpočtu hodnoty determinantu je zvláště výhodný, jsou-li některé prvky v prvním řádku nuly. Říkáme mu rozvedení determinantu podle prvního řádku.

Snadno seznáme, že lze determinant rozvést podle prvků kterékoliv řady. Zavedeme-li název doplněk prvku, popíšeme snadno postup rozvedení.

Nazývejme v determinantu D doplňkem prvku stojícího v i-tém řádku a k-tém sloupci determinant stupně druhého, který obdržíme z determinantu D stupně třetího, když v něm vynecháme řádek i-tý a sloupec k-tý a znásobíme jej $(-1)^{i+k}$. Na př.: Doplněk prvku b_3, značme jej B_3, je

$$B_3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Takže nyní můžeme říci:

Determinant rozvedeme podle prvků některé řady tak, že každý prvek této řady znásobíme jeho doplňkem a tyto součiny sečteme.

Význam tohoto způsobu vyčíslení determinantu tkví v jeho obecnosti, t. j. platí pro jakýkoliv řád determinantu, kdežto pravidlo Sarrusovo platí jen pro řád 3!

Příklad.

1. Rozvedení D podle druhého sloupce vypadá

$$D = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 =$$
$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2. Výpočet (3) lze tudíž psát

$$D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1.$$

Z definice, jak byla uvedena, plynou o determinantu tyto věty:

a) Jestliže v determinantu vyměníme spolu dvě rovnoběžné řady (tedy buď dva sloupce nebo dva řádky), změní determinant pouze svoje znamení.

Zaměňme v determinantu D spolu druhý a třetí řádek, dostaneme (rozvedeme-li D' podle prvního řádku)

$$D' = a_1 (b_3c_2 - c_3b_2) - b_1 (a_3c_2 - c_3a_2) + c_1 (a_3b_2 - b_3a_2) = - D,$$

jak zjevno srovnáním s (2).

Podobně platí rovnosti

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{atp.}$$

Z předchozí věty ihned plyne:

b) Jsou-li v determinantu dvě rovnoběžné řady stejné, je determinant roven nule.

Neboť podle věty a), vyměníme-li tyto dvě rovnoběžné řady, změní determinant svoje znamení, aniž se jinak změnil (řady jsou totiž stejné), takže platí

$$D = - D, \quad \text{čili} \quad 2D = 0$$

a tedy

$$D = 0.$$

c) Jestliže v determinantu násobíme každý prvek jedné řady týmž číslem k, zvětší se hodnota determinantu k-krát.

Pro důkaz znásobme v (2) řadu a_1, b_1, c_1 číslem k; tím se zvětší také levá strana rovnice k-krát.

Totéž platí o dělení (ovšem číslem od nuly různým). (Dělení číslem k je vlastně násobení číslem $\frac{1}{k}$.)

Znásobíme-li každý prvek řady číslem k, mluvíme o k-násobku řady.

d) Rčení, dělit determinant prvním sloupcem, budeme rozumět tak, že každým prvkem prvního sloupce dělíme všechny prvky determinantu v řádku, v kterém prvek stojí. Výsledný determinant má pak v prvním sloupci vesměs jednotky. Rčení vyslovené o prvním sloupci lze samozřejmě vyslovit o každé řadě, v níž není žádný prvek nulový.

Dělíme-li determinant D posledním sloupcem, dostaneme

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1 \\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1 \\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{D}{c_1 c_2 c_3}.$$

Pro naše účely je zvláště důležitá věta:

e) **Hodnota determinantu se nemění, jestliže k některé jeho řadě přičteme násobky ostatních řad rovnoběžných.** Ukažme správnost věty na příkladě, kde k prvnímu sloupci v D byl přičten k_1-násobek druhého a k_2-násobek třetího sloupce, t. j. na determinantu.

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 b_1 + k_2 c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k_1 b_2 + k_2 c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k_1 b_3 + k_2 c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 + k_1 b_1 + k_2 c_1)(b_2 c_3 - c_2 b_3) - (a_2 + k_1 b_2 + k_2 c_2) \,.$$
$$. \, (b_1 c_3 - c_1 b_3) + (a_3 + k_1 b_3 + k_2 c_3)(b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

Ihned zjistíme, že na pravé straně se zruší po vynásobení součiny, u nichž stojí k_1 a k_2 a zbude

$$a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - c_1 b_3) + a_3 (b_1 c_2 - c_1 b_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D,$$

čímž je věta potvrzena, neboť

$$D' = D.$$

Povšimneme-li si v rozvedení D' pozorněji součinů, u nichž stojí k_1, resp. k_2, poznáme, že z nich lze sestavit determinant

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{resp.} \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

které se podle věty b) rovnají nule. Determinant D' lze tedy napsat jako součet tří determinantů

$$D' = D + k_1 D_1 + k_2 D_2 = D.$$

Protože vždycky můžeme rozvést determinant podle té řady, k níž jsou přičteny násobky řad ostatních, dostaneme vždy jednak determinant D a potom determinant, v nichž jsou vždy dvě řady stejné, čili determinanty rovné nule, máme tím větu e) dokázánu.

Specielně podle věty e) platí:

f) Hodnota determinantu se nemění, jestliže k řadě přičteme nebo odečteme řadu s ní rovnoběžnou nebo její k-násobek.

Uveďme konečně, jak znásobíme spolu dva determinanty třetího stupně, aniž bychom předem každý rozvedli.

Řekněme nejdříve, že součinem i-té řady prvního determinantu s k-tou řadou druhého determinantu rozumíme součet součinů vzniklých násobením prvků i-té řady determinantu prvního se stejnolehlými prvky k-té řady determinantu druhého. Tak na př. je-li a_1, b_1, c_1 řada v prvním determinantu a f_1, g_1, h_1 řada v druhém determinantu je součet

$$a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1$$

součin obou řad. Tu platí věta:

g) Součin dvou determinantů třetího stupně lze napsati taktéž jako determinant stupně třetího, jehož prvky jsou součiny všech rovnoběžných řad jednoho se všemi rovnoběžnými řadami druhého determinantu, a to tak, že prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je součin i-té řady jednoho a k-té řady druhého.