Imaginární elementy v geometrii

5. Imaginární elementy v rovině

In: Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1941. pp. 33–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402981

na přímce p páry $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$ na kružnici a určeme její střed J (obr. 12a). Ke zvolenému bodu A' dostaneme bod A'' na spojnici $A'J$. Sestrojme pól P přímky $A'A''$, který padne vně kružnice na přímku p. PJ dává pak na kružnici body D', D''; páry $A'A''$, $D'D''$ tvoří harmonickou čtveřinu na kružnici. Průmětem z bodu S na přímku p dostaneme harmonicky se oddělující páry $A'_0A''_0$, $D'_0D''_0$.

Poznámky a cvičení. 1. Involuce paprsková je dána dvojným paprskem m a párem $a'a''$; sestrojte druhý dvojný paprsek n, pravoúhlý pár a k danému paprsku b' přidružený b''.

2. Je dána symetrická paprsková involuce (dvojné paprsky jsou k sobě kolmé). Protněte ji kružnicí jdoucí vrcholem. Kde je střed involuce? Totéž proveďte pro involuci pravoúhlou!

3. Najděte společný pár dvou soumístných involucí na přímce a) jedna je hyperbolická, druhá eliptická; b) obě jsou eliptické.

4. Nechť se na přímce páry bodové AB, CD oddělují harmonicky. Dalšímu bodu X buď přiřaděn harmonicky X_1 vzhledem k AB a X_2 vzhledem k CD. Ukažte, že pak AB, CD, X_1X_2 jsou tři páry involuce. (Převeďte na kružnici!)

5. Imaginární elementy v rovině.

V reálné rovině mějme dvě osy k sobě kolmé x, y jdoucí počátkem O a orientované. Bodu M patří známým způsobem dvě pravoúhlé souřadnice x_1, y_1, které píšeme $(x_1; y_1)$. Obráceně dvojině čísel $(a; b)$ přiřaďujeme bod, takže první číslo znamená souřadnici x, druhé souřadnici y. Jsou-li obě čísla reálná, je bod reálný, není-li aspoň jedno reálné, říkáme, že bod je imaginární. Ke každému imaginárnímu bodu v rovině patří bod imaginární sdružený. Na př. bod A $(1 + 2i; 3 - 4i)$ a A' $(1 - 2i; 3 + 4i)$ jsou imaginární body sdružené.

Omezíme-li se na reálná čísla, může každá z hodnot x, y proběhnouti všechna čísla od $-\infty$ do $+\infty$; říkáme, že množství reálných bodů v rovině je dvourozměrné. Podle toho množství imaginárních bodů v rovině je čtyřrozměrné, neboť v $x_1 + ix_2$, $y_1 + iy_2$ každé z čísel x_1, x_2, y_1, y_2 může proběhnouti všechna čísla reálná.

Přímka v rovině je dána rovnicí

$$ax + by + c = 0 \tag{1a}$$

neb

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{1b}$$

kde a, b nebo u, v současně nejsou rovny nule. Jsou-li všechny koeficienty reálné, říkáme, že přímka je reálná, není-li aspoň jeden reálný, říkáme, že přímka je imaginární. Množství reálných přímek v rovině je dvourozměrné, množství imaginárních přímek roviny je čtyřrozměrné.

O vzájemných vztazích reálných a imaginárních bodů a přímek můžeme vysloviti hned některé věty:

1. Je-li na reálné přímce imaginární bod $(x_1 + ix_2; y_1 + iy_2)$, jest na ní i bod imaginární sdružený $(x_1 - ix_2; y_1 - iy_2)$. Skutečně, dosadíme-li souřadnice prvého do (1a), jest

$$a(x_1 + ix_2) + b(y_1 + iy_2) + c = 0,$$

a při reálných a, b, c musí býti

$$ax_1 + by_1 + c = 0,\ ax_2 + by_2 = 0;$$

pak hoví zřejmě rovnici i druhý bod.

2. Prochází-li reálným bodem imaginární přímka, prochází jím i imaginární přímka sdružená. Buď imaginární přímka

$$(a_1 + ia_2)x + (b_1 + ib_2)y + c_1 + ic_2 = 0. \tag{2}$$

Hoví-li této rovnici reálné hodnoty x, y, musí býti

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{3}$$

a bod $(x; y)$ je zřejmě i na imaginární přímce sdružené

$$(a_1 - ia_2)x + (b_1 - ib_2)y + c_1 - ic_2 = 0. \tag{2'}$$

3. Na imaginární přímce leží jeden reálný bod. Skutečně na imaginární přímce (2) leží reálný bod, jehož souřadnice

hoví rovnicím (3), a jen tento; jím prochází i přímka sdružená (2').

4. Imaginárním bodem v rovině prochází jediná reálná přímka, která jej spojuje s imaginárním bodem sdruženým.

Rovnice přímky bodem $(a_1 + ia_2; b_1 + ib_2)$ je

$$y - (b_1 + ib_2) = (k_1 + ik_2)[x - (a_1 + ia_2)]$$

čili

$$(k_1 + ik_2)x - y + b_1 - a_1k_1 + a_2k_2 + i(b_2 - a_1k_2 - a_2k_1) = 0.$$

Aby tato přímka byla reálná, muselo by býti

$$k_2 = 0,\ b_2 - a_2k_1 = 0;$$

pak jest rovnice přímky

$$b_2x - a_2y + a_2b_1 - a_1b_2 = 0$$

a té hoví také bod $(a_1 - ia_2; b_1 - ib_2)$.

Pro skutečné konstrukce určujeme imaginární bod v rovině přímkou, která jej spojuje s imaginárním bodem sdruženým s příslušnou involucí a příslušným směrem jak bylo uvedeno v odst. 2. Přímka sluje nositelkou bodu.

Podobně imaginární přímku určujeme příslušnou paprskovou involucí s určeným smyslem. Středem involuce je reálný bod přímky, jak bylo uvedeno v odst. 3.

Poznámky a cvičení. 1. Napište rovnici přímky spojující body $A(3 - 2i; 1 + i)$, $B(3 + 2i; 1 - i)$.

2. Určete reálný bod přímky $(3 + 2i)y + ix - 1 = 0$.

3. V rovině jsou dvě osnovy isotropických přímek, t. j. přímek, které mají směrnici $\pm i$, tedy rovnici tvaru

$$y = \pm ix + p.$$

Dokažte tyto vlastnosti isotropických přímek: a) vzdálenost dvou bodů na isotropické přímce je rovna nule; b) úhel reálné přímky s přímkou isotropickou je stálý (imag.); c) při posouvání a rotaci, tedy při pohybu v rovině přejde přímka isotropická v přímku isotropickou. [Rotace kolem počátku o úhel φ je dána vzorci

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

kde původní bod byl $(x; y)$, v poloze otočené $(x'; y')$.] Z toho plyne, že při pohybu rovinné soustavy v rovině zůstávají dva body v klidu, totiž nevlastní body přímek $y = \pm ix$. Říkáme jim absolutní nebo kruhové body roviny.

K těmto kruhovým bodům lze také přijíti touto úvahou: Hledejme průsečíky kružnice s přímkou nevlastní. Obecná rovnice kružnice jest

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Chceme-li uvažovati o bodech nevlastních, zavádíme homogenní souřadnice, kladouce $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ místo x, y. Rovnice kružnice jest pak

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by)t + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 = 0.$$

Pro přímku nevlastní jest $t = 0$ a dostaneme tedy pro nevlastní body na kružnici rovnici $x^2 + y^2 = 0$ čili $(x + iy)(x - iy) = 0$. Tyto body jsou nezávislé na veličinách a, b, r, leží tedy na všech kružnicích. Všechny kružnice v rovině protínají nevlastní přímku v týchž dvou bodech; odtud název kruhové body. Ukažte, že vzdálenost jakéhokoli bodu v rovině (v konečnu) od absolutního bodu je neurčitá! [Nutno psáti vzdálenost také ve tvaru homogenním, na př. vzdálenost od počátku O jest $d = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}$].

4. Jsou-li $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ dva body v rovině, jest parametrické vyjádření bodů na přímce

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

při čem λ má význam dělicího poměru bodu $(x; y)$ k základním bodům A, B. Buďte A, B dva imaginární nesdružené body a λ ať proběhne všechny reálné hodnoty. Tak dostaneme řadu imag. bodů, jež má tu vlastnost, že dvojpoměr kterýchkoli čtyř z nich je reálný (na př. $(ABP_1P_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$). Napište rovnici reálné nositelky bodu (λ) (jako spojnici s bodem sdruženým) a volte pak za λ zvláštní hodnoty, na př. 0; 1; -1; ∞; ...!

Lze ukázati, že tyto nositelky obalují kuželosečku.

Jak je tomu v případě, když bod A je reálný? (Volte $x_1 = y_1 = 0$.)

6. Jednoduché konstrukce s imaginárními elementy.

Ukážeme, jak lze s imaginárními elementy provésti konstrukce, kde jde o spojování a protínání, tedy konstrukce z geometrie polohy. Jsou to úlohy: