O rovnicích

2. Polynomy

In: Štefan Schwarz (author): O rovnicích. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1940. pp. 13–25.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402951

2. Polynomy.

Rovnice. Ústředním problémem algebry jest nauka o rovnicích. Slova „rovnice" užíváme ovšem ve dvojím různém smyslu. Vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vyjadřující rovnost pravé a levé strany, který platí pro každé a, b, nazývá se rovnicí identickou. Naproti tomu jest $x^2 + 3x + 4 = 0$ vztahem platným jen pro docela určité speciální hodnoty x, je to t. zv. rovnice určovací.

Levá strana takovéto rovnice vyjadřující vztah mezi proměnnou (neznámou) veličinou x a danými konstantami může míti nejrůznější tvar. Dle toho lze určovací rovnice rozděliti na dvě skupiny. Je-li neznámá spjata s konstantami jen pomocí čtyř elementárních početních výkonů (t. zn. sčítání, odčítání, násobení, dělení), t. j. je-li rovnice tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

kde a_i jsou daná, obecně komplexní čísla, anebo jak říkáme, je-li levá strana mnohočlenem (polynomem) n-tého stupně, mluvíme o algebraické rovnici. Není-li levá strana tohoto tvaru, vystupuje-li tedy na př. neznámá jako argument funkcí sin x, log x atd. mluvíme o rovnici transcendentní. (Na př.: $\log x + \sin x + 3^x + 2 = 0$.)

Číslo x, které dosazeno do levé strany rovnice (1) tuto anuluje, nazývá se kořenem (nebo také nulovým bodem) dané rovnice. Naším úkolem bude zabývati se algebraickými rovnicemi. Budeme hledati hlavně její kořeny. Tomuto procesu říkáme řešení rovnic.

V následujících odstavcích musíme promluviti proto nejdříve o některých nejjednodušších vlastnostech polynomů.

Polynomy. Jak právě bylo řečeno, nazýváme výraz

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

polynomem, nebo mnohočlenem. Je-li $a_0 \neq 0$ říkáme, že $P(x)$ je polynom n-tého stupně. Je-li $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, říkáme, že polynom $P(x)$ identicky vymizí. Ze střední školy známe nejjednodušší operace, jako sčítání, odčítání, násobení a dělení dvou mnohočlenů. Všimněme si tohoto posledního výkonu.

Mějme dva mnohočleny $P_1(x)$, $P_2(x)$ stupňů m, n a nechť $m > n$. Právě tak, jako u obyčejných čísel, jest možno polynom $P_1(x)$ děliti polynomem $P_2(x)$. Jestliže dělení provedeme, dostáváme nějaký polynom $Q(x)$ a zbytek $R(x)$, který jest nižšího stupně než polynom $P_2(x)$. Vzorcem

$$P_1(x) = P_2(x) \cdot Q(x) + R(x). \tag{2}$$

Příklad. $P_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $P_2(x) = x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 + 2x + 3) \doteq 2x - 1 \\
\underline{\pm\, 2x^3 \pm 4x^2 \pm 6x} \\
\quad\quad - x^2 - 4x + 1 \\
\quad\quad \underline{\mp\, x^2 \mp 2x \mp 3} \\
\quad\quad\quad\;\; - 2x + 4
\end{array}$$

Jest tedy $Q(x) = 2x - 1$, $R(x) = -2x + 4$. Tedy

$$2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 3)(2x - 1) + (-2x - 4).$$

Poznamenejme, že zde i v dalším jde o dělení vzhledem k x, t. j. právě tak, jako v provedeném příkladě, můžeme děliti na př. i polynomy $(\sqrt{2}x^3 + \log 2 \cdot x + 3) : (\pi x^2 + 3i + 1)$ a pod. Jest ovšem jasné, že koeficienty podílu a zbytku budou čísla složená z koeficientů dělence a dělitele jen prvními čtyřmi racionálními operacemi.

Může se státi, že polynom $R(x)$ vyjde roven nule. Pak je

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x).$$

V tomto případě, kdy tedy dělení „vyjde beze zbytku", říkáme, že polynom $P_1(x)$ jest dělitelný polynomem $P_2(x)$.

Zvláště zajímavé jest dělení polynomu $P(x)$ speciálním lineárním polynomem $x - \alpha$, kde α jest nějaké komplexní číslo. Bude jako v (2)

$$P(x) = (x - \alpha) \,.\, Q(x) + R. \qquad (3)$$

Zbytek R musí býti nižšího stupně než $x - \alpha$, t. j. stupně 0-tého, tedy konstanta. Její hodnotu však snadno určíme. Dosaďme do (3) $x = \alpha$; máme ihned $P(\alpha) = R$, tedy

$$P(x) = (x - \alpha) \,.\, Q(x) + P(\alpha).$$

Jestliže nyní $P(\alpha) = 0$, jest $P(x)$ dělitelné $x - \alpha$. A naopak: Jestliže $P(x)$ má býti dělitelné $(x - \alpha)$, musí $P(\alpha) = 0$. Máme větu:

Polynom $P(x)$ jest dělitelný výrazem $x - \alpha$ tehdy a jenom tehdy, když α jest kořenem rovnice $P(x) = 0$.

Cvičení. 1. Dokažte, že polynom

$$2x^5 - 17x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 6$$

je dělitelný $x - 7$!

2. Polynom

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$$

je dělitelný $x - 2$. Dokažte!

Největší společný dělitel (společná míra) dvou polynomů. Dány jsou dva polynomy $f_1(x)$, $f_2(x)$. Může se státi, že existuje polynom $g(x)$, kterým jest jak $f_1(x)$, tak také $f_2(x)$ dělitelné. Polynom $g(x)$ nazýváme společným dělitelem (společnou mírou) obou polynomů $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Jestliže dva polynomy mají společný kořen α, pak mají jistě společný dělitel. Podle předchozí věty jsou totiž oba dělitelné výrazem $x - \alpha$. Může se ovšem státi, že mají i dělitele vyššího stupně.

Takový společný dělitel, který jest dělitelný každým jiným společným dělitelem, nazývá se největší společný dělitel (největší společná míra) obou polynomů. Dva polynomy, které až na konstantu nemají společného dělitele, nazýváme nesoudělnými.

Ptáme se, jak lze nalézti největší společný dělitel dvou daných polynomů.

K tomu slouží známý **Eucleidův algoritmus postupného dělení.**

Nechť $f_1(x)$ jest vyššího stupně než $f_2(x)$, pak dle (3) lze psáti

$$f_1(x) = Q_1 f_2(x) + f_3(x),$$

kde $f_3(x)$ jest nižšího stupně než $f_2(x)$. Nyní dělíme $f_2(x)$ polynomem $f_3(x)$ atd. Máme po řadě

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= Q_2 f_3(x) + f_4(x) \\
f_3(x) &= Q_3 f_4(x) + f_5(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{\nu-4}(x) &= Q_{\nu-4} f_{\nu-3}(x) + f_{\nu-2}(x) \\
f_{\nu-3}(x) &= Q_{\nu-3} f_{\nu-2}(x) + f_{\nu-1}(x) \\
f_{\nu-2}(x) &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1}(x) + f_\nu.
\end{aligned}$$

Stupně polynomů $f_3, f_4, f_5, \ldots$ se stále zmenšují. Jednou přijdeme proto k případu, že stupeň zbytku bude 0, tedy zbytek konstantou. Nechť jest to f_ν. Jsou dvě možnosti:

α) $f_\nu = 0$; pak $f_{\nu-1}(x)$ jest největším společným dělitelem $f_1(x)$ a $f_2(x)$.

Důkaz. Předně jest $f_{\nu-1}$ společným dělitelem. Z rovnic plyne totiž

$$f_{\nu-2} = Q_{\nu-2} f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-2} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1},$$

dále

$$f_{\nu-3} = (Q_{\nu-3} Q_{\nu-2} + 1) f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-3} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1},$$

$$f_{\nu-4} = (Q_{\nu-2} Q_{\nu-3} Q_{\nu-4} + Q_{\nu-2} + Q_{\nu-4}) f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-4} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1} \text{ atd.}$$

Takto postupujíce zjistíme nakonec, že i $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou dělitelné $f_{\nu-1}$. Máme-li obráceně jakýkoliv polynom $g_1(x)$, který dělí $f_1(x)$ a $f_2(x)$, plyne z první rovnice $f_1 - Q_1 f_2 = f_3$, že $g_1(x)$ dělí také $f_3(x)$, z další rovnice, že $g_1(x)$ dělí $f_4(x)$, atd., nakonec také, že $g_1(x)$ dělí $f_{\nu-1}(x)$.

Podle definice jest tedy $f_{\nu-1}(x)$ největším společným dělitelem obou polynomů $f_1(x)$ a $f_2(x)$, c. b. d.

β) $f_\nu \neq 0$ (a rovno nějaké konstantě). Pak oba polynomy jsou nesoudělné.

Důkaz: Kdyby oba polynomy měly nějaký nekonstantní společný dělitel $g_1(x)$, nalezneme stejně jako dříve, že $g_1(x)$ dělí kromě $f_1(x)$ a $f_2(x)$ též všechna $f_3, f_4, \ldots, f_{\nu-2}, f_{\nu-1}$ a tedy také $f_\nu (= f_{\nu-2} - Q_{\nu-2} f_{\nu-1})$, což jest nemožné, neboť f_ν, jakožto pouhá konstanta ($\neq 0$), nemůže být dělitelná polynomem v x.

Poznamenejme výslovně:

Největší společný dělitel dvou polynomů dovedeme nalézti pouhým užitím racionálních operací (t. j. sčítáním, odčítáním, násobením a dělením).

Cvičení. 1. Určete největší společný dělitel mnohočlenů $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$, $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$. $[x^2+1]$.

Lineární faktory polynomu. V odstavci o polynomech jsme ukázali: Má-li polynom $f(x)$ stupně n-tého kořen α_1, lze psáti

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x), \tag{4}$$

kde $f_1(x)$ jest stupně $(n - 1)$-ho s nejvyšším koeficientem a_0. Toto poslední plyne přirovnáním obou stran.

Má-li polynom $f_2(x)$ nějaký kořen α_2, lze psáti analogicky

$$f_1(x) = (x - \alpha_2) \,.\, f_2(x) \text{ atd.}$$

Jestliže tedy všecky polynomy $f, f_1, f_2, \ldots$ mají kořeny, lze psáti

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Odtud plyne pro řešení rovnice n-tého stupně

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = 0$$

(kde ovšem není $a_0 = 0$) věta:

Rovnice n-tého stupně nemůže míti více než n kořenů.

Jednoduchý důsledek: Jestliže tedy nalezneme pro nějaký algebraický výraz v proměnné x n-tého stupně více než n nulových bodů, je to možné jen tak, že $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, čili: jestliže polynom $a_0 x^n + \ldots + a_n$ vymizí pro více než n hodnot x, vymizí nutně identicky.

Cvičení. 1. Napište rovnici pátého stupně, která má za kořeny čísla -1; 2; 3; $-\frac{3}{4}$; -5!

2. Nalezněte algebraickou rovnici s racionálními koeficienty v a, které hoví funkce

α) $\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}$,

β) $\sqrt{a + \sqrt{a}}$ $\qquad [x^4 - 2ax^2 + a^2 - a = 0]$,

γ) $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$.

Mnohonásobné kořeny; derivace. V rovnici (4)

$$f(x) = (x - \alpha) \,.\, f_1(x)$$

může se státi, že polynom $f_1(x)$ má opět týž kořen α, t. j., že platí

$$f(x) = (x - \alpha)^2 f_2(x).$$

Obecněji jest možné, že z polynomu $f(x)$ lze vytknouti $(x - \alpha)$ v mocnině právě r-té, t. j. platí

$$f(x) = (x - \alpha)^r \,.\, f_r(x), \; f_r(\alpha) \neq 0.$$

V tomto případě — z důvodů, které později vysvitnou — říkáme, že daná rovnice má r-násobný kořen α.

Jest otázkou, jak se pozná, má-li daná rovnice takový vícenásobný kořen.

Vícenásobnost kořene souvisí úzce s jistým pojmem známým z diferenciálního počtu — totiž s pojmem derivace.

Jest vždy snahou algebry, nevypůjčovati si potřebných pojmů z jiných partií matematiky (a zvláště ne z těch, kde se operuje s pojmem limity). Proto budeme si definovati tento pojem nezávisle na diferenciálním počtu, více méně čistě formálně — ale ovšem tak, že obě definice ve skutečnosti souhlasí.

Derivací polynomu

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \text{*)}$$

(přesněji jeho první derivací) budeme rozuměti polynom

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

*) Přehodili jsme pro pohodlnost — jen v tomto odstavci — označení koeficientů.

Pro proces takto definovaný lehce se dokáže platnost těchto pravidel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \qquad (5)$$

$$[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x). \qquad (6)$$

První vztah jest evidentní. Druhého nebudeme potřebovati, proto jej nedokazujeme. Budeme však potřebovati, čemu se rovná derivace výrazu $b\,(x - \alpha)^n$. Umocněme dle binomické poučky; jest

$$b\left[x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}\alpha + \binom{n}{2} x^{n-2}\alpha^2 - \ldots + (-1)^n \alpha^n\right].$$

Dle definice derivace jest $[b\,(x - \alpha)^n]'$ rovno výrazu

$$b\left[n x^{n-1} - (n-1)\binom{n}{1} x^{n-2}\alpha + (n-2)\binom{n}{2} x^{n-3}\alpha^2 - \ldots\right] =$$

$$= bn\left[x^{n-1} - \binom{n-1}{1} x^{n-2}\alpha + \binom{n-1}{2} x^{n-3}\alpha^2 - \ldots\right] =$$

$$= b \,.\, n\,(x - \alpha)^{n-1}.$$

Užili jsme při tom vztahu

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-k-1} = n\binom{n-1}{k}.$$

Tedy

$$[b\,(x - \alpha)^n]' = b \,.\, n\,(x - \alpha)^{n-1}. \qquad (7)$$

Analogicky k první derivaci zavedeme další pojem. Druhou derivací polynomu $f(x)$ budeme rozuměti derivaci z první derivace; obecně r-tou derivací daného polynomu budeme rozuměti derivaci z $(r-1)$-ní derivace.

Jest tedy, zavedeme-li snadno pochopitelné označení ($f^{(n)}(x)$ značí n-tou derivaci funkce $f(x)$)

$$f''(x) = 2 \,.\, 1a_2 + 3 \,.\, 2a_3x + 4 \,.\, 3a_4x^2 + \ldots + n\,(n-1)\,a_nx^{n-2},$$

$$f'''(x) = 3 \,.\, 2 \,.\, 1a_3 + 4 \,.\, 3 \,.\, 2a_4x + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,a_nx^{n-3},$$

atd.

Jest viděti, provedeme-li tento proces n-kráte za sebou, že dostaneme nakonec konstantu

$$f^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, a_n = n!\, a_n.$$

Všechny další derivace klademe rovny nule.

Příklad:
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\
f'(x) &= 4x^3 + 9x^2 - 4x + 3 \\
f''(x) &= 12x^2 + 18x - 4 \\
f'''(x) &= 24x + 18 \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= f^{(6)}(x) = \ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Abychom se nyní přiblížili o další krok k odpovědi na shora položenou otázku, odvodíme si t. zv. větu Taylorovu.

Nechť jest dán polynom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

a libovolné číslo α. Ptáme se, je-li možno polynom $f(x)$ vyjádřiti v tvaru

$$b_0 + b_1 (x - \alpha) + b_2 (x - \alpha)^2 + \ldots + b_n (x - \alpha)^n,$$

t. j. je-li možno určiti koeficienty $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ tak, aby platilo identicky

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \\ & = b_0 + b_1 (x - \alpha) + b_2 (x - \alpha)^2 + \ldots + b_n (x - \alpha)^n. \end{aligned} \tag{8}$$

Ukážeme, že to lze, a to dokonce ve velmi jednoduchém tvaru.

Vztah (8) má platiti identicky, t. j. pro každé x. Umocníme-li pravou stranu (8) a srovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x, vidíme: koeficient u x^n na levé straně jest a_n, na pravé b_n, tedy $b_n = a_n$. Srovnáváme-li dále koeficienty u $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots$ atd., dostáváme po řadě hledané koeficienty b_i vždy jako řešení jisté lineární rovnice. Takových rovnic jest $n + 1$, z nich lze koeficienty b_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ úplně vypočítati. Jest tedy vyjádření (8) možné. Zbývá jen určiti jednoduše koeficienty b_i.

Abychom nalezli koeficient b_0, dosaďme do vztahu (8) $x = \alpha$. Je

$$f(\alpha) = b_0.$$

Derivujme nyní vztah (8) [užívajíce vztahu (5) a (7)]! Dostaneme

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - \alpha) + \ldots + nb_n(x - \alpha)^{n-1} \quad (9)$$

a dosaďme $x = \alpha$, jest

$$f'(\alpha) = b_1.$$

Derivujme dále

$$f''(x) = 2 \,.\, 1 \,.\, b_2 + 3 \,.\, 2b_3(x - \alpha) + \ldots + \\ + n(n-1)\, b_n(x - \alpha)^{n-2};$$

pro $x = \alpha$,

$$f''(\alpha) = 2 \,.\, 1 \,.\, b_2.$$

Postupně získáme tak všechny koeficienty, totiž

$$b_0 = f(\alpha),\ b_1 = \frac{1}{1!} f'(\alpha),\ b_2 = \frac{1}{2!} f''(\alpha), \ldots, b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha).$$

Úhrnem tedy:

Je-li dán polynom $f(x)$ n-tého stupně a libovolné číslo α, lze vždy psáti tuto identicky platnou rovnost

$$f(x) \equiv f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} \,.\, (x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \\ + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n \quad (10)$$

[t. zv. Taylorův*) rozvoj funkce $f(x)$ dle mocnin $(x - \alpha)$].

Příklad: V našem příkladě volme na př. $\alpha = 1$. $f(1) = 6$, $f'(1) = 12$, $f''(1) = 26$, $f'''(1) = 42$, $f^{(4)}(1) = 24$. Platí tedy identicky

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 6 + \frac{12}{1!}(x - 1) + \frac{26}{2!}(x - 1)^2 + \\ + \frac{42}{3!}(x - 1)^3 + \frac{24}{4!}(x - 1)^4.$$

---

*) Brook Taylor (1685—1731), anglický matematik.

Vraťme se nyní k otázce, kterou jsme si položili. Kdy jest kořen $x = \alpha$ r-násobným kořenem dané rovnice? T. j., kdy lze z daného polynomu vytknouti právě činitele $(x - \alpha)^r$? Taylorův rozvoj (10), kde za α si myslíme náš kořen, dává ihned odpověď. Aby z polynomu (10) bylo možno vytknouti právě $(x - \alpha)^r$, k tomu jest nutno a stačí, aby

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \text{ ale aby } f^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Aby rovnice $f(x) = 0$ měla kořen α právě r-násobný, jest nutno a stačí, aby platilo

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Tuto podmínku lze formulovati také jinak. Je-li totiž na př. α dvojnásobným kořenem $f(x) = 0$ musí býti $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, t. j. oba polynomy $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ mají společného dělitele $(x - \alpha)$; odtud věta:

Má-li rovnice $f(x) = 0$ r-násobný kořen, mají polynomy $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r-1)}(x)$ společného dělitele.

Ježto $f^{(r-1)}(x)$ lze považovati za $(r - 2)$-hou derivaci polynomu $f'(x)$, plyne dále z téže věty:

Je-li kořen α r-násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, jest $(r - 1)$-násobným kořenem rovnice $f'(x) = 0$, $(r - 2)$-násobným kořenem $f''(x) = 0$ atd. . ., jednoduchým kořenem rovnice $f^{(r-1)}(x) = 0$.

Ukážeme nyní, jak lze na základě předešlých úvah postupným hledáním společného dělitele z rovnice vícenásobné kořeny odstraniti. Nechť rovnice má kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ jednoduché, $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ dvojnásobné, . . ., $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ r-násobné. Pak, jak víme, lze psáti

$$f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_\nu)\,[(x - \beta_1) \ldots (x - \beta_\mu)]^2 \ldots$$
$$\ldots [(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_\sigma)]^r \,.\, P(x),$$

kde $P(x)$ jest polynom, který již nemá žádných kořenů. [V následujícím odstavci uvidíme, že to není možné a že

$P(x)$ musí býti konstantou, ale zatím ten případ nesmíme vylučovati. Pro náš účel na tomto místě je to stejně bez významu.]

Sestrojme si derivaci $f'(x)$. Tato rovnice má za kořeny všechny vícenásobné kořeny rovnice $f(x) = 0$, ale — dle poslední věty — v násobnosti o jednotku nižší.*) Největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$ obsahuje tedy souhrn všech kořenů dané rovnice, ale každý v násobnosti o jednotku menší**). Dělíme-li tímto největším společným dělitelem danou rovnici, zbývá rovnice $F(x) = 0$, která má za kořeny všechny kořeny dané rovnice, ale každý jen jednoduchý. Tedy:

Racionálními operacemi lze z dané rovnice získati rovnici, která má tytéž kořeny jako rovnice daná, ale každý jen jednoduchý.

Odtud tedy vyplývá:

Ve všech dalších úvahách lze se omeziti na rovnice s kořeny vesměs jednoduchými. To také budeme mlčky činiti:

Příklad. Jest dána rovnice

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Máme zjistiti, má-li vícenásobné kořeny. Jestli ano, jest udati rovnici, která má tytéž kořeny jako $f(x) = 0$, ale každý jen jednoduchý.

Hledejme největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$, t. j. $f(x)$ a $5x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 12x + 5$ užitím Euklidova algoritmu. Abychom však při dělení dostali celočíselné koeficienty, násobme $f(x)$ číslem 25; dělíme

$$
\begin{array}{l}
(25x^5 + 75x^4 - 50x^3 - 150x^2 + 125x - 25) : (5x^4 + 12x^3 - \\
\qquad\qquad\qquad - 6x^2 - 12x + 5) \doteq 5x + 3 \\
\underline{\pm 25x^5 \pm 60x^4 \mp 30x^3 \mp 60x^2 \pm 25x} \\
\qquad 15x^4 - 20x^3 - 90x^2 + 100x - 25 \\
\qquad \underline{-15x^4 \pm 36x^3 \mp 18x^2 \mp 36x \pm 15} \\
\qquad\quad -56x^3 - 72x^2 + 136x - 40 = 8(-7x^3 - \\
\qquad\qquad\qquad - 9x^2 + 17x - 5).
\end{array}
$$

*) Tedy $f'(x)$ nemá již za kořeny jednoduché kořeny rovnice $f(x) = 0$.

**) Speciálně neobsahuje tedy již kořenů jednoduchých.

Dělíme dále $f'(x)$ zbytkem (abychom však při dělení nedostali zlomky, násobme resp. dělme opět oba polynomy *49* resp. *8*).

$$
\begin{array}{l}
(245x^4 + 588x^3 - 294x^2 - 588x + 245) : (-7x^3 - 9x^2 + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 17x - 5) \doteq -35x - 39 \\
\underline{\pm 245x^4 \pm 315x^3 \mp 595x^2 \pm 175x} \\
\qquad\qquad 273x^3 + 301x^2 - 763x + 245 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 273x^3 \pm 351x^2 \mp 663x \pm 195} \\
\qquad\qquad\qquad -50x^2 - 100x + 50 = -50(x^2 + 2x - 1)
\end{array}
$$

Dělme konečně

$$
\begin{array}{l}
(-7x^3 - 9x^2 + 17x - 5) : (x^2 + 2x - 1) = -7x + 5 \\
\underline{\mp 7x^3 \mp 14x^2 \pm 7x} \\
\qquad\qquad 5x^2 + 10x - 5 \\
\qquad \pm \underline{5x^2 \pm 10x \mp 5} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dělení vyšlo beze zbytku: $f(x)$ a $f'(x)$ mají největší společný dělitel

$$F(x) = x^2 + 2x - 1.^{*)}$$

Dělme tedy dále $f(x) : F(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$. Toto jest polynom, který má tytéž nulové body jako $f(x) = 0$, ale každý jen jednoduchý.**)

Poznámka. Lze dokonce získati souhrn jednotlivých faktorů jednotlivých násobností. Tak na př. souhrn jednoduchých faktorů dané rovnice nalezneme takto: Největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$ má kořeny, které byly u $f(x)$ dvojnásobné, za jednoduché, kdežto kořeny, které byly jednoduché, nejsou již kořeny tohoto společného dělitele. Největší společný dělitel $F(x)$ a tohoto dělitele obsahuje tedy všechny kořeny s výjimkou jednoduchých kořenů, a to každý jednoduchý (neboť kořeny $F(x)$ jsou jednoduché). Dělíme-li tímto výrazem $F(x)$, dostáváme hledaný souhrn. [Dle našeho odvození by po případě mohl býti násoben ještě faktorem nemajícím vůbec kořeny — ale jak uvidíme, to nenastane.]

*) Během počítání jsme sice násobili resp. dělili rovnice čísly *25, 8, 49, 50*; výsledek musí míti však nutně koeficient u x^2 rovný *1*, jak vidno z daného polynomu $f(x)$. Úkol: Proveďte dělení bez toho, že byste dříve násobili a ukažte, že dostáváte v podstatě tytéž výrazy jako v textu.

**) Ostatně nahlédneme nyní již snadno, že

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = (x^2 + 2x - 1)^2 (x - 1).$$

Cvičení: 1. Ukažte, že $x = 2$ jest trojnásobným kořenem rovnice $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$. Rozložte levou stranu dané rovnice! $[(x - 2)^3 (x + 1).]$

2. Stanovte vícenásobné kořeny rovnice

$$x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0!$$

$[(x^2 - 1)(x^2 + 1)^3$; určete nejdřív polynom $F(x)$ $(= (x^2 + 1)^2)$; potom jím dělte $f(x)$ a výsledek rozložte!]

3. Určete vícenásobné kořeny rovnice

$$x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0!$$

[Stejným postupem získáte rozklad $(x + 2)^3 (x - 2)^2$.]

4. Rozviňte polynom $3x^3 + 2x^2 + 1$ dle mocnin $(x - 2)$ v Taylorův rozvoj!

5. Totéž pro $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$ dle mocnin $x - a$!