O rovnicích

1. Čísla

In: Štefan Schwarz (author): O rovnicích. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1940. pp. 5–12.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402950

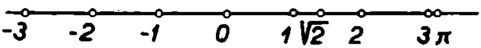
1. Čísla.

Úvod. Základem matematiky jest pojem čísla. Tento pojem jest pro každého absolventa střední nebo odborné školy zdánlivě tak jasný a jednoduchý, že se mu zdá, že je zbytečné o něm vůbec mluviti. Není tomu tak. Jest nutno vyložiti si, jakou asi cestou dospěli jsme k tomu významu pojmu čísla, který mu dnes v elementární matematice dáváme. „Přirozená čísla jsou dána Bohem, vše ostatní jest výmysl lidský" — to jsou slova slavného matematika J. K. Weierstrasse. Jest tomu vskutku tak.

Od celých kladných t. zv. přirozených čísel 1, 2, 3, . . ., která odpovídají počítání na prstech, oblázcích atd. u lidstva na primitivním stupni vývoje, trvalo dlouho, než jsme se dostali k dnešnímu pojmu komplexního čísla, s kterým nejen v elementární matematice, ale i v technické praxi počítáme.

Uvažujme přirozenou řadu číselnou 1, 2, 3, . . . Sčítáním a násobením prvků této řady dospíváme opět jen k prvkům stejného druhu. Ale již tak elementární početní výkon, jako jest odčítání, vede nás k rozšíření tohoto oboru čísel na čísla záporná a nulu. Abychom pak mohli mluviti o podílu kterýchkoliv dvou čísel, zavádíme zlomky $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou čísla celá. Čísla celá jsou pak speciálním případem těchto zlomků. Dostali jsme tak systém elementů, kterým říkáme racionální čísla.

Ale matematická praxe ukazuje, že existují početní výkony, jako na př. odmocňování, logaritmování, kde s racionálními čísly nevystačíme; musíme zavést proto další elementy, t. zv. čísla iracionální (na př. $\sqrt{5}$, π, atd.), jež lze vyjádřiti (na př.) jako nekonečné neperiodické desetinné zlomky. Racionální a iracionální čísla nazýváme pak jediným názvem čísly reálnými. Jejich existence jest geometricky zaručena tím, že každému bodu číselné osy (o které mluvili již staří Řekové) přiřadíme jedno jediné reálné číslo a naopak, každému reálnému číslu jeden jediný bod.



Obr. 1.

Ukáže se však brzo, že kdybychom pod pojmem čísla rozuměli jen reálná čísla, přišli bychom k některým větám, které by neplatily úplně obecně, čímž by nejen věcná, ale i estetická hodnota mnoha vět a vzorců ztrácela na ceně. Tak na př. některé kvadratické rovnice by měly řešení, jiné ne. Rovnice $x^2 + 3x - 4 = 0$ má dva kořeny $x_1 = -4$, $x_2 = +1$, kdežto rovnice $x^2 + 1 = 0$ by neměla žádný kořen (čtverec žádného reálného, ať kladného či záporného čísla není roven -1). Aby výrok: „Každá kvadratická rovnice má dva kořeny" platil úplně obecně, zavádíme symbol $i = +\sqrt{-1}$, mající vlastnost $i^2 = -1$. Říkám výslovně symbol, neboť toto i stane se „číslem" teprve tehdy, když se jednou provždy dohodneme, že jej tak pojmenujeme. Není to číslo v běžném slova smyslu, t. j. mající na př. geometrický význam jako délka úsečky a pod. Je to pouze znak, který zavádíme cestou čistě spekulativní. Číslo i (od nynějška tedy již číslo!) nazýváme imaginární jednotkou. Výraz tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla, nazýváme pak komplexní číslo.

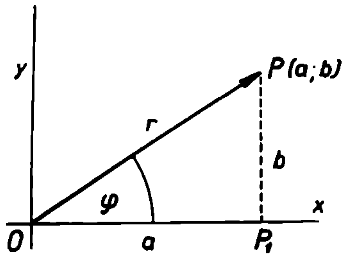
Připomeňme si některé známé vlastnosti kompl. čísel! Kompl. čísla tvoří širší skupinu čísel než čísla reálná, neboť tato dostáváme pro speciální hodnotu $b = 0$. Číslo a jest reálná, číslo b imaginární část komplexního čísla $a + bi$. Dvě komplexní čísla jsou si rovna tenkrát a jenom tenkrát, mají-li stejnou reálnou i imaginární část. S číslem komplexním počítáme úplně stejně jako s číslem reálným, jen pamatujmež, $i^2 = -1$, $i^3 = -i, \ldots$ Platí:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\, i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)\, i,$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i.$$

Dvě čísla $a + bi$, $a - bi$ nazýváme komplexní sdružená. Jejich součet i součin jsou čísla reálná.

Geometrické znázornění komplexního čísla. Víme, jak dobré služby nám koná geometrické znázornění reálných čísel na ose číselné a jest přirozené, že hledáme analogické geometrické znázornění i pro čísla komplexní $z = a + bi$.*) Toto lehce nalezneme. Mysleme si v rovině pravoúhlý systém souřadnic x, y.

Komplexnímu číslu
$$z = a + bi$$
přiřadíme bod o souřadnicích $P(a; b)$ a naopak libovolnému bodu P o souřadnicích a, b komplexní číslo
$$z = a + bi.$$



Obr. 2.

Speciálně tedy reálným číslům jsou přiřaděny body osy x (mluvíme o **reálné ose**); všem číslům tvaru bi (t. zv. **ryze imaginárním**) přiřaděny jsou body osy y (které proto říkáme **osa imaginární**). Obrazy dvou čísel komplexních sdružených jsou souměrně sdružené podle reálné osy.

Tento vzájemně jednoznačný vztah mezi body roviny a komplexními čísly bude nám v dalším konati velmi cenné služby.

Libovolný bod P roviny (x, y) může býti charakterisován i jiným způsobem než svými pravoúhlými souřadnicemi $(a; b)$. Abychom polohu bodu P dovedli přesně popsati,

*) V dalším budeme často číslo $a + bi$ označovati jediným znakem z. Při tom pamatujeme, že z má reálnou část a, imaginární b.

stačí znáti na př. délku spojnice $r = \overline{OP}$ bodu P s počátkem O, a úhel φ, který svírá polopaprsek $\overrightarrow{OP}$ s kladným směrem osy x.

Úhel φ měříme při tom od 0 do 360°. Ve vyšší matematice jest zvykem nevyjadřovati úhly v stupních, t. j. v míře úhlové, nýbrž v t. zv. míře obloukové, t. j. v délce oblouku jednotkové kružnice, který odpovídá danému úhlu. Obvod jednotkové kružnice jest 2π. Proto úhel 360° jest v míře obloukové roven 2π. Analogicky $180° = \pi$, $45° = \frac{1}{4}\pi$ atd. Tohoto vyjadřování úhlů budeme se v dalším pojednání přidržovati.

Nezáporné číslo $r = \overline{OP}$ nazýváme absolutní hodnotou (nebo též modulem) komplexního čísla $z = a + bi$ a píšeme

$$r = |z| = |a + bi|.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle OP_1P$ plyne

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ t. j. } |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Úhel φ nazýváme amplitudou čísla $a + bi$. Z obr. 2 plyne

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (1)$$

Při tom, aby úhel φ byl až na násobek 360° jednoznačně určen, jest nutno užíti obou rovnic (1); jediná rovnice na př. pro $\sin\varphi$ k tomu nestačí, neboť platí $\sin(180 - \varphi) = \sin\varphi$, takže je-li řešením φ, je řešením i $180 - \varphi$ a nevíme, pro které φ se rozhodnout; to určíme pomocí druhé rovnice.

Z (1) plyne

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi, \text{ tedy } z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tak získáváme větu:

Každé komplexní číslo z lze psáti ve tvaru

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde r je jeho absolutní hodnota a φ jeho amplituda.

Snadno se přesvědčíme, že toto vyjádření čísla z je jednoznačné (v případě, že $|z| > 0$) to znamená, že z rovnice

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ plyne $r = r'$ za předpokladu, že $r > 0$, $r' > 0$, a že hodnoty φ, φ' jsou reálné. Budeme-li číslo z psáti ve tvaru $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, budeme vždy předpokládati r, φ reálné, $r > 0$.

Rovinu, v níž zobrazení provádíme, nazýváme rovinou Gaussovou, poněvadž Gauss toto zobrazení zavedl.

Moivreova poučka.*) Právě odvozeného vyjádření komplexních čísel užijeme k odvození zajímavého a důležitého vzorce.

Mějme dvě komplexní čísla

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ptáme se, jak určíme amplitudu a modul součinu $z_1 . z_2$ obou čísel. Počítejme podle obvyklých pravidel

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = r_1 . r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 . \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 . \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Slovy: Modul součinu dvou kompl. čísel jest roven součinu modulů obou činitelů; amplituda součinu rovná se součtu amplitud obou činitelů.

Stejně nalezneme, je-li

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$z_1 . z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)]. \tag{2}$$

Mysleme si nyní, že by $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, t. j. $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$; z (2) plyne

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{3}$$

*) Abraham de Moivre, franc. matematik, nar. ve Vitry (v Champagni) r. 1667. Po zrušení ediktu nantského musel, jako protestant, uprchnouti z Francie. Usídlil se v Londýně, kde r. 1754 také zemřel. Byl přítelem Newtonovým a známého astronoma Halleye.

Vzorec (3) se nazývá formulí Moivreovou. Dává vyjádření n-té mocniny komplexního čísla $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde n jest celé, kladné číslo.

Vzorec (3) platí však také pro n celé, záporné. Je totiž — je-li m celé, kladné —

$$z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi)} = r^{-m}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi),$$

t. j. $\quad z^{-m} = r^{-m}[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)],$

čímž jest dokázán vzorec (3) pro záporná n.

Pomocí našeho vyjádření komplexních čísel můžeme snadno odmocňovati komplexní čísla. Získáme tak

1. rozšíření vztahu (3) na lomené exponenty,
2. důkaz, že odmocnina komplexního čísla jest opět komplexní číslo (a že tedy, chceme-li neomezeně prováděti odmocňování kompl. čísel, není nutno zaváděti již další symbol analogický číslu i, jak tomu bylo, když jsme chtěli dosáhnouti toho, abychom mohli neomezeně odmocňovati čísla reálná).

Nechť jest tedy dáno komplexní číslo $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$! Hledejme reálná čísla ϱ a ϑ tak, aby

$$\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Ježto n jest celé, máme podle Moivreovy poučky

$$\varrho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$\varrho^n = r,\ \cos n\vartheta = \cos\varphi,\ \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Odtud $\varrho = \sqrt[n]{r}$, při čemž znakem $\sqrt[n]{r}$ myslíme ono reálné, nezáporné číslo, jehož n-tá mocnina jest r. Druhé dvě rovnice lze psáti ve tvaru

$$\cos n\vartheta = \cos(\varphi \pm 2k\pi),\ \sin n\vartheta = \sin(\varphi \pm 2k\pi),$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

t. j. $\vartheta = \dfrac{\varphi \pm 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Z toho však je v podstatě jen n různých hodnot

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \ldots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Ostatní se liší od těchto o celistvý násobek 360°.

Platí tedy věta:

n-tá odmocnina libovolného komplexního čísla $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest opět komplexní číslo; jeho hodnota jest n-značná a platí vzorec

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{4}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Historická poznámka. Zavedení imaginárních čísel jest dílem teprve 18. století, ačkoliv již Cardano (v polovici 16. stol.) s nimi ve skutečnosti počítal. Mluví se o nich sice později stále, ale velmi opatrně, jako o číslech „nemožných". Teprve Gauss se odhodlal — jsa nucen tolika okolnostmi — zavésti je vědomě do algebry. Písmene i k označení imaginární jednotky zavedl Euler (1777).

Cvičení. 1. Vyjádřete v tvaru $a + bi$ čísla

$$(1 + i)^2, \quad \frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i}, \quad \left(\frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i}\right)^2 - \left(\frac{\lambda - \mu i}{\lambda + \mu i}\right)^2!$$

2. Určete modul a amplitudu komplexních čísel

$$i, \; 3i + 4, \; 4i + 3, \; 1, \; -7, \; 3i + 2, \; i + 1!$$

3. Jestliže ve vzorci (3)

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

umocníme levou stranu podle binomické poučky a přirovnáme výrazy na obou stranách, dostáváme vzorce vyjadřující $\sin n\varphi$ a $\cos n\varphi$ jako funkce jednoduchých úhlů. Proveďte nejprve pro $n = 3$, pak obecně!

4. Vyjádřete — užívajíce vzorce (3) — naopak $\cos^4\varphi$ a $\cos^5\varphi$ jako funkci vícenásobných úhlů! [Jest $\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}$; $\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\cos 5\varphi + \frac{5}{16}\cos 3\varphi + \frac{10}{16}\cos\varphi$.]

5. Ukažte přímo: $\sqrt{a + bi}$, kde a, b jsou reálná čísla, jest opět komplexní číslo a jeho hodnota jest dvojznačná. [Návod: Položte $\sqrt{a + bi} = x + iy$, kde předpokládáte x, y reálné. Umocněte obě strany, srovnejte a řešte vzniklé rovnice! Vyjde

$$\sqrt{a + bi} = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\right), & \text{je-li } b > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\right), & \text{je-li } b < 0. \end{cases}$$

Pozor při volbě znaménka!]

6. Ze vztahu $\cos \tfrac{1}{2}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\cos \vartheta + i \sin \vartheta}$ odvodíte na základě předchozích rovnic ihned známé vzorce

$$\cos \tfrac{1}{2}\vartheta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{2}}, \quad \sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}}.$$

Proveďte!

7. Nalezněte všechny tři hodnoty $\sqrt[3]{i}$! [$-i$; $+\tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$; $+\tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$].

8. Pomocí vzorce (4) určete hodnoty $\sqrt[3]{2 + 2i}$!

9. Dokažte: Je-li $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ platí vztah

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|\,!$$

Sestrojte grafický obraz čísel $z_1, z_2, z_1 + z_2$ v Gaussově rovině a uvažte, jaký jest geometrický význam napsané nerovniny! [Známá věta o velikosti stran v trojúhelníku.]