2. ÚBĚŽNÉ BODY A ÚBĚŽNÉ PŘÍMKY

Pravidla vyvozená v minulém odstavci se zjednoduší, zavedeme-li si pro rovnoběžnost přímek a rovin nové vhodné pojmy.

O rovnoběžných přímkách se obvykle říká, že mají týž *směr*. Podle věty 7 je každému směru, který není rovnoběžný s průmětnou, přiřazen v průmětně jediný bod U', zvaný úběžník tohoto směru. A naopak každému úběžníku U' je přiřazen v prostoru jediný směr, určený přímkou OU' (kde O je střed promítání). Přitom víme, že úběžník U' není průmětem žádného bodu žádné přímky, která je rovnoběžná s přímkou OU' a nesplývá s ní. Mohli bychom tedy říkat, že bod U' je průmětem směru společného všem přímkám rovnoběžným s přímkou OU'. Je však výhodnější říkat i směru „bod"; abychom ho však odlišili od ostatních skutečných bodů, nazýváme jej *nevlastní* anebo také *úběžný bod*. Skutečné body potom nazýváme body vlastními. Přesně zavádíme pojem nevlastního bodu touto definicí:

Definice 1. O přímkách, které mají týž směr (jsou spolu rovnoběžné), říkáme, že mají společný úběžný (nevlastní) bod, kterým procházejí.

K této definici nás vede i názor (obr. 4). Běží-li totiž bod P, ležící za průmětnou, po přímce p (která protíná průmětnu) tak, že se stále vzdaluje od průmětny, blíží se jeho průmět P' po průmětu p' přímky p k úběžníku U' této přímky. Čím více se bod P vzdálí od průmětny, tím více se jeho průmět P' přibliží k úběžníku U'; jinak říkáme: Vzdaluje-li se (ubíhá-li) bod P po přímce p do nekonečna, přibližuje se jeho průmět P' po přímce p' neomezeně k úběžníku U'. Stejně je tomu tak, pohybuje-li se bod P po přímce p opačným směrem tak, že se stále vzdaluje od distanční roviny. Totéž platí pro body každé přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a neprochází středem promítání. Vzdaluje-li se bod do nekonečna po přímce $\overline{p} \parallel p$ procházející středem promítání, je stále jeho průmět zase v úběžníku U'. Z uvedených důvodů *je vhodné pokládat úběžník U' rovnoběžných přímek za průmět jejich společného úběžného bodu,* který označujeme ∞U; přímka $\overline{p}$ je promítacím paprskem tohoto úběžného bodu.

O rovnoběžných rovinách neříkáme, že mají týž směr, nýbrž že mají totéž *zaměření*. Podle věty 10 je každému zaměření (s výjimkou toho, jež je určeno průmětnou) přiřazena v průmětně jediná přímka u', totiž úběžnice všech rovin tohoto zaměření. A také naopak každé přímce u' v průmětně, pokládané za úběžnici, je v prostoru přiřazeno zaměření určené rovinou σ proloženou přímkou u' a středem promítání. Přitom víme, že úběžnice u' není průmětem žádné přímky, která by ležela v některé z rovin tohoto zaměření (kromě roviny σ). Mohli bychom úběžnici u' nazvat „průmětem“ zaměření. Názornější je však pokládat i zaměření za přímku, kterou ovšem od jiných skutečných (vlastních) přímek odlišujeme tím, že ji nazýváme *úběžnou (nebo nevlastní) přímkou.* Přesně zavádíme pojem nevlastní přímky touto definicí:

Definice 2. O rovinách, které jsou spolu rovnoběžné (mají totéž zaměření), říkáme, že mají společnou úběžnou (nevlastní) přímku, kterou procházejí.

K této definici nás vede také názor. Posouvá-li se totiž v rovině ϱ (která neprochází středem promítání) přímka r tak, že každý její bod ležící za průmětnou se vzdaluje od průmětny, přibližuje se promítací rovina této přímky stále víc a více k rovině $\sigma \parallel \varrho$ procházející středem promítání. (V obr. 7 je směr posouvání přímky r vyznačen šipkou.) Tudíž průmět r' přímky r se stále přibližuje k úběžnici u_ϱ'. Průmět každé přímky roviny σ splývá stále s úběžnicí $ú_\varrho$. Proto říkáme, že *úběžnice $ú_\varrho$ roviny ϱ a všech rovin s ní rovnoběžných je průmětem společné úběžné přímky těchto rovin,* kterou označujeme ∞u; rovina σ je promítací rovinou této úběžné přímky.

Zbývá ještě říci, kdy leží nevlastní bod na nevlastní přímce:

Definice 3. Nevlastní bod každé přímky rovnoběžné s rovinou daného zaměření leží na nevlastní přímce dané tímto zaměřením.

Zavedením úběžných bodů a přímek jsme rozšířili prostor; tím docílíme jednoduššího a názornějšího výkladu středového promítání. *V takto rozšířeném prostoru zůstane jediným výjimečným (singulárním) bodem střed promítání, který nemá vůbec žádný průmět. Každý jiný bod má průmět.* Pro body ležící mimo distanční rovinu to víme z věty 2; lehce dokážeme, že *každý bod distanční roviny kromě středu promítání má průmět v určitém úběžném bodě průmětny.* Promítací paprsek takového bodu D distanční roviny v ní leží a tedy podle definice 3 leží jeho úběžný bod $\infty D'$ na úběžné přímce této roviny; protože je to podle definice 2 také úběžná přímka průmětny, leží bod $\infty D'$ v průmětně. Je to tedy průsečík promítacího paprsku bodu D s průmětnou čili průmět bodu D. Důsledek toho je, že *průmětem přímky, která leží v distanční rovině a prochází středem promítání, je úběžný bod průmětny, průmětem každé jiné přímky distanční roviny je úběžná přímka průmětny, která je také průmětem celé distanční roviny (s jedinou výjimkou středu promítání).* Dokažte podrobně.

Úběžníkem přímky p rovnoběžné s průmětnou je průsečík průmětny s přímkou $\overline{p} \parallel p$ proloženou středem promítání. Podle definice 3 je to úběžný bod přímky $\overline{p}$, který je současně podle definice 1 úběžným bodem přímky p. *Je tedy úběžníkem přímky p rovnoběžné s průmětnou její úběžný bod.* Stejně dokážeme, že *úběžnicí roviny rovnoběžné s průmětnou je její úběžná přímka.*

Důsledkem definice 3 je také, že každý bod úběžnice u_ϱ' roviny ϱ je průmětem jednoho úběžného bodu této roviny. Z definice 3 a z věty 13 také plyne, že i naopak každý úběžný bod roviny ϱ se promítá do bodu úběžnice u_ϱ' této roviny.

Zavedeme-li tedy úběžné body a přímky a pokládáme-li úběžníky za průměty úběžných bodů a úběžnice za průměty úběžných přímek, můžeme věty 1 až 13 vysloviti takto:

I. Střed promítání nemá průmět.

II. Každý bod nesplývající se středem promítání má průmět (vlastní nebo úběžný).

III. Průmět každé přímky procházející středem promítání je bod (vlastní nebo úběžný); naopak, je-li průmětem přímky bod, prochází tato přímka středem promítání.

IV. (místo vět 4 a 5). Průmětem každé přímky p, která neprochází středem promítání, je přímka p'. Každý bod přímky p má průmět na přímce p' a každý bod přímky p' je průmětem jednoho bodu přímky p.

V. (místo vět 6 a 7). Průměty přímek, které mají společný úběžný bod a z nichž žádná neprochází středem promítání, jsou přímky, které mají společný úběžník (vlastní nebo úběžný).

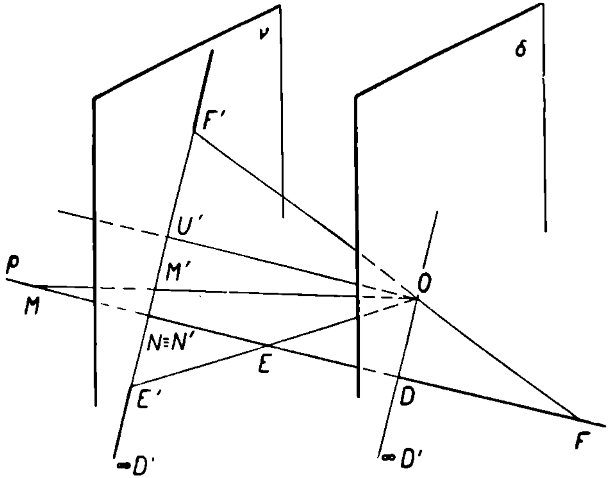
VI. (místo věty 8). Průmětem každé roviny, která prochází středem promítání, je přímka (vlastní nebo úběžná); a naopak, je-li průmětem roviny přímka (vlastní nebo úběžná), prochází rovina středem promítání.

VII. (místo vět 9 a 10). Průmětem každé roviny ϱ, která neprochází středem promítání, je celá průmětna, t. j. každý bod roviny ϱ má průmět a naopak každý bod průmětny je průmětem jednoho bodu roviny ϱ.

VIII. (místo věty 11). Všechny roviny, které mají společnou úběžnou přímku, mají společnou úběžnici (vlastní nebo úběžnou).

IX. (místo vět 12 a 13). Leží-li úběžný bod přímky p na úběžné přímce roviny ϱ, leží úběžník této přímky na úběžnici roviny ϱ. Platí i věta obrácená.

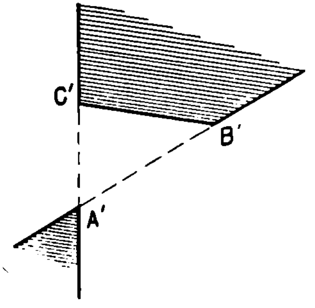
Zavedením úběžných prvků se však také názorněji vyloží mnohá paradoxa středových průmětů útvarů. Promítneme-li na př. úsečku MN, která leží na přímce p za průmětnou (obr. 8), dostaneme jako průmět opět úsečku $M'N'$ na prů-



Obr. 8.

mětu p' přímky p. Probíhá-li bod úsečku MN od bodu M k bodu N, probíhá jeho průmět úsečku $M'N'$ od bodu M' k bodu N'. Jestliže však je na přímce p dána úsečka EF, která protíná distanční rovinu v bodě D, potom průmět úsečky ED je polopřímka s počátkem v bodě E' a průmětem úsečky DF je polopřímka s počátkem v bodě F'. (V obr. 8 jsou tyto dvě polopřímky silně vytaženy.) Rozpadá se tedy průmět úsečky EF ve dvě od sebe oddělené polopřímky. Velmi názorně se tento zjev vysvětlí, připustíme-li za průmět bodu D úběžný bod D' přímek p', OD. Probíhá-li bod úsečku

EF od bodu *E* přes bod *D* do bodu *F*, běží jeho průmět od bodu *E'* přes bod *D'* do bodu *F'*, takže uvedené dvě silně vytažené polopřímky tvoří vlastně „úsečku" *E'F'* obsahující úběžný bod *D'* přímky *p'*. V tomto smyslu je tedy i v tomto případě průmětem úsečky zase úsečka.



Obr. 9.

Cvičení

8. Rozšíříme-li prostor o nevlastní body a přímky, pak ve cvičeních 1—6 můžeme připustit i přímky *a*, *b*, ležící v distanční rovině. Učiňte tak a proveďte řešení těchto cvičení s užitím nevlastních bodů a přímek.
9. V rovině ϱ, která protíná distanční rovinu, je dán čtverec *ABCD*, který má stranu *AB* v distanční rovině. Co je středovým průmětem tohoto čtverce?
10. V rovině ϱ, která protíná distanční rovinu je dán trojúhelník *ABC* tak, že jeho dvě strany protínají distanční rovinu. Dokažte, že jeho středový průmět vypadá tak, jak je naznačeno šrafováním v obr. 9. (Uvědomte si, že strany trojúhelníka protínající distanční rovinu mají průměty takové jako úsečka *EF* v obr. 8.)