II. Methody důkazů

In: Karel Hruša (author): Logický podklad matematických úsudků. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 19–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402893

II. METHODY DŮKAZŮ.

Slovem **důkaz** rozumíme logické odůvodnění nějakého výroku na základě jiných platných výroků. V provádění důkazů tkví podstata matematického uvažování; proto si o důkazech promluvíme na tomto místě podrobněji. V matematice (a v jiných vědních oborech také) provádíme nejčastěji dva typy důkazů. Jeden se označuje názvem **důkaz přímý** a druhý názvem **důkaz nepřímý**. Vedle toho pro matematiku typický je ještě třetí druh důkazu, t. zv. **důkaz úplnou indukcí**.

Důkaz přímý.

Podstatou přímého důkazu je toto: Jsou-li A, B, C tři výroky, mezi nimiž platí implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, platí také implikace $A \Rightarrow C$.

Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že implikace $A \Rightarrow B$ značí, že je splněna některá z těchto tří možností:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I.} & A \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{III.} & A \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \\ \text{IV.} & A \text{ neplatí,} & B \text{ neplatí,} \end{array}\right\} \tag{4}$$

kdežto možnost II. „A platí, B neplatí" je vyloučena. Podobně implikace $B \Rightarrow C$ značí, že je splněna některá z možností:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I}'. & B \text{ platí,} & C \text{ platí,} \\ \text{III}'. & B \text{ neplatí,} & C \text{ platí,} \\ \text{IV}'. & B \text{ neplatí,} & C \text{ neplatí,} \end{array}\right\} \tag{4'}$$

kdežto možnost II'. „B platí, C neplatí" je opět vyloučena. Platí-li tedy obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ současně, je vidno, že všecky možnosti, které mohou celkem nastati, jsou tyto

a) A platí, B platí, C platí (nastane-li současně I. a I'.),
b) A neplatí, B platí, C platí (nastane-li současně III. a I'.),
c) A neplatí, B neplatí, C platí (nastane-li současně IV. a III'.),
d) A neplatí, B neplatí, C neplatí (nastane-li současně IV. a IV'.).

Vypustíme-li v této tabulce výrok B, na kterém nám nezáleží, dostaneme celkem tyto možnosti:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I}''. \ \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} \\ \text{III}''. \ \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} \\ \text{IV}''. \ \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí;} \end{array}\right\} \qquad (4'')$$

možnost II''. „**A** platí, **C** neplatí" je opět vyloučena. Je tedy skutečně splněna implikace $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ jako důsledek implikací $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$. Výrok **B** v tomto spojení se někdy jmenuje střední člen.

To tedy znamená: Chceme-li dokázat platnost věty vyjádřené implikací $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$, kde **A** je předpoklad, **C** tvrzení, stačí nalézti takový výrok **B**, aby $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ a současně $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$.

Je zřejmé, že tento způsob usuzování je možno rozšířiti i na více implikací, z nichž každé dvě po sobě následující mají společný střední člen.

V předcházejících vývodech můžeme některou implikaci nahraditi ekvivalencí. Kdyby na příklad výroky **A**, **B** byly ekvivalentní, t. j. kdyby platilo $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$, nebyla by v tabulce (4) přípustná možnost III. a také by nemohla nastati možnost uvedená v řádku označeném b); ostatní by však zůstalo beze změny. Implikace $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ může tedy také být důsledkem vztahů $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$. Podobně by tomu bylo, kdyby místo druhé implikace nastoupila ekvivalence.

Je-li konečně $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$, odpadne v tabulce (4) možnost III., v tabulce (4') možnost III'. a nenastane žádný z případů b), c). Proto také v tabulce (4'') není možný případ III''. a výsledkem úvahy je opět ekvivalence $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$.

Jako příklad uvedeme důkaz věty: „Jsou-li a, b, c, d čtyři čísla té vlastnosti, že $a < b$ a $c < d$, je $a + c < b + d$." Předpoklad je: „Čísla a, b, c, d mají vlastnost $a < b$, $c < d$" a z něho máme odvodit tvrzení „$a + c < b + d$". Důkaz vedeme takto: Je-li $a < b$ a současně $c < d$, plyne odtud $a + c < b + c$ a současně $b + c < b + d$, neboť k oběma stranám nerovnosti $a < b$ můžeme přičíst číslo c a k oběma stranám nerovnosti $c < d$ můžeme přičíst číslo b. Tím dostaneme nerovnosti $a + c < b + c$, $b + c < b + d$, takže je splněna implikace

$$a < b \text{ a } c < d \Rightarrow a + c < b + c \text{ a } b + c < b + d.$$

Jde tu vlastně o ekvivalenci a nikoliv o implikaci, ale na tom celkem nezáleží. Nyní pokračujeme takto: Je-li $a + c < b + c$ a současně $b + c < b + d$, je také $a + c < b + d$, neboť mají-li tři čísla $a + c$,

$b + c$, $b + d$ tu vlastnost, že první z nich je menší než druhé a zároveň druhé je menší než třetí, je také první číslo menší než třetí, t. j. platí implikace

$$a + c < b + c \text{ a } b + c < b + d \Rightarrow a + c < b + d.$$

Poněvadž obě napsané implikace jsou platné, je platná i implikace, která vznikne jejich spojením podle obecné úvahy na počátku tohoto odstavce, t. j. platí

$$a < b \text{ a } c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

To však je věta, kterou jsme měli dokázat.

Za druhý příklad nám poslouží Eukleidův důkaz jedné z nejslavnějších vět geometrie, t. zv. věty Pythagorovy, která zní: „V pravoúhlém trojúhelníku je čtverec nad přeponou roven součtu čtverců nad oběma odvěsnami". Její důkaz je poněkud složitější, ale to nevadí. Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co je tu vlastně předpokladem a co je tvrzením. Předpokladem je (viz obr. 2): „Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C" a z něho máme odvodit tvrzení: „Čtverec o straně AB je roven součtu dvou čtverců, jejichž strany jsou AC a BC".

K odvození věty Pythagorovy budeme předpokládat, že známe větu, kterou v dalším budeme krátce označovat **P**: „Je-li dán obdélník a trojúhelník, které mají stejnou jednu stranu a příslušnou výšku, pak obsah obdélníka je právě tak velký jako dvojnásobný obsah trojúhelníka".

Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník ABC a čtverce $ABDE$, $ACFG$, $BCHK$ nad jeho stranami a vedeme-li bodem C kolmici MN ke straně AB, můžeme větu Pythagorovu odvodit tímto řetězem implikací: Z toho, že AC je kolmé k BC, vyplývá, že body B, C, F leží na jedné přímce, jež je rovnoběžná s přímkou AG, takže čtverec $ACFG$ a trojúhelník ABG mají společnou jednu stranu AG a výšku k ní příslušnou. Proto podle věty **P** platí, že obsah čtverce $ACFG$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABG. Zapíšeme-li to způsobem obvyklým v geometrii, dostaneme tyto implikace

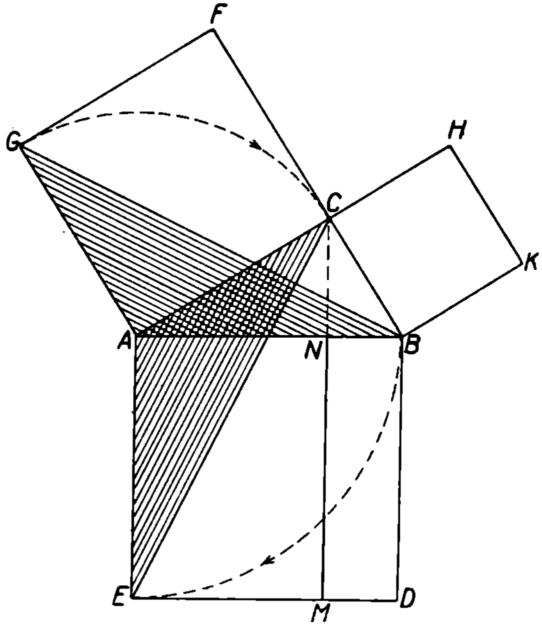
$$AC \perp BC \Rightarrow BF \parallel AG \Rightarrow ACFG = 2 \,.\, \triangle ABG.$$

Vedle toho je CM kolmé k AB (tak jsme to sestrojili), a proto je CM rovnoběžné s AE. Proto obdélník $AEMN$ a trojúhelník AEC

mají společnou stranu AE a výšku k ní příslušnou. To má podle věty **P** za následek, že obsah obdélníka $AEMN$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka AEC. To všecko lze zapsati dalším řetězem implikací:

$$CM \perp AB \Rightarrow CM \parallel AE \Rightarrow AEMN = 2 \,.\, \triangle AEC,$$

který však platí v každém trojúhelníku, neboť k jeho odvození není třeba podmínky, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.



Obr. 2.

Dále strana AB v trojúhelníku ABG je stejně dlouhá jako strana AE v trojúhelníku AEC (neboť $ABDE$ je čtverec); také strana AG je stejně dlouhá jako strana AC (neboť $ACFG$ je rovněž čtverec); konečně úhel BAG je roven úhlu EAC (neboť oba dostaneme, když k úhlu BAC přidáme pravý úhel buď na jednu nebo na druhou stranu). Proto jsou oba trojúhelníky ABG i AEC shodné a druhý dostaneme z prvého, otočíme-li jej okolo bodu A o pravý úhel, jak je to v obrázku šipkami naznačeno. To vede k třetímu řetězu implikací

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} = \overline{AE}\\ \overline{AG} = \overline{AC}\\ \sphericalangle BAG = \sphericalangle EAC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABG \cong \triangle AEC \Rightarrow \triangle ABG = \triangle AEC \Rightarrow \Rightarrow 2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC,$$

který rovněž platí v každém trojúhelníku ABC, nad jehož stranami AB, AC jsou sestrojeny čtverce $ABDE$, $ACFG$. Svorkou je naznačeno, že výroky jí sevřené platí současně.

V našem pravoúhlém trojúhelníku tedy platí tři výroky: $ACFG = 2\,.\,\triangle ABG$, $AEMN = 2\,.\,\triangle AEC$, $2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC$, z nichž dále plyne $ACFG = AEMN$, t. j.

$$\left.\begin{array}{r}ACFG = 2\,.\,\triangle ABG\\ AEMN = 2\,.\,\triangle AEC\\ 2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC\end{array}\right\} \Rightarrow ACFG = AEMN.$$

Zcela stejně odvodíme, že o čtverci $BCHK$ a obdélníku $BDMN$ platí

$$BCHK = BDMN.$$

Ježto dále $AEMN + BDMN = ABDE$, dostáváme poslední implikaci

$$\left.\begin{array}{r}ACFG = AEMN\\ BCHK = BDMN\\ AEMN + BDMN = ABDE\end{array}\right\} \Rightarrow ACFG + BCHK = ABDE,$$

čímž je dokázáno, že

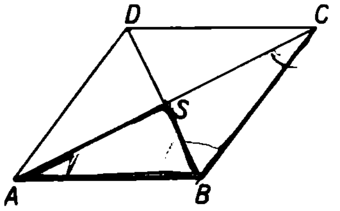
$$AC \perp BC \Rightarrow ACFG + BCHK = ABDE.$$

To však je Pythagorova věta, kterou jsme chtěli dokázat. V předpokladu jsme uvedli pouze podmínku $AC \perp BC$, která charakterisuje pravoúhlý trojúhelník; ostatní podmínky, jichž jsme použili, jsou splněny v každém trojúhelníku, a proto je můžeme vynechat.

Uveďme ještě jeden příklad přímého důkazu. Bude jím důkaz věty: „Rovnoběžník má všecky čtyři strany stejně dlouhé tehdy a jen tehdy, když má úhlopříčky navzájem kolmé.“ Tu jde o ekvivalenci výroků „rovnoběžník má všecky strany stejně dlouhé“ a „rovnoběžník má úhlopříčky navzájem kolmé“.

K důkazu budeme potřebovat tyto vlastnosti rovnoběžníka:

(1) Každé dvě protější strany každého rovnoběžníka jsou stejně dlouhé, t. j. (viz obr. 3) $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{CB} = \overline{DA}$, takže výrok „rovnoběžník má všecky strany stejně dlouhé" říká totéž jako výrok „$\overline{AB} = \overline{CB}$".



Obr. 3.

(2) Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí, t. j. v každém rovnoběžníku je $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{BS} = \overline{DS}$, kde S je průsečík úhlopříček.

Máme tedy dokázat ekvivalenci výroků „$\overline{AB} = \overline{CB}$" a „$AS \perp BS$".

V trojúhelnících ABS, CBS tedy předpokládáme, že $\overline{AB} = \overline{CB}$; vedle toho je $\overline{AS} = \overline{CS}$ podle (2) a samozřejmě $\overline{BS} = \overline{BS}$, takže trojúhelníky ABS, CBS jsou shodné, neboť mají tři strany stejné. Ale také naopak ze shodnosti trojúhelníků ABS, CBS plyne rovnost stran $\overline{AB} = \overline{CB}$; platí tedy ekvivalence

$$\overline{AB} = \overline{CB} \Leftrightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS.$$

Dále ze shodnosti trojúhelníků ABS, CBS plyne rovnost odpovídajících si úhlů ASB, CSB, ale jejich součet činí právě 180°, je tedy $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90°$ čili $AS \perp BS$. Také však naopak je-li $AS \perp BS$, je úhel ASB roven úhlu CSB; vedle toho jest $\overline{AS} = \overline{CS}$ podle (2) a samozřejmě $\overline{BS} = \overline{BS}$, takže trojúhelníky ABS, CBS jsou shodné. Platí tedy další ekvivalence

$$\triangle ABS \cong \triangle CBS \Leftrightarrow AS \perp BS.$$

Spojením obou ekvivalencí dostáváme

$$\overline{AB} = \overline{CB} \Leftrightarrow AS \perp BS,$$

čímž je věta dokázána.

Poněvadž vztahy mezi vyslovenými výroky jsou vesměs ekvivalencemi, můžeme je číst jako implikace buď zleva doprava nebo obráceně. Tak jsou obě části vyslovené věty (t. j. věta přímá i věta obrácená) dokázány najednou. Říkáváme krátce, že postup důkazu lze obrátiti. Není-li však důkaz složen ze samých ekvivalencí, pak postup důkazu obrátit nemůžeme. Při důkazu věty Pythagorovy v předešlém příkladě jsme vedle ekvivalencí použili také několika pouhých implikací, proto uvedený důkaz není zároveň důkazem věty obrácené. Věta obrácená k větě Pythagorově sice platí, ale její důkaz třeba vésti jinak.

Důkaz nepřímý.

Víme, že implikace $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ je totožná s implikací non$\mathbf{B} \Rightarrow$ non$\mathbf{A}$. Místo, abychom dokazovali platnost věty vyjádřené implikací $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, můžeme dokázati platnost věty vyjádřené implikací non$\mathbf{B} \Rightarrow$ non$\mathbf{A}$. Tento způsob důkazu se nazývá **důkaz nepřímý**.

Při nepřímém důkazu tedy vyjdeme z negace tvrzení dokazované věty a řetězem implikací dokážeme, že z něho plyne negace předpokladu, t. j. výrok, který, jak říkáme, je ve sporu s předpokladem.

Demonstrujeme to opět na příkladě. Dokážeme třeba správnost věty: „Značí-li písmena a, x daná čísla a ax jejich součin a je-li $ax \neq 0$, je také $x \neq 0$“. Nepřímý důkaz vedeme tak, že předpokládáme, že naopak je $x = 0$. Podle definice násobení nulou dostáváme odtud, že také $ax = 0$, což je ve sporu s předpokladem věty, podle něhož má být $ax \neq 0$. Dokázali jsme tedy implikaci

$$x = 0 \Rightarrow ax = 0,$$

která je totožná s implikací

$$ax \neq 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

kterou jsme měli dokázat.

Věc však zpravidla nebývá tak jednoduchá, neboť předpoklady dokazované věty bývají složitější. Často se stává, že tvrzení $\mathbf{B}$ dokazované věty neplyne jen z jediného předpokladu, nýbrž z několika. Dejme tomu, že předpokladem není platnost jediného výroku, nýbrž současná platnost dvou výroků, které označíme $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$. Jde tedy o důkaz implikace

$$\mathbf{A} \text{ a } \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}.$$

Konjunkci „$\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$“, která je na levé straně dokazované implikace, označíme na chvilku jediným písmenem, třeba $\mathbf{D}$. Jde tedy o implikaci $\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}$, jež znamená, jak víme, že nastane některá z možností

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I.} & D \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{III.} & D \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \\ \text{IV.} & D \text{ neplatí,} & B \text{ neplatí,} \end{array}\right\} \tag{5}$$

kdežto možnost II. „D platí, B neplatí“ je vyloučena. Avšak výrok „D platí“ značí, že platí oba výroky A a C, jejichž konjunkcí je výrok D, t. j. že je splněna jediná možnost

$$A \text{ platí, } C \text{ platí.} \tag{5'}$$

Negace tohoto výroku, t. j. výrok „D neplatí“, je, jak také víme, disjunkcí výroků non$A$ a non$C$, která říká, že je splněna některá ze tří zbývajících možností, které mohou nastati, totiž

$$\left.\begin{array}{rll} \text{a)} & A \text{ platí,} & C \text{ neplatí,} \\ \text{b)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ platí,} \\ \text{c)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \tag{5''}$$

Abychom jasně přehlédli strukturu tabulky (5), napišme do ní místo výroku „D platí“ výroky z tabulky (5′) a místo výroku „D neplatí“ výroky z tabulky (5″). Dostaneme celkem sedm možností, které vystihují implikaci „A a $C \Rightarrow B$“:

$$\left.\begin{array}{rlll} \text{I.} & A \text{ platí,} & C \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{IIIa)} & A \text{ platí,} & C \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \\ \text{b)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{c)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \\ \text{IVa)} & A \text{ platí,} & C \text{ neplatí,} & B \text{ neplatí,} \\ \text{b)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ platí,} & B \text{ neplatí,} \\ \text{c)} & A \text{ neplatí,} & C \text{ neplatí,} & B \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Osmá možnost: II. „A platí, C platí, B neplatí“ nemůže nastat, neboť odporuje významu uvažované implikace. Tuto tabulku upravíme stejně, jako jsme na str. 7 upravili tabulku (1), t. j. místo výroku A budeme psáti non$A$, místo B budeme psáti non$B$ a slova „platí“ a „neplatí“ u výroků A a B navzájem vyměníme. Potom zaměníme sloupec prvý s třetím a jednotlivé řádky napíšeme v jiném pořádku. Dostaneme novou tabulku, u níž je v každém řádku v závorkách poznamenáno, z kterého řádku tabulky (6) tento řádek vznikl:

I'.	non$\boldsymbol{B}$ platí,	$\boldsymbol{C}$ platí,	non$\boldsymbol{A}$ platí,	(IVb)	
III'a)	non$\boldsymbol{B}$ platí,	$\boldsymbol{C}$ neplatí,	non$\boldsymbol{A}$ platí,	(IVc)	
b)	non$\boldsymbol{B}$ neplatí,	$\boldsymbol{C}$ platí,	non$\boldsymbol{A}$ platí,	(IIIb)	
c)	non$\boldsymbol{B}$ neplatí,	$\boldsymbol{C}$ neplatí,	non$\boldsymbol{A}$ platí,	(IIIc)	(7)
IV'a)	non$\boldsymbol{B}$ platí,	$\boldsymbol{C}$ neplatí,	non$\boldsymbol{A}$ neplatí,	(IVa)	
b)	non$\boldsymbol{B}$ neplatí,	$\boldsymbol{C}$ platí,	non$\boldsymbol{A}$ neplatí,	(I)	
c)	non$\boldsymbol{B}$ neplatí,	$\boldsymbol{C}$ neplatí,	non$\boldsymbol{A}$ neplatí.	(IIIa)	

Osmá možnost II'. „non$\boldsymbol{B}$ platí, $\boldsymbol{C}$ platí, non$\boldsymbol{A}$ neplatí“, která je totožná s dřívější možností II., je opět vyloučena.

Prohlédneme-li si pozorně tabulku (7), která je obsahově totožná s tabulkou (6), shledáme, že je i formálně stejná jako tabulka (6), pouze s tím rozdílem, že místo $\boldsymbol{A}$ je psáno non$\boldsymbol{B}$ a místo $\boldsymbol{B}$ je psáno non$\boldsymbol{A}$. Značí-li tedy tabulka (6) implikaci

$$\boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B},$$

značí tabulka (7) implikaci

$$\text{non}\boldsymbol{B} \text{ a } \boldsymbol{C} \Rightarrow \text{non}\boldsymbol{A},$$

která vyslovuje přesně totéž, co říká implikace předešlá.

Přitom písmena $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C}$ značí nějaké platné výroky. To tedy znamená, že při nepřímém důkazu vyjdeme od negace tvrzení, které chceme dokázat, přibereme k němu vhodné další výroky, jejichž platnost je zaručena, a to činíme tak dlouho, až se řetězem implikací dostaneme k výroku, který je ve sporu s předpokladem nebo s nějakým jiným platným výrokem. Poněvadž z výroku non$\boldsymbol{B}$ (a z jiných platných výroků, které jsme označili $\boldsymbol{C}$) vyplývá non$\boldsymbol{A}$, proto z výroku $\boldsymbol{A}$ (a současně z výroků $\boldsymbol{C}$) vyplývá $\boldsymbol{B}$.

Ukážeme si to na několika příkladech. Dokážeme třeba větu: „Je-li číslo dělitelné dvěma a třemi současně, je také dělitelné šesti“. Za $\boldsymbol{A}$ vezmeme výrok „číslo je dělitelné dvěma“, za $\boldsymbol{C}$ výrok „číslo je dělitelné třemi“ a za $\boldsymbol{B}$ vezmeme výrok „číslo je dělitelné šesti“. Máme dokázat implikaci

$$\boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B}.$$

To je totéž, jako kdybychom řekli

$$\text{non}\boldsymbol{B} \text{ a } \boldsymbol{C} \Rightarrow \text{non}\boldsymbol{A},$$

čili v našem případě: „Není-li číslo dělitelné šesti, ale je-li dělitelné třemi, není dělitelné dvěma". A tuto implikaci nyní dokážeme.

Dříve si ji však vyjádříme matematicky. Je-li číslo a dělitelné dvěma, znamená to, že při dělení dvěma vyjde jako podíl jakési číslo x, které je celé, t. j. $a = 2x$. Není-li a dělitelné dvěma, vyjde vedle podílu x ještě zbytek, který však nemůže být jiný než 1, t. j. $a = 2x + 1$. Výrok **A** tedy značí „$a = 2x$" a výrok non**A** značí „$a = 2x + 1$". Podobně je-li číslo a dělitelné třemi, dá při dělení třemi jisté celé číslo y jako podíl, takže výrok **C** značí „$a = 3y$". Konečně je-li číslo a dělitelné šesti, dá při dělení šesti podíl u, což je opět číslo celé, a není-li a dělitelné šesti, vyjde při dělení šesti vedle podílu u ještě jakýsi zbytek, který označíme z, t. j. $a = 6u + z$, kde z je některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Výrok non**B** tedy jest: „$a = 6u + z$, kde $z = 1, 2, 3, 4, 5$".

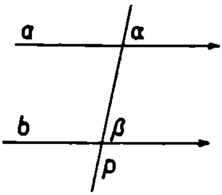
Z výroků „$a = 6u + z$" a „$a = 3y$" tedy máme odvoditi výrok „$a = 2x + 1$". Z našich dvou výroků plyne

$$6u + z = 3y, \text{ čili } z = 3y - 6u = 3(y - 2u).$$

Ježto z může být pouze některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5 a ježto $y - 2u$ je celé, neboť y je celé a u je také celé, nelze tomu vyhověti jinak než tak, že bude $y - 2u = 1$ a pak $z = 3$. Je tedy

$$a = 6u + 3 = 6u + 2 + 1 = 2(3u + 1) + 1.$$

Toto číslo je opravdu tvaru $2x + 1$, kde $x = 3u + 1$ je číslo celé.



Obr. 4.

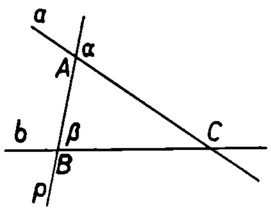
Jako druhý příklad dokážeme větu: „Jestliže dvě přímky v rovině svírají se svou příčkou dva souhlasné úhly, které jsou si rovny, jsou ty přímky rovnoběžné". Slovem souhlasné úhly rozumíme dva úhly, které jsou vzhledem k přímkám a, b a jejich příčce p tak položeny jako úhly α, β na obr. 4. Jde o to, abychom dokázali implikaci

$$\alpha = \beta \Rightarrow a \parallel b.$$

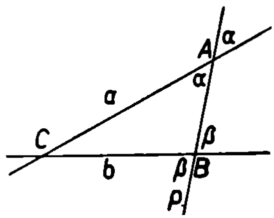
Dokážeme ji opět nepřímo. Budeme předpokládat, že přímky a, b nejsou rovnoběžné, a dokážeme, že pak musí $\alpha \neq \beta$, t. j. dokážeme implikaci

$$a \text{ není rovnoběžné s } b \Rightarrow \alpha \neq \beta.$$

K provedení důkazu přibereme některé jiné platné výroky; které to jsou, vyplyne z postupu důkazu. Předpokládejme tedy, že přímky a, b nejsou rovnoběžné; pak se protnou v některé polorovině určené přímkou p. Je-li tomu tak jako na obr. 5a, vznikne trojúhelník ABC, v němž je úhel α vnějším a úhel β vnitřním. Je však známo, že vnější úhel v trojúhelníku je vždy větší než kterýkoli protější vnitřní, t. j. $\alpha > \beta$. Je-li však průsečík C přímek a, b v opačné polorovině, nastane situace taková jako na obr. 5b, kde (vzhledem k rovnosti vrcholových



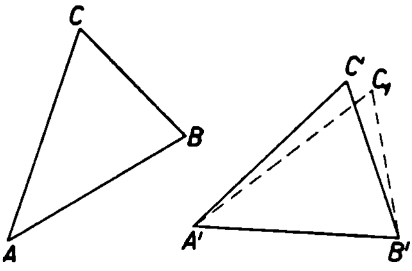
Obr. 5a.



Obr. 5b.

úhlů) α je vnitřním a β protějším vnějším úhlem trojúhelníka ABC. Pak je $\beta > \alpha$. V obou případech tedy je $\alpha \neq \beta$, takže opravdu z předpokladu, že přímky a, b nejsou rovnoběžné, plyne, že $\alpha \neq \beta$. Tím je naše věta dokázána.

Dalším příkladem bude důkaz věty: „Jestliže strany jednoho trojúhelníka jsou rovny odpovídajícím stranám druhého trojúhelníka, pak jsou ty trojúhelníky shodné“. Tu jde o dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, v nichž $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$ (obr. 6), a máme dokázat implikaci



Obr. 6.

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \overline{BC} &= \overline{B'C'} \\ \overline{CA} &= \overline{C'A'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Dva trojúhelníky nazýváme shodnými, lze-li je položit na sebe tak, aby se kryly. Položíme tedy oba trojúhelníky na sebe tak, aby vrchol A padl do vrcholu A', vrchol B do vrcholu B' a aby vrchol C padl do bodu C_1, který leží v téže polorovině určené přímkou $A'B'$, v níž leží vrchol C'. Tak dostaneme nový trojúhelník $A'B'C_1$. Jsou-li oba trojúhelníky shodné, musí bod C_1 padnout právě do bodu C', t. j. platí implikace

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow C_1 \equiv C'.$$

Abychom dokázali správnost naší věty, předpokládejme, že body C_1, C' jsou různé, a ukážeme, že to vede ke sporu. Je-li tedy C_1 různé od C', vznikne rovnoramenný trojúhelník $A'C'C_1$, v němž je $\overline{A'C'} = \overline{A'C_1}$. To značí, že bod A' leží na ose úsečky $C'C_1$. Podobně trojúhelník $B'C'C_1$ je rovnoramenný a v něm je $\overline{B'C'} = \overline{B'C_1}$; proto také bod B' leží na ose úsečky $C'C_1$. Oba vrcholy A', B' tedy leží na ose úsečky $C'C_1$, t. j. osou úsečky $C'C_1$ je právě přímka $A'B'$. To však vede ke sporu s předpokladem, který jsme před chvílí učinili, že totiž body C' i C_1 leží v téže polorovině určené přímkou $A'B'$. Není tedy možaby body C', C_1 byly navzájem různé a tím je věta dokázána.

V závěru ještě dokážeme větu: „Číslo $\sqrt{2}$ nelze vyjádřiti zlomkem". Číslo, o němž se hovoří v této větě, je to číslo, které násobeno samo sebou dává právě číslo 2.

Budeme předpokládati, že není pravda to, co věta tvrdí, a ukážeme, že to vede ke sporu. Předpokládejme tedy, že číslo $\sqrt{2}$ můžeme vyjádřiti jako zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou čísla celá a kladná. Takových zlomků je ovšem více. Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že třeba $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ atd. Vybereme z nich ten, jehož jmenovatel je nejmenší možné celé kladné číslo, a označíme jej $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá kladná. Ježto $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, je $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, čili $\frac{p^2}{q^2} = 2$, t. j. $p^2 = 2q^2$. Náš předpoklad je totožný s výrokem, že existují dvě celá kladná čísla p, q taková, že $p^2 = 2q^2$, při čemž q je nejmenší číslo uvedené vlastnosti. Z podmínky $p^2 = 2q^2$ však plyne $p^2 - pq = 2q^2 - pq$, neboť od obou stran rovnice můžeme odečísti totéž číslo pq. Poslední rovnici přepíšeme v tvaru $p(p - q) = q(2q - p)$, čili

$$\frac{p}{q} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Máme tedy dokázánu implikaci

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ a } q \text{ je nejmenší celé kladné} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Avšak zlomek $\frac{p}{q}$ je jistě větší než 1 a menší než 2, neboť $1 . 1 = 1$ a $2 . 2 = 4$, kdežto $\frac{p}{q} . \frac{p}{q} = 2$. Je tedy $1 < \frac{p}{q} < 2$, čili $q < p < 2q$. To však znamená, že také $0 < p - q < q$, neboť nerovnost zůstane zachována, odečteme-li od obou jejích stran stejné číslo (v našem případě to bylo číslo q). Naše nerovnosti však říkají, že číslo $p - q$, které je celé, je kladné a menší než q. Pak se ale zlomek $\frac{p}{q}$ dá psát ve tvaru $\frac{2q - p}{p - q}$ se jmenovatelem menším než q. Ale to je ve sporu s předpokladem, podle něhož q bylo nejmenší celé kladné číslo, přípustné ve jmenovateli. Proto není pravda, že se číslo $\sqrt{2}$ dá vyjádřiti jako zlomek. Je ovšem pravda, že v tabulkách odmocnin nalezneme pro číslo $\sqrt{2}$ hodnotu 1,414, ale to je vyjádření pouze přibližné; naše věta však mluvila o vyjádření přesném.

Důkaz úplnou indukcí.

Logický podklad předcházejících dvou typů důkazu nemá nic společného s matematikou. Důkazu přímého i nepřímého používáme při jakýchkoli logických dedukcích. Vedle těchto dvou typů se často v matematice užívá ještě třetího typu důkazu, který se nazývá **důkaz úplnou indukcí** a dokazují se jím některé věty, v nichž se vyskytují čísla celá a kladná. Takovým číslům říkáme krátce čísla *přirozená* a mají tuto základní vlastnost:

je-li n přirozené číslo, je $n + 1$ také přirozené číslo.

Na příklad 50 je přirozené číslo, proto 51 je také přirozené číslo. Skupina čísel, která má tyto vlastnosti: (1) obsahuje číslo 50 a (2) s každým n obsahuje také $n + 1$, obsahuje také všecka přirozená čísla, která jsou větší než 50, t. j. obsahuje všecka přirozená čísla $n \geq 50$. Této vlastnosti přirozených čísel se užívá při důkazu úplnou indukcí.

Označme $V(n)$ výrok, v němž se vyskytuje přirozené číslo n. Víme-li, že (1) výrok $V(n)$ platí, když n je rovno některému přirozenému číslo a, t. j. víme-li, že platí výrok $V(a)$, a dokážeme-li, že (2) z platnosti výroku $V(n)$ plyne platnost výroku $V(n + 1)$, dokázali jsme tím, že výrok $V(n)$ platí pro všecka přirozená čísla $n \geqq a$. To snadno nahlédneme. Výrok $V(n)$ platí podle (1) pro $n = a$. Protože $V(n)$ platí pro $n = a$, platí podle (2) i pro $n = a + 1$. Protože $V(n)$ platí podle právě dokázaného pro $n = a + 1$, platí podle (2) i pro $n = a + 2$. Protože $V(n)$ platí pro $n = a + 2$, platí i pro $n = a + 3$ a tak můžeme postupovati libovolně daleko. Výrok $V(n)$ tedy platí pro všecka přirozená čísla $n \geqq a$.

Důkaz úplnou indukcí tedy má dva kroky. Třeba dokázat

(1) $V(a)$ platí pro přirozené číslo a.
(2) $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$.

Poznamenejme ještě, že úplná indukce (také se někdy říká matematická indukce) nemá nic společného s indukcí, jíž se užívá v přírodních vědách a kterou bychom mohli nazvati neúplná indukce. Tato (neúplná) indukce vyslovuje totiž na základě jednotlivých zkušeností pouze domněnku ve tvaru obecně platné věty, která však není logickým důsledkem vyvozeným ze zkušenosti, nýbrž vyslovuje jenom určitou (zpravidla sice velmi značnou) pravděpodobnost, že v podobných případech nastane podobný výsledek. Naproti tomu matematická indukce je skutečně logické odvození výroku $V(n)$ platného pro každé přirozené číslo n, které vyhovuje nerovnosti $n \geqq a$.

Provedeme si několik důkazů úplnou indukcí. Nejprve dokážeme větu: „Číslo $n^3 - n$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné třemi.“ Důkaz má, jak víme, dva body:

(1) Pro $n = 1$ dostáváme $1^3 - 1 = 0$, což je dělitelné třemi; věta tedy platí pro $n = 1$.

(2) Předpokládejme, že číslo $n^3 - n$ je pro nějaké přirozené číslo n dělitelné třemi, t. j. že $n^3 - n = 3x$, kde x je celé kladné. Odtud odvodíme, že také $(n + 1)^3 - (n + 1)$ je dělitelné třemi. Platí

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + \\ + 3n^2 + 3n = 3x + 3n^2 + 3n = 3(x + n^2 + n),$$

což je dělitelné třemi, neboť $x + n^2 + n$ je číslo celé. Tím je důkaz naší věty dokončen. Věta platí pro každé přirozené n.

Jako druhý příklad dokážeme, že součet vnitřních úhlů v n-úhelníku, měřený ve stupních, je

$$s_n = (n - 2) \cdot 180.$$

(1) Věta je správná pro $n = 3$, neboť pro $n = 3$ ze vzorce vychází $180°$ a součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je skutečně $180°$.

(2) Předpokládejme, že věta platí pro n-úhelník. Třeba z ní odvodit, že $(n + 1)$ úhelník má součet vnitřních úhlů $s_{n+1} = [(n + 1) - - 2] \cdot 180 = (n - 1) \cdot 180$ stupňů. To je také pravda, neboť $(n + 1)$-úhelník dostaneme, když nad některou stranou n-úhelníka sestrojíme další trojúhelník; tím se součet úhlů zvětší o $180°$. Je tedy

$$s_{n+1} = s_n + 180 = (n - 2) \cdot 180 + 180 = (n - 2 + 1) \cdot 180 = \\ = (n - 1) \cdot 180.$$

Platnost uvedené věty je dokázána pro přirozená čísla $n \geqq 3$, tedy pro všecky mnohoúhelníky.

Nakonec ještě stanovíme hodnotu součtu

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Označme znakem s_1 prvý člen tohoto výrazu, znakem s_2 součet jeho prvních dvou členů, s_3 součet prvých tří členů atd. Je vidno, že

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \tfrac{1}{2},$$

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3},$$

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{9}{12} = \tfrac{3}{4},$$

atd. Zdá se pravděpodobné, že

$$s_n = \frac{n}{n + 1}.$$

To však není žádný důkaz, neboť platnost našeho vzorce byla dokázána jen pro $n = 1, 2, 3$, ale my jej musíme dokázat pro každé přirozené n. Třeba ještě provésti druhý krok důkazu, t. j. dokázati, že

$$s_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

kde výraz pro s_{n+1} vznikl z výrazu pro s_n tak, že jsme místo n psali $n + 1$. Platí

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Teprve teď je naše formule plně dokázána pro všecka přirozená n.

Druhý krok důkazu nelze vynechávat; teprve jím se věta dokazuje. Kdybychom tento druhý krok neprovedli, mohli bychom být snadno svedeni ke klamným závěrům. Dosadíme-li na příklad do výrazu

$$x = n^2 + n + 17$$

za číslo n postupně čísla $1, 2, 3, \ldots, 15$, dostaneme tyto výsledky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	19	23	29	37	47	59	73	89	107	127	149	173	199	227	257

což jsou vesměs prvočísla (t. j. čísla, která jsou dělitelná pouze sama sebou a číslem 1). Mohli bychom být lehce svedeni k domněnce, že číslo x je prvočíslem pro každé n. To však není pravda, neboť na př. pro $n = 16$ dostaneme $x = 289 = 17 \,.\, 17$, což prvočíslem není.

Cvičení.

11. Vyšetřte, lze-li obrátit postup důkazů:

a) Je dána rovnice

$$3x - 5 = 3 - x.$$

K oběma jejím stranám přičteme číslo $5 + x$; tím dostaneme rovnici

$$4x = 8$$

a po krácení číslem 4 vyjde

$$x = 2.$$

b) Jsou dány rovnice

$$2x - 3y = 4,$$
$$x + 2y = 9.$$

Obě strany první rovnice znásobíme dvěma, obě strany druhé rovnice násobíme třemi. Vzniklé rovnice sečteme, čímž dostaneme

$$7x = 35$$

a po krácení číslem 7 máme

$$x = 5.$$

12. Nalezněte chybu v tomto „důkaze“: Písmena a, b značí dvě čísla, která vyhovují rovnici

$$2a = 3b.$$

K oběma jejím stranám přičteme číslo $2a - 6b$; tím dostaneme rovnici

$$4a - 6b = 2a - 3b$$

čili

$$2(2a - 3b) = 2a - 3b$$

a po krácení číslem $2a - 3b$ vyjde

$$2 = 1.$$

13. Vyšetřte, lze-li obrátit postup důkazu věty: „Jestliže celá čísla a, b dávají při dělení devíti zbytky z_1, z_2 a byla-li správně vypočtena čísla $a + b$, $a - b$, ab, pak tato čísla dávají při dělení devíti tytéž zbytky, které dávají čísla $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, z_1z_2“ (devítková zkouška). Příklad: čísla 123 a 76 dávají při dělení devíti zbytky 6 a 4, čísla $123 + 76 = 199$, $123 - 76 = 47$, $123 . 76 = 9348$ dávají při dělení devíti zbytky 1, 2, 6 a čísla $6 + 4 = 10$, $6 - 4 = 2$, $6 . 4 = 24$ dávají tytéž zbytky 1, 2, 6. — Důkaz vyslovené věty je tento: Dávají-li čísla a, b při dělení devíti zbytky z_1, z_2, platí $a = 9x + z_1$, $b = 9y + z_2$, kde x a y jsou čísla celá. Dává-li číslo $a + b$ zbytek z, je $a + b = 9u + z$, kde u je rovněž celé. Dosadíme-li sem za a, b, máme $9x + z_1 + 9y + z_2 = 9u + z$ a odtud vypočteme $z_1 + z_2 = 9(u - x - y) + z$. Podobně pro rozdíl $a - b$ a součin ab.

14. Dokažte větu: „Je-li trojúhelník rovnoramenný, má dvě výšky stejně dlouhé“. Lze důkaz (a tedy i větu) obrátit? — Daný trojúhelník ABC měj strany $\overline{AC} = \overline{BC}$; paty kolmic spuštěných z bodů A, B na protější strany označme A_1, B_1. Všimněte si trojúhelníků AA_1C, BB_1C.

15. Číslo (celé a kladné), které se dá psát jako součin jiných dvou (celých a kladných) čísel, z nichž žádné není rovno jedné, se jmenuje číslo složené. Číslo, které se takto psáti nedá, jmenuje se prvočíslo. Na příklad číslo $12 = 4 . 3$ je složené, číslo 13 je prvočíslo. Číslo 4 se jmenuje dělitelem čísla 12. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Nejmenší dělitel každého složeného čísla, který je větší než 1, je prvočíslem“.

16. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Rovnici $ax = b$ při $a \neq 0$ vyhovuje jediné číslo x“. Jak by tomu bylo, kdyby $a = 0$?

17. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Leží-li body A, B v téže polorovině vyťaté přímkou p a sestrojíme-li bod A' souměrný k bodu A podle přímky p, pak ze všech bodů přímky p má její průsečík M s přímkou $A'B$ nejmenší součet vzdáleností od bodů A, B.“

18. A_1, A_2, A_3 jsou tři výroky, které se navzájem vylučují (t. j. platí-li kterýkoli z nich, nemůže platit žádný z ostatních) a vyčerpávají všecky možnosti. Podobně B_1, B_2, B_3 jsou tři jiné výroky týchž vlastností. Platí-li současně implikace

$$A_1 \Rightarrow B_1, \quad A_2 \Rightarrow B_2, \quad A_3 \Rightarrow B_3,$$

platí také implikace

$$B_1 \Rightarrow A_1, \quad B_2 \Rightarrow A_2, \quad B_3 \Rightarrow A_3.$$

Dokažte a demonstrujte to na příkladě: „Má-li přímka od středu kružnice vzdálenost menší než poloměr, protíná ji ve dvou bodech; má-li od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru, protíná ji v jediném bodě; má-li od středu kružnice vzdálenost větší než poloměr, neprotíná ji".

19. Úplnou indukcí dokažte, že

a) součin dvou po sobě jdoucích čísel celých je vždy dělitelný dvěma;

b) součin tří po sobě jdoucích čísel celých je vždy dělitelný šesti;

c) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

20. Úplnou indukcí dokažte věty:

a) n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, má $\frac{1}{2}n(n + 1)$ průsečíků;

b) n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na téže přímce, lze spojiti $\frac{1}{2}n(n + 1)$ přímkami;

c) každá strana n-úhelníka je menší než součet ostatních.