7,1. Koule, rotační kužel, hyperbolický válec. Bodům na ploše přísluší cykly, jež tvoří kongruenci. Mimo roviny, cyklografické kužele a koule můžeme uvésti několik příkladů, které mají význam pro řešení elementárních úloh o cyklech a kružnicích.

1. Mějme kouli se středem v průmětně π. Pišme její rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Její stopní kružnice má střed O a poloměr r. Bodu na kouli $P(\xi, \eta, \zeta)$ je přiřaděna kružnice $[P]$ daná rovnicí

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2 - \xi^2 - \eta^2.$$

Chordála této a stopní kružnice jest

$$\xi x + \eta y - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

a vidíme hned, že jde bodem (ξ, η), t. j. středem kružnice $[P]$.

Bodům koule se středem v průmětně π jsou přiřaděny kružnice, jež jsou stopní kružnicí půleny.

Je-li střed koule mimo průmětnu, změní se poloměry všech cyklů o konstantní délku, nová kongruence povstane dilatací z původní.

2. Buď dán rotační kužel s vrcholem O v π a osou kolmou ku π

$$x^2 + y^2 - kz^2 = 0.$$

Bodu $P(\xi, \eta, \zeta)$ na kuželu je přiřaděna kružnice $[P]$ o rovnici

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{1}{k} (\xi^2 + \eta^2)$$

tedy kružnice, jejíž střed má od O vzdálenost $OS = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, poloměr $r = \dfrac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{k}}$, tedy poměr $\dfrac{r}{\overline{OS}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ je konstantní. Je-li φ úhel tečen vedených z O ke kružnici, pak tedy $\sin\frac{1}{2}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Cyklografický obraz rotačního kužele s vrcholem O v průmětně π a osou kolmou ku π je kongruence kružnic, jež z vrcholu O se jeví v úhlu konstantním.

Je-li vrchol mimo π, osa kolmá ku π, pak seče kužel průmětnu π v kružnici o středu S, poloměru ϱ a poznáme snadno, že z dřívější kongruence povstane dilatací nová, jejíž cykly mají tu vlastnost, že tečné paprsky společné jednomu cyklu kongruence a stopnímu cyklu (S, ϱ) svírají konstantní úhel.

3. Mějme válec s osou v průmětně π, jehož kolmý průsek je rovnostranná hyperbola s osou v průmětně, tedy válec o rovnici

$$V \equiv z^2 - y^2 = k^2.$$

Bodu (ξ, η, ζ) je přiřaděna kružnice

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \eta^2 + k^2$$

čili

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2y\eta + \xi^2 - k^2 = 0.$$

Průsečíky s osou $y = 0$ jsou $x_{12} = \xi \pm k$ a tedy úsek vyťatý na přímce Ox je konstantní a rovný $x_1 - x_2 = 2k$.

Bodům válce V jsou přiřaděny kružnice, jež na ose vytínají úsečky konstantní délky. (Kdy je tento úsek imaginární?).

Cvičení. 7,1,1. Sestrojte cykl, který je danou kružnicí rozpůlen, dotýká se jiného cyklu a paprsku.

7,1,2. Dány jsou kružnice $[A]$, $[B]$, $[C]$. Sestrojte kružnici, která všechny tři půlí.

7,1,3. Sestrojte kružnici, jež z bodu M se jeví v úhlu α, z bodu N v úhlu β a mimo to a) dotýká se dané přímky, b) má střed na dané kružnici.

7,1,4. Dány jsou cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů (A), (X) svíraly úhel α, společné tečné paprsky cyklů (B), (X) úhel β a spol. teč. paprsky cyklů (C), (X) úhel γ.

7,1,5. Dána je lineární řada cyklů a přímka. Sestrojte cykly řady, jež na přímce vytínají úsečku dané délky d (nebo di).

7,1,6. V daném svazku kružnic sestrojte kružnici, jež na dané přímce vytíná úsečku délky d.

7,1,7. Jaké je g. m. středů kružnic, které na daných přímkách p, q vytínají úsečky délek a, b?

7,1,8. Kolik je kružnic, jež přímky p, q, r sekou v úsečkách délek a, b, c?

7,1,9. Prostudujte kongruenci kružnic, jež s danou kružnicí mají tětivu dané délky d: Jaká je příslušná plocha v prostoru? Řešte pak úlohy: a) V lineární řadě cyklů jest nalézti cykl, který z dané kružnice vytíná tětivu délky d. b) Sestrojte kružnici, která tři dané kružnice seče v tětivách délek a, b, c.

7,1,10. Jaké je g. m. středu kružnice, jež jde bodem A a z dané kružnice vytíná tětivu délky d?

7,1,11. Sestrojte cykl, který danou kružnici seče v tětivě délky d a mimo to a) jde dvěma body, b) dotkne se daného cyklu v daném bodě.

7,1,12. Na přímce je dána kvadratická involuce s páry AA', BB' atd. Kružnice, které vytínají tyto páry tvoří kongruenci. Najděte příslušnou plochu v prostoru a zvláště, je-li daná involuce symetrická. Jak je to, je-li involuce na kružnici nebo na kuželosečce?

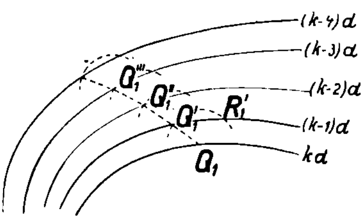
7,1,13. Dány jsou přímky a, b. Jaké je g. místo bodů v prostoru, mají-li kružnice jemu přidružené jeden koncový bod průměru na a, druhý na b?

7,2. Cyklické zobrazení obecné plochy. Cykly přiřaděné bodům plochy Φ tvoří *kongruenci cyklů*; je-li plocha symetrická dle π možno mluviti o *kongruenci kružnic*. Křivce k na ploše Φ odpovídá řada cyklů, kterou označíme (k) a jejíž obálka se zpravidla skládá ze dvou větví k', k''. Tyto větve splývají, pakli tečny křivky k sekou základní křivku C; pak řada (k) je řada oskulačních cyklů (6,1). Na ploše Φ jsou obecně dva systémy křivek, jejichž tečny sekou C, říkejme jim „*isotropické*“ křivky a značme je z. Tvoří obdobu minimálních křivek euklidovské geometrie. Pak (z) je řada oskulačních cyklů a jejich středy vyplňují křivku z_1.

Buď P bod na Φ, τ jeho tečná rovina. Tato seče křivku C ve dvou bodech M', M'' a PM', PM'' jsou tečny „isotropických“ křivek ${}^1z$, ${}^2z$, jež jdou bodem P. Jsou reálné a různé ovšem jen pro body, kde půdorysná odchylka tečné roviny je větší než 45°, splývají v bodech, kde odchylka ta je rovna 45°. Tyto body vyplní *meznou* křivku m. Podél m se dotýká plochy Φ rozvinutelná plocha určená společnými tečnými rovinami plochy Φ a křivky C. Dle toho tedy kongruence cyklů obsahuje obecně dva systemy oskulačních řad $({}^1z)$, $({}^2z)$. Cykl kongruence (P) je obecně obsažen v jedné řadě jednoho a jedné druhého systému.

Obráceně, máme-li v průmětně π systém orientovaných křivek $({}^1z)$, závislý na jednom parametru, tvoří oskulační cykly těchto křivek kongruenci, jíž v prostoru patří plocha Φ. Na Φ k systému ${}^1z$ lze sestrojiti přidružený ${}^2z$ a jemu opět v rovině patří druhý systém $({}^2z)$ orientovaných křivek obalený cykly kongruence.

Přibližně lze narýsovati křivky z na dané ploše následující methodou. Zjednejme si vrstevnice ve výšce d, $2d$, $3d\ldots$ nad i pod průmětnou, kde d je dosti malé. Buď Q bod na vrstevnici kd (obr. 43). Q je vrchol cyklografického kuželu, který seče rovinu vrstevnice $(k-1)d$ v kružnici o poloměru d a ta dává na této vrstevnici body Q', R'. Od Q' přejdeme podobně ku Q'' na vrstevnici $(k-2)d$ atd. Body Q_1, Q_1', Q_1'' dávají přibližný průmět křivky z.

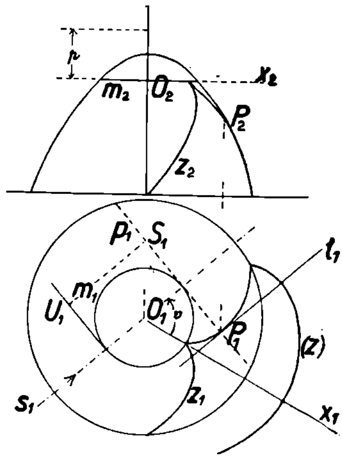


Obr. 43.

Jiného způsobu lze použíti, jsme-li s to nalézti půdorys meze vlastního stínu plochy pro paprsky rovnoběžné s půdorysnou odchylkou 45°. Nechme otáčeti půdorys paprsku s_1 o malý úhel stejnoměrně do poloh s_1', s_1'', $s_1'''\ldots$, sestrojme příslušné meze vlastního stínu m_1, m_1', m_1'', m_1''', ... Půdorys křivky z dostaneme, sestrojíme-li křivku, jež v průsečíku s m_1 má tečnu rovnoběžnou s s_1, v průsečíku s m_1' tečnu rovnoběžnou s s_1' atd.

Omezíme se jen na velmi jednoduché případy.

Buď dán rotační paraboloid s osou kolmou k rovině π (obr. 44). Mezní čára je zde kružnice m v rovině ohniskem jdoucí a kolmá k ose, podél které se dotýká paraboloidu cyklografický kužel.



Obr. 44.

Čáru z_1 lze najíti elementární úvahou. Nechť plocha je osvětlena rovnoběžnými paprsky s první odchylkou 45°; mez vlastního stínu je, jak známo, parabola p v rovině kolmé ku π, takže $p_1 \perp s_1$. Buď P bod této meze, P_1 jeho půdorys a t_1 půdorys světelného paprsku bodem P, který má odchylku 45°. Jest $t_1 \perp p_1$ a to pro každý bod na p pro všechny směry s_1. p_1 obaluje kružnici m_1 o poloměru p, kde p je parametr meridiánu, a půdorys z_1 hledané křivky jeví se tedy jako ortogonální trajektorie tečen kružnice. Jest to evolventa její. *Křivka z jest pak průsek paraboloidu s válcem kolmým k π, jehož podstavou je evolventa kruhu.*

Uvedeme nejdůležitější vlastnosti prostorové křivky z. Volme počátek pravoúhlé soustavy O v ohnisku, Oz v ose rotace, při čemž kladná část směřuje dolů. Pak jest rovnice paraboloidu

$$x^2 + y^2 = 2pz + p^2. \tag{1}$$

Rovnice evolventy lze psáti

$$x = p(\cos v + v \sin v), \quad y = p(\sin v - v \cos v). \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vychází

$$z = \tfrac{1}{2}pv^2. \tag{3}$$

Rovnice (2) a (3) jsou parametrické rovnice křivky z.

Pro směr tečny vychází $\cos v : \sin v : 1$; přímka, jež spojuje bod (v) s ohniskem paraboloidu O, má kosiny směrové $\frac{x}{r} : \frac{y}{r} : \frac{z}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Snadným výpočtem dostaneme pro úhel obou přímek $\cos\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \omega = 45°$. *Strany kužele s vrcholem O protínají tedy křivku pod stálým úhlem a týmž jako strany vertikálního válce. Křivka* z je *konická spirála.**) Tato vlastnost přísluší obecněji šroubovicím na rotačních plochách druhého stupně.**)

Zajímavá je dále vlastnost hrany vratu polární plochy (g. místo středu oskulační koule). Rovina normální bodu (v), jak snadno propočteme, má rovnici

$$X \cos v + Y \sin v + Z - p - \tfrac{1}{2}pv^2 = 0; \tag{4}$$

její charakteristika (polára) hoví rovnici vzniklé derivováním dle v

$$- X \sin v + Y \cos v - pv = 0, \tag{5}$$

*) PIRONDINI, CRELLE J., sv. 118, p. 61.

**) Po prvé na tuto vlastnost poukázal M. LERCH. Viz jeho článek: O některých čarách prostorových. Časopis r. 44.

bod hrany vratu mimo to rovnici vzniklé dalším derivováním

$$X \cos v + Y \sin v + p = 0. \tag{6}$$

Z rovnic (4), (5), (6) vychází pro bod hrany vratu

$$X_u = -p(v \sin v + \cos v), \quad Y_u = p(v \cos v - \sin v), \quad Z_u = \tfrac{1}{2}p(4+v^2). \tag{7}$$

Snadno zjistíme, že tato čára leží na paraboloidu

$$x^2 + y^2 = p^2\left(\frac{2z}{p} - 3\right) \tag{8}$$

a její půdorys je opět evolventa kruhu o poloměru p (dle rov. (5) a (6)).

Hlavní normála křivky z je

$$X \cos v + Y \sin v = p, \quad Z = z; \tag{9}$$

střed křivosti S dají rovnice (4), (5), (9) a vychází

$$X_s = p(\cos v - v \sin v), \quad Y_s = p(\sin v + v \cos v), \quad Z_s = z = \tfrac{1}{2}pv^2. \tag{10}$$

Z toho snadno dostaneme $\overline{P_1S_1} = 2pv$.

Z rovnice (7) a (10) jde

$$X_s - X_u = 2p \cos v, \quad Y_s - Y_u = 2p \sin v, \quad Z_s - Z_u = -2p,$$

tedy průmět *vektoru mezi středem křivosti S čáry z a příslušným středem oskulační koule U je konstantní a roven* $2p$, *vektor sám má stálou délku* $2p\sqrt{2}$.

Ještě uvažme, že hlavní normála (9) se dotýká válce $x^2 + y^2 = p^2$ v křivce

$$x = p \cos v, \quad y = p \sin v, \quad z = \tfrac{1}{2}pv^2,$$

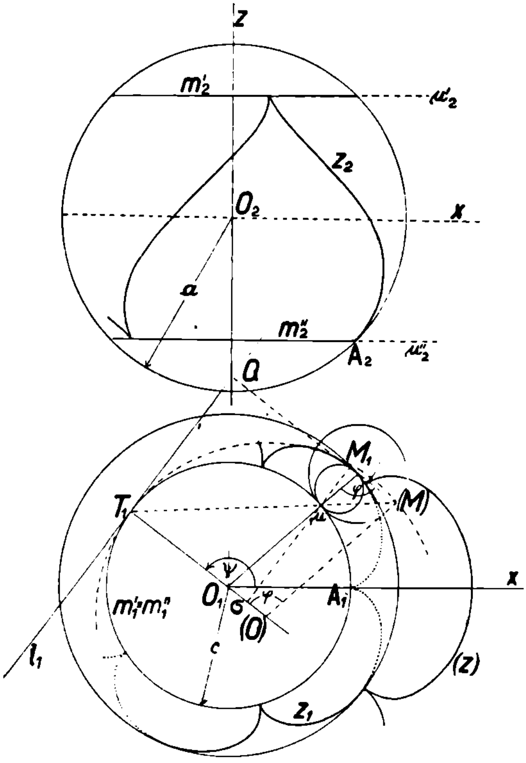
která po rozvinutí kruhového válce dává parabolu $s^2 = 2pz$, kde s je oblouk základny válce.

Poněvadž uvažovaná plocha je rotační, dostanou se z jedné čáry z všechny ostatní rotací kolem osy paraboloidu neb symetrií dle roviny procházející osou.

Křivce z patří v π oskulační řada cyklů, obálka (z) jeví se jako ortogonální trajektorie tečen křivky z_1, tedy jest to evolventa kruhové evolventy.

Další příklad buď *koule* se středem O a poloměru a (obr. 45). Mezní křivka se skládá z kružnic m', m'' v rovinách μ', μ'' o poloměru

$c = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Křivka z je sférická šroubovice se sklonem 45°. Všechny normální roviny jdou středem O koule a mají také odchylku 45°, obalují tedy kuželovou plochu s vrcholem O, která jde kružnicemi



Obr. 45.

m', m''. Tato kuželová plocha je polární plocha křivky z a křivka sama je *evolventou* této *rotační plochy kuželové.* Vyjděme od bodu $A(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}a\sqrt{2})$ na kružnici m'' a začněme s odvinováním kužele podél přímky OA; OT buď dotyková přímka v nové poloze. Tento pohyb vzniklý odvíjením pláště je totožný s kotálením kružnice hybné o poloměru a po kružnici m'', při čemž hybná kružnice má stálý střed O. Máme tedy zvláštní případ sférické epicykloidy.*)

Sklopme tečnou rovinu kužele podél přímky OT kolem tečny t do μ''. Střed kužele přejde do (O), $\overline{T(O)} = a$; odvinutý plášť přejde do výseče $(M)(O)T$, při čemž oblouk AT podstavy m'' rovná se oblouku $T(M)$ rozvinutého pláště. Jest tedy $\frac{1}{2}a\sqrt{2}\psi = a\varphi$, $\psi = \varphi\sqrt{2}$. Půdorys M_1 bodu M dostaneme z úměry $\overline{QM_1} : \overline{Q(M)} = \overline{T_1O_1} : \overline{T_1(O)}$, což lze provésti tak, že spojíme (M) s T_1, dostaneme bod μ $(O_1\mu \parallel (O)(M))$ a vedeme $\mu M_1 \parallel t_1$. Vzdálenost bodu M od roviny μ'' jest rovna $\overline{QM_1}$.

Teď můžeme napsati rovnice křivky z. V obr. 45 jest $\overline{T_1Q} = a\sin\varphi$, $\overline{Q(M)} = a(1 - \cos\varphi)$, $\overline{QM_1} = \overline{QM} \,.\, \cos 45° = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\,(1 - \cos\varphi)$. Promítněme nyní lomenou čáru O_1T_1QM do os Ox, Oy, Oz a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\cos\psi + a\sin\varphi\sin\psi, \\ y &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\sin\psi - a\sin\varphi\cos\psi, \\ z &= -\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Pišme tyto rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\cos(\psi - \varphi) - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\cos(\psi + \varphi), \\ y &= \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\sin(\psi - \varphi) - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\sin(\psi + \varphi), \\ z &= -\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Epicykloida vytvořená bodem hybné kružnice o poloměru r při kotálení po pevné kružnici poloměru R se středem O je dána rovnicí (vznikne sčítáním vektorů):

$$x + \mathrm{i}y = (R + r)e^{\mathrm{i}\alpha} - re^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}, \quad R\alpha = r\beta, \tag{13}$$

kde α, β jsou úhly odkotálené na kružnici pevné a hybné a počáteční poloha na ose Ox ($x = R$, $y = 0$, $\alpha = \beta = 0$).

Půdorys z_1 uvažované křivky je dle rovnic (12)

$$x + \mathrm{i}y = \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\,e^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)} - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\,e^{\mathrm{i}(\psi+\varphi)}. \tag{14}$$

*) O těchto křivkách jedná podrobně M. LERCH ve své práci: Příspěvek k vlastnostem sférických čar šroubových, Rozpravy České akademie, roč. 23, č. 33.

Srovnáním rovnice (14) s rov. (13) dostaneme buď

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad r = \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2}), \quad \alpha = (\sqrt{2} - 1)\,\varphi, \quad \beta = 2\varphi,$$

anebo

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad r = -\tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2}), \quad \alpha = (\sqrt{2} + 1)\,\varphi, \quad \beta = -2\varphi.$$

Podmínka $R\alpha = r\beta$ jest splněna.

Dle toho z_1 *jest epicykloida vytvořená kotálením kružnice o poloměru* $\frac{1}{4}a(2 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a - c)$ po kružnici $m_1' \equiv m_1''$ a vyplní tedy mezikruží omezené obrysem kulové plochy a touto kružnicí. Dle toho byl narýsován v obraze první a druhý průmět křivky z. V souhlase se známým dvojím vytvořením epicykloidy lze z_1 vytvořiti, kotálí-li se kružnice o poloměru $\frac{1}{2}(a + c)$ po kružnici m_1', která ovšem je stále uvnitř hybné kružnice.*) Poměr poloměrů je iracionální, z_1 tedy křivka transcendentní.

Také bod (M) opisuje epicykloidu, již lze vytvořiti, je-li pevná kružnice m_1', hybná buď s poloměrem a neb $a - c$.

Z jiných vlastností ještě uveďme:

Hlavní normála křivky z v bodě M je rovnoběžná se stopou t normální roviny a dotýká se polární plochy v bodě σ na přímce OT. Polární souřadnice bodu σ_1 jsou ψ a $r = c - \overline{QM_1} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi$, polární rovnice křivky opsané bodem σ_1

$$r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}(\psi\sqrt{2}).$$

Tyto křivky slují *růžice*; jest to zde speciální případ epicykloidy, neboť evoluta epicykloidy jest opět epicykloida. V rozvinutí kužele do roviny dostaneme křivku bodů σ, když z pevného bodu kružnice s poloměrem a spouštíme kolmice na jednotlivé poloměry; místo bodů σ je tedy kružnice nad průměrem AO čili geodetická kružnice kužele. Poloměr křivosti bodu M je dán délkou $M_1\sigma$, tedy

$$\varrho = a\sin\varphi.$$

Pro délku oblouku dostaneme z rovnic (11) snadným výpočtem

$$ds = a\sin\varphi\, d\varphi, \quad s = -a\cos\varphi + \text{konst.}$$

Počítáme-li oblouk od $\varphi = 0$, máme $s = a(1 - \cos\varphi)$, počítáme-li od hodnoty $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dostaneme $s = -a\cos\varphi$. Hodnotám $0, \pm\pi$,

*) Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie I., str. 118.

$\pm 2\pi, \ldots$ odpovídají body vratu, hodnotám $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \ldots$ body na rovníku. Vezmeme-li druhou hodnotu s, vidíme, že platí

$$s^2 + \varrho^2 = a^2,$$

což připomíná přirozenou rovnici prosté cykloidy. Rozvineme-li plochu tečen křivky z do roviny, nemění se křivost ani délka oblouku. Přejde tedy naše křivka v rozvinutí v prostou cykloidu vytvořenou kotálením kružnice poloměru $\frac{1}{4}a$ po přímce.*)

Křivka (z), stopa plochy tečen na rovině rovníku jeví se jako evolventa křivky z_1 a jest to opět epicykloida, již lze vytvořiti kotálením kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}a(\sqrt{2} - 1)$ po kružnici s poloměrem a.

Cvičení. 7,2,1. Podobným způsobem jako jsme učinili pro paraboloid prostudujte šroubovice se sklonem 45° a příslušné zobrazení cyklické na elipsoidu vejčitém nebo zploštělém. (Viz článek M. LERCHA: O některých křivkách prostorových, Časopis čes. matematiků, roč. 44.)

7,2,2. Totéž pro parabolický válec symetrický dle průmětny. (Půdorys šroubovice se sklonem 45° k průmětně jest prostá cykloida, jak snadno lze ukázati výpočtem neb i elementární úvahou.)

*) Viz LERCH, l. c. str. 30. Přirozené rovnice kotálnic viz na př. WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven.