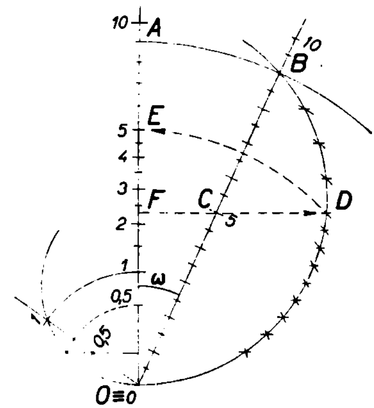
Viděli jsme, že sestrojování stupnic a soustav isoplét jest základem při sestrojování nomogramů. Dodatkem k tomu, co jest o tom v cit. Pleskotovi *str. 30 až 41 uveďme zde několik dalších užitečných konstrukcí.*

6,1. Stupnici funkce

$$y = \sqrt{x} \tag{6,11}$$

můžeme také sestrojiti bez výpočtu souřadnic jejích bodů. Je-li modul stupnice β ($\beta = 5$ cm v obr. 34), najděme výpočtem souřadnici bodu A stupnice o takové kótě x_0 (v obraze $x_0 = 9$), aby výpočet byl co nejjednodušší. Sestrojme polokružnici procházející počátkem O, jejíž střed leží na přímce nesoucí stupnici. Její poloměr δ volme tak veliký, aby zvolený bod A padl ještě dovnitř této kružnice. Na polokružnici vyhledejme bod B tak, aby $\overline{OA} = \overline{OB}$. Na přímce OB sestrojme měřítko, jehož kóta 0 budiž v O a kóta x_0 (v obrázku 9) v B. Body tohoto měřítka veďme kolmice k stupnici až protnou kružnici. Přeneseme-li vzdálenosti těchto bodů od O do stupnice, obdržíme stupnici funkce (6,11). V obr. 34 naznačeno čárkovaně sestrojení bodu o kótě $x = 5$ (bod E, $\overline{OE} = \overline{OD}$).



Obr. 34. Sestrojení stupnice funkce $\sqrt{x}$ o mod. 5 cm (asi v $\frac{3}{10}$ velikosti).

Důkaz: Je-li α mod. měřítka na OB, z $\overline{OA} = \beta\sqrt{x_0} = \overline{OB} = \alpha x_0$, plyne

$$\beta = \alpha\sqrt{x_0}.$$

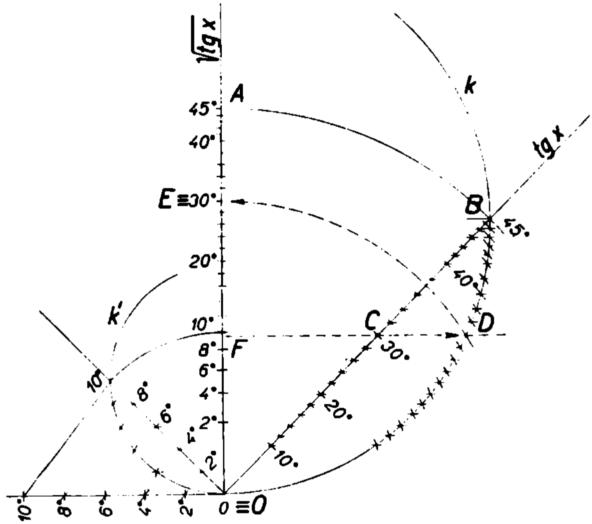
Úhel ω měřítka a stupnice jest

$$\cos\omega = \frac{\overline{OB}}{2\delta} = \frac{\alpha x_0}{2\delta}.$$

Je-li tedy C bod o kótě x na měřítku, F pata kolmice z něj spuštěné na stupnici a D průsečík této kolmice s kružnicí, jest $\overline{OC} = \alpha x$ a $\overline{OF} = \alpha x \cos\omega = \dfrac{\alpha^2 x_0}{2\delta}\, x = \dfrac{\beta^2}{2\delta}\, x$. Proto je $\overline{OE} = \overline{OD} = \sqrt{2\delta \,.\, \overline{OF}} = \beta\sqrt{x}$. Bod E má ve stupnici kótu x.

Body stupnice o kótách menších než 1 sestrojovali bychom přesněji polokružnicí o vhodném menším poloměru, vycházejíce z bodu o kótě $x_0 = 1$. V obrázku naznačeno sestrojení bodu o kótě $x = 0{,}5$.

Kdybychom na OB v obr. 34 vynesli místo měřítka stupnici funkce $f(x)$ tak, aby v ní bod o kótě x_0 padl do bodu B, obdrželi bychom naší konstrukcí na OA stupnici funkce $\sqrt{f(x)}$, která má zase modul β a bod o kótě x_0 v A.



Obr. 35. Sestrojení stupnice funkce $\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$ o mod. 10 cm (asi v $\frac{1}{2}$ velikosti).

Důkaz (obr. 35): Jelikož $\beta\sqrt{f(x_0)} = \overline{OA} = \overline{OB} = \alpha f(x_0)$, $\beta = \alpha\sqrt{f(x_0)}$, $\cos\omega = \overline{OB} : (2\delta) = \frac{1}{2}\alpha f(x_0) : \delta$. Je-li tedy x kótou bodu C v stupnici funkce $f(x)$, $\overline{OC} = \alpha f(x)$ a $\overline{OF} = \alpha f(x)\cos\omega = \frac{1}{2}\beta^2 f(x) : \delta$. Proto je $\overline{OE} = \overline{OD} = \sqrt{2\delta\,.\,\overline{OF}} = \beta\sqrt{f(x)}$, t. j. bod E má kótu x v stupnici funkce $\sqrt{f(x)}$ sestrojené s mod. β.

Na příklad, v obr. 35 byla takto sestrojena stupnice funkce

$$y = \sqrt{\mathrm{tg}\,x}, \quad 0 \leqq x \leqq 45°$$

o mod. $\beta = 10$ cm. Nejprve jsme vynesli $\overline{OA} = \beta\sqrt{\mathrm{tg}\,45°} = \beta$, pak přenesli $\overline{OB} = \overline{OA} = \beta$ na kružnici k o vhodně zvoleném průměru $2\delta > \beta$ a na OB sestrojiti stupnici funkce $\operatorname{tg} x$ vynesením hodnot $\operatorname{tg} x$ vzatých z tabulek při mod β. Další konstrukce je zřejmá.

Cvičení: Sestrojte stupnice:

10. Funkce $1 : (1 + \sqrt{x})$ jako projektivní se stupnicí funkce $\sqrt{x}$ (viz v čl. **1,1** pozn. [1]) cit. PLESKOT str. 37).

11. Funkcí $\sqrt{\log x}$ a $1 : \sqrt{\log x}$.

12. Funkce $\sqrt{\sec x}$.

6,2. Soustavu isoplét

$$(6{,}21)\quad (a_0z^2 + a_1z + a_2)\,\xi + (b_0z^2 + b_1z + b_2)\,\eta + (c_0z^2 + c_1z + c_2) = 0,$$

$$(6{,}22)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

sestrojujeme takto:

Geometricky podmínka (6,22) vyjadřuje, že tři přímky

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i = 0, \quad i = 0; 1; 2$$

nejdou jedním bodem. Kvadratická rovnice (6,21) v z

$$z^2(a_0\xi + b_0\eta + c_0) + z(a_1\xi + b_1\eta + c_1) + (a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0$$

nemá tedy nikdy současně rovny nule veškeré své koeficienty. Ať zvolíme ξ, η jakkoliv, tato rovnice má vždy dva kořeny, reálné nebo komplexní, konečné nebo nekonečné, navzájem různé nebo stejné. Každým bodem roviny jdou dvě isoplety soustavy (6,21), které jsou obě reálné různé nebo splývající nebo obě jsou imaginární. Soustavu isoplét (6,21) nazýváme proto také svazkem druhé třídy.

Rovněž žádná z isoplét (6,21) nemůže míti dvě různé kóty. Různým kótám náležejí různé isoplety soustavy (6,21). Kdyby totiž některé isoplětě této soustavy náležely dvě různé kóty z_1 a $z_2 \neq z_1$,[21]) rovnice této isoplety by se dala psáti buď jako

$$(a_0z_1^2 + a_1z_1 + a_2)\,\xi + (b_0z_1^2 + b_1z_1 + b_2)\,\eta + (c_0z_1^2 + c_1z_1 + c_2) = 0$$

nebo jako

[21]) Dolních indexů nebudeme nyní užívati k rozlišení různých argumentů nebo parametrů, nýbrž k označování různých hodnot téhož argumentu resp. parametru.

$$(a_0z_2^2 + a_1z_2 + a_2)\,\xi + (b_0z_2^2 + b_1z_2 + b_2)\,\eta + (c_0z_2^2 + c_1z_2 + c_2) = 0.$$

Jelikož obě tyto rovnice mají značiti tutéž přímku, bylo by

$$(6{,}23)\qquad \frac{a_0z_1^2 + a_1z_1 + a_2}{a_0z_2^2 + a_1z_2 + a_2} = \frac{b_0z_1^2 + b_1z_1 + b_2}{b_0z_2^2 + b_1z_2 + b_2} = \frac{c_0z_1^2 + c_1z_1 + c_2}{c_0z_2^2 + c_1z_2 + c_2}.$$

Položme tento podíl rovný k. Pak z (6,23) plynou rovnice

$$(6{,}24)\qquad \begin{aligned} a_0(z_1^2 - kz_2^2) + a_1(z_1 - kz_2) + a_2(1 - k) &= 0,\\ b_0(z_1^2 - kz_2^2) + b_1(z_1 - kz_2) + b_2(1 - k) &= 0,\\ c_0(z_1^2 - kz_2^2) + c_1(z_1 - kz_2) + c_2(1 - k) &= 0, \end{aligned}$$

které vzhledem k $\Delta \neq 0$ mají jediné řešení

$$(6{,}25)\qquad z_1^2 - kz_2^2 = 0,\quad z_1 - kz_2 = 0,\quad 1 - k = 0.$$

Neznáte-li tuto větu, přesvědčte se o tom postupnou eliminací neznámých (6,25) z rovnic (6,24).

Z (6,25) bychom však obdrželi $z_1 = z_2$ v rozporu s předpokladem $z_1 \neq z_2$. Tím je proveden důkaz našeho tvrzení.

Kterákoliv isopléta soustavy 6,21, na př. isopléta

$$(6{,}26)\qquad (a_0z_1^2 + a_1z_1 + a_2)\,\xi + (b_0z_1^2 + b_1z_1 + b_2)\,\eta + (c_0z_1^2 + c_1z_1 + c_2) = 0$$

o kotě z_1, protíná proto každou jinou isoplétu této soustavy v j e d i n é m bodě. Tyto body tvoří na isoplétě z_1 p r o j e k t i v n í s t u p n i c i, přiřkneme-li jejímu průsečíku s isoplétou o kótě z také kótu z. Odečtením (6,26) od (6,21) a krácením $z - z_1$ obdržíme totiž rovnici svazku paprsků

$$(6{,}27)\qquad (z + z_1)\,(a_0\xi + b_0\eta + c_0) + (a_1\xi + b_1\eta + c_1) = 0,$$

který tuto stupnici promítá (princip Laméův). Je zřejmé, že při

$$a_0b_1 - b_0a_1 \neq 0$$

tento svazek protíná každou z rovnoběžných přímek

$$(6{,}28)\qquad a_0\xi + b_0\eta + c_0 = p = \text{konst.} \neq 0$$

v měřítku

$$(6{,}29)\qquad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = -\,p(z + z_1).$$

Skutečně obdržíme z obou posledních rovnic na ose $\eta = 0$ měřítko

$$\xi = A + Bz,$$

$$A = \frac{b_0c_1 - c_0b_1 + pb_0z_1 + pb_1}{a_0b_1 - b_0a_1} = \text{konst.}, \qquad B = \frac{pb_0}{a_0b_1 - b_0a_1} = \text{konst.},$$

které je ortogonálním průmětem měřítka vyťatého na přímce (6,28) svazkem (6,27). — Kdyby však bylo $a_0b_1 - b_0a_1 = 0$, byly by obě přímky

$$a_0\xi + b_0\eta + c_0 = 0, \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

navzájem rovnoběžné a svazek (6,27) sestával by vesměs z rovnoběžných paprsků. Osu $\eta = 0$ by tento svazek protínal v projektivní stupnici

$$\xi = \frac{-c_1 - c_0(z + z_1)}{a_1 + a_0(z + z_1)},$$

která by byla rovnoběžným průmětem (arci obecně klinogonálním) stupnice na isoplétě z_1. Tím jest proveden důkaz tvrzení, že stupnice vyťatá soustavou (6,21) na kterékoliv isoplétě této soustavy jest projektivní.

Známe-li tedy ze soustavy (6,21) čtyři isopléty o kótách z_1, z_2, z_3, z_4, sestrojíme isoplétu o libovolné kótě z v této soustavě bez jakýchkoliv dalších výpočtů. Průsečíky na př. isoplét z_1, z_2, z_3 se z_4 jsou body o kótách z_1, z_2, z_3 v projektivní stupnici vyťaté na isoplétě z_4 soustavou (6,21). Z nich můžeme tuto stupnici sestrojiti. Stejně sestrojíme na př. z bodů o kótách z_1, z_2, z_4 projektivní stupnici na z_3. Spojnice bodů obou těchto projektivních stupnic o libovolné stejné kótě z jest isoplétou soustavy (6,21) o kótě z.

Na příklad v obr. 36 byla takto sestrojena soustava isoplét

$$(z) \quad (12z^2 + 10z + 18)\,\xi + (-12z^2 + 10z - 18)\,\eta + (3z + 27) = 0$$

v níž je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12, & -12, & 0 \\ 10, & 10, & 3 \\ 18, & -18, & 27 \end{vmatrix} = 6480 \neq 0.$$

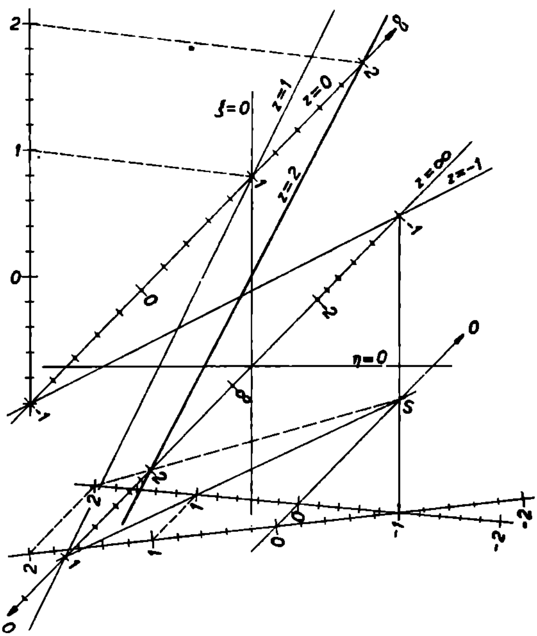
Nakreslili jsme 4 její isopléty o kótách na př.

$$\begin{array}{lll} z = 0, & \text{t. j.} & 2\xi - 2\eta + 3 = 0, \\ z = 1, & \text{t. j.} & 4\xi - 2\eta + 3 = 0, \\ z = -1, & \text{t. j.} & 5\xi - 10\eta + 6 = 0, \\ z = \infty, & \text{t. j.} & \xi - \eta = 0. \end{array}$$

Rovnici poslední isopléty jsme obdrželi dělením z^2 rovnice (z)

$$\left(12+\frac{10}{z}+\frac{18}{z^2}\right)\xi+\left(-12+\frac{10}{z}-\frac{18}{z^2}\right)\eta+\frac{3}{z}+\frac{27}{z^2}=0$$

a položením v ní $\lim z = \infty$. V obr. 36 naznačili jsme sestrojení isopléty $z = 2$. Jest spojnicí bodů o kótě $z = 2$ v projektivních stupnicích, které na př. vytínají jednak isopléty $z = 1$, $z = -1$, $z = \infty$,



Obr. 36. Sestrojení soustavy isoplét (z) (viz text).

na isoplétě $z = 0$, jednak na isoplétě $z = \infty$ isopléty $z = 0$, $z = 1$, a $z = -1$. Druhou z těchto projektivních stupnic jsme sestrojili promítnutím ze středu S do měřítka (cit. Pleskot obr. 20 na str. 36). Prvá z těchto projektivních stupnic se pak redukuje přímo na měřítko proto, že má bod o kótě $z = \infty$ v nekonečnu. Přesvědčte se, že i na ostatních isoplétách $z = 1$ a $z = -1$ jsou projektivní stupnice, jichž jsme také mohli použíti k sestrojení soustavy (z).

Důkaz věty, že každá projektivní stupnice, která má v nekonečnu bod o kótě $z = \infty$, redukuje se na měřítko, jest tento: Stupnice projektivní funkce

$$y = \frac{a + bz}{c + dz}, \quad ad - bc \neq 0$$

má v nekonečnu bod o kótě

$$z = -\frac{c}{d}.$$

Má-li tato kóta býti $z = \infty$, musí zřejmě $d = 0$, takže naše projektivní funkce se redukuje na funkci celistvou

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} z,$$

jejíž stupnice je ovšem zřejmě měřítkem. Přesvědčte se o tom na př. sestrojením stupnice takové funkce

$$y = \tfrac{3}{2} - \tfrac{2}{5} z.$$

Mají-li splynouti v jednu obě isopléty soustavy (6,21) vedené bodem $(\xi; \eta)$, musí kvadratická rovnice (6,21) v z

$$z^2(a_0\xi + b_0\eta + c_0) + z(a_1\xi + b_1\eta + c_1) + (a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0$$

míti dva stejné kořeny, t. j. její diskriminant musí býti roven nule, t. j.

$$D = (a_1\xi + b_1\eta + c_1)^2 - 4\,(a_0\xi + b_0\eta + c_0)\,(a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0.$$

Body (ξ, η) této vlastnosti leží tedy vesměs na kuželosečce

$$D = 0,$$

již také každá z isoplét (6,21) protíná ve dvou splývajících bodech, jest tedy její tečnou. Vypočtením

$$(a_2\xi + b_2\eta + c_2) = -z^2(a_0\xi + b_0\eta + c_0) - z(a_1\xi + b_1\eta + c_1)$$

z rovnice takové isopléty (6,21) a dosazením této hodnoty do $D = 0$ obdržíme totiž rovnici

$$S_1^2 = [(a_1\xi + b_1\eta + c_1) + 2z(a_0\xi + b_0\eta + c_0)]^2 = 0,$$

která to dokazuje.

Dokonce každá tečna kuželosečky $D = 0$ jest isoplétou soustavy (6,21). Vrchol svazku paprsků o parametru z

$$S_1 \equiv 2z(a_0\xi + b_0\eta + c_0) + (a_1\xi + b_1\eta + c_1) = 0$$

leží na kuželosečce $D = 0$, neboť jeho souřadnice zřejmě splňují její rovnici. Odtud dosazením

$$(a_1\xi + b_1\eta + c_1) = -2z(a_0\xi + b_0\eta + c_0)$$

za jeden činitel ve čtverci v $D = 0$ obdržíme rovnici

$$-2(a_0\xi + b_0\eta + c_0)[z(a_1\xi + b_1\eta + c_1) + 2(a_2\xi + b_2\eta + c_2)] = 0,$$

jejíž prvý činitel $(a_0\xi + b_0\eta + c_0) = 0$ protíná všechny paprsky svazku $S_1 = 0$ ve vrcholu tohoto svazku. Každý z paprsků svazku $S_1 = 0$ protíná tedy kuželosečku $D = 0$ v jediném dalším bodě, jehož souřadnice anulují zřejmě druhý činitel

$$S_2 \equiv (a_1\xi + b_1\eta + c_1)z + 2(a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0,$$

což je zase rovnice svazku paprsků, jehož vrchol leží také na kuželosečce. Každým bodem A kuželosečky $D = 0$ prochází tedy po jednom paprsku z každého z obou svazků $S_1 = 0$ a $S_2 = 0$ a oběma těmto paprskům je přiřazeno totéž z. Tomuto z přiřazená isopléta soustavy (6,21) však prochází rovněž tímto bodem A, neboť její rovnici můžeme psáti ve tvaru

$$\frac{zS_1 + S_2}{2} = 0$$

(princip Laméův). Jak jsme viděli, oba průsečíky této isopléty s kuželosečkou $D = 0$ však splývají v jeden bod, který je tedy v A, a ona isopléta je tečnou této kuželosečky v A. Tečna kuželosečky $D = 0$ v libovolném jejím bodě A jest tedy skutečně také isoplétou soustavy (6,21).

Snadno nahlédneme ostatně, že rovnici každé kuželosečky můžeme psáti ve tvaru $D = 0$, volíme-li za $a_0\xi + b_0\eta + c_0 = 0$ a $a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0$ libovolné dvě její tečny a za $a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$ spojnici jejích dotykových bodů. Platí tedy o každé kuželosečce, že rovnici jejích tečen můžeme psáti ve tvaru (6,21) soustavy isoplét (nebo svazku druhé třídy) o parametru z.

6,3. Isopléty soustavy

$$(a_0z^2 + a_1z + a_2)\,\xi + (b_0z^2 + b_1z + b_2)\,\eta - \beta(c_0z^2 + c_1z + c_2) = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (6,31)$$

protínají osu $\xi = 0$ v bodech o pořadnicích

$$\eta = \beta\frac{c_0z^2 + c_1z + c_2}{b_0z^2 + b_1z + b_2},$$

t. j. ve stupnici kvadratické funkce lomené

$$y = \frac{c_0z^2 + c_1z + c_2}{b_0z^2 + b_1z + b_2}, \qquad (6,32)$$

sestrojené s mod β.

Bez výpočtu můžeme tedy naopak sestrojiti stupnici takové dané funkce (6,32) použitím vhodné soustavy isoplét (6,31), sestrojené podle předešlého článku. V jejich rovnici (6,31) jsou při tom b_i a c_i ($i = 0; 1; 2$) známé hodnoty z dané funkce (6,32), β je rovněž hodnota daná, kdežto a_0, a_1, a_2 můžeme zcela libovolně zvoliti tak. aby konstrukce byla pohodlná a dosti přesná. Osu $\xi = 0$ a počátek O soustavy souřadnic pro sestrojení isoplét (6,31) máme dánu orientovanou přímkou s počátkem, na níž máme sestrojovati stupnici dané funkce (6,32). Osu $\eta = 0$ této soustavy souřadnicové vedeme oním počátkem libovolně, třeba klinogonálně, ovšem zase s ohledem na pohodlnost a přesnost konstrukce. Isopléty (6,31) sestrojíme pak zase v této soustavě souřadnic podle čl. **6,2** jako spojnice stejně kótovaných bodů dvou projektivních stupnic na dvou vhodně zvolených isoplétách soustavy (6,31), jimž říkejme proto stručně isopléty základní.

Na příklad stupnici funkce

$$y = \frac{z^2}{z + 4}, \tag{6,33}$$

sestrojené s mod $\beta = 2$ cm, vytíná na ose $\xi = 0$ každá soustava isoplét

$$(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)\,\xi + (z + 4)\,\eta - 2z^2 = 0. \tag{6,34}$$

Pokusme se voliti v této rovnici koeficienty a_0, a_1, a_2 tak, aby isopléta o kótě $z_1 = \infty$ byla úběžnou přímkou roviny. Docílíme tím, že v projektivní stupnici na každé isoplétě soustavy (6,34) padne bod o kótě $z = \infty$ do nekonečna, t. j. že tyto projektivní stupnice degenerují pak vesměs v měřítka (čl. **6,2**), která ovšem snáze sestrojujeme než stupnice projektivní. Rovnice isopléty o kótě $z_1 = \infty$ v soustavě (6,34) však zní podle čl. **6,2**

$$a_0 \xi - 2 = 0$$

a bude úběžnou přímkou, volíme-li $a_0 = 0$.

Za jednu ze základních isoplét volme vhodnou rovnoběžku se stupnicí funkce (6,33). Bude to isopléta soustavy (6,34) o kótě $z_2 = -4$, neboť $y = \infty$ plyne z (6,33) buď pro $z = \infty$, což je úběžná přímka roviny, nebo pro $z = -4$. Koeficienty a_1, a_2 volme nyní vhodně tak, aby tato isopléta $z_2 = -4$ měla rovnici $\xi = 2$ cm (obr. 37), t. j.

$$-4a_1 + a_2 = 16.$$

Bodem

(6,35) $\qquad\qquad (\xi = 0;\ \eta = 4\ \text{cm})$

naší stupnice, který v ní má kóty $z = 4$ a $z = -2$, veďme druhou základní isoplétu. Za její kótu volme z obou těchto kót na př. $z_3 = 4$ a a_1, a_2 volme tak, aby rovnice této základní isopléty byla vhodně $\eta = 4$, což nám poskytne

$$4a_1 + a_2 = 0.$$

Jest tedy

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 8.$$

a rovnice (6,34) bude tudíž konečně

(6,36) $$(-2z + 8)\,\xi + (z + 4)\,\eta - 2z^2 = 0.$$

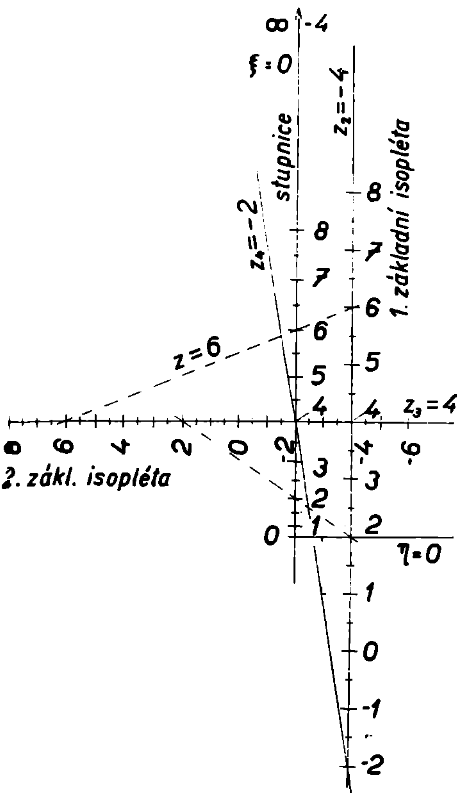
Druhá isopléta soustavy (6,34) jdoucí bodem (6,35) má kótu $z_4 = -2$, jak jsme výše zjistili, a proto má rovnici podle (6,36)

$$12\xi + 2\eta - 8 = 0.$$

Sestrojíme ji ze dvou bodů: (6,35) a z bodu

(6,37) $\quad (\xi = 2\ \text{cm};\ \eta = -8\ \text{cm}).$

Tento druhý bod leží však na základní isoplétě $z_2 = -4$ a v měřítku na ní má proto také kótu $z = -2$ jako isopléta $z_4 = -2$.



Obr. 37. Sestrojení stupnice funkce $z^2 : (z + 4)$ o mod. 2 cm (asi v $\frac{3}{8}$ velikosti).

Nyní můžeme sestrojiti měřítka na obou základních isoplétách, neboť v každém z nich známe 2 body a jejich kóty: Tak v měřítku na $z_2 = -4$ známe body o kótách $z = 4$ a $z = -2$, v nichž toto měřítko protínají isopléty $z_3 = 4$ a $z_4 = -2$, a podobně v měřítku na $z_3 = 4$ známe body o kótách $z = -2$ a $z = -4$. Spojnice bodů o stejných kótách v obou měřítkách jsou tedy isoplétami soustavy (6,34) a protínají $\xi = 0$ ve stupnici funkce (6,33). V obr. 37 bylo naznačeno příkladem sestrojení bodů této stupnice o kótách $z = 2$ a $z = 6$ (čárkovanými isoplétami). Pro sestrojení dalších úseků stupnice bylo by asi vhodné voliti jinak jak a_0, a_1, a_2, tak základní isopléty.

Cvičení: 13. Sestrojte tímto způsobem stupnici celistvé funkce kvadratické

$$y = 2z^2 - 5z + 3.$$

6,4. Soustava isoplét

$$(a_0f^2 + a_1f + a_2)\,\xi + (b_0f^2 + b_1f + b_2)\,\eta + (c_0f^2 + c_1f + c_2) = 0$$

(6,41)
$$f = f(z),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

jest pouze zdánlivě obecnější než soustava (6,21). Oboje isopléty jsou totiž tečnami téže kuželosečky, kótování těchto tečen však je v soustavě (6,41) jiné než v soustavě (6,21). Tak na př. kdybychom měli funkci

$$f(z) = \sqrt{z},$$

a kdyby koeficienty a_i, b_i, c_i, $(i = 0; 1; 2)$ v obou rovnicích (6,21) a (6,41) byly stejné, isopléta soustavy (6,41) o kótě $z = 4$ by měla v soustavě (6,21) kótu $z = \sqrt{4} = 2$ atd.

Soustava isoplét (6,41) protíná proto zase každou ze svých isoplét v stupnici projektivní se stupnicí funkce $f(z)$, a je tedy tvaru

$$\frac{Af(z) + B}{Cf(z) + D},$$

kterou sestrojujeme podle cit. Pleskota, str. 37. Spojnicemi stejně kótovaných bodů obou stupnic na dvou z isoplét (6,41) obdržíme zase celou soustavu.

Rovněž osa $\xi = 0$ protíná soustavu

(6,42)
$$(a_0f^2 + a_1f + a_2)\,\xi + (b_0f^2 + b_1f + b_2)\,\eta - \beta(c_0f^2 + c_1f + c_2) = 0,$$
$$f = f(z)$$

v stupnici funkce

$$(6,43) \qquad y = \frac{c_0 f^2(z) + c_1 f(z) + c_2}{b_0 f^2(z) + b_1 f(z) + b_2}$$

o mod β. Sestrojujeme ji tedy podobně jako stupnici funkce (6,32).

Na příklad stupnici o mod. $\beta = 10$ cm funkce

$$(6,44) \qquad y = (\log z)^2$$

vytíná na ose $\xi = 0$ soustava isoplét

$$(6,45) \qquad [a_0(\log z)^2 + a_1 \log z + a_2]\, \xi + \eta - 10\, (\log z)^2 = 0.$$

Volme zase $a_0 = 0$ tak, aby úběžná přímka roviny byla isoplétou o takové kótě z, která činí $\log z = \infty$, t. j. $z = \infty$. Soustava isoplét (6,45) protíná pak každou ze svých isoplét v stupnici funkce tvaru

$$(6,46) \qquad \zeta = \frac{A \log z + B}{C \log z + D},$$

v níž tato kóta $z = \infty$ náleží úběžnému bodu $\zeta = \infty$. Proto dosazením $z = \infty$ do (6,46) plyne

$$\zeta = \infty = \frac{A}{C}, \quad \text{t. j. } C = 0$$

a stupnice (6,46) se redukuje na stupnici funkce tvaru

$$\zeta = A' \log z + B',$$

t. j. na obyčejnou stupnici logaritmickou o modulu A', v níž bod o kótě $z = 1$ jest v bodě $\zeta = B'$. Nejlépe však sestrojíme tuto logaritmickou stupnici ze dvou bodů na př. o kótách $z = 1$, $z = 10$, nebo $z = 0{,}1$ atd.

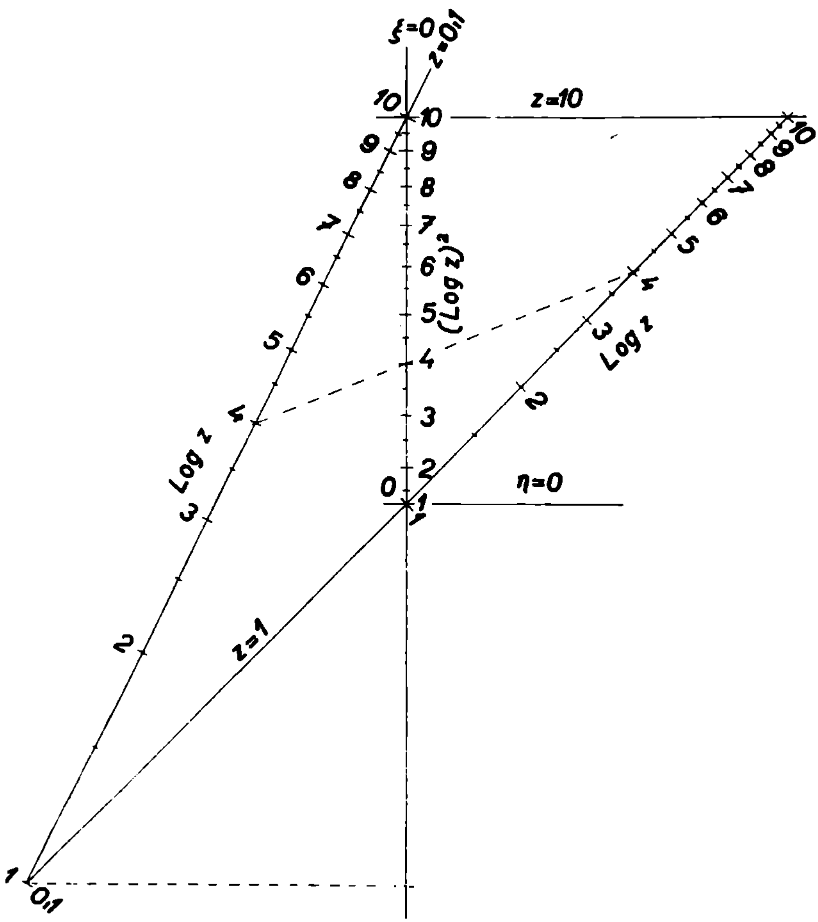
Avšak rovnice isoplét (6,45) o těchto kótách jsou

$$\begin{aligned}
&(z = 1) && a_2 \xi + \eta = 0,\\
&(z = 10) && (a_1 + a_2)\, \xi + \eta - 10 = 0,\\
&(z = 0{,}1) && (-a_1 + a_2)\, \xi + \eta - 10 = 0.
\end{aligned}$$

Volme tedy $a_1 = 1$ a $a_2 = -1$ tak, aby rovnice těchto isoplét byly

$$\begin{aligned}
&(z = 1) && \eta - \xi = 0,\\
&(z = 10) && \eta - 10 = 0,\\
&(z = 0{,}1) && \eta - 2\xi - 10 = 0
\end{aligned}$$

a nakresleme je (obr. 38). Pak obě ostatní vytínají na $z = 1$ body logaritmické stupnice kótované 10 a 0,1 a na $z = 0{,}1$ body logaritmické stupnice kótované 1 a 10. Sestrojme obě tyto logaritmické stupnice promítnutím vhodného prototypu podle čl. **6,5**, načež spojnice stejně kótovaných bodů v obou vytínají na $\xi = 0$ stupnici funkce (6,44). V obrázku bylo čárkovaně naznačeno sestrojení bodu o kótě $z = 4$.



Obr. 38. Sestrojení stupnice funkce $(\log z)^2$ o mod. 10 cm (asi v $\frac{1}{2}$ velikosti).

Cvičení: Sestrojte stupnice funkcí:

14. $$y = \frac{\sin z}{1 + \sin^2 z};$$

15. $$y = \frac{z}{1 + \sqrt{z}}.$$

Volte v (6,43) $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$ a $f = \sqrt{z}$. Stupnici poslední sestrojíte podle čl. **6,1**.

6,5. Logaritmickou stupnici můžeme prakticky sestrojiti jedině výpočtem souřadnic jejích bodů. To je ovšem velmi pracné. Jelikož jí velmi často potřebujeme při nejrůznějších modulech, sestrojme ji jednou pro vždy při dosti velkém modulu, na př. $\beta = 25$ cm. Říkejme jí prototyp logaritmické stupnice. Středovým promítnutím tohoto prototypu na vhodnou rovnoběžku obdržíme logaritmickou stupnici o každém jiném modulu.

Takový prototyp logaritmické stupnice o mod. 25 cm, promítnutý již svazkem paprsků, lze koupiti[22]). Přeložíme-li nebo přeřízneme-li tento papír podél vhodné přímky, rovnoběžné s prototypem, vynášíme z něj přímo logaritmickou stupnici o libovolném modulu menším než 25 cm. Vynášení je přesnější, odřízneme-li papír ostrým nožem podle potřebného průmětu prototypu, nežli když jej pouze překládáme.

Jiný způsob by byl, že bychom prototyp upevnili napínáčky na kreslicí desku a promítli jej z vhodného bodu (ležícího třeba v nekonečnu) do žádané logaritmické stupnice. Nejlaciněji si opatříme takový prototyp logaritmické stupnice vyříznutím z koupeného logaritmického papíru.[22]) Modul takové promítnuté stupnice logaritmické však musíme vždy kontrolovati, jelikož papír se smršťuje teplem a tím se mění i modul logaritmického prototypu na něm vytištěného.

Zmenšením veškerých kót v logaritmické stupnici o totéž číslo b obdržíme z ní stupnici funkce

$$y = \log (x + b), \tag{6,51}$$

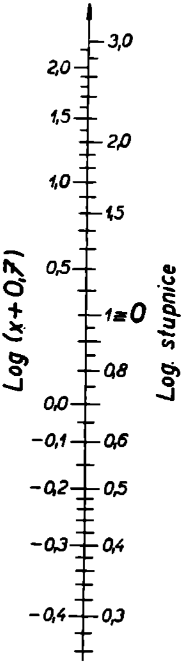
kterou tedy můžeme také přímo vynášeti z logaritmické stupnice. Přirozeně, vynášíme z ní opět pouze body o okrouhlých kótách x,

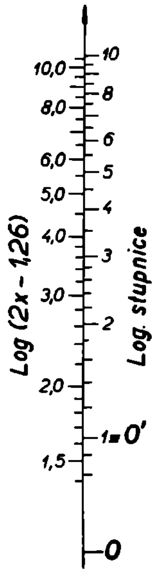
[22]) V knihkupectví Jednoty čes. matem. a fys. v Praze II., Žitná 25.

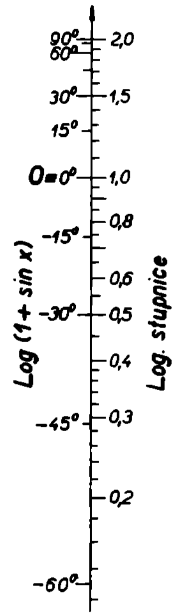
nikoliv o okrouhlých kótách v logaritmické stupnici, které teď jsou $x + b$.

Tak na **příklad** v obr. 39 byla takto sestrojena stupnice funkce

$$y = \log (x + 0{,}7) \tag{6,52}$$







Obr. 39. Obr. 40.

Sestrojení stupnic funkcí log $(x + b)$ a log $(ax + b)$ překótováním v logaritmické stupnici (asi v $\frac{1}{2}$ velikosti udané v textu).

Obr. 41.

Použití logaritmické stupnice k sestrojení jiných stupnic; zde funkce log $(1 + \sin x)$ (asi v $\frac{1}{2}$ velikosti udané v textu).

o mod. $\beta = 15$ cm. Logaritmickou stupnici o mod. $\beta = 15$ cm přiložíme k orientované přímce tak, aby její bod o kótě „1“ padl do počátku O (v obr. 39 po pravé straně přímky) a z ní vynášíme na přímku body stupnice funkce (6,52) o okrouhlých kótách

$$x = \ldots -0{,}2;\ -0{,}1;\ 0{,}0;\ 0{,}1;\ \ldots,$$

které stojí proti bodům o kótách

$$x + b = \dots 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ \dots$$

na logaritmické stupnici.

Užíváme toho s výhodou i k sestrojení stupnice poněkud obecnější funkce

$$(6{,}53) \qquad y = \log(ax + b), \quad a > 0.$$

Pomocí logaritmické stupnice o mod. β naneseme od počátku O na orientovanou přímku úsečku $\beta \log a$ a její koncový bod zvolíme za nový počátek O', od něhož vyneseme podle předešlého stupnici funkce

$$(6{,}54) \qquad \log\left(x + \frac{b}{a}\right), \quad (\text{mod. } \beta).$$

Skutečně, vzdálenost bodu o kótě x v této stupnici od počátku O jest

$$\log a + \log\left(x + \frac{b}{a}\right) = \log(ax + b) = y \qquad (\text{mod. } \beta),$$

jest to tedy bod o kótě x ve stupnici funkce (6,53).

Na příklad v obr. 40 byla takto sestrojena stupnice funkce

$$(6{,}55) \qquad y = \log(2x - 1{,}26)$$

o mod. $\beta = 10$ cm. Učinili jsme $\overline{OO'} = \beta \log 2$, načež od tohoto bodu jsme vynesli stupnici funkce

$$y = \log(x - 0{,}63), \quad (\text{mod. } \beta = 10 \text{ cm}).$$

Jelikož nyní je $b = -0{,}63 < 0$, musíme v logaritmické stupnici, která je v obr. 40 opět naznačena po pravé straně přímky, veškeré kóty zmenšiti o $-0{,}63$, t. j. o $+0{,}63$ zvětšiti. Body stupnice funkce (6,55) o kótách

$$x = \dots 1{,}7;\ 1{,}8;\ 1{,}9;\ 2{,}0;\ \dots$$

budou tedy proti bodům o kótách

$$x - 0{,}63 = \dots 1{,}07;\ 1{,}17;\ 1{,}27;\ 1{,}37;\ \dots.$$

na logaritmické stupnici.

Abychom sestrojili stupnici funkce

$$y = \log(-ax + b), \text{ kde } a > 0,$$

na okamžik v ní položíme $-x = x_1$, sestrojíme stupnici funkce $\log(ax_1 + b)$ a na to v ní změníme znamení veškerých kót.

Užitím logaritmické stupnice zjednodušíme podstatně i sestrojení stupnic funkcí ještě obecnějších

$$(6,56) \qquad y = \log f(x).$$

Pro vhodnou aritmetickou posloupnost okrouhlých hodnot argumentu x

$$(6,57) \qquad x = a, a + h, a + 2h, a + 3h, \ldots$$

vypočteme hodnoty logaritmované funkce $f(x)$

$$(6,58) \qquad f(x) = f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, \quad f_i = f(a + ih),$$

jichž logaritmy vyneseme na orientovanou přímku logaritmickou stupnicí o mod. β. Ušetříme tím vyhledání logaritmů hodnot (6,58), které by bylo nutné, kdybychom stupnici funkce (6,56) sestrojovali výpočtem jejích hodnot pro argumenty (6,57) a vynesením těchto hodnot měřítkem o mod. β.

Na příklad v obr. 41 je naznačeno sestrojení stupnice funkce

$$(6,59) \qquad y = \log (1 + \sin x).$$

Užitím goniometrických tabulek vypočteme tabulku hodnot logaritmované funkce (tab. 2), jichž logaritmy vyneseme na přímku užitím logaritmické stupnice o mod. $\beta = 12$ cm, kterou jsme v obr. 41 schematicky naznačili zase po pravé straně přímky.

Tab. 2.

x	$1 + \sin x$	x	$1 + \sin x$	x	$1 + \sin x$
$-60°$	0,13	0°	1,00	60°	1,87
$-45°$	0,29	15°	1,26	75°	1,97
$-30°$	0,50	30°	1,50	90°	2,00
$-15°$	0,74	45°	1,71		

6,6. V nomogramech s průsvitkou bývá často sestrojiti soustavu isoplét o rovnici

$$(6,61) \qquad 10^{\xi : \alpha} + 10^{\eta : \beta} = z, \quad \alpha \gtrless 0, \ \beta \gtrless 0$$

pro ekvidistantní hodnoty parametru z

$$z_i = z_0 + ih, \quad i = \ldots -2; -1; 0; 1; 2; \ldots$$ [23])

Při tom jest ovšem předpokládati též $z > 0$, jelikož pro $z < 0$ isopléty (6,61) zřejmě nejsou reálné. Isopléty této soustavy jsou v podstatě subtrakčními křivkami[24]).

Píšeme-li rovnici (6,61) ve tvaru

(6,62) $$\eta = \beta \log (z - 10^{\xi : \alpha})$$

vidíme, že isopléta o kótě z má za asymptotu polopřímku

$$\eta = \beta \log z, \text{ na níž je } \frac{\xi}{\alpha} < 0.$$

Podobně najdeme, že má za asymptotu též

$$\xi = \alpha \log z, \quad \frac{\eta}{\beta} < 0.$$

Z (6,62) nyní plyne, že na přímce

(6,63) $$p_i \equiv \xi = \alpha \log z_i$$

soustava isoplét (6,61) vytíná stupnici funkce

(6,64) $$\eta = \beta \log (z - z_i)$$

o kroku h. Stupnice těchto funkcí na přímkách p_i však obdržíme podle čl. **6,5** pouhou změnou kótování z téže stupnice logaritmické o kroku h a mod. β (pozor na znamení tohoto β!!), která má kótu „1" na ose $\eta = 0$. Stačí tedy v této logaritmické stupnici na

$$p_i \equiv \xi = \alpha \log z_i$$

zmenšiti kóty o $-z_i$, t. j. zvětšiti je o $+z_i$. Spojením bodů o téže kótě z v takto získaných stupnicích obdržíme již isoplétu (6,61) nesoucí též tuto kótu z.

Podobně bychom mohli k sestrojení těchto isoplét použíti též stupnic funkcí

(6,65) $$\xi = \alpha \log (z - z_i),$$

---

[23]) Viz pozn. [21]) na str. 75.

[24]) Viz pozn. [6]) na str. 13.

které tato soustava isoplét vytíná na přímkách

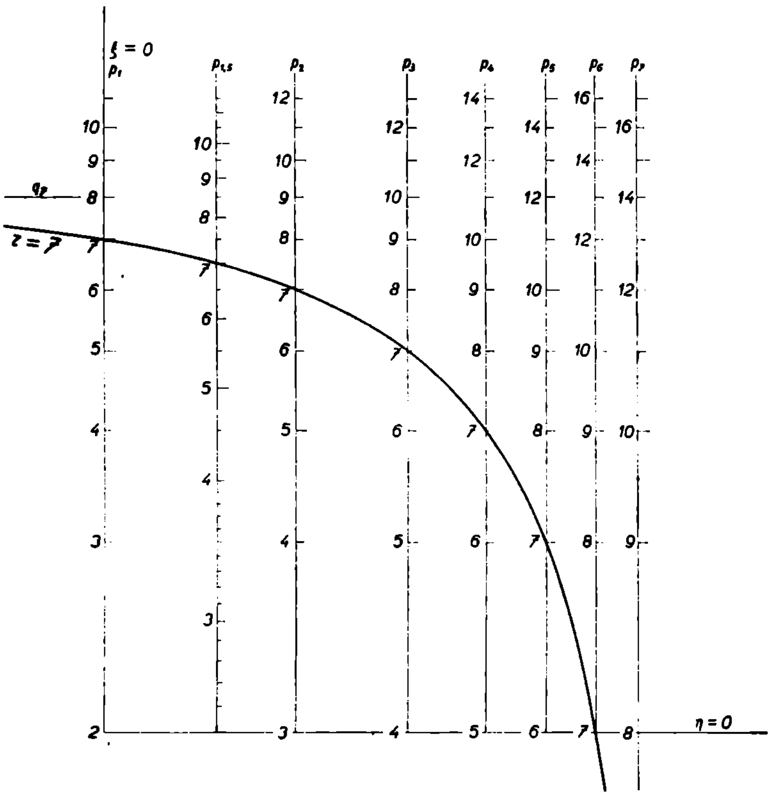
$$q_i \equiv \eta = \beta \log z_i.$$

V obr. 42 jsme takto sestrojili stupnice (6,64) pro

$$z_i = 1;\ 1{,}5;\ 2 \text{ a dále pro } z_i = 3;\ 4;\ \ldots$$

a mod. $\alpha = \beta = +\ 25$ cm a příkladem jsme vytáhli isoplétu o kótě $z = 7$. Isopléta o kótě z_i má zřejmě za asymptoty záporné části přímek p_i a q_i.

Za cvičení sestrojte ještě řadu isoplét dalších, také o kótách $z < 1$.



Obr. 42. Sestrojení isopléty $z = 7$ ze soustavy $10^{\xi : \alpha} + 10^{\eta : \beta} = z$, mod. $\alpha = \beta = 25$ cm (asi v $\frac{1}{3}$ velikosti).

Docela stejným způsobem sestrojujeme soustavu isoplét

(6,66) $$10^{\xi:\alpha} - 10^{\eta:\beta} = z,$$

která má reálné isopléty pro $z \geq 0$ i pro $z < 0$. Píšeme-li její rovnici ve tvaru

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha}\xi + \beta \log (1 - z \,.\, 10^{-\xi:\alpha})$$

vidíme, že všechny mají společnou asymptotu

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha}\xi, \qquad \frac{\xi}{\alpha} > 0,$$

která je též isoplétou o kótě $z = 0$. Píšeme-li však (6,66) takto:

$$\eta = \beta \log (10^{\xi:\alpha} - z),$$

seznáme, že každá isopléta o kótě $z < 0$ má kromě toho ještě asymptotu

$$\eta = \beta \log (-z), \qquad \frac{\xi}{\alpha} < 0,$$

kdežto isopléty o kótách $z > 0$ mají podobně ještě druhé asymptoty

$$\xi = \alpha \log z, \qquad \frac{\eta}{\beta} < 0.$$

Vzhled této soustavy isoplét při $\alpha < 0$, $\beta < 0$ ukazuje soustava (*t*) na podkladě v obr. 6 (čl. **1,5**).

Soustava isoplét

(6,67) $$-10^{\xi:\alpha} + 10^{\eta:\beta} = z$$

se dá též psáti

$$10^{\xi:\alpha} - 10^{\eta:\beta} = -z$$

a jest shodná se soustavou (6,66) až na opačné znaménko parametru z.

Soustava isoplét

(6,68) $$\pm 10^{\xi:\alpha} + 10^{\eta:\beta} = z \,.\, 10^{\alpha_1\xi + \beta_1\eta},$$

s níž jsme se setkali v čl. **2,2** při $\varepsilon \neq 1$, jest pouze zdánlivě obecnější než příslušná soustava isoplét (6,61); (6,66) nebo (6,67) o stejné kombinaci znamének. Je-li

$$\delta = 1 - \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 \neq 0,$$

zaveďme v rovině nové kartézské souřadnice rovnicemi

$$(6{,}69) \qquad \frac{\xi'}{\alpha'} = \xi\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha_1\right) - \beta_1\eta, \quad \frac{\eta'}{\beta'} = -\alpha_1\xi + \eta\left(\frac{1}{\beta} - \beta_1\right).$$

Nová soustava souřadnic má počátek $O' \equiv O$ a osy souřadnicové na přímkách resp.

$$\xi' = 0 \text{ t. j. } \xi\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha_1\right) - \beta_1\eta = 0,$$

$$\eta' = 0 \text{ t. j. } -\alpha_1\xi + \eta\left(\frac{1}{\beta} - \beta_1\right) = 0;$$

jest tedy obecně **klinogonální**. Z (6,69) obdržíme také původní souřadnice bodů na nových osách

$$C_1\left(\xi' = \alpha',\ \eta' = 0;\ \xi = \frac{\alpha(1 - \beta\beta_1)}{\delta},\ \eta = \frac{\beta\alpha\alpha_1}{\delta}\right),$$

$$C_2\left(\xi' = 0,\ \eta' = \beta';\ \xi = \frac{\alpha\beta\beta_1}{\delta},\ \eta = \frac{\beta(1 - \alpha\alpha_1)}{\delta}\right),$$

s pomocí nichž určíme α', β'. Tak byla-li původní soustava souřadná (ξ, η) pravoúhlou, bude

$$\alpha' = +\left|\frac{\alpha}{\delta}\right|\sqrt{(1 - \beta\beta_1)^2 + \beta^2\alpha_1^2}, \quad \beta' = +\left|\frac{\beta}{\delta}\right|\sqrt{\alpha^2\beta_1^2 + (1 - \alpha\alpha_1)^2},$$

volíme-li za **kladné** směry nových os

$$\overrightarrow{O'C_1} \text{ a } \overrightarrow{O'C_2}.$$

V této nové soustavě souřadnicové má však soustava isoplét (6,68) rovnici

$$\pm\, 10^{\xi' : \alpha'} \pm 10^{\eta' : \beta'} = z,$$

t. j. podle kombinace znamének rovnici téhož tvaru jako (6,61) resp. (6,66) nebo (6,67). Můžeme ji proto sestrojiti týmž způsobem jako ony, neboť okolnost, byla-li soustava souřadnicová použitá ke konstrukci pravoúhlou či nikoliv, nemá zřejmě vlivu na sestrojení takové soustavy isoplét. — Kdyby však bylo

$$\delta = 1 - \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 = 0,$$

označme mnohočlen

$$p = -\alpha_1\xi + \eta\left(\frac{1}{\beta} - \beta_1\right).$$

Seznáme, že pak jest

$$\xi\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha_1\right) - \beta_1\eta \equiv -\frac{1 - \alpha\alpha_1}{\alpha\alpha_1} \cdot p.$$

Proto lze rovnici (6,68) psáti ve tvaru trinomické rovnice[25]) o neznámé $X = 10^p$

$$\pm\, 10^{cp} \pm 10^p = z, \quad c = -\frac{1 - \alpha\alpha_1}{\alpha\alpha_1},$$

jejíž kořen je tedy funkcí z

$$p = \varphi(z),$$

kterou ovšem zpravidla nedovedeme vyjádřiti v uzavřeném tvaru elementárními transcendentami. Plyne však z toho, že rovnici isoplét (6,68) lze nyní psáti ve tvaru

$$-\alpha_1\xi + \eta\left(\frac{1}{\beta} - \beta_1\right) = \varphi(z).$$

Jsou to tedy rovnoběžky. Nejjednodušeji však je sestrojíme z toho, že přímku

$$\alpha_1\xi + \beta_1\eta = 0$$

protínají v stejné stupnici jako soustava isoplét

$$\pm\, 10^{\xi:\alpha} \pm 10^{\eta:\beta} = z,$$

jak plyne z (6,68). A tuto soustavu isoplét dovedeme sestrojiti podle dřívějšího.

Soustavy isoplét

$$\pm\, A \,.\, 10^{\xi:\alpha} \pm B \,.\, 10^{\eta:\beta} = z, \quad A > 0,\ B > 0$$

jsou také pouze zdánlivě obecnější než (6,61); (6,66) nebo (6,67), neboť v soustavě souřadnic

$$\xi' = \xi + \alpha \log A, \quad \eta, = \eta + \beta \log B$$

dá se jejich rovnice psáti

$$\pm\, 10^{\xi':\alpha} \pm 10^{\eta':\beta} = z.$$

[25]) Řešení takových rovnic viz LÁSKA-HRUŠKA: Teorie a prakse numerického počítání, str. 230. Praha 1934.

Stejně i soustavy isoplét

$$\pm\, a^{\xi:\alpha} \pm b^{\eta:\beta} = z, \quad a > 0,\ b > 0$$

jsou pouze zdánlivě obecnější než (6,61); (6,66) nebo (6,67), neboť jejich rovnice se dají psáti ve tvaru posledních

$$\pm\, 10^{\xi:\alpha'} \pm 10^{\eta:\beta'} = z, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\log a}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\log b}.$$

6,7. Také v polárních souřadnicích sestrojujeme soustavy isoplét

$$\pm\, 10^{\varphi:\alpha} \pm 10^{\varrho:\beta} = z$$

docela podobným způsobem jako soustavy v článku předešlém.

Tak při sestrojení soustavy isoplét

$$10^{\varphi:\alpha} + 10^{\varrho:\beta} = z, \quad z > 0, \tag{6,71}$$

místo stupnic (6,64) na rovnoběžkách p_i obdržíme stupnice funkcí

$$\varrho = \beta \log (z - z_i) \tag{6,72}$$

na průvodičích

$$\pi_i \equiv \varphi = \alpha \log z_i. \tag{6,73}$$

Tyto průvodiče sestrojujeme z jejich průsečíků s vhodně zvolenou kružnicí

$$\varrho = a = \text{konst.} > 0.$$

Protínají ji podle (6,73) v logaritmické stupnici

$$s = a\varphi = a\alpha \log z \tag{6,74}$$

o mod. $a|\alpha|$, v níž kóty rostou při $\alpha > 0$ směrem rostoucích φ, kdežto při $\alpha < 0$ směrem opačným, a která má kótu „1“ v bodě na $\varphi = 0$, od něhož počítáme oblouk kružnice s. Tuto logaritmickou stupnici sestrojujeme tak jako stupnici (p) v čl. **1,8** a průvodič π_i prochází právě jejím bodem o kótě z_i. Na tomto průvodiči sestrojíme pak stupnici funkce (6,72) zase pouhým překótováním v logaritmické stupnici

$$\varrho = \beta \log z \tag{6,75}$$

o kótě „1“ v počátku $\varrho = 0$ a mod. β (pozor zase na znamení tohoto β). Veškeré tyto logaritmické stupnice určené k překótování na různých průvodičích jsou tedy shodné a sestrojují se proto velmi snadně z jedné z nich. Isopléty soustavy (6,71) obdržíme zase spojením bodů o stejné kótě v těchto stupnicích (6,72) na jednotlivých průvodičích (6,73).

Podobně bychom k tomu mohli použíti také stupnic funkcí

$$(6{,}76) \qquad \varphi = \alpha \log (z - z_i)$$

na kružnicích

$$k_i \equiv \varrho = \beta \log z_i.$$

Tyto kružnice sestrojíme zase z toho, že protínají každý průvodič v logaritmické stupnici (6,75) a sice kružnice k_i protíná ji v bodě o kótě právě z_i. Na jednotlivých těchto kružnicích sestrojíme stupnice (6,76) zase pouhým překótováním logaritmické stupnice (6,74). Veškeré tyto logaritmické stupnice určené k překótování promítají se však z počátku O navzájem jedna do druhé, takže stačí sestrojiti pouze jednu z nich a to zase tím způsobem jako v čl. 1,8 stupnici (p).

Kdybychom rovnici (6,71) psali ve tvaru

$$\varrho = \beta \log (z - 10^{\varphi : \alpha})$$

seznali bychom, že s $\varphi : \alpha \to -\infty$ blížila by se isopléta o kótě z nekonečně mnoha závity kružnici

$$\varrho = \beta \log z.$$

A podobně bychom našli, že isopléta o kótě z se blíží asymptoticky průvodiči

$$\varphi = \alpha \log z, \quad \frac{\varrho}{\beta} < 0.$$

Pro skutečné nakreslení soustavy isoplét však oba tyto poznatky nejsou s velkým užitkem, jelikož z důvodu jednoznačného určení bodů polárními souřadnicemi musíme jim vždy uložiti omezení

$$(6{,}76) \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \quad \varrho > 0.$$

Bez tohoto omezení bychom snadno seznali, že bodem o souřadnicích

$$\varphi, \quad \varrho = \beta \log (z - 10^{\varphi : \alpha}), \quad z > 10^{\varphi : \alpha}$$

prochází nekonečné množství isoplét o kótách

$$z_i = z + 10^{(\varphi + 2i\pi) : \alpha} - 10^{\varphi : \alpha},$$
$$i = \ldots -2; -1; 0; 1; 2; \ldots$$

Taková soustava isoplét by však byla zřejmě nečitelnou v bodech, v nichž se křižuje nekonečné množství křivek, a proto by byla pro účely nomografie bezcennou.

Docela stejným způsobem bychom sestrojili soustavu isoplét

$$10^{\varphi:\alpha} - 10^{\varrho:\beta} = z, \tag{6,77}$$

která jest v podstatě soustavou isoplét z příkladu v čl. **2,3**, volíme-li v něm $\varepsilon = 1$. Zase může býti nyní $z > 0$ nebo $z < 0$. Úpravou rovnic (6,77) na tvar

$$\varrho = \frac{\beta}{\alpha}\varphi + \beta \log (1 - z \,.\, 10^{-\varphi:\alpha})$$

seznáme opět, že veškeré tyto isopléty se blíží asymptoticky Archimedově závitnici

$$\varrho = \frac{\beta}{\alpha}\varphi, \qquad \frac{\varphi}{\alpha} > 0,$$

která je též isoplétou o kótě $z = 0$, a dále, že isopléta o kótě $z > 0$ má za asymptotu průvodič

$$\varphi = \alpha \log z, \qquad \frac{\varrho}{\beta} < 0,$$

kdežto isopléta o kótách $z < 0$ blíží se zase nekonečně mnoha závity asymptoticky kružnici

$$\varrho = \beta \log (-z), \qquad \frac{\varphi}{\alpha} < 0.$$

Tyto asymptotické vlastnosti isoplét (6,77) však nejsou opět s užitkem při jejich sestrojení z důvodu (6,76).

Soustavy isoplét

$$-10^{\varphi:\alpha} - 10^{\varrho:\beta} = z,$$

$$-10^{\varphi:\alpha} + 10^{\varrho:\beta} = z$$

jsou opět identické s (6,71) resp. s (6,77) až na opačné znaménko kót z.

Soustava isoplét analogická (6,68)

$$\pm 10^{\varphi:\alpha} \pm 10^{\varrho:\beta} = z \,.\, 10^{\alpha_1\varphi+\beta_1\varrho},$$

což je v podstatě soustava isoplét (t) z čl. **2,3** při $\varepsilon \neq 1$, sestrojovala by se však nyní podstatně obtížněji než veškeré předešlé soustavy v tomto článku z toho důvodu, že transformace analogická (6,69)

$$\frac{\varphi'}{\alpha'} = \varphi\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha_1\right) - \beta_1\varrho, \quad \frac{\varrho'}{\beta'} = -\alpha_1\varphi + \varrho\left(\frac{1}{\beta} - \beta_1\right)$$

nedovoluje interpretaci φ', ϱ' zase jako polární souřadnice.

Také soustavy

$$\pm\, a^{\varphi:\alpha} \pm b^{\varrho:\beta} = z, \quad a > 0, \quad b > 0$$

převedeme na některou z předešlých prostou záměnou α, β v konstanty

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\log a}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\log b}.$$

Naproti tomu sestrojení některé ze soustav

(6,78) $$\pm\, A \,.\, 10^{\varphi:\alpha} \pm B \,.\, 10^{\varrho:\beta} = z, \quad A > 0, B > 0$$

spadá již vlastně do okruhu článku následujícího.

6,8. Kdybychom v rovnici (6,61) nahradili parametr z parametrem t s pomocí rovnice

(6,81) $$z = f(t),$$

obdrželi bychom z ní soustavu isoplét

(6,82) $$10^{\xi:\alpha} + 10^{\eta:\beta} = f(t).$$

Ta se skládá sice z těchže křivek jako soustava (6,61), tyto křivky však nyní nesou jiné kóty, totiž kóty t, které souvisejí s kótami z rovnicí (6,81). A z těchto isoplét nyní také kreslíme jiné isopléty než dříve, totiž isopléty nesoucí okrouhlé kóty

(6,83) $$t_i = t_0 + ik, \quad i = \ldots -2; -1; 0; 1; 2; \ldots$$

které tvoří aritmetickou posloupnost a nikoliv isopléty nesoucí okrouhlé kóty z.

Sestrojení soustavy isoplét (6,82) jest zcela podobné jako sestrojení soustavy isoplét (6,61), jest však složitější o výpočet tabulky hodnot funkce $f(t)$ pro argumenty (6,83). Tak místo stupnic funkcí (6,64) na rovnoběžkách (6,63), budeme teď míti stupnice funkcí

(6,84) $$\eta = \beta \log\,[f(t) - a_i]$$

na rovnoběžkách

(6,85) $$p_i \equiv \xi - \alpha \log a_i = 0.$$

Při tom můžeme voliti za

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

jakákoliv vhodná čísla, na př. taková, aby rovnoběžky (6,85) byly ekvidistantní. Vypočteme nyní hodnoty funkce $f(t)$ pro ekvidistantní okrouhlé kóty (6,83) a na to vyneseme na rovnoběžku p_i stupnici funkce (6,84). Provedeme to nejjednodušeji použitím logaritmické stupnice o mod. β způsobem, jehož jsme užili k sestrojení stupnice funkce (6,56). Spojením stejně kótovaných bodů jednotlivých stupnic (6,84) obdržíme zase naši soustavu isoplét (6,81).

Podobně bychom mohli vynášeti na rovnoběžkách

$$q_i \equiv \eta = \beta \log b_i$$

stupnice funkcí

$$\xi = \alpha \log [f(t) - b_i] \text{ atd.}$$

Stejného postupu bychom použili při sestrojování ostatních soustav isoplét

$$\pm 10^{\xi : \alpha} \pm 10^{\eta : \beta} = f(t),$$

dále soustav isoplét

$$\pm 10^{\xi : \alpha} \pm 10^{\eta : \beta} = f(t) \, . \, 10^{\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta},$$

tuto opět ve vhodné klinogonálné soustavě souřadnicové, a

$$\pm 10^{\varphi : \alpha} \pm 10^{\varrho : \beta} = f(t).$$

Tak na příklad, kdybychom měli sestrojiti některou ze soustav isoplét (6,78), na př.

(6,86) $$A \, . \, 10^{\varphi : \alpha} + B \, . \, 10^{\varrho : \beta} = t, \quad A > 0, \; B > 0,$$

pišme ji napřed ve tvaru

$$C \, . \, 10^{\varphi : \alpha} + 10^{\varrho : \beta} = \frac{1}{B} t, \qquad C = \frac{A}{B}.$$

Zaveďme zde nový parametr

(6,87) $$t = Bz$$

a novou polární soustavu souřadnic

$$\varphi' = \varphi + \alpha \log C, \quad \varrho' = \varrho,$$

což značí pouhé otočení polární osy z polohy $\varphi = 0$ do polohy $\varphi' = 0$,

t. j. $\varphi = -\alpha \log C$. Tím přejde soustava isoplét (6,86) v soustavu tvaru (6,71)

$$10^{\varphi' : \alpha} + 10^{\varrho' : \beta} = z,$$

jejíž isopléty však budeme kresliti pro okrouhlé kóty t a nikoliv pro okrouhlá z.

Tak na průvodičích

$$\pi_i \equiv \varphi' = \alpha \log z_i = \alpha \log \frac{t_i}{B},$$

jichž rovnice je v původních souřadnicích

$$\pi_i \equiv \varphi = \varphi' - \alpha \log C = \alpha \log \frac{t_i}{A},$$

obdržíme stupnice funkcí

$$\varrho = \beta \log (z - z_i) = \beta \log \frac{t - t_i}{B} = \beta \log (t - t_i) - \beta \log B.$$

Vzniknou překótováním z logaritmické stupnice o mod. β, která má v počátku $\varrho = 0$ bod o kótě B, nikoliv bod o kótě „1" jako v čl. 6,7. Atd.

6,9. Ukažme si ještě, že logaritmické pravítko[26]) jest pouze jiným technickým provedením nomogramu s průsvitkou o 1 posuvu (čl. 1,7).

Jak známo, logaritmickým pravítkem provádíme násobení

$$c = a \cdot b$$

na základě mechanického sečítání logaritmů

$$\log c = \log a + \log b \tag{6,91}$$

s pomocí dvou stejných a navzájem posuvných logaritmických stupnic.

Zobrazme si funkci (6,91) nomogramem s průsvitkou o 1 posuvu (obr. 43*a*) *b*). Podle čl. 1,6 a 1,7 sestrojme na průsvitce stupnice

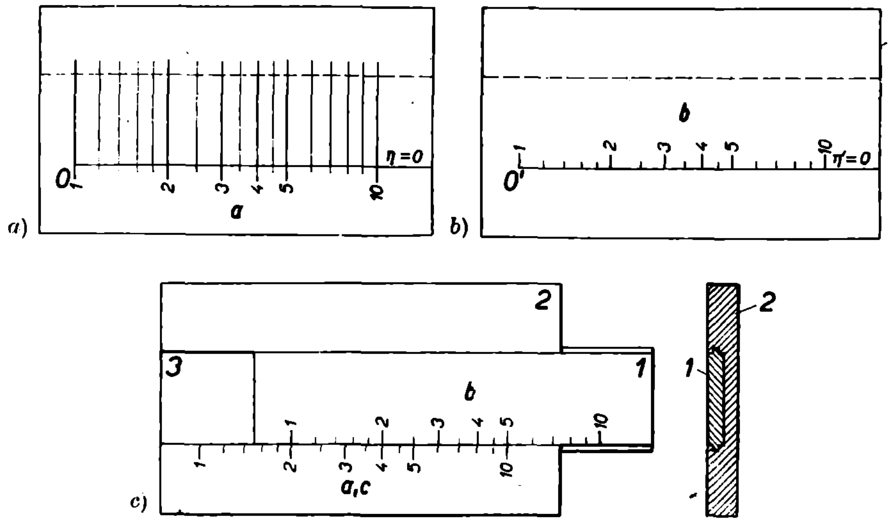
---

[26]) Viz na př. LÁSKA-HRUŠKA: Počet grafický a graficko-mechanický, Praha 1923, str. 43; F. PEŠEK: Logaritmické pravítko, Kladno 1937; V. KLEPL: Úvod do počítání na logaritmickém pravítku, Praha 1942; E. BARANOVSKÝ: Počtářský těsnopis Praha 1942.

$$(O') \qquad \xi'_1 = -f_3 \equiv 0, \qquad \eta'_1 = 0,$$
$$(b) \qquad \xi'_2 = f_{5,6} = \log b, \quad \eta'_2 = 0,$$

z nichž prvá se redukuje na počátek O' soustavy souřadnicové, v němž jest též bod o kótě „1" stupnice (b). Na podkladě sestrojme stupnici

$$(a) \qquad \xi_1 = f_1 = \log a, \qquad \eta_1 = 0,$$



Obr. 43. Logaritmické pravítko jako nomogram s průsvitkou o jednom posuvu bez rotace; *a*) podklad a *b*) průsvitka nomogramu, *c*) logaritmické pravítko, jehož šoupátko *1* je vyříznuto z průsvitky a jehož pevná část *2* s drážkou *3* pro šoupátko je upravena z podkladu.

takže bude

$$M = f_1 + f_3 + f_{5,6} = \log a + \log b.$$

Rovnici (6,91) lze tedy psáti v kanonickém tvaru

$$M = \log c,$$

z něhož plyne rovnice isoplét (c) na podkladě

$$(c) \qquad \xi_2 = \log c.$$

Jsou to kolmice k ose $\eta = 0$ té vlastnosti, že isopléta o kótě c prochází bodem o stejné kótě c v logaritmické stupnici (a).

Nomogram má klíč

$$P(b = 1) \equiv O' \vdash\!\dashv P(a), \quad U'(\eta' = 0) \vdash\!\dashv \eta = 0, \quad P'(b) \vdash\!\dashv L(c).$$

Při používání nomogramu však seznáme, že z isoplét (c) budeme užívati pouze jejich průsečíky s osou $\eta = 0$, t. j. stupnici (a), která nám takto nahradí celou soustavu isoplét (c). Nomogram pak můžeme technicky zjednodušiti uříznutím jednak nepotřebné části podkladu nad osou $\eta = 0$, jednak části průsvitky pod osou $\eta' = 0$. Tím však docílíme, že průsvitka se nyní může posunovati podél podkladu, t. j. vedle něj místo nad ním, a může proto býti provedena i z neprůhledné hmoty ve formě šoupátka, zapuštěného do drážky v podkladě, jak to znáte z logaritmických pravítek.