I. Obecné zásady počtu pravděpodobnosti.

1. Definice pravděpodobnosti. — Kostku, jejíž stěny jsou označeny čísly od 1 do 6, hodíme z větší vzdálenosti na vodorovnou rovinu a pozorujeme, které číslo padne.

Před jednotlivým hodem nemůžeme předvídati, které číslo v tom hodu vyjde. Opakujeme-li však pokus mnohokrát, objeví se v celkovém výsledku určitá pravidelnost. Hodíme-li kostkou na př. 6000krát, shledáme, že přibližně 1000krát padne číslo 1, přibližně 1000krát číslo 2 atd., ovšem za předpokladu, že kostka je přesně pracována a že je homogenní. Kdyby dřevěná kostka měla poblíž jedné stěny kovovou vložku, padala by na tuto stěnu častěji a zmíněná pravidelnost by se tím porušila.

Považujeme pravidelnost, jevící se ve statistice velké řady pokusů (v našem případě: házíme-li kostkou, vyjde určité číslo přibližně tolikrát, kolik obnáší šestina z celkového počtu pokusů), za důsledek určité pravidelnosti v podmínkách pokusu (kostka je pravidelná, takže žádná její stěna nemá význačných vlastností, ani pokud se týče vztahů ryze geometrických, ani pokud se týče rozdělení hmoty).

Míru pravděpodobnosti přisoudíme pak nějakému zjevu takto: je-li n počet všech těch případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledky zamýšleného pokusu, a m počet všech těch mezi nimi, které vedou k očekávanému zjevu (»případy příznivé«), je pravděpodobnost p zjevu určena vzorcem

$$p = \frac{m}{n} . \qquad (1)$$

Pravděpodobnost zjevu vypočteme, dělíme-li počet případů příznivých počtem všech případů možných.

Řešení každé úlohy o pravděpodobnosti, pokud počet všech možných případů je konečný, předpokládá tedy, že

1. ustanovíme, které případy považujeme za možné a že
2. spočítáme všechny případy příznivé.

Hodíme-li jednou kostkou, je pravděpodobnost p, že vyjde určité číslo (na př. jedna), rovna $^1/_6$, neboť $n = 6$, $m = 1$.

Hodíme-li dvěma kostkami, je pravděpodobnost p, že vyjde součet osm, rovna $^5/_{36}$, neboť $n = 36$, $m = 5$. Počet všech možných případů ($= 36$), odlišujeme zde od počtu všech možných součtů ($= 11$), kterých lze dvěma kostkami docíliti. Pravděpodobnosti různých součtů nejsou stejné.

Krajní případy pravděpodobnosti jsou: nemožnost ($m = 0$, tedy $p = 0$) a jistota ($m = n$, tedy $p = 1$). Vždy platí, že

$$0 \leq p \leq 1.$$

Pravděpodobnost q, že uvažovaný zjev nenastane, jest

$$q = \frac{n - m}{n} = 1 - p.$$

Shora uvedená definice (1) pravděpodobnosti přihlíží jen k jedné stránce náhodných zjevů, totiž k podmínkám pokusu (v případě kostky: je dáno, že pokus musí míti jeden ze šesti možných výsledků a že jen jeden z nich je příznivý očekávanému zjevu); proto nazývá se někdy pravděpodobnost takto definovaná pravděpodobností a priori na rozdíl od tak zv. pravděpodobnosti a posteriori, kterážto je dána druhou stránkou náhodných zjevů, totiž pravidelností jevící se ve statistice veliké řady pokusů.

2. *Pravděpodobnost úhrnná.* — Budiž n počet všech vůbec možných případů, které mohou nastati jakožto výsledek daného pokusu. Rozdělme pak případy, jež jsou danému zjevu příznivy, v k skupin: v první skupině bude m_1 případů, ve druhé m_2 případů ... v k-té m_k případů; počet všech případů příznivých jest

$$m = m_1 + m_2 + \dots m_k .$$

Pravděpodobnost, že pokus povede k případu obsaženému v prvé skupině, jest

$$p_1 = \frac{m_1}{n},$$

pravděpodobnost, že pokus povede k případu obsaženému ve druhé skupině, jest

$$p_2 = \frac{m_2}{n}, \text{ atd.}$$

Pravděpodobnost, že zjev vůbec nastane, je

$$p = \frac{m}{n} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n},$$

aneb

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m. \tag{2}$$

p nazývá se *pravděpodobností úhrnnou* a máme větu: *Jsou-li $p_1, p_2, \ldots p_k$ pravděpodobnosti zjevů navzájem se vylučujících, takže jen jeden z nich se může v daném pokuse uskutečniti, jest pravděpodobnost, že jeden z nich se uskuteční, rovna součtu $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.*

3. *Pravděpodobnost složená.* — *a)* Budiž n_1 počet všech případů, které vůbec mohou se vyskytnouti jakožto výsledky daného pokusu, m_1 pak počet těch, které jsou uvažovanému zjevu a_1 příznivy. Pravděpodobnost p_1, že zjev nastane, je dána vzorcem

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

Označme písmeny m_2, n_2 a p_2 obdobné veličiny při nějakém pokuse, jenž se koná za jiných podmínek a jenž může vésti ke zjevu a_2. Pravděpodobnost, že nastane zjev a_2, jest

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Předpokládejme, že mezi oběma zjevy není žádné příčinné souvislosti. Položme si otázku: Jak veľká jest pravděpodobnost p, že pokus prvního druhu bude přízniv zjevu a_1 a že zároveň pokus druhého druhu bude přízniv zjevu a_2? Počet všech možných případů jest $n_1 n_2$, neboť každý z n_1 možných výsledků, které může dáti pokus prvého druhu, dá se kombinovati s každým z n_2 případů, jež se mohou vyskytnouti při pokuse druhého druhu. Počet příznivých případů jest $m_1 m_2$ z podobného důvodu. Je tedy

$$p = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2},$$

čili

$$p = p_1 p_2. \tag{3}$$

Pravděpodobnost p určená vzorcem (1) nazývá se *složenou;* užívajíce tohoto názvu, vyjádříme vzorec větou: *Je-li p_1 pravděpodobnost nějakého zjevu a p_2 pravděpodobnost zjevu jiného, který jest na prvém nezávislý, jest $p_1 p_2$ pravděpodobnost, že nastanou oba zjevy.*

b) Rovnice (3) dá se zobecniti takto: je-li dáno k zjevů, mezi nimiž není příčinné souvislosti, a jsou-li pravděpodobnosti těch zjevů $p_1, p_2 \dots p_k$, jest pravděpodobnost p, že všech k zjevů vyskytne se pospolu, dána vzorcem

$$p = p_1 p_2 \dots p_k \,. \tag{3'}$$

4. Matematická naděje a střední hodnota. — Budiž x_1 hodnota, které nabude proměnná veličina x, zdaří-li se určitý pokus; a budiž p pravděpodobnost, že pokus ten se zdaří. Je-li N veliké číslo, bude v řadě N pokusů přibližně Np zdařilých; součet všech hodnot veličiny x, jež odpovídají zdařilým pokusům, je tedy přibližně Npx_1. Z toho připadá na jediný pokus průměrná (střední) hodnota px_1, kterou nazýváme ***matematickou naději*** veličiny x pro jeden pokus; Npx_1 je pak matematická naděje pro N pokusů.

Předpokládejme nyní obecněji, že proměnná veličina x nabývá jedné z n hodnot

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

a označme příslušné pravděpodobnosti, se kterými té neb oné hodnoty může nabýti, písmeny

$$p_1, p_2 \dots p_n \,;$$

platí rovnice

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

a matematická naděje veličiny x je dána vzorcem

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \,. \tag{4}$$

Matematická naděje proměnné veličiny x se vypočte, násobíme-li každou hodnotu, které x může nabýti, pravděpodobnosti, že té hodnoty nabude, a sečteme-li všechny součiny tak utvořené.

Místo názvu »matematická naděje veličiny x« užíváme též názvů »pravděpodobná hodnota« nebo »střední hodnota« veličiny x. K objasnění tohoto posledního názvu vyjděme od vzorce

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \,,$$

kterým se stanoví x jakožto aritmetický střed n hodnot $x_1, x_2 \dots x_n$. Počítajíce takto střed, přisuzujeme všem veličinám x_k stejnou váhu. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů přisoudili každé veličině x_k jinou *váhu* s_k, byla by střední hodnota ξ definována vzorcem

$$\xi = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots s_n x_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_n} \,;$$

pro $s_1 = s_2 = \dots = s_n$ přechází ξ v x.

Zaveďme do počtu čísla p_k úměrná vahám s_k:

$$\frac{s_k}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = p_k, \quad (k = 1, 2, \ldots n);$$

patrně jest $$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

a vzorec pro ξ dá se psáti takto:

$$\xi = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n .$$

Střední hodnota ξ veličiny x není tedy nic jiného než její matematická naděje; váhy jednotlivých hodnot x_k jsou úměrny příslušným pravděpodobnostem.

5. ***Pravděpodobnost různých výsledků v řadě opakovaných pokusů.*** — Budiž p pravděpodobnost, že určitý zjev se dostaví jakožto výsledek nějakého pokusu, $1 - p$ pak pravděpodobnost, že zjev ten se nedostaví. Pokus, v němž nastane první případ, nazveme zdařeným; nastane-li druhý případ, bude pokus nezdařený.

Konáme pokus celkem n-krát za stejných podmínek a klademe si otázku: jak veliká je pravděpodobnost P_m, že v řadě n pokusů bude m zdařených a $n - m$ nezdařených?

Očíslujme nejprve všech n pokusů pořadovými čísly 1, 2, ... n a vytkněme určitých m z těchto čísel jakožto pořadová čísla pokusů, které se mají zdařiti; ostatních $n - m$ čísel bude pak náležeti pokusům, které se nemají zdařiti. Pravděpodobnost, že zdařené a nezdařené pokusy vyskytnou se právě v tomto předepsaném pořadí, jest

$$p^m (1 - p)^{n - m}.$$

Avšak v otázce shora položené nepřihlížíme k pořadí, ve kterém se zdařené resp. nezdařené pokusy mají vyskytnouti, nýbrž jen k úhrnnému jich počtu. Proto musíme násobiti číslo právě odvozené počtem permutací z n prvků s opakováním (v každé permutaci je celkem n prvků, z nich m je stejných, zbývající prvky pak, v úhrnném počtu $n - m$, jsou rovněž mezi sebou stejny). Hledaná pravděpodobnost jest

$$P_m = \frac{n!}{m!\,(n - m)!}\, p^m (1 - p)^{n - m}.$$

Položme si otázku, jak voliti číslo m (jsou-li n a p dána), aby pravděpodobnost P_m měla co největší hodnotu?

Je-li P_m největší člen v posloupnosti kladných čísel

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots P_n ,$$

jest

$$\frac{P_m}{P_{m+1}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{m+1}{n-m} > 1, \qquad \frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{m}{n-m+1} < 1$$

a tedy $$np + p - 1 < m < np + p.$$

Hledané číslo m je tak sevřeno do dvou mezí, jichž rozdíl $= 1$. Je-li číslo n dosti veliké, můžeme vynechati $p - 1$ nebo p vedle np, a máme přibližné hodnoty

$$np \quad \text{resp.} \quad n(1-p)$$

pro počet zdařených resp. nezdařených pokusů za předpokladu, že P_m dosahuje maximální hodnoty. *Ze všech výsledků, které se mohou vyskytnouti, vykonáme-li pokus n krát,*) má největší pravděpodobnost ten, ve kterém počet podařených pokusů má se k počtu nepodařených jako p se má ku* $1 - p$.

6. *Přibližná hodnota pravděpodobnosti* P_m. — *a) Budiž m* veliké číslo celé. Podle Stirlingovy formule**) dá se $m!$ vyjádřiti přibližně výrazem

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}};$$

poměr tohoto výrazu ku $m!$ má za limitu jednotku, roste-li m do nekonečna.

Předpokládejme nyní, že čísla n a m, vyskytující se ve vzorci pro P_m v odst. 5., jsou velmi veliká, zaveďme do počtu *úchylku h* rovnicí $$h = m - np$$

a užijme Stirlingovy formule. Není-li h větší než $\sqrt{n}$ a považujeme-li poměr $h : n$ za nekonečně malou veličinu, obdržíme přibližnou hodnotu P výrazu P_m:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}.$$

P je pravděpodobnost, že v řadě n pokusů vyskytne se $np + h$ zdařených; pravděpodobnost, že počet zdařených pokusů bude obsažen v mezích $np + h_1$ až $np + h_2$, jest

$$P(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \sum_{h=h_1}^{h_2} e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}.$$

*) Rozumí se, že různé možné výsledky srovnáváme jen co do počtu podařených pokusů, bez ohledu na pořadí, ve kterém se střídají podařené pokusy s nepodařenými.

**) Viz *J. A. Serret* Integralrechnung. 2. Aufl. (Leipzig 1899), p. 164; *K. Petr* Počet integrální (Praha 1915), p. 408.

b) Exponenciální funkce klesá s h velmi pomalu, je-li n veliké; proto můžeme součet nahraditi integrálem:

$$P(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p (1-p)}} \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}} dh.$$

Položme

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt;$$

předchozí vzorec můžeme pak psáti takto:

$$P(h_1, h_2) = \tfrac{1}{2}\, \Theta\left(\frac{h_2}{\sqrt{2np(1-p)}}\right) - \tfrac{1}{2}\, \Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right). \tag{5}$$

Úvahy obsažené v odst. 5. a 6. shrneme větou: *Budiž p pravděpodobnost, že nějaký pokus se zdaří, n počet pokusů, m skutečný počet pokusů zdařených, np pravděpodobný počet pokusů zdařených a h úchylka:*

$$h = m - np.$$

Předpokládáme, že n je číslo velmi veliké a že h není větši než $\sqrt{n}$ Pak pravděpodobnost $P(h_1, h_2)$, že úchylka h jest obsažena v mezích h_1 a h_2, jest určena přibližně vzorcem (5).

Průběh funkce $\Theta(t)$ objasní se touto tabulkou:

t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$
0·00	0·000 0000	1·20	0·9103140..
0·20	0·222 7025..	1·50	0·9661052..
0·40	0·428 3922..	2·00	0·9953223..
0·50	0·520 4999..	3·00	0·9999779..
1·00	0·842 7008..	4·00	0·99999998459..

7. *Srovnání s výsledky pokusů.* — Je-li n veliké číslo, vyskytne se v řadě n pokusů přibližně

$$np \tag{6}$$

zdařených (srv. odst. 1.), je-li p pravděpodobnost, že pokus se zdaří.

Užijme nyní této věty pro případ, že konáme veliký počet s serií po n pokusech. V každé jednotlivé serii je pravděpodobnost $P(h_1, h_2)$, že úchylka h bude obsažena v mezích h_1 a h_2, určena vzorcem (5). Bude tedy přibližně celkem

$$\frac{s}{2}\left[\Theta\left(\frac{h^2}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)-\Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)\right] \qquad (7)$$

serií, v nichž úchylka skutečného počtu zdařených pokusů od np bude obsažena v mezích h_1 a h_2. Položíme-li $h_1 = -h_2$, obdržíme (ježto Θ je funkce lichá)

$$s \,.\, \Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right) \qquad (7\,a)$$

jakožto přibližný počet serií, ve kterých bude úchylka h číselně menší než h_1.

Platnost vzorů (6), (7) a (7*a*) dá se potvrditi pokusy; nutno ovšem znáti hodnotu pravděpodobnosti p. Potvrzení vzorce (6) je poměrně snadné. Zevrubnější potvrzení vzorce (7) nebo (7*a*) vyžaduje většího počtu pokusů, neboť n i s musejí býti veliká čísla.

Poznamenejme, že úvahy, obsažené v odst. 5. a 6., jimiž jsou vzorce (6), (7) a (7*a*) odůvodněny, předpokládají platnost základních vět o pravděpodobnosti úhrnné (odst. 2.) a o pravděpodobnosti složené (odst. 3.); jsou však nezávisly na definici pravděpodobnosti, vyjádřené rovnicí (1). Užití oněch vzorců není tudíž omezeno jen na ty úlohy, ve kterých definujeme pravděpodobnost jakožto poměr počtu případů příznivých k počtu případů možných; vzorce ty platí pro každou definici pravděpodobnosti, která se srovnává s principy o pravděpodobnosti úhrnné a o pravděpodobnosti složené. Sem patří tak zv. pravděpodobnosti geometrické, o kterých bude v tomto spise pojednáno.

8. *Přehled úloh o geometrických pravděpodobnostech.* — Pojem geometrické pravděpodobnosti vyskytuje se po prvé v Buffonově úloze o jehle:*) na vodorovné rovině jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech; hodíme-li na rovinu jehlu, jak velká je pravděpodobnost, že jehla protne některou z rovnoběžek? Vykonáme-li veliký počet pokusů, udává poměr, ve kterém je počet zdařených pokusů k úhrnnému

*) *Buffon:* Essai d'arithmétique morale (Supplément à l'Histoire naturelle, vol. IV., p. 84; 1777).

počtu všech pokusů, přibližnou hodnotu hledané pravděpodobnosti. Avšak přímý výpočet této pravděpodobnosti na základě podmínek pokusu nemůže vycházeti bezprostředně z definice (1). Neboť počet všech možných případů je nekonečně veliký, rovněž tak počet případů příznivých. Podobně je tomu v jiných úlohách, kde hledáme pravděpodobnost, že nějaký útvar vyhovuje určitým geometrickým podmínkám. Prvním krokem k řešení úlohy jest ustanoviti míru pro množství všech případů možných jakož i pro množství všech případů příznivých.

Všimněme si nejjednodušší úlohy o geometrické pravděpodobnosti: na úsečce *AB* jsou zvoleny dva body *C* a *D*. Vypočísti pravděpodobnost, že bod *M*, zvolený uvnitř úsečky *AB*, leží uvnitř úsečky *CD*. Předpokládejme, že není žádného důvodu, proč bychom očekávali, že bod *M* se spíše octne v některé části úsečky *AB* než v jiné; pak bude hledaná pravděpodobnost úměrna délce úsečky *CD*, a pravíme, že ***hustota pravděpodobnosti****) je konstantní podél celé úsečky *AB*. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů předpokládali, že v některých částech úsečky *AB* může se bod *M* spíše vyskytnouti, než v jiných, nebyla by hustota pravděpodobnosti všude stejná.**)
Podobně můžeme rozlišovati i v jiných úlohách, běží-li na př. o pravděpodobnost, že přímky, roviny atd. vyhovují určitým podmínkám.

V kap. II., III. a IV. jedná se výhradně o případech, kdy hustota pravděpodobnosti je konstantní. V kap. V. jsou probrány některé případy, ve kterých se výpočet pravděpodobnosti dá snadno kontrolovati pokusy. V kap. VI. konečně zabývám se speciálními úlohami, ve kterých hustota pravděpodobnosti není konstantní.

II. Základní definice a obecné věty o geometrických pravděpodobnostech.

9. *Bod na přímce.* — *a)* Budiž dána úsečka *AB* a volme bod *M* někde uvnitř této úsečky nebo na jejím kraji. Množství všech případů, jež mohou nastati (množství všech bodů, ležících na úsečce *AB*), měříme délkou $\overline{AB}$ úsečky a pravíme, že ***množství všech bodů, ležících na dané úsečce, má za míru délku této úsečky.*** Zvolme nyní na *AB* dva body *C* a *D*. Měrou

*) T. j. pravděpodobnost vypočtená pro případ, že délka úsečky *CD* je rovna jednotce.

**) Srv. též odst. 14.