KAPITOLA II.

METHODA VARIACÍ

§ 6. Další poznámky o extrémech funkcionálů.

Obecná poznámka. V předcházející kapitole jsme našli nutné podmínky pro to, aby daná čára vedla k extrému některé funkce čáry. Methody, jimiž jsme řešili podobné úlohy, spočívaly v aproximaci našich funkcí čáry funkcemi konečného počtu proměnných, v řešení úlohy o extrému pro tyto funkce a v přechodu k limitě. Nestudovali jsme oprávněnost přechodu k limitě a rovněž jsme se nezabývali otázkou, vede-li vždy limita extrémů aproximujících funkcí k hledanému extrému funkce čáry, neboť takové vyšetřování překračovalo rámec námi dané úlohy. Kdybychom takové vyšetřování provedli, dostali bychom nejenom diferenciální rovnici extremály, nýbrž i aproximaci řešení této diferenciální rovnice řešením systému obyčejných rovnic, t. j. výsledek podstatně větší; právě proto je třeba k jeho dosažení daleko jemnějších úvah. Pro naši skromnější úlohu určit tvar diferenciální rovnice hledané extremální křivky je tento postup poněkud pracný i v nejjednodušší úloze, přejeme-li si jej provést úplně přesně. Při přechodu k složitějším úlohám projeví se tyto jeho nedostatky ještě zřetelněji. Při řešení variační úlohy vycházíme od funkcí konečného počtu proměnných; nemáme dosud algoritmu speciálně určeného pro funkcionály a proto pružnějšího. Problém vytvoření takového algoritmu položil již Euler a řešil jej Lagrange v r. 1759. Tím byla objevena nová cesta pro rozvoj variačního počtu. Eulerovy methody se znovuzrodily teprve nedávno, když se vynořily otázky o aproximaci řešení variačních úloh.

Podstata Lagrangeovy methody je v tom, že se pro funkce obecnější povahy zobecní ten pojem, na němž je vybudována theorie extrémů funkcí konečného počtu proměnných, a to pojem diferenciálu. Princip, jehož jsme v této theorii používali, že totiž v bodě extrému je diferenciál roven nule, se zobecní na funkcionály.

Přípustné čáry. Začneme pečlivější a přesnější formulací úlohy: najít čáru, pro niž určitý funkcionál nabývá extrému. Je zřejmé, že především musíme charakterisovat tu soustavu čar, náležející k definičnímu oboru naší funkce, mezi nimiž leží křivka dávající extrém. Takové čáry se nazývají *přípustnými* čarami naší variační úlohy.

Naši úlohu formulujeme tímto způsobem: *Je dána třída C přípustných čar, patřících k definičnímu oboru funkce $J(\gamma)$ čáry γ. Je najít nutné podmínky k tomu, aby pro čáru γ_0 naší třídy nabývala funkce $J(\gamma)$ svého minima* (resp. maxima), *t. j. aby $J(\gamma) \geqq J(\gamma_0)$, kde γ je libovolná jiná čára této třídy* (pro maximum $J(\gamma) \leqq J(\gamma_0)$).

Definice třídy přípustných čar se mění spolu s úlohou. V tak zvané elementární úloze variačního počtu byly přípustnými čarami rovinné křivky, které spojují dva dané body. V isoperimetrické úloze (viz § 5) musely mít přípustné čáry určitou délku. Taková omezení plynou bezprostředně z podmínek úlohy. Kromě toho klademe na přípustné čáry ještě řadu omezení theoreticko-funkcionálního charakteru, která rovněž závisí na typu úlohy. Vyšetřujeme-li funkce čáry, definované integrály $\int F(x, y, y')\,dx$, musíme žádat, aby integrovaný výraz a integrál měly smysl. Na příklad do třídy přípustných čar podobné úlohy zřejmě nemůže patřit čára, která nemá nikde tečnu.

Omezme prozatím třídu přípustných čar u funkcionálů, vyjádřených integrály $\int F(x, y, y')\,dx$, na čáry $y = y(x)$, kde funkce $y(x)$ a její první derivace jsou spojité. V pozdějších úvahách bude třídou přípustných čar množina křivek po částech hladkých.

Tím, že vyšetřujeme čáry dané rovnicemi $y = y(x)$, kde $y(x)$ je jednoznačná funkce, klademe ještě jedno omezení na třídu přípustných čar: jsou to čáry, které protínají přímky rovnoběžné s osou Oy jenom v jednom bodě. Abychom odstranili toto omezení, musili bychom použít parametrického vyjádření rovnic křivky, což také později provedeme.

Takovým způsobem omezujeme třídu přípustných čar ve dvou směrech: s jedné strany jsou to omezení theoreticko-funkcionálního charakteru (na příklad spojitost funkce vyjádřující čáru a spojitost jejích derivací). Od těchto omezení při současném zobecnění pojmu integrálu, délky křivky atp. lze částečně upustit a položit úlohu v obecnějším tvaru. S druhé strany činíme předpoklady plynoucí z charakteru úlohy (na příklad v isoperimetrické úloze rovnost délek přípustných křivek). Změny těchto předpokladů vedou po každé k novým úlohám, jež vyžadují vlastních method řešení.

Pro stručnost vyjadřování budeme dále používat této terminologie. Řekneme, že *křivka* $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ *patří do třídy* C_1, *je-li funkce* $y(x)$ *spolu se svou první derivací spojitá pro* $a \leqq x \leqq b$. Řekneme obecně, že *křivka* $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ *patří do třídy* C_n, *je-li v uzavřeném intervalu* $[a, b]$ *funkce* $y(x)$ *spojitá spolu se svými prvními* n *derivacemi.*

§ 7. Klasifikace extrémů.

Absolutní extrém. V theorii extrémů funkcí konečného počtu proměnných se rozlišuje mezi extrémem absolutním a relativním. Analogické dělení pojmu extrému provedeme i pro funkce čar. Řekneme, že daná funkce $J(\gamma)$ čáry má v dané třídě přípustných čar absolutní minimum, jehož nabývá na křivce γ_0 naší třídy, je-li pro libovolnou křivku γ naší třídy

$$J(\gamma) \geqq J(\gamma_0).$$

Analogicky se definuje i absolutní maximum.

Vyšetřujme na příklad délku křivky; za třídu přípustných čar vezmeme soustavu křivek, spojujících dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, vyjádřených rovnicemi

$$y = y(x),$$

kde $y(x)$ má spojitou derivaci a

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1.$$

Délka křivky je vyjádřena integrálem

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Absolutního minima nabude délka na úsečce určené rovnicí

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (x_0 \leqq x \leqq x_1).$$

Poznámka. Na tomto příkladě vidíme, jak je omezení třídy přípustných čar na čáry s tečnou spojitě se měnící umělé. Je zřejmé, že úsečka bude udávat absolutní minimum délky, jestliže za třídu přípustných čar vezmeme soustavu čar, spojujících body A, B a skládajících se z nekonečného počtu oblouků se spojitě se měnící tečnou. Ba více, pro každou čáru γ lze definovat délku jako limitu délek polygonů do ní vepsaných, jejichž strany konvergují k nule. Tato limita, konečná nebo nekonečná, která je nezávislá na volbě posloupnosti polygonů, existuje pro každou křivku. Mohli bychom v dané úloze vzít za třídu přípustných čar soustavu všech spojitých křivek spojujících body A, B; úsečka by jako dříve minimalisovala délku.

Relativní extrém. Dříve než budeme definovat relativní extrém, objasníme tento pojem názorným příkladem. Mezi dvěma body na povrchu zemském leží vysoká a srázná hora; chceme spojit tyto dva body cestou nejkratší délky. Proto, abychom zmenšili délku cesty, je výhodné objet při jízdě z jednoho bodu do druhého vrchol hory; jak zprava, tak zleva najdeme mezi cestami, po nichž vrchol objíždíme, cestu nejkratší. Je-li nejkratší cesta zprava menší než nejkratší cesta zleva, pak je také absolutním minimem délek čar na zemském povrchu, které spojují tyto body. Nejkratší cesta zleva nepovede k absolutnímu minimu, avšak v každém případě bude nejkratší ze všech ostatních jí blízkých cest, spojujících tyto body a obcházejících spolu s ní vrchol hory zleva.

Zavedeme nyní několik pojmů nutných k přesné definici relativního extrému.

Vzdálenost mezi křivkami. Buďte dány dvě křivky, definované rovnicemi

$$\begin{matrix} y = y(x), \\ y = y_1(x) \end{matrix} \quad (a \leqq x \leqq b).$$

Vzdáleností mezi těmito křivkami nazveme nezáporné číslo r rovné maximu $|y_1(x) - y(x)|$ na úsečce $a \leqq x \leqq b$. Tuto vzdálenost budeme označovat takto:

$$r = r[y_1(x), y(x)].$$

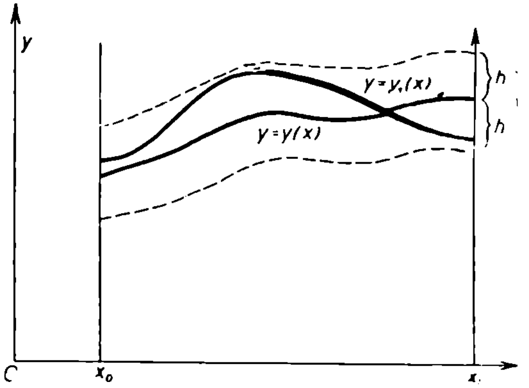
Sestrojme kolem křivky $y = y(x)$ pás „šířky“ $2h$ (obr. 6) tak, že od každého bodu křivky naneseme na obě strany ve směru pořadnice úsečky délky h.

Vzdáleností křivky $y = y_1(x)$ od křivky $y = y(x)$ pak bude polovina nejmenší „šířky" takového pásu kolem $y = y(x)$, který obsahuje křivku $y = y_1(x)$.

Budiž dána posloupnost křivek:

$$y = y_1(x), y = y_2(x), \ldots, y = y_n(x), \ldots,$$

jejichž vzdálenosti od křivky $y = y(x)$ konvergují k nule. To znamená, že posloupnost konverguje stejnoměrně k $y(x)$. Vzdálenost dvou křivek rovná nule je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby tyto křivky byly identické.



Obr. 6.

Ve funkci čáry

$$J(y) = \int F(x, y, y')\,dx$$

závisí integrovaný výraz nejenom na hodnotě funkce, nýbrž i na její derivaci. Proto hodnoty funkcionálu

$$J(y) = \int F(x, y, y')\,dx$$

pro dvě čáry, mezi nimiž je vzdálenost velmi malá, mohou se od sebe značně lišit. Na příklad křivka

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

leží ve vzdálenosti $\frac{1}{n}$ od úsečky osy Ox: $y = 0$. Při tom však integrál $\int_0^\pi y'^2\,dx$ je pro tyto čáry roven $\frac{\pi}{2}$, resp. 0, a tento rozdíl zůstává nezměněn, když $n \to \infty$, t. j. když vzdálenosti mezi nimi konvergují k nule.

Tedy při nekonečně malé vzdálenosti dvou křivek y a y_1 hodnoty funkcionálů $J(y)$ a $J(y_1)$ se mohou lišit o konečnou hodnotu — funkcionál je „nespojitý". K odvození podmínek pro extrém je však zvláště důležitá vlastnost spojitosti. Proto je nutno shora zavedený pojem vzdálenosti doplnit podstatně tak, aby se pro dvě „blízké" křivky vyšetřované funkcionály málo lišily. Proto zobecníme pojem vzdálenosti takto:

Definice. *Vzdáleností n-tého řádu křivek $y(x)$ a $y_1(x)$, které mají spojité derivace do n-tého řádu včetně, se nazývá největší z maxim výrazů:*

$$|y_1(x) - y(x)|,\ |y_1'(x) - y'(x)|,\ \ldots$$
$$\ldots,\ |y_1^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)|$$

v intervalu $a \leqq x \leqq b$.

Shora definovaný pojem vzdálenosti bude podle naší nové definice vzdáleností nultého řádu.

Při vyšetřování funkcionálů

$$\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

hraje zvláštní roli vzdálenost prvního řádu. Při spojitosti funkce F vzhledem k y a y' má dostatečně malá vzdálenost prvního řádu mezi dvěma křivkami $y = y(x)$ a $y = y_1(x)$ za následek libovolně malou absolutní hodnotu rozdílu funkcionálů těchto funkcí. Proto ve většině případů budeme pod vzdáleností mezi křivkami rozumět jejich vzdálenost prvního řádu.

Okolí křivky. Nazveme *ε-okolím n-tého řádu křivky*

$$y = y(x) \quad (a \leqq x \leqq b)$$

soustavu křivek

$$y = y_1(x),$$

jejichž vzdálenost n-tého řádu od křivky $y = y(x)$ je menší než ε.

Tedy ε-okolí nultého řádu křivky $y = y(x)$ se skládá z křivek, ležících v pásu šířky 2ε kolem křivky $y(x)$.

Silný a slabý extrém. Říkáme, že funkcionál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

nabývá na křivce γ_0 silného relativního maxima, jestliže pro všechny přípustné čáry γ, ležící v některém ε-okolí nultého řádu křivky γ_0, platí

$$J(\gamma) \leqq J(\gamma_0).$$

Analogicky se definuje relativní silné minimum.

Říkáme, že funkcionál J nabývá na křivce γ_0 slabého maxima, jestliže pro všechny přípustné čáry γ, ležící v některém ε-okolí prvního řádu křivky γ_0, platí

$$J(\gamma) \leqq J(\gamma_0).$$

Každý absolutní extrém je současně slabým i silným relativním extrémem. Každý silný extrém je současně i slabým, avšak obráceně to obecně neplatí.

Příklad 1. Budiž

$$J = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2)\, dx.$$

Úsečka osy Ox vede k slabému minimu J.

Pro $y = 0$ je $J = 0$. Na druhé straně však pro křivky, které leží v ε-okolí prvního řádu této úsečky, je $|y'| < 1$, je-li ε libovolné kladné číslo menší než jedna, a integrovaný výraz je tudíž nezáporný. Je-li $y \not\equiv 0$, J je ovšem kladné a je rovno nule jenom pro $y \equiv 0$, t. j. pro naši úsečku. To znamená, že na ní nabývá J slabého minima.

Silného minima J nenabývá. Stačí položit

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx;$$

pak

$$J = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx\,(1 - n\cos^2 nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx\, dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 2nx\, dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

a pro n dostatečně velké je pro naše křivky $J < 0$. Na druhé straně leží všechny tyto křivky pro n dostatečně velké v libovolně malém okolí nultého řádu křivky $y = 0$. Tedy J nenabývá pro $y = 0$ silného minima.

Příklad 2. Uvedeme ještě jeden příklad, který zvláště názorně ilustruje odlišný charakter slabého a silného extrému.

Po jezeře pluje loďka poháněná plachtou a vesly z bodu A do bodu B, při čemž rychlost větru má směr od B k A. Předpokládejme kromě toho, že pohon plachtou bez vesel může dát lodi rychlost $v = v(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá směr rychlosti se směrem větru, při čemž

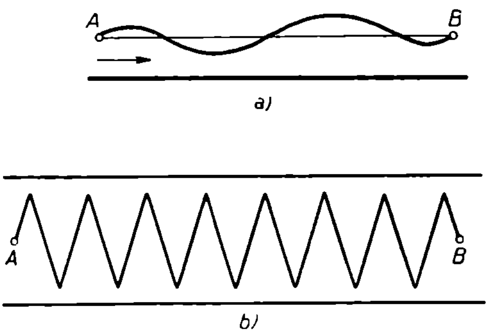
$$v(\alpha) \geqq 0 \text{ pro } 0 < \alpha < \pi - \alpha_0, \ \pi - \alpha_0 > \frac{\pi}{2},$$

a pro $\alpha > \pi - \alpha_0$ je pohyb nemožný (je nemožné plout bez vesel ve směru ležícím přímo proti větru, $\alpha = \pi$, a ve směru tomuto směru dostatečně blízkému):

$$v(\alpha) = 0 \text{ pro } \pi \geqq \alpha \geqq \pi - \alpha_0.$$

Chceme určit dráhu loďky tak, aby loďka doplula z A do B za nejkratší dobu.

Při pohybu loďky po přímce AB bude potřebný čas T_0 roven poměru vzdálenosti mezi A a B k rychlosti loďky, když se jenom vesluje. Přechod od pohybu po přímce k pohybu po křivce k přímce dostatečně blízké (ve smyslu blízkosti prvního řádu, obr. 7a) potřebný čas jenom zvětší, neboť plachta nebude v činnosti a délka dráhy se zvětší. Úsečka AB dá slabé minimum. Jestliže nyní předpokládáme, že je $\pi - \alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ a že rychlost, jíž dosáhneme jenom veslováním, je dostatečně malá, pak je zřejmé, že cestovní čas značně zkrátíme, budeme-li plout po lomené čáře (obr. 7b).



Obr. 7.

Poznámka. V první kapitole jsme viděli, že každá křivka, dávající extrém integrálu (1), vyhovuje Eulerově rovnici (7), § 2. Je tedy možno říci, že identické anulování levé strany rovnice (7), § 2, je nutnou podmínkou pro to, aby funkce $y = y(x)$ dávala extrém integrálu (1). V dalším se budeme zabývat jinými nutnými podmínkami extrému a v posledních kapitolách knihy budeme vyšetřovat také i postačující podmínky. Je důležité ihned připomenout, že jak nutné, tak postačující podmínky mohou být odlišné pro případy absolutního nebo relativního silného a slabého extrému. Poněvadž však každý absolutní extrém je současně silným relativním extrémem a ten je zase také slabým extrémem, jsou nutné podmínky pro slabý extrém nutnými i pro silný a absolutní extrém. Obráceně nutné podmínky pro silný a pro absolutní extrém nebudou obecně platit pro slabý extrém. Pro postačující podmínky budou vztahy obrácené: na příklad postačující podmínky absolutního extrému budou postačujícími podmínkami pro kterýkoli z relativních extrémů, ale obráceně to platit obecně nemusí.

Jak je známo, každá spojitá funkce definovaná v uzavřeném intervalu nabývá v něm svého absolutního minima.

Ve variačním počtu nemusí funkcionály nabývat svého extrému na třídě přípustných čar, t. j. jestliže infimum hodnot funkcionálu na třídě přípustných čar je rovno c, pak nemusí existovat taková přípustná křivka γ, že $J(\gamma) = c$.

Na příklad v § 17 budeme vyšetřovat úlohu, ve které funkcionál nenabude minima na křivkách se spojitě se měnící tečnou, ale nabude ho na křivkách po částech hladkých. Dokonce je v některých případech snadné ukázat příklady funkcionálů, definovaných na jistých třídách funkcí, které nenabývají extrému ani na jednom přirozeném rozšíření třídy přípustných čar.

Je přirozené, že se objevila řada prací o vyšetřování existence absolutního minima funkcionálů variačního počtu a o charakterisování skupin úloh se zajištěnou existencí extrémů. Podstatných výsledků v tomto směru bylo dosaženo v r. 1930 sovětským matematikem N. N. Bogoljubovem.

V letech 1948—1950 dosáhl A. G. Sigalov znamenitých úspěchů v řešení úlohy o existenci absolutního minima pro množné integrály.

§ 8. Variace nejjednoduššího funkcionálu.

Diferenciál. Dříve než přistoupíme k výkladu Lagrangeovy methody ve variačním počtu, připomeneme čtenáři definici diferenciálu funkce mnoha proměnných.

Budiž dána funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu.

Máme

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} h_i + \varepsilon,$$

kde ε je veličina nekonečně malá vyššího řádu než největší z absolutních hodnot přírůstků $|h_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (nebo než

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}).$$

Výraz $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ je lineární funkce přírůstků $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Tento výraz se nazývá diferenciálem funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Lze ho nazvat hlavní lineární částí přírůstku funkce (hlavní v tom smyslu, že přírůstek f je roven diferenciálu až na veličinu nekonečně malou vyššího řádu než největší z $|h_i|$).

Diferenciál je možno definovat ještě jinak. Spojme „body" n-rozměrného prostoru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n)$ „přímkou", skládající se z bodů $(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n)$, kde $-\infty < t < +\infty$. Funkce f se na této přímce změní ve funkci parametru t:

$$\Phi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n).$$

Máme

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n)}{\partial x_i} h_i.$$

Proto je

$$\Phi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} h_i.$$

Je tedy diferenciál $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ derivace podle t pro $t = 0$ funkce $\Phi(t)$.

Poznámka. V našem případě se obě definice diferenciálu shodují. V obecnějším případě tyto definice ekvivalentní nejsou.

Budiž $a(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ hlavní lineární část přírůstku $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t. j. $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a(h_1, h_2, \ldots, h_n) + \varepsilon$, kde ε je nekonečně malé vyššího řádu než největší z $|h_i|$.

Potom je

$$f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a(th_1, th_2, \ldots, th_n) + \varepsilon_t\,^{1})$$

(kde ε_t je veličina nekonečně malá řádu vyššího než největší z $|th_i| = |t|\,|h_i|$). Tedy pro pevná h_i a pro $t \to 0$ dostaneme: ε_t je veličina nekonečně malá vyššího řádu ve srovnání s t, protože z toho, že $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varepsilon_t}{|t|\,|h_i|} = 0$, plyne také pro pevné h_i, že $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varepsilon_t}{t} = 0$. Z toho

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big[f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Big] =$$
$$= a(h_1, h_2, \ldots, h_n) + \lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon_t}{t} = a(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

neboli (podle definice derivace podle t)

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) \right]_{t=0} = a(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

t. j. diferenciál v prvním smyslu bude vždy diferenciálem také v druhém smyslu. Obrácené tvrzení neplatí. Budiž na příklad $f = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Potom pro $x = 0$, $y = 0$ a pro libovolná h_1, h_2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt[3]{(th_1)^3 + (th_2)^3} = \sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3};$$

tato veličina není lineární ani vzhledem k h_1, ani vzhledem k h_2, t. j. není diferenciálem v prvním smyslu.

Odvození variace. Mějme funkcionál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kde F má spojité derivace druhého řádu podle všech tří argumentů a $y = y(x)$ náleží do třídy C_1 funkcí, majících spojitou derivaci. Buďte $y(x)$ a $\overline{y}(x)$ dvě funkce z třídy C_1. Označme jejich rozdíl $\eta(x) = \overline{y}(x) - y(x)$; zřejmě $\eta(x)$ má všude spojitou derivaci

$$\eta'(x) = \overline{y}'(x) - y'(x).$$

[1]) Násobíme-li všechny argumenty parametrem t, znásobíme jím i hodnotu lineární funkce a.

Sestavíme rozdíl

$$J(\overline{y}) - J(y) = \int_a^b [F(x, y + \eta, y' + \eta') - F(x, y, y')]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [\overline{F}_y \eta(x) + \overline{F}_{y'} \eta'(x)]\,\mathrm{d}x,$$

kde pruh nad derivacemi F_y a $F_{y'}$ značí, že jsou vzaty pro hodnoty argumentů $x, \tilde{y}, \tilde{y}$, kde $\tilde{y}, \tilde{y}'$ leží mezi $\overline{y}(x)$ a $y(x)'$ resp. $y'(x)$ a $\overline{y}'(x)$. Pro stručnost budeme označovat F_y a $F_{y'}$ hodnoty těchto funkcí pro argumenty $x, y(x), y'(x)$. Ježto pro $a \leqq x \leqq b$ je

$$|\tilde{y} - y| < |\eta(x)| \leqq r(y, \overline{y}),$$

$$|\tilde{y}' - y'| < |\eta'(x)| \leqq r(y, \overline{y}),$$

kde $r(y, \overline{y})$ je vzdálenost prvního řádu funkcí $y(x)$ a $\overline{y}(x)$, pak vzhledem k spojitosti $F_y(x, y, y')$ a $F_{y'}(x, y, y')$ podle všech tří argumentů, ať je číslo $\varepsilon > 0$ jakékoliv, pro dostatečně malé $r(y, \overline{y})$ budeme mít

$$|\overline{F}_y - F_y| < \varepsilon, \ |\overline{F}_{y'} - F_{y'}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Je tedy

$$J(\overline{y}) - J(y) = \int_a^b [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)]\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b [(\overline{F}_y - F_y)\eta(x) + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\eta'(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)]\,\mathrm{d}x + \varepsilon_1 r(y, y), \tag{3}$$

kde ε_1 spolu s $r(y, \overline{y})$ konverguje podle nerovností (2) k nule. Z toho plyne, že výraz $\int_a^b (F_y \eta + F_{y'}\, \eta')\,\mathrm{d}x$, rovný přírůstku funkcionálu až na veličinu řádu vyššího než $r(y, \overline{y})$, je hlavní část přírůstku funkcionálu J. Tento výraz se nazývá *variací* funkcionálu J a značí se δJ:

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) +$$

$$+ F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Z definice variace plyne, že je funkcionálem závislým na počáteční funkci $y(x)$ a na přírůstku $\eta(x)$:

$$\delta J = K(y(x), \eta(x)),$$

při čemž na přírůstku $\eta(x)$ závisí variace δJ lineárně.

Tedy *variace je hlavní lineární část přírůstku funkcionálu.* Tato definice variace je obdobou první definice diferenciálu funkce mnoha proměnných.

Je možné zavést jinou definici variace, odpovídající druhé definici diferenciálu.

Vyšetřujme jednoparametrovou třídu funkcí $y(x) + t\eta(x)$. Pro funkce této třídy, pokud jsou $y(x)$ a $\eta(x)$ pevné, se změní funkcionál $J(y + t\eta)$ ve funkci argumentu t:

$$\Phi(t) = J(y + t\eta)$$

Použijme formule (3) a zaměňme $\eta(x)$ funkcí $t\eta(x)$:

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,\mathrm{d}x + \varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t = \varepsilon_1 r(y, y + t\eta) = \varepsilon_1|t|r(y, y + \eta)$ je veličina nekonečně malá vyššího řádu než vzdálenost mezi funkcemi $y(x)$ a $y(x) + t\eta(x)$ (neboli, pokud jsou $y(x)$ a $\eta(x)$ pevné, než t). Z toho plyne

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon_t}{t} = 0.$$

Proto je

$$\Phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{J(y + t\eta) - J(y)}{t} =$$

$$= \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_t}{t} = \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Je tedy variace derivace podle t pro $t = 0$ funkce

$$\Phi(t) = J(y + t\eta).$$

To by bylo možno odvodit i přímo diferencováním za integračním znamením

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_a^b F(x, y + t\eta, y' + t\eta')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b [F_y(x, y + t\eta, y' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y + t\eta, \eta' + ty')\eta']\,\mathrm{d}x.$$

Je tedy (pro $t = 0$)

$$\Phi'(0) = \int\limits_a^b [F_y(x, y, y')\eta + F_{y'}(x, y, y')\eta']\,\mathrm{d}x.$$

Tak jsme došli k jiné definici variace, totiž jako derivace podle parametru t pro $t = 0$ funkce $J(y + t\eta)$.

Pro funkcionály právě vyšetřovaného typu jsou obě definice ekvivalentní. V obecném případě však je druhá definice obecnější (jako v případě obyčejných funkcí).

Variace funkce. Ve výrazu pro úplný diferenciál funkce n proměnných se hodnoty přírůstků nezávisle proměnných nazývaly diferenciály těchto proměnných. Analogicky ve výrazu pro variaci δJ funkcionálu $J(y)$ se přírůstek $\eta(x)$ funkce $y(x)$ nazývá variací $y(x)$ a značí se

$$\delta y(x) = \eta(x) = \bar{y}(x) - y(x).$$

Námi zavedeného pojmu variace lze, jak uvidíme v další kapitole, použít k řešení celé řady extremálních úloh. Methoda řešení všech podobných úloh je založena na tom, že variace funkcionálu pro funkci vedoucí k extrému tohoto funkcionálu je identicky rovna nule.

Nutná podmínka extrému. Odvodíme teď nutnou podmínku pro to, aby křivka $y = y(x)$ ze třídy přípustných čar dávala v nejjednodušší úloze extrém funkcionálu $J(y)$. Odvodíme nutnou podmínku slabého minima (maxima), ale ta bude rovněž nutnou podmínkou i silného minima (maxima). Z definice slabého relativního extrému plyne:

Jestliže $y = y(x)$ realisuje slabé minimum funkcionálu $J(y)$, pak existuje takové ε-okolí prvního řádu křivky $y = y(x)$, že pro každou přípustnou křivku $y = \bar{y}(x)$ z tohoto okolí přírůstek

$$J(\bar{y}) - J(y) \geqq 0. \tag{6}$$

Obráceně *v případě maxima pro všechny přípustné křivky* $y = y(x)$ *v některém* ε*-okolí prvního řádu dané křivky* $y = y(x)$

$$J(\overline{y}) - J(y) \leqq 0. \tag{7}$$

Je tedy podmínkou extrému, aby přírůstek

$$\Delta J = J(\overline{y}) - J(y)$$

měl konstantní znamení.

Dokážeme nyní jednoduchou pomocnou větu, které budeme v budoucnu velmi často používat.

Pomocná věta. *Nechť ve výrazu*

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha$$

je d konstantní, při čemž pro α konvergující k nule jakkoli, ε_α konverguje k nule spolu s α tak, že $\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \to 0$ (t. j. ε_α je veličina nekonečně malá řádu vyššího než α); *jestliže pak pro všechna dostatečně malá α máme*

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha \geqq 0$$

nebo jestliže pro všechna dostatečně malá α máme

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha \leqq 0,$$

pak je $d = 0$.

Vskutku, budiž $d \neq 0$, na příklad $d > 0$. Potom, ježto podle předpokladu $\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}$ konverguje k nule, bude výraz $d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}$ pro libovolná dostatečně malá α rovněž větší než nula. Proto je

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha\left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}\right) > 0 \text{ pro } \alpha > 0,$$

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha\left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}\right) < 0 \text{ pro } \alpha < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem. Je tedy $d = 0$.

Na základě této věty dokážeme další větu, která udává základní nutnou podmínku pro existenci extrému.

Věta I. *Pro to, aby funkce $y(x)$ třídy C_1 minimalisovala (maximaliso-*

vala) funkcionál $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ *za podmínek* $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, *je nutné, aby variace*

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\,dx$$

byla rovna nule pro libovolnou funkci $\eta(x)$ *třídy* C_1, *pro kterou je* $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Abychom tuto větu dokázali, vyšetřujme funkci $y = y(x) + t\eta(x)$, kde $y(x)$ vede k extrému funkcionálu $J(y)$, t je libovolný parametr a $\eta(x)$ je libovolná funkce třídy C_1, pro niž $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Použijeme-li formulí (3) a (4) (když v (3) zaměníme $\eta(x)$ funkcí $t\eta(x)$), můžeme napsat

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\delta J(y) + \varepsilon_1|t|r(y, y + \eta). \tag{8}$$

Pro pevnou funkci $\eta(x)$ a pro t konvergující k nule, konverguje ε_1 rovněž k nule. Jestliže nyní $y(x)$ minimalisuje $J(y)$, pak platí pro každé kladné nebo záporné $t \to 0$ nerovnost (6). Položíme-li $\delta J(y) = d$,

$$t = \alpha, \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_1|t|r(y, y + \eta),$$

zjistíme na základě pomocné věty, že

$$\delta J(y(x)) = 0. \tag{9}$$

V případě maxima je splněna nerovnost (7), takže z pomocné věty najdeme zcela stejným způsobem vztah (9). Tím je věta dokázána.

Tuto větu lze dokázat, vyjdeme-li z druhé definice variace. Na třídě funkcí $y(x) + t\eta(x)$ se stane funkcionál J funkcí parametru t:

$$J(y + t\eta) = \Phi(t).$$

Tato funkce nabývá minima pro $t = 0$, t. j. když funkce $y(x) + t\eta(x)$ se právě rovná funkci $y(x)$ minimalisující J. Proto se musí pro $t = 0$ $\Phi'(t)$ rovnat nule: $\Phi'(0) = 0$. Avšak $\Phi'(0) = \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,dx$, čímž je věta znovu dokázána.

Transformace variace. Za integračním znamením stojí ve výrazu pro první variaci lineární funkce proměnných $\delta y = \eta$ a $\delta y' = \eta'$. Integrací per partes lze variaci transformovat tak, aby za integračním znamením stála lineární funkce závislá jenom na δy (tak zvaná Lagrangeova transformace) nebo závislá jenom na $\delta y'$ (Du Bois-Reymondova transformace).

Lagrangeova transformace se provede tímto způsobem:

Integrací per partes dostaneme

$$\int_a^b F_{y'}\,\delta y'\,\mathrm{d}x = [F_{y'}\,\delta y]_b^a - \int_a^b \delta y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,F_{y'}\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme-li, že v bodech a a b je variace δy rovna nule, pak

$$\int_a^b F_{y'}\,\delta y'\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \delta y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,F_{y'}\,\mathrm{d}x.$$

Je tedy

$$\delta J(y) = \int_a^b (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,\mathrm{d}x = \int_a^b (F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})\,\delta y\,\mathrm{d}x.$$

Toto vyjádření jsme obdrželi již v § 2 (formule (14)), když jsme vyšetřovali funkcionál $J(y)$ jako limitu funkce polygonu a $\delta J(y)$ jako limitu diferenciálu této funkce.

Připomeňme, že jsme o funkci $y(x)$ předpokládali, že má spojitou derivaci. Avšak y' jsme nepovažovali za diferencovatelnou funkci. Proto je Lagrangeova transformace a priori nepřípustná.

Aby odstranil další předpoklad o existenci druhé derivace y'', navrhl Du Bois-Reymond jinou transformaci variace. Označíme-li totiž

$$\int_a^x F_y\,\mathrm{d}x = N(x),$$

máme

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\,\delta y + F_{y'}\,\delta y'\right]\mathrm{d}x.$$

Dále, integrujeme-li per partes:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\,\delta y\,\mathrm{d}x = [N\delta y]_a^b - \int_a^b N\delta y'\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme-li jako předtím, že δy v bodech a a b je rovno nule, dostaneme

$$\delta J = \int_a^b (F_y' - N)\delta y'\,\mathrm{d}x.$$

Tato transformace nevyžaduje dalších předpokladů o struktuře funkce $y(x)$.

§ 9. Základní pomocné věty variačního počtu.

Pomocná věta I (Lagrange). *Nechť $M(x)$ je spojitá funkce. Jestliže pro libovolnou funkci $\eta(x)$, která má spojitou derivaci a je rovna nule v bodech a a b, je*

$$\int_a^b M(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pak $M(x) = 0$ pro všechna x ($a \leqq x \leqq b$).

Nechť je totiž v některém bodě c ($a < c < b$) $M(c) \neq 0$, na příklad $M(c) > 0$. Vzhledem k spojitosti funkce $M(x)$ pro dostatečně velké n je možno utvořit interval $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$, ležící uvnitř intervalu $[a, b]$ a obsahující bod c, v němž je $M(x)$ větší než určité kladné číslo m. Definujeme nyní funkci $\eta_0(x)$ takto:

$$\eta_0\,x) = \begin{cases} \sin^2 [n(x - x_0)] \text{ v intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right] \\ 0 \qquad\qquad \text{vně intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right] \end{cases}$$

(viz obr. 8). Funkce $\eta_0(x)$ je spojitá, má spojitou derivaci a je kromě toho $\eta_0(b) = \eta_0(a) = 0$. Muselo by tedy být

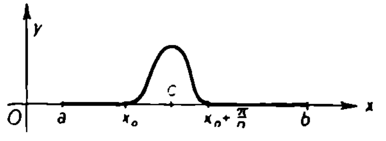
$$\int_a^b M(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

je však

$$\int_a^b M(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_0)]\,\mathrm{d}x >$$

$$> m\int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x-x_0)]\,\mathrm{d}x = \frac{\pi m}{2n} > 0.$$

Tudíž předpoklad: $M(x) \neq 0$ pro x z intervalu $[a, b]$ vede ke sporu.[2])



Obr. 8.

Tím, že aplikoval tuto pomocnou větu na variaci

$$\delta J = \int_a^b (F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})\,\delta y\,\mathrm{d}x,$$

která musí být v případě extrému rovna nule pro kteroukoli funkci δy mající shora uvedené vlastnosti, odvodil Lagrange Eulerovu rovnici:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0.$$

Proto musí této rovnici vyhovovat každá funkce $y = y(x)$, která dává extrém integrálu

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Křivky vyhovující Eulerově rovnici se nazývají *extremálami.*

Lagrangeovo odvození Eulerovy rovnice obsahovalo nepřesnost, na niž jsme upozornili při definici Lagrangeovy transformace.

Pomocná věta 2 (Du Bois-Reymond). *Je-li pro spojitou funkci $M(x)$ a pro libovolnou spojitou funkci $\eta(x)$ mající spojitou derivaci, při čemž*

---

[2]) Lagrangeova pomocná věta zůstane v platnosti, je-li funkce $\eta(x)$ v její formulaci libovolnou funkcí třídy $C_k(k \geq 1)$, která je spolu s derivacemi do $(k-1)$-tého řádu na hranici rovna nule. Je třeba jenom v definici funkce $\eta_0(x)$ v intervalu $\left[x_0, x_0+\frac{\pi}{n}\right]$ vzít $\sin^{2k}[n(x-x_0)]$.

$\eta(a) = \eta(b) = 0$, *integrál*

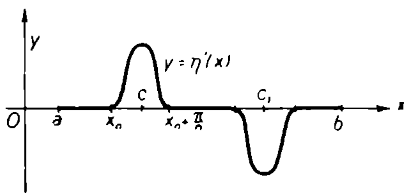
$$\int_a^b M(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pak je $M(x)$ v celém intervalu $[a, b]$ konstantní.

Není-li totiž $M(x)$ konstatní, pak existují v intervalu $[a, b]$ alespoň dva body c_1 a c_2, v nichž funkce $M(x)$ nabývá různých hodnot, na příklad $M(c_1) > M(c_2)$. Budiž d_1 a d_2 dvojice čísel, která splňuje nerovnosti

$$M(c_1) > d_1 > d_2 > M(c_2).$$

Pak lze sestrojit pro dostatečně velké n pár intervalů $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$, $\left[x_1, x_1 + \frac{\pi}{n}\right]$, ležících v intervalu $[a, b]$, jež se nepřekrývají a jsou takové, že v intervalu $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$ platí nerovnost $M(x) > d_1$ a v druhém ze zvolených intervalů platí nerovnost



Obr. 9.

$$M(x) < d_2.$$

Funkci $\eta'(x)$ definujeme takto (obr. 9):

$$\eta'(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x - x_0)] \text{ v intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right], \\ -\sin^2[n(x - x_1)] \text{ v intervalu } \left[x_1, x_1 + \frac{\pi}{n}\right], \\ 0 \text{ ve všech ostatních bodech intervalu } [a, b]. \end{cases}$$

Funkce $\eta(x) = \int_a^x \eta'(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá, má spojitou derivaci $\eta'(x)$ a kromě toho je $\eta(a) = 0$,

$$\eta(b) = \int_a^b \eta'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2 [n(x - x_0)]\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} \sin^2 [n(x - x_1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Podle předpokladu má být

$$\int_{+a}^{-b} M(x)\,\eta'(x)\,dx = 0,$$

ale na druhé straně

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_0)]\,dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_1)]\,dx > (d_1-d_2)\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 nx\,dx > 0.$$

Vede tedy předpoklad, že $M(x)$ není konstatní, ke sporu.

Úplné odvození Eulerovy rovnice. Z Du Bois-Reymondovy pomocné věty dostaneme snadno úplné odvození Eulerovy rovnice. Budiž dána třída přípustných čar $y = y(x)$, kde $y(x)$ je funkce, která má spojitou derivaci, při čemž všechny funkce $y(x)$ nabývají pro $x = a$ a $x = b$ předepsaných hodnot y_0 a y_1. Na této třídě je definován funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx,$$

kde F je spojitá funkce všech argumentů se spojitými parciálními derivacemi prvních dvou řádů. Předpokládejme, že funkce $y = y(x)$ ze třídy přípustných čar dává relativní slabý extrém funkcionálu J. V tomto případě je

$$\delta J = \int_a^b (-N + F_{y'})\delta y'\,dx = 0$$

pro každou funkci δy, která má spojitou derivaci a je rovna nule v bodech a a b. Na základě Du Bois-Reymondovy pomocné věty dostaneme

$$F_{y'} - N = F_{y'} - \int_a^x F_y\,dx = C$$

(C je konstanta). To je tak zvaný *integrální tvar Eulerovy rovnice.*

Funkce $N(x) = \int\limits_a^x F_y \, dx$ je spojitá a má spojitou derivaci $N'(x) = F_y$.

Tedy spojitou derivaci podle x má také $F_{y'} = C + N(x)$:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = N'(x) = F_y.$$

Tak jsme dostali Eulerovu rovnici, při čemž jsme dokázali diferencovatelnost funkce $F_{y'}$.

Budiž nyní v některém bodě (x, y) křivky $y = y(x)$

$$F_{y'y'} \neq 0.$$

Při přechodu od bodu této křivky se souřadnicí x k bodu se souřadnicí $x + \Delta x$ zvětší se funkce $y(x)$ a $y'(x)$ o přírůstky Δy a $\Delta y'$, které vzhledem ke spojitosti funkcí $y(x)$ a $y'(x)$ konvergují k nule spolu s Δx. Máme

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\overline{F}_{xy'} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{yy'} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right],$$

kde druhé derivace $\overline{F}_{xy'}$, $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$ s pruhy nahoře označují hodnoty těchto funkcí pro argumenty

$$x + \Theta_1 \Delta x, \; y + \Theta_2 \Delta y, \; y' + \Theta_3 \Delta y' \quad (|\Theta_i| < 1).$$

Pro $\Delta x \to 0$ tyto výrazy konvergují k $F_{xy'}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$ a je tedy

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} F_{y'y'};$$

z toho

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'} - F_{xy'} - F_{yy'} y'}{F_{y'y'}}.$$

Tedy $y''(x)$ existuje v každém bodě křivky $y = y(x)$ dávající extrém, v němž je $F_{y'y'} \neq 0$.

Body extremály $y = y(x)$, v nichž je $F_{y'y'} \neq 0$, se nazývají *regulární*.

Nyní můžeme zformulovat námi dokázanou větu zcela úplně.

Věta 2. *Budiž funkce $F(x, y, y')$ spojitá spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu včetně pro $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolná y a y'. Dává-li křivka $y = y(x)$ třídy C_1 relativní slabý extrém integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

pak funkce $y(x)$ vyhovuje Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

a $y''(x)$ existuje a je spojitá pro všechna x, pro něž je $F_{y'y'} \neq 0$.

Tak jsme nejenom odvodili Eulerovu rovnici, nýbrž jsme i dokázali (což jsme předtím nepředpokládali) existenci druhé derivace $y''(x)$ v každém regulárním bodě křivky, která dává extrém.

§ 10. Variace v bodě.

Pojem variace je bezprostředním zobecněním pojmu úplného diferenciálu funkce více proměnných. Lze také přenést (v jistém smyslu) na případ funkcionálů pojmy parciální derivace a parciálního diferenciálu.

Vyšetřujme v rovině soustavu polygonů Π_n s vrcholy $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, při čemž jsou úsečky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrcholů pevné a jejich pořadnice $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnné. Každý polygon je určen soustavou n hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pořadnic jeho vrcholů, každé soustavě n čísel odpovídá pak polygon Π_n, jehož vrcholy mají tato čísla za své pořadnice. Proto lze funkci n proměnných považovat za funkci polygonu Π_n:

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \psi(\Pi_n).$$

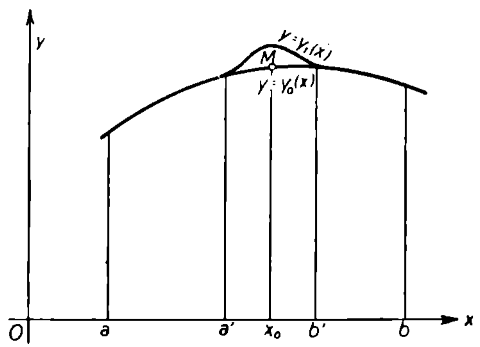
Nechť hodnota proměnné y se zvětší o Δy a všechny ostatní hodnoty proměnných $y_j (j \neq i)$ zůstanou beze změny; geometricky to znamená, že vrchol A_i polygonu Π_n se posune o Δy_i rovnoběžně s osou Oy a všechny ostatní vrcholy zůstanou beze změny; polygon Π_n přejde v polygon $\overline{\Pi}_n$. Potom je

$$\psi(\overline{\Pi}_n) - \psi(\Pi_n) = \frac{\partial\psi(\Pi_n)}{\partial y_i}\Delta y_i + \varepsilon,$$

kde ε je veličina nekonečně malá vyššího řádu než Δy_i. Ale první člen pravé strany této rovnosti $\dfrac{\partial \psi(\Pi_n)}{\partial y_i} \Delta y_i$ je parciální diferenciál funkce ψ, a

$$\frac{\partial \psi(\Pi_n)}{\partial y_i} = \lim_{\Delta y_i \to 0} \frac{\psi(\overline{\Pi}_n) - \psi(\Pi_n)}{\Delta y_i}$$

je parciální derivace. Při přechodu od polygonů ke spojitým čarám a od funkcí polygonu k funkcím čáry (funkcionálům) se nedají operace parciální diferenciace bezprostředně zobecnit: u spojité křivky nelze změnit pořadnici jenom jednoho jejího bodu. Avšak podle Volterrovy myšlenky je možno v jistém smyslu přenést operace parciální diferenciace na případ funkcionálů. Vyšetřujme soustavu křivek $y = y(x)$ třídy C_1, definovaných v intervalu $a \leqq x \leqq b$. Zvolme jednu z těchto křivek $y = y_0(x)$ a bod M na této křivce o souřadnici x_0, $a < x_0 < b$.



Obr. 10.

Zvolme nyní funkci $\delta y(x)$ třídy C_1, která je všude rovna nule až na nevelký interval (a', b') obsahující x_0. Předpokládejme pro jednoduchost, že $\delta y(x)$ v tomto intervalu nemění znamení. Budiž kromě toho $y_1(x) = y_0(x) + \delta y(x)$ (obr. 10). Křivky $y = y_0(x)$ a $y = y_1(x)$ spolu všude souhlasí až na okolí bodu M. Obsah plošky omezené těmito křivkami označme

$$\sigma = \int_a^b \delta y \, dx.$$

Vyšetřujme funkcionál $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$, kde y je libovolná křivka třídy C_2. Potom je

$$J(y_1) - J(y_0) = \int_{a'}^{b'} (\overline{F}_y \delta y + \overline{F}_{y'} \delta y') dx = \int_{a'}^{b'} (\overline{F}_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \, \delta y \, dx,$$

kde $\overline{F}_y$, $\overline{F}_{y'}$ jsou hodnoty funkcí F_y, $F_{y'}$ pro argumenty x, $y_0 + \Theta_1\delta y$, $y_0' + \Theta_2\delta y'$. V dalším budeme považovat F_y, $F_{y'}$ za hodnoty týchž funkcí pro argumenty x, y_0, y_0'. Podle věty o střední hodnotě je

$$J(y_1) - J(y_0) = \left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} \int_{a'}^{b'} \delta y \,\mathrm{d}x = \left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} \cdot \sigma; \tag{10}$$

zde x_1 znamená některý bod intervalu (a', b').

Nyní budeme zmenšovat plošku mezi našimi křivkami $y = y_0(x)$ a $y = y_1(x)$ do bodu M tak, že:

a) interval (a', b') konverguje k bodu x_0 (a tedy $x_1 \to x_0$);

b) vzdálenosti prvního řádu mezi křivkami y_0 a y_1, $r(y_1, y_0) \to 0$, t. j. δy a $\delta y'$ konvergují stejnoměrně k nule; tudíž $\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}$ konverguje stejnoměrně k $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$.

Za těchto předpokladů

$$\left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} \to \left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0}.$$

Formule (10) nabude tvaru

$$J(y_1) - J(y_0) = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0} + \varepsilon\right\}\sigma, \tag{10'}$$

kde ε konverguje k nule spolu se σ. Výraz $\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0}\sigma$ se nazývá variací $J(y)$ v bodě M o úsečce x_0 a označuje se takto:

$$\delta J(y_0)_M = \left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0}\sigma.$$

Variace v bodě je rovna přírůstku až na veličinu nekonečně malou vyššího řádu než σ.

Výraz

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{J(y_1) - J(y_0)}{\sigma}$$

se nazývá funkcionální derivací funkcionálu $J(y)$ v bodě M.

Variace a funkcionální derivace v bodě jsou obdobou parciálního diferenciálu a parciální derivace funkce více proměnných. Úplný diferenciál se rovnal součtu parciálních derivací, násobených přírůstky proměnných.

Variace $\delta J = \int\limits_a^b (F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'})\, \delta y \,\mathrm{d}x$ je rovna integrálu funkcionální derivace, násobené přírůstkem funkce.

Nutnou podmínkou extrému funkce více proměnných bylo, aby se všechny parciální derivace (parciální diferenciály) rovnaly nule.

Nutnou podmínkou extrému funkcionálu (Eulerova rovnice) je, aby se funkcionální derivace ve všech (vnitřních) bodech extremální křivky rovnaly nule (neboli, aby se variace ve všech vnitřních bodech rovnaly nule).

Použijeme-li pojmu variace v bodě, můžeme uvést ještě jeden důkaz Eulerovy rovnice. Přitom za obvyklých předpokladů o funkci $F(x, y, y')$ dokážeme, že když jakákoli spojitá křivka $y = y(x)$, i když nepatří do třídy C_2 (nebo C_1), vede ve srovnání ke všem sobě blízkým (ve smyslu vzdálenosti nultého řádu) křivkám třídy C_2, k extrému J, pak v každém bodě, který je vnitřním bodem intervalu spojitosti $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, vyhovuje funkce $y(x)$ Eulerově rovnici. Neboť nechť je pro bod x_0 tohoto intervalu

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_0} = d.$$

Variujeme-li funkci $y(x)$ v okolí bodu $x = x_0$ (t. j. změníme-li $y(x)$ o přírůstek $\delta y(x)$, různý od nuly jenom v tom okolí bodu x_0, kde je y'' spojitá), potom z formule (10') dostaneme

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_0} + \varepsilon\right\} \sigma,$$

t. j.

$$\Delta J = \sigma d + \varepsilon \sigma,$$

kde $\varepsilon \to 0$ pro $\sigma \to 0$. Protože $\sigma \to 0$ může mít jakékoliv znaménko, kdežto ΔJ musí být stále téhož znamení, zjistíme na základě pomocné věty se str. 51, že $d = 0$, t. j. v tomto bodě $y(x)$ vyhovuje Eulerově rovnici.[3])

Invariance Eulerových rovnic. Námi uvedené definice funkcionální derivace v bodě lze použít k tomu, abychom dostali jednu důležitou vlastnost extremál.

Zachováme-li předchozí označení, přejdeme od soustavy souřadnic (x, y) ke křivočaré soustavě souřadnic (u, v):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

kde funkce φ a ψ mají spojité parciální derivace druhého řádu. Křivky γ: $y = y(x)$ a γ_1: $y = y_1(x)$ budou v nových souřadnicích vyjádřeny rovnicemi

$$v = v(u), \; v = v_1(u).$$

Ploška, obsažená mezi oběma křivkami, bude mít v nových souřadnicích obsah σ_1. Nechť se tato ploška zmenšuje na bod. Potom poměr obsahů této plošky ve starých a nových souřadnicích $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ konverguje k funkcionálnímu determinantu

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix},$$

který je podle předpokladu různý od nuly. Funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

přejde ve funkcionál funkce $v(u)$:

$$J(y) = J_1(v) = \int_{a_1}^{b_1} F\left[\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}\right] . (\varphi_u + \varphi_v v')\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} F_1\,(u, v, v')\,\mathrm{d}u.$$

Je-li

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{J(y_1) - J(y)}{\sigma} = 0,$$

[3]) Tento důkaz by nebyl přesný, kdybychom vzali za třídu srovnávaných čar třídu C_1. Nebylo by těžké dokázat pomocí transformace Du Bois-Reymondovy, že udílí-li křivka $y = y(x)$ extrém integrálu J ve srovnání se všemi blízkými křivkami třídy C_1, pak v každém bodě této křivky, který je vnitřním bodem intervalu spojitosti $y(x)$ a $y'(x)$, je vyhověno Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

a pro $F_{y'y'} \neq 0$ existuje v tomto bodě spojitá druhá derivace $y''(x)$.

pak podle shora uvedených poznámek je

$$\lim_{\sigma_1 \to 0} \frac{J_1(v_1) - J_1(v)}{\sigma_1} = \lim_{\sigma \to 0} \left[\frac{J(y_1) - J(y)}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}\right] = 0.$$

Funkcionální derivace funkcionálu $J_1(v)$ v každém bodě křivky γ je rovna nule. Je-li tudíž γ extremálou pro funkcionál $J(y)$, pak γ je rovněž extremálou pro funkcionál $J_1(v)$. Vlastnost křivky být extremálou je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic.

Analyticky to znamená: je-li křivka $y = y(x)$ extremálou pro integrál $J[y(x)]$, pak každá jednoznačná větev křivky $v = v(u)$, definovaná rovnicí

$$\psi(u, v) = y[\varphi(u, v)], \tag{11}$$

bude extremálou pro integrál $J_1[v(u)]$; rovnice (11) bude integrálem Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0. \tag{12}$$

Bude-li obecný integrál Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

odpovídající funkcionálu $J[y(x)]$, *roven*

$$y = y(x, \alpha, \beta),$$

pak obecný integrál Eulerovy rovnice (12), *odpovídající funkcionálu* $J_1[v(u)]$, *bude*

$$\psi(u, v) = y[\varphi(u, v), \ \alpha, \beta].$$

Eulerova rovnice zůstane rovněž invariantní, vyjádříme-li křivky γ v parametrickém tvaru; v geometrických úlohách je tento způsob vyjádření čáry zvláště vhodný proto, že nám ihned umožňuje osvobodit se od podmínky, že každá křivka třídy přípustných čar protíná rovnoběžku s osou Oy v jednom bodě. Této otázce věnujeme později speciální kapitolu.

Uvedeme nyní dvě aplikace principu invariance Eulerovy rovnice.

Příklad 1. Při vyšetřování a integraci Eulerovy rovnice se často používá záměny proměnných. Užijeme-li principu invariance, můžeme tuto transformaci provést s výrazem za integračním znamením a pak pro nový integrál napsat Eulerovu rovnici — bude to původní rovnice vyjádřená v nových proměnných.

Jako příklad vyšetříme integrál

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} \, \mathrm{d}\varphi.$$

Soustava extremál je určena rovnicí

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0. \tag{13}$$

Při záměně proměnných

$$x = r \cos\varphi, \ y = r \sin\varphi$$

přejde integrovaný výraz ve výraz $\sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x$ a tudíž přejde při téže záměně proměnných rovnice (13) ve tvar

$$y'' = 0$$

s obecným integrálem

$$y = \alpha x + \beta.$$

Z toho bude obecný integrál rovnice (13)

$$r \sin\varphi = \alpha r \cos\varphi + \beta.$$

Příklad 2. Budiž dán funkcionál $J(\gamma)$ definovaný pro všechny jednoduché oblouky γ, které mají spojitě se měnící tečnu, a mějme pro čáry γ, vyjádřené v pravoúhlých souřadnicích rovnicí $y = y(x)$ (funkce $y(x)$ a její derivace $y'(x)$ jsou jednoznačné a spojité),

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x, y, y')\ \mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že mezi všemi čarami γ (spojujícími dva dané body A a B), na nichž je $J(\gamma)$ definován, existuje čára γ_0, dávající integrálu $J(\gamma)$ extrém, kterou nelze vyjádřit funkcí $y = y(x)$ třídy C_1 (existují tečny křivky γ_0 rovnoběžné s osou Oy; některé rovnoběžky s osou Oy protínají křivku γ_0 aspoň ve dvou bodech). Podle principu invariance snadno nahlédneme, že čára γ_0 bude integrální křivkou Eulerovy rovnice

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0. \tag{14}$$

Vskutku, vždycky můžeme zvolit křivočarou soustavu souřadnic (u, v) tak, aby v této soustavě souřadnic byla hledaná křivka vyjádřena funkcí $v = v(u)$ třídy C_1, pak ale bude γ_0 integrálem Eulerovy rovnice, napsané pro J v soustavě souřadnic (u, v); bude tudíž podle principu invariance Eulerovy rovnice křivka γ_0 rovněž integrálem rovnice (14).

Jako příklad na použití této poznámky můžeme uvést úlohu o čáře nejrychlejšího sestupu, když je počáteční rychlost rovna nule (§ 1). V této úloze má extremála, vyhovující počátečním podmínkám, v počátečním bodě tečnu rovnoběžnou s osou Oy, t. j. nepatří do třídy C_1.

§ 11. Druhá variace.

Druhá variace. U funkce jedné nebo více proměnných obracíme se při vyšetřování znaménka přírůstku funkce k druhému diferenciálu, jestliže se první diferenciál rovná identicky nule. Vyšetřování druhého diferenciálu nám dává další nutné podmínky pro maximum a minimum (speciálně umožňující rozlišovat případ maxima od případu minima) a rovněž postačující podmínky maxima nebo minima. Analogicky se postupuje v případě funkcionálů.

Budiž definován funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na křivkách třídy C_1 o pevných koncových bodech.

Rozvineme-li funkci F v Taylorovu řadu a zavedeme-li označení

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x),$$

kde $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, zjistíme, že

$$J(y_1) - J(y) = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b (\overline{F}_{yy} \delta y^2 + 2\overline{F}_{yy'} \delta y \delta y' + \overline{F}_{y'y'} \delta y'^2)\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

kde

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy}[x, y(x) + \Theta_1 \delta y(x), y'(x) + \Theta_2 \delta y'(x)]$$
$$(|\Theta_1| \leqq 1,\ |\Theta_2| \leqq 1),$$

a analogicky se definují $\overline{F}_{yy'}$ a $\overline{F}_{y'y'}$. Pro dostatečně malé $r(y_1, y)$ [$r(y_1, y)$ je vzdálenost prvního řádu] je

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy} + \varepsilon_1,\ \overline{F}_{yy'} = F_{yy'} + \varepsilon_2,\ \overline{F}_{y'y'} = F_{y'y'} + \varepsilon_3,$$

kde max $|\varepsilon_1|$, max $|\varepsilon_2|$, max $|\varepsilon_3|$ konvergují k nule spolu s $r(y, y_1)$. Je tudíž

$$J(y_1) - J(y) = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2)\,\mathrm{d}x + \varepsilon, \tag{15'}$$

kde

$$\varepsilon = \int_a^b (\varepsilon_1 \delta y^2 + 2\varepsilon_2 \delta y \delta y' + \varepsilon_3 \delta y'^2)\, \mathrm{d}x.$$

Protože je $|2\delta y \delta y'| \leqq \delta y^2 + \delta y'^2$, dostaneme

$$\left|\int_a^b 2\varepsilon_2 \delta y \delta y'\, \mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |\varepsilon_2|\, [\delta y^2 + \delta y'^2]\, \mathrm{d}x$$

a

$$|\varepsilon| \leqq \int_a^b (\varepsilon_4 \delta y^2 + \varepsilon_5 \delta y'^2)\, \mathrm{d}x,$$

kde ε_4 a ε_5 stejnoměrně konvergují k nule spolu s $r(y, y_1)$. Je však

$$|\delta y| \leqq r(y, y_1), \ |\delta y'| \leqq r(y, y_1),$$

a proto

$$|\varepsilon| \leqq (\max|\varepsilon_4| + \max|\varepsilon_5|)(b - a)\, r(y, y_1)^2.$$

Z toho plyne, že ε je veličina řádu vyššího než $r(y, y_1)^2$. Zanedbáme-li ji, zjistíme ze vztahu (15'), že je

$$J(y_1) - J(y) \doteq \delta J + \delta^2 J,$$

kde δJ je první variace funkcionálu J:

$$\delta J = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, \mathrm{d}x, \tag{16}$$

a výraz

$$\delta^2 J = \tfrac{1}{2} \int_a^b (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2)\, \mathrm{d}x, \tag{17}$$

analogický druhému diferenciálu, se nazývá *druhá variace* funkcionálu $J(y)$.

Legendreova podmínka. Nyní dokážeme, že *když křivka* $y = y(x)$ *třídy* C_1 *realisuje minimum* J (resp. maximum), *pak pro libovolnou funkci* $\eta(x)$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *třídy* C_1 *je druhá variace nezáporná* (resp. nekladná):

$$\delta^2 J \geqq 0 \ \text{(resp. } \delta^2 J \leqq 0).$$

Předpokládejme totiž opak, že pro některou funkci $\eta(x)$

$$\delta^2 J < 0.$$

Vyšetřujme soustavu funkcí $y(x) + t\eta(x)$. Potom

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\delta J + t^2\delta^2 J + \bar{\varepsilon} t^2\, r(y, \bar{y})^2,$$

$$|\bar{\varepsilon}| \leqq (\max|\bar{\varepsilon}_4| + \max|\bar{\varepsilon}_5|)\ (b - a),$$

kde δJ a $\delta^2 J$ jsou určeny nerovnostmi (16) a (17), $\bar{y} = y(x) + \eta(x)$ a $\bar{\varepsilon}$ konverguje k nule spolu s t. Ježto podle předpokladu křivka $y = y(x)$ minimalisuje J, je $\delta J = 0$, a tudíž znaménko pravé části pro dostatečně malá t souhlasí se znaménkem $\delta^2 J$, t. j. pro tytéž hodnoty

$$J(y + t\eta) - J(y) < 0,$$

což je ve sporu s podmínkou minima. Naše tvrzení je úplně dokázáno.

Vyšetřování druhé variace hraje základní úlohu při odvozování postačujících podmínek slabého extrému. Vyjádření druhé variace je možno poněkud zjednodušit.

Protože $$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad \text{a}$$

$$2\int_a^b F_{yy'}\delta y \delta y'\, \mathrm{d}x = \int_a^b F_{yy'}\, \mathrm{d}(\delta y^2) = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{yy'})\, \delta y^2\, \mathrm{d}x,$$

pak

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\, \mathrm{d}x,$$

kde

$$P = \tfrac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{yy'}\right),\ R = \tfrac{1}{2} F_{y'y'}.$$

Nyní odvodíme nutnou podmínku pro nezápornost výrazu

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\, \mathrm{d}x.$$

Věta 3 (Legendre). *Pro to, aby kvadratický funkcionál*

$$\int_a^b [P(x)\delta y^2 + R(x)\delta y'^2]\, \mathrm{d}x$$

byl nezáporný pro jakokouli funkci $\delta y(x)$ třídy C_1, pro niž $\delta y(a) = \delta y(b) =$

$= 0$, *je nutné, aby v intervalu* $a \leqq x \leqq b$ *byla splněna nerovnost*

$$R(x) \geqq 0.$$

Předpokládejme, že pro některé x_0 $(a \leqq x_0 \leqq b)$

$$R(x_0) = -2p \quad (p > 0).$$

V takovém případě vzhledem k spojitosti $R(x)$ můžeme předpokládat, že v některém intervalu $[a_1, b_1]$ délky $h > 0$, obsahujícím bod x_0 a obsaženém v intervalu $[a, b]$,

$$R(x) < -p$$

pro $a_1 \leqq x \leqq b_1$ $(b_1 = a_1 + h)$. Označme M maximum $|P(x)|$ v intervalu $[a, b]$ a utvořme funkci $\delta y = \delta y(x)$:

$$\delta y(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi \dfrac{x - a_1}{h} \text{ pro } a_1 \leqq x \leqq b_1, \\ 0 \text{ v ostatních bodech intervalu.} \end{cases} \tag{18}$$

Tato funkce $\delta y(x)$ náleží do třídy C_1. Je nyní zřejmé, že

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} P \sin^4 \pi \frac{x - a_1}{h}\,dx + \\ + \int_{a_1}^{b_1} R \frac{\pi^2}{h^2} \sin^2 2\pi \frac{x - a_1}{h}\,dx < Mh - \frac{p\pi^2}{h}.^{4})$$

Pro h dostatečně malé stane se $Mh - \dfrac{p\pi^2}{h}$ záporným. Zvolme takové malé h a dosaďme do (18); dostaneme funkci $\delta y(x)$, pro niž je

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\,dx < 0.$$

Z toho plyne nutná podmínka pro existenci minima:

Legendreova podmínka. *Pro to, aby extremála* $y = y(x)$ *realisovala minimum funkcionálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,dx,$$

[4]) Protože $P \sin^4 \pi \dfrac{x - a_1}{h} \leqq P \leqq M$, je $R \sin^2 2\pi \dfrac{x - a_1}{h} < -p \sin^2 2\pi \dfrac{x - a_1}{h} < -p$.

je nutné, aby byla splněna podél extremály nerovnost:

$$F_{y'y'} \geqq 0.$$

Analogicky: *pro to, aby extremála* $y = y(x)$ *realisovala maximum funkcionálu*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

je nutné, aby byla splněna podél extremály nerovnost

$$F_{y'y'} \leqq 0.$$

K důkazu stačí připomenout, že nutnou podmínkou minima je nezápornost druhé variace, takže Legendreova podmínka ihned plyne ze shora dosaženého výsledku.