

Kurs variačního počtu

Elementární způsoby řešení extrémálních úloh

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 5–36.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402787>

Terms of use:

© Přírodovědecké vydavatelství

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ELEMENTÁRNÍ ZPŮSOBY ŘEŠENÍ EXTREMÁLNÍCH ÚLOH

§ 1. Obecné pojmy.

Funkcionál. Základním předmětem studia klasické analýsy je funkce. Ve variačním počtu se budeme zabývat studiem závislosti, kdy je hodnota závisle proměnné určena funkcí. Uvedeme nejjednodušší příklad takové závislosti.

Vyšetřujme délku libovolné křivky, která spojuje dva dané body A, B . Naše závisle proměnná — délka křivky — bude určena tvarem čáry, spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, neboli, což je totéž, funkcí zobrazenou naší křivkou. Uvedenou závislost lze snadno vyjádřit v přehledném tvaru.

Budiž dána rovnice křivky spojující body A a B ve tvaru

$$y = y(x),$$

při čemž se souřadnice x mění v intervalu $x_0 \leq x \leq x_1$ a funkce $y(x)$ má v tomto intervalu spojitou derivaci $y'(x)$. Pak bude délka J křivky rovna

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

Se změnou funkce $y(x)$ se bude měnit i křivka tuto funkci zobrazující a veličina J , t. j. délka křivky $y = y(x)$. Tedy J závisí na funkci $y(x)$; různým funkcím $y(x)$ odpovídají různé hodnoty J . Obecně, jsou-li číselné hodnoty některé veličiny J určeny volbou funkce $y(x)$, která patří do určité třídy funkcí, pak to zapíšeme takto:

$$J = J[y(x)]$$

a zavedeme následující definici:

Definice. Budiž dána určitá třída funkcí $y(x)$. Řekneme, že $J[y(x)]$ je funkcionál definovaný pro funkce naší třídy, je-li každé funkci této třídy $y(x)$ přiřazeno určité číslo $J[y(x)]$.

Třída funkcí $y(x)$, pro něž je funkcionál definován, se nazývá oborem funkcionálu.

Pokud zobrazujeme geometricky funkce jedné proměnné čarami, nazýváme jindy funkcionál pro ně definovaný také funkcí čáry.

Vraťme se k funkcionálu $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$ a položme $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; pak dostaneme pro $y(x) = x$, $y'(x) = 1$,

$$J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

Je-li $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (řetězovka), pak

$$\begin{aligned} J\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x + e^{-x})'^2}{4}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Jako druhý příklad (ještě jednodušší) vezměme systém všech spojitých funkcí $y(x)$, definovaných na úsečce $x_0 \leq x \leq x_1$, a položme

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx. \quad (2)$$

Pak je $J[y(x)]$ funkcionál definovaný pro funkce $y(x)$; každé funkci $y(x)$ odpovídá určitá hodnota $J[y(x)]$. Tento funkcionál vyjadřuje pro $y > 0$ geometricky obsah rovinného oboru, omezeného křivkou $y = y(x)$, osou Ox a pořadnicemi $x = x_0$, $x = x_1$.

Klademe-li v rovnosti (2) místo $y(x)$ konkrétní funkce, budeme dostávat odpovídající hodnoty $J[y(x)]$. Položíme-li jako v předcházejícím příkladě $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, bude

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx.$$

Je-li nyní $y(x) = x$, pak

$$J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

je-li $y(x) = x^2$, pak

$$J[y(x)] = J[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$$

je-li $y(x) = \frac{1}{x+1}$, pak

$$J\left[\frac{1}{x+1}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\lg(x+1)]_0^1 = \lg 2;$$

je-li $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pak

$$J\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Bylo by možno uvést řadu dalších příkladů funkcionálů.

Upozorňujeme čtenáře na to, že funkcionál (1) je definován na třídě funkcí, které mají spojitou derivaci, kdežto funkcionál (2) je definován na širší třídě funkcí spojitých.

Extrém funkcionálů. Už na samém počátku vzniku analýsy nekonečně malých veličin spolu s úlohami o extrémech funkcí n proměnných se objevila celá řada úloh z geometrie, mechaniky a fyziky na vyhledání extrémů funkcionálů. Jako na nejjednodušší příklad lze upozornit na tuto úlohu: *mezi všemi rovinnými křivkami, spojujícími dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, najít tu, jejíž délka je nejmenší.*

Analyticky říká tato úloha tolik: mezi všemi funkcemi $y = y(x)$ takovými, že

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

najít tu, pro niž

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

nabývá nejmenší hodnoty.

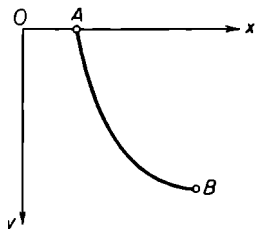
Víme, že hledaná křivka, která dává minimum délky, je úsečka spojující body A a B , neboli, vyjádřeno analyticky: $J[y(x)] =$

$= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$ nabývá nejmenší hodnoty, je-li $y(x) = y_0 + k(x - x_0)$,

kde $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Historicky byla první úlohou, která vzbudila obecný zájem mezi

matematiky, úloha o brachystochroně, kterou položil Ivan Bernoulli: *mezi všemi křivkami, spojujícími dva dané body A a B, najít tu, po níž se hmotný bod, pohybující se z bodu A působením tíže s počáteční rychlostí rovnou nule, dostane v nejkratší době do bodu B.*¹⁾



Obr. 1.

Proložme body A a B vertikální rovinu a omezme se na rovinné oblouky tyto body spojující. Za osu Ox vezměme horizontální přímkou a osu Oy zvolme tak, aby směřovala vertikálně dolů (obr. 1). V tomto případě budou mít body A a B odpovídající souřadnice $(x_0, 0)$ a (x_1, y_1) . Pohybuje-li se hmotný bod z A bez počáteční rychlosti, je

jeho rychlost v s jeho pořadnicí y ve vztahu:

$$v^2 = 2gy,$$

kde g je gravitační zrychlení, neboli

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Budiž $y = y(x)$ rovnice křivky, po níž se pohybuje bod z A do B. Rychlost pohybu bodu je rovna

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{dt},$$

kde dt je elementem času. Z toho

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (3)$$

Integrujeme-li vztah (3), obdržíme dobu T , potřebnou k proběhnutí dráhy od bodu A do bodu B po křivce $y = y(x)$:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)} dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (3')$$

Zřejmé je T funkcional závislý na funkci $y(x)$. Chceme najít funkci

¹⁾ Přirozeně zde předpokládáme, že A ani B neleží na jedné vertikální přímce. Kdyby A a B ležely na jedné vertikální přímce, pak by byla řešením úlohy tato přímka.

$y(x)$ (neboli, což je totéž, křivku $y = y(x)$), pro niž T nabývá nejmenší hodnoty. Řešení této úlohy uvedeme v dalším paragrafu.

Úloha o brachystochroně je analyticky příbuzná jiné fyzikální úloze: v dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B ; chceme určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z bodu A do bodu B . Tento problém rovněž vede k úloze najít extrém funkcionálu na základě tak zvaného Fermatova principu: ze všech křivek, spojujících body A a B , je trajektorie světelného paprsku čarou, po níž proběhne světlo z A do B za nejkratší dobu.

Omezme se na případ roviny a zvolme za rovinu, v níž se světlo šíří, rovinu xOy . Buďte x_0, y_0 a x_1, y_1 souřadnice bodů A a B a buď $y = y(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, jedna z křivek, jež tyto body spojuje. Označme $v(x, y)$ rychlost světla v bodě (x, y) . Opakujeme-li úvahu provedenou v předcházejícím příkladě, zjistíme, že doba T , za kterou světlo proběhne podél křivky $y = y(x)$ z A do B , je vyjádřena integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{v[x, y(x)]} dx. \quad (4)$$

Podle Fermatova principu vede úloha určit trajektorii světelného paprsku k úloze určit čaru, pro niž funkcionál T nabývá nejmenší hodnoty.

Předmět variačního počtu. Řešení jednotlivých úloh na stanovení minima a maxima funkcionálů vedlo k vytvoření nové matematické disciplíny — variačního počtu, jehož předmětem je vyšetřování obecných metod určování extrémů pro funkcionály. Shora uvedené příklady jsou typickými úlohami variačního počtu, čili krátce — variačními úlohami.

§ 2. Nejjednodušší úloha variačního počtu. Eulerova rovnice.

Formulace nejjednodušší úlohy variačního počtu. Naším nejbližším cílem je uvést metody řešení nejjednodušších úloh variačního počtu.

Podle analogie s kriterii existence extrémů funkcí jedné a několika

proměnných se setkáváme zcela přirozeně s třemi hlavními problémy, které máme řešit:

I. Najít takové nutné podmínky, jež musí splňovat hledané funkce, aby bylo možno na jejich základě skutečně určit hledanou křivku, víme-li, že řešení existuje.

II. Najít dostatečně obecná kriteria pro existenci extrému.

III. Když již známe křivku, která splňuje základní nutnou podmínku, ustanovit kriteria, podle nichž by bylo možno soudit, udává-li tato křivka skutečně extrém, a je-li tomu tak, bude-li tento extrém maximem nebo minimem.

Připomínáme, že v úlohách, které se týkají konkrétních aplikací, velmi často plyne existence extrému přímo z podstaty problému; z toho důvodu mají problémy první skupiny prvořadý význam. S těmito problémy začneme.

Budiž dána spojitá funkce $F(x, y, y')$, která má spojitě parciální derivace do druhého řádu včetně podle všech tří argumentů x, y, y' . Nechť jsou kromě toho dány v rovině xOy dva body $A(a, b)$ a $B(a_1, b_1)$. Nejjednodušší úlohu variačního počtu, jak jsme ukázali výše, lze formulovat tímto způsobem: *mezi všemi křivkami, vyjádřenými rovnicemi*

$$y = y(x) \quad (5)$$

(funkce $y(x)$ a její derivace $y'(x)$ jsou spojitě v intervalu $a \leq x \leq a_1$ a jdoucími danými body A a B , určit tu, pro niž integrál

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y') dx \quad (6)$$

nabývá největší nebo nejmenší hodnoty.

Eulerova rovnice. Pro danou úlohu dokázal po prvé Euler následující větu:

Věta I. *Nabývá-li integrál J svého extrému pro křivku $y = y(x)$, pak funkce $y = y(x)$ touto křivkou zobrazená vyhovuje diferenciální rovnici*

$$F_v - \frac{d}{dx} F_{v'} = 0. \quad (7)$$

Než přejdeme k důkazu této věty, ukážeme její praktický význam.

Provedeme-li naznačené derivování podle x u druhého sčítance levé strany rovnice (7),²⁾ obdržíme

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0. \quad (8)$$

Z toho vidíme, že není-li $F_{y'y'}$ rovno identicky nule, je diferenciální rovnice (7) druhého řádu a má tedy její obecný integrál tvar

$$y = f(x, \alpha, \beta), \quad (9)$$

kde α, β jsou libovolné konstanty. Je tudíž možno Eulerovu větu formulovat takto: *existuje-li křivka $y = y(x)$ dávající extrém, patří k soustavě křivek (9) závislé na dvou parametrech. Z toho plyne, víme-li předem, že hledaná křivka existuje, že k jejímu faktickému určení zbývá zjistit hodnoty α a β . Avšak tyto hodnoty lze najít, použijeme-li další podmínky úlohy: hledaná křivka musí procházet dvěma danými body $A(a, b)$ a $B(a_1, b_1)$, t. j. neznámé α a β musí splňovat podmínky:*

$$\left. \begin{aligned} b &= f(a, \alpha, \beta), \\ b_1 &= f(a_1, \alpha, \beta), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

z nichž se α a β stanoví.

Udává tedy Eulerova věta pro existenci extrému nutné podmínky, pomocí nichž lze v mnoha případech úlohu řešit.

Vzhledem k základnímu významu věty pro celou klasickou theorii i praxi variačního počtu uvedeme dvojí odvození této věty. Jedno odvození dostaneme, zobecníme-li postup, jehož užijeme při řešení konkrétních úloh: považovat variační úlohu za mezný případ úlohy hledat extrémy funkcí několika proměnných. Tato metoda, historicky nejstarší,³⁾ má tu velkou přednost, že bezprostředně spojuje úlohu variačního počtu se známou úlohou nalézt extrémy funkcí. Bohužel je třeba k přesnému provedení důkazů touto methodou už při nejjednodušší úloze použít pracných a jemných úvah; důkazy se stanou ještě složitějšími, přejdeme-li k obecnějším úlohám variačního počtu. Základní myšlenky takového důkazu hned uvedeme.

²⁾ $F_{y'} = F_{y'}(x, y, y')$ je funkce tří argumentů x, y, y' a $y = y(x), y' = y'(x)$ jsou zároveň funkce proměnné x .

³⁾ Vyjádřeno přesněji, je tato metoda úpravou těch starších method v moderní tvar.

Druhá metoda — Lagrangeova — využívá specifičnosti úloh variačního počtu a přimyká se bezprostředně k dalšímu rozvoji variačního počtu — k počtu funkcionálnímu. Tato metoda je v nynější době ve variačním počtu základní. Uvedeme ji později, při čemž důkaz provedeme s veškerou matematickou přesností.

Odvození Eulerovy rovnice. Seznámíme se s odvozením Eulerovy rovnice v obecném případě. Omezíme se přitom, jak jsme se zmínili výše, jen na hlavní myšlenku důkazu a odpustíme si všechny detaily.

Nechť tedy pro $y = y(x)$ nabývá integrál

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y') dx$$

maximální nebo minimální hodnoty. Vezměme soustavu polygonů Π_n s vrcholy (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), kde $x_i = a + i\Delta x$,

$$\Delta x = \frac{a_1 - a}{n}; y_0 = b, y_n = b_1,$$

při čemž $y_i = y(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) jsou různé pro různé polygony soustavy. Na systému polygonů Π_n definujeme funkci

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i) \Delta x,$$

kde

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}.$$

J_n je funkce n proměnných $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Má-li $y(x)$ spojitou derivaci, je $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J$.

Z členů součtu J_n závisí na y_i jenom členy

$$F(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1}) \Delta x, F(x_i, y_i, y'_i) \Delta x,$$

při čemž i -tý člen obsahuje y_i přímo i nepřímo v třetím argumentu y'_i , kdežto $(i - 1)$ -tý jenom nepřímo v třetím argumentu

$$y'_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}.$$

Z toho

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_n}{\partial y_i} &= F_y(x_i, y_i, y'_i) \Delta x - F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) + F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1}) = \\ &= \left[F_y(x_i, y_i, y'_i) - \frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x} \right] \Delta x, \end{aligned}$$

kde

$$\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) = F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1}).$$

Pro polygon Π_n , který minimalisuje J_n , máme

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

neboli

$$F_y(x_i, y_i, y'_i) - \frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x} = 0. \quad (11)$$

Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce lze napsat rovnici (11) v tomto tvaru:

$$F_y(x_i, y_i, y'_i) = \frac{d}{dx} F_{y'}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{y}'_i), \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_{i-1} + \Theta_1(x_i - x_{i-1}), \quad \bar{y}_i = y_{i-1} + \Theta_2(y_i - y_{i-1}), \\ \bar{y}'_i &= y'_{i-1} + \Theta_3(y'_i - y'_{i-1}); \quad 0 < \Theta_k < 1. \end{aligned}$$

Úlohu najít křivku $y = y(x)$ minimalisující nebo maximalisující integrál J znovu považujeme za limitní případ úlohy určit polygon vedoucí k extrému součtu J_n při $n \rightarrow \infty$. Přejdeme-li v rovnici (11) k limitě, dostaneme vzhledem k vztahu (12):

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Tím jsme dostali Eulerovu rovnici pro křivku $y = y(x)$, pro kterou J nabývá extrému.

Variace. Víme, že základní metodou v teorii extrémů funkcí n proměnných bylo, že se našel diferenciál funkce, t. j. hlavní lineární část přírůstku, který pak musel být v bodech extrému identicky roven nule. Funkcionál

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y') dx$$

jsme vyšetřovali jako limitu funkce polygonu

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i) \Delta x.$$

Máme

$$dJ_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J_n}{\partial y_i} \delta y_i,$$

kde δy_i jsou nekonečně malé přírůstky pořadnic; tedy

$$dJ_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left[F_y(x_i, y_i, y'_i) - \frac{d}{dx} F_{y'}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{y}'_i) \right] \delta y_i \Delta x. \quad (13)$$

Předpokládejme, že pro n konvergující k nekonečnu součet J_n konverguje k integrálu J a součet v pravé části (13) k integrálu

$$\int_a^{a'} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx. \quad (14)$$

Výraz (14) pro funkcionál J je obdobou úplného diferenciálu. Nazývá se *variací* funkcionálu. Níže uvidíme, že variace je v jistém smyslu hlavní lineární částí přírůstku funkcionálu a že Eulerova rovnice je podmínkou toho, aby se identicky rovnala nule.

Případ, kdy F nezávisí na y . V tomto případě obdržíme z Eulerovy rovnice

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

a z toho

$$F_{y'}(x, y') = \text{const.} \quad (15)$$

Připomínáme ještě, že z rovnice (15) lze určit y' jako funkci závislou jenom na x . Lze tedy říci, že v případě námi uvedeném můžeme vyjádřit řešení Eulerovy rovnice kvadraturami.

Příklad. Mezi všemi křivkami na kulové ploše, spojujícími její dva dané body, najít křivku nejkratší délky.

Označíme Θ a φ zeměpisnou délku a šířku bodu na kulové ploše. Budiž křivka dána rovnicí $\Theta = \Theta(\varphi)$. Délka oblouku γ na kulové ploše je rovna

$$\int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\Theta^2} = \int_{\gamma} \sqrt{1 + \cos^2\varphi \Theta'^2} \, d\varphi.$$

Výraz za integračním znamením neobsahuje Θ . Proto v našem případě má Eulerova rovnice integrál

$$F_{\Theta'} = C \quad (\text{kde } F = \sqrt{1 + \cos^2\varphi \Theta'^2}),$$

neboli

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\varphi} = \Theta' &= \frac{C}{\cos\varphi \sqrt{\cos^2\varphi - C^2}} = \frac{C}{\cos^2\varphi \sqrt{(1 - C^2) - C^2 \operatorname{tg}^2\varphi}} = \\ &= \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{d\varphi} \frac{C}{\sqrt{(1 - C^2) - C^2 \operatorname{tg}^2\varphi}}. \end{aligned}$$

Z toho

$$\Theta + C_2 = \arcsin(C_1 \operatorname{tg}\varphi), \text{ kde } C_1 = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}},$$

neboli

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{tg}\varphi = \sin(\Theta + C_2), \operatorname{tg}\varphi = \alpha \sin\Theta + \beta \cos\Theta \quad (16) \\ \left(\alpha = \frac{1}{C_1} \cos C_2, \beta = \frac{1}{C_1} \sin C_2 \right). \end{aligned}$$

Přejdeme od sférických souřadnic ke kartézským:

$$x = r \cos\Theta, y = r \sin\Theta, z = r \operatorname{tg}\varphi \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Rovnice (16) nabude tvaru

$$z = \alpha x + \beta y. \quad (16')$$

Výsledná rovnice (16') je rovnicí roviny, která prochází středem kulové plochy a vytíná na ní hlavní kružnici. Z toho plyne, že nejkratší čarou je oblouk hlavní kružnice.

Případ, kdy F nezávisí na x . Rozebereme ještě jeden zvláštní případ, kdy integrovaná funkce $F(x, y, y')$ nezávisí explicitně na x : najdeme podmínku, kterou musí splňovat křivka $y = y(x)$, pro kterou integrál

$$J = \int_a^{a_1} F(y, y') dx$$

nabývá extrémální hodnoty.

K řešení dané úlohy provedeme záměnu proměnných tak, že y budeme považovat za nezávisle proměnnou a x za funkci proměnné y , kterou máme určit. V tom případě vede naše úloha k úloze hledat extrémální křivku pro integrál

$$J = \int_b^{b_1} F\left(y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) \frac{dx}{dy} dy,$$

který, položíme-li $x' = \frac{dx}{dy}$, $\Phi(y, x') = x'F\left(y, \frac{1}{x'}\right)$, lze přepsat takto:

$$J = \int_b^{b_1} \Phi(y, x') dy.$$

To je případ, kdy neznámá funkce $x = x(y)$ není v integrované funkci explicitně obsažena. Musí tedy hledaná křivka vyhovovat rovnici

$$\Phi_{x'}(y, x') = C.$$

Přejdeme-li k funkci F , obdržíme (vezmeme-li v úvahu, že $y' = \frac{1}{x'}$)

$$\Phi_{x'} = x'F_{y'} \cdot \left(-\frac{1}{x'^2}\right) + F = F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C.$$

To je již hledaná diferenciální rovnice k určení neznámé funkce $y(x)$. Eulerovu rovnici dostaneme, derivujeme-li obě části rovnice podle x . Rovnice

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C \quad (17)$$

neobsahuje x , a proto ji lze integrovat kvadraturami. Tedy i v tomto případě můžeme vyjádřit řešení Eulerovy rovnice kvadraturami.

Jako příklad může sloužit integrál (4). Čtenář zjistí, že v tomto případě rovnice (17) přejde v rovnici

$$v(y)\sqrt{1+y'^2} = k.$$

Jestliže F nezávisí ani na y , ani na x , t. j. $F = F(y')$, pak rovnice (15) přejde v rovnici

$$F''(y') = \text{const},$$

z čehož $y' = \text{const} = k$, a je tedy $y = kx + b$ — integrální křivky Eulerovy rovnice jsou přímky. Na příklad v úloze o nejkratší vzdálenosti dvou bodů $F \equiv \sqrt{1+y'^2}$; čára minimalisující integrál (1) je úsečka.

Singulární případ. Není-li $F_{y'y'}$ rovno identicky nule, pak je Eulerova rovnice rovnicí druhého řádu a její obecný integrál obsahuje dvě libovolné konstanty, které vhodně zvoleny určují obecně hledanou extrémální křivku. Vyšetřme nyní případ, když je

$$F_{y'y'} \equiv 0.$$

V tomto případě integrovaná funkce bude zřejmě lineární funkcí proměnné y' :

$$F = M(x, y) + y'N(x, y). \quad (18)$$

Eulerova rovnice nabude tvaru

$$\frac{\partial M}{\partial y} + y' \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{d}{dx} N = 0,$$

neboli po zjednodušení

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (19)$$

Není-li tomuto vztahu vyhověno identicky, pak tento vztah definuje v rovině zcela určitou křivku, která v obecném případě nebude procházet dvěma předem danými body A a B — námi formulovaná úloha variačního počtu není obecně řešitelná.

V jednotlivých případech může být rovnice (19) řešením úlohy najít extrém integrálu

$$J = \int_a^{a_1} (M + Ny') dx.$$

Na příklad pro integrál

$$J = \int_0^1 \{y' \sin \pi y - (x + y)^2\} dx$$

vypadá rovnice (19)

$$-2(y + x) = 0.$$

Podél této křivky nabývá integrál J hodnoty $\frac{2}{\pi}$. Není těžké dokázat, že je to maximální hodnota integrálu. Vskutku

$$J \leq \int_0^1 y' \sin \pi y dx = \int_{y(0)}^{y(1)} \sin \pi y dy = \frac{1}{\pi} [\cos \pi y(0) - \cos \pi y(1)] \leq \frac{2}{\pi}.$$

Uvedme zároveň, že již pro integrál

$$J = \int_0^1 \{y' \sin \alpha y - (x + y)^2\} dx \quad (0 < |\alpha| < \pi),$$

pro který má rovnice (19) tvar

$$y = -x$$

jako dříve, nedostaneme ani maximum ani minimum. Neboť

$$J(y) = \int_{y(0)}^{y(1)} \sin \alpha y \, dy - \int_0^1 (x + y)^2 \, dx = \frac{1}{\alpha} [\cos \alpha y(0) - \cos \alpha y(1)] - \int_0^1 (x + y)^2 \, dx,$$

a proto

$$J(-x) = \frac{1}{\alpha} [1 - \cos \alpha].$$

Položme nyní $y = (-1 + k)x$, kde k je libovolná konstanta; v tom případě

$$\begin{aligned} J[(-1 + k)x] &= \frac{1}{\alpha} [1 - \cos \alpha(k - 1)] - \frac{k^2}{3} = \\ &= J(-x) + \frac{1}{\alpha} [\cos \alpha - \cos \alpha(k - 1)] - \frac{k^2}{3}. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že rozdíl

$$J[(-1 + k)x] - J[-x] = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\alpha k}{2} \sin \left(\frac{\alpha k}{2} - \alpha \right) - \frac{k^2}{3}$$

změní pro dostatečně malé k znaménko při změně znaménka k (pro $k \rightarrow 0$ je pravá strana této rovnosti veličina ekvivalentní s $-k \sin \alpha$, jelikož podle předpokladu je α různé od 0 a π). Nemůže tedy $J(-x)$ být ani maximem ani minimem funkcionálu $J(y)$.

Předpokládali jsme, že vztah (19) není identicky splněn; předpokládejme nyní, že (19) platí identicky. V tomto případě integrovaný výraz $(M + Ny') \, dx = M \, dx + N \, dy$ je úplný diferenciál — hodnota integrálu závisí jenom na souřadnicích počátečního a koncového bodu křivky $y = y(x)$ a nezávisí na integrační cestě — úloha variačního počtu nemá smyslu.

§ 3. Elementární řešení některých variačních úloh.

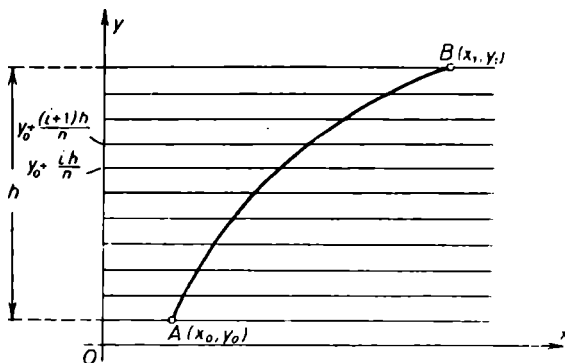
Šíření světla. Řešme úlohu formulovanou v prvním paragrafu o trajektorii světelného paprsku, když se světlo šíří v rovině xOy , při čemž světelný paprsek probíhá z bodu $A(x_0, y_0)$ do bodu $B(x_1, y_1)$. Omezme se na případ, kdy rychlost v spojitě závisí toliko na y : $v = v(y)$. Označme S rovinné prostředí, v němž se světlo šíří. Sestrojme v rovině xOy horizontální pás šířky $y_1 - y_0 = h$:

$$y_0 \leq y \leq y_0 + h = y_1; \quad (20)$$

tento pás je ohraničen přímkami rovnoběžnými s osou Ox , které procházejí body A a B . Rozdělme pak pás (20) přímkami

$$y = y_0 + i \frac{h}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

na n horizontálních pásků (obr. 2):



Obr. 2.

$$y_0 + \frac{ih}{n} \leq y \leq y_0 + \frac{(i+1)h}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \quad (20')$$

Mysleme si nahrazeno prostředí S se spojitou změnou rychlosti světla prostředím S_n , v němž se mění rychlost světla po skocích, a to: uvnitř i -tého pásku (20') ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) budeme považovat rychlost světla v_i za konstantní a rovnou

$$v_i = v \left(y_0 + \frac{ih}{n} \right).$$

Řešme nyní úlohu pro prostředí S_n .

Tato úloha je úlohou na hledání minima funkce $(n - 1)$ proměnných. Vskutku podle předpokladu o konstantnosti rychlosti světla uvnitř každého z pásků (20') trajektorie světelného paprsku, jdoucího z A do B , bude polygonem, jehož vrcholy leží na přímkách $y = y_0 + \frac{ih}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Označíme-li a_i úsečku i -tého vrcholu tohoto polygonu, odpovídající pořadnici $y_0 + \frac{ih}{n}$, dostaneme pro dobu T_n , za niž

světlo proběhne po polygonu, výraz

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{v_i} \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}. \quad (21)$$

Podle Fermatova principu musí světlo dojít z A do B v nejkratší době, proto musí být úsečky a_1, a_2, \dots, a_{n-1} jednotlivých vrcholů polygonu zvoleny tak, aby výraz (21) nabýval svého minima. A to je úloha vyhledat extrém funkce $(n-1)$ proměnných. K řešení je nutno položit

$$\frac{\partial T_n}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1). \quad (22)$$

Transformujme tyto rovnice tak, že označíme úhel, který svírá i -tá strana polygonu s osou Ox , znakem φ_i . V tom případě dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n}{\partial a_i} = & - \frac{a_{i+1} - a_i}{v_i \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}} + \\ & + \frac{a_i - a_{i-1}}{v_{i-1} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}} = - \frac{\cos \varphi_i}{v_i} + \frac{\cos \varphi_{i-1}}{v_{i-1}} = 0, \end{aligned}$$

neboli

$$\frac{\cos \varphi_{i-1}}{v_{i-1}} = \frac{\cos \varphi_i}{v_i} = \frac{1}{k}, \quad (23)$$

kde k nezávisí na i .

Budeme nyní vyšetřovat úlohu o šíření světla v prostředí S jako mezný případ úlohy o šíření světla v prostředí S_n při n neomezeně rostoucím. Tím přejdeme od rozdělení indexu lomu prostředí a rychlostí světla po skocích k jejich spojitému rozdělení; polygonální trajektorie přejdou v křivočaré, jež budou vyjádřeny rovnicemi $y = y(x)$; doba T pohybu světla bude vyjádřena v limitě místo součtu (21) integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v(y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n.$$

Lze dokázat, že při tomto limitním přechodu přejde polygonální trajektorie prostředí S_n minimalisující T_n v křivočarou trajektorii prostředí

S minimalisující T a zároveň směry stran polygonálních trajektorií přejdou ve směry tečen ke křivočaré trajektorii. V tom případě podmínka (23) minima pro T_n přejde v podmínku minima pro T :

$$\frac{\cos\varphi}{v(y)} = \frac{1}{k} = \text{const}, \quad (23')$$

při čemž je-li $y = y(x)$ rovnice limitní trajektorie, pak

$$\text{tg}\varphi = y', \text{ tedy } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Tudíž rovnice (23') přejde v diferenciální rovnici:

$$v(y)\sqrt{1 + y'^2} = k, \quad (24)$$

kteřou jsme již dostali dříve.

To je rovnice se separovanými proměnnými; její obecný integrál bude mít tvar

$$x = \int \frac{v \, dy}{\sqrt{k^2 - v^2}} + C, \quad (24')$$

kde C je integrační konstanta.

Z toho soudíme, že v daném prostředí náleží trajektorie světelného paprsku vždy k dvojparametrové soustavě křivek (24') (parametry: C a k); z každého bodu $M(x_0, y_0)$ roviny vychází svazek paprsků

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{v \, dy}{\sqrt{k^2 - v^2}}.$$

Rovnice trajektorie tohoto paprsku závisí na jednom parametru k , který lze najít, jestliže známe buď směr paprsku v uvedeném bodě nebo jestliže známe ještě jeden bod, jímž paprsek prochází.

Ukážeme jeden zvláštní případ, kdy řešení lze provést do konce. Předpokládejme, že rychlost šíření světla je úměrná pořadnici:

$$v = \alpha y, \quad \alpha > 0.$$

V tomto případě nabude rovnice soustavy trajektorií paprsku tvaru

$$x = \int \frac{\alpha y \, dy}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 y^2}} + C$$

neboli po integraci a úpravě:

$$(x - C)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 = r^2.$$

Jsou tedy v uvedeném případě trajektorie paprsku oblouky kružnic se středy na ose Ox . Každými dvěma body prochází jediná trajektorie.

Úloha o brachystochroně. Použijeme shora dosaženého výsledku rovněž k řešení úlohy o brachystochroně (viz str. 8).

Proložme body A a B vertikální rovinu a opatřme ji pravouhlou soustavou souřadnic; počátek souřadnic umístíme v bodě A a osu Oy položíme tak, aby směřovala vertikálně dolů.

Buďte (a, b) souřadnice bodu B , g gravitační zrychlení. Doba T , kterou potřebuje hmotný bod, aby spadl z A do B , bude vyjádřena integrálem

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

(viz § 1, formule (3')). Naše úloha vede k hledání křivky, podél níž integrál T nabývá nejmenší hodnoty.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno, musí hledaná křivka vyhovovat rovnici (24). Dosadíme-li do této rovnice za $v(y) = \sqrt{2gy}$, dostaneme

$$\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = k,$$

neboli

$$y = \frac{k_1}{1 + y'^2} \left(k_1 = \frac{k^2}{2g} \right). \quad (25)$$

K integrování této poslední rovnice bylo by možno použít formule (24'), avšak bude vhodnější provést integraci přímo tím, že zavedeme novou proměnnou substitucí

$$y' = \operatorname{tg} \varphi. \quad (26)$$

Rovnice (25) přejde po substituci v rovnici:

$$y = \frac{k_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = k_1 \cos^2 \varphi = \frac{k_1}{2} (1 + \cos 2\varphi). \quad (27)$$

Derivujeme-li ji podle x , najdeme

$$y' = -k_1 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (28)$$

t. j.

$$\operatorname{tg}\varphi = -2k_1 \cos\varphi \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx},$$

neboli

$$\cos^2\varphi d\varphi = -\frac{dx}{2k_1}.$$

Integrujeme-li poslední rovnost, najdeme obecný integrál rovnice (25) v parametrickém tvaru:

$$x = -\frac{k_1}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi) + C_1,$$

$$y = \frac{k_1}{2}(1 + \cos 2\varphi).$$

Zavedeme nový parametr Θ , položíme-li $2\varphi = \pi - \Theta$. Potom rovnice soustavy nabudou tvaru

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\Theta - \sin\Theta) + C, \\ y &= r(1 - \cos\Theta), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

kde r a C jsou libovolné konstanty. Je to tedy soustava cykloid, vytvořených kotálením kružnice poloměru r po reálné ose. Body vratu budou body reálné osy s úsečkami

$$x = C \pm 2n\pi r.$$

V našem případě $C = 0$, jelikož podle podmínky úlohy prochází křivka počátkem souřadnic. Neznámé r se určí z podmínky, že křivka prochází bodem B .

Probraná úloha umožňuje jednoduché, ale zajímavé zobecnění. Předpokládejme, že hmotný bod v uvedené úloze má v počátečním okamžiku určitou počáteční rychlost v_0 . V tomto případě rychlost v bodu bude v libovolném okamžiku rovna

$$v^2 = 2g(y + y_0),$$

kde

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Úloha o čáře nejrychlejšího sestupu se převede na úlohu nalézt čáru, podél níž integrál

$$T^* = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y + y_0)}} dx$$

nabývá nejmenší hodnoty. Integrál T^* se převede na integrál T záměnou proměnné

$$\eta = y + y_0.$$

Z toho soudíme, že hledaná čára bude obsažena mezi cykloidami

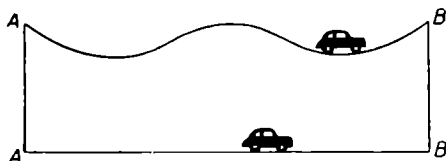
$$\left. \begin{aligned} x &= r(\Theta - \sin\Theta) + C, \\ y &= r(1 - \cos\Theta) - y_0. \end{aligned} \right\} \quad (29')$$



Obr. 3.

Cykloida (29') se dostane kotálením kružnice poloměru r po přímce $y = -y_0$. Pro libovolné pevné y_0 se konstanty r a C určí z podmínky, že křivka prochází body A a B .

Omezíme se na zvláštní případ, kdy body A a B leží na ose Ox . Pro $y_0 = 0$ bude hledaná křivka úplnou cykloidou (obr. 3). Křivka se bude protínat s osou Ox v pravém úhlu: s růstem počáteční rychlosti v_0 , a tedy i y_0 , bude se úhel, v němž se protne křivka s osou



Obr. 4.

souřadnic x , zmenšovat, křivka se stále méně a méně bude odchylovat od úsečky AB a pro $v_0 \rightarrow \infty$ přejde naše křivka v úsečku AB .

Z uvedené úlohy plyne následující, na první pohled paradoxní fakt: z bodu A do bodu B při jednom a též vydání za pohonné

látky lze v některých případech dojet rychleji po kopečkovité cestě než po cestě rovné (obr. 4).

Maupertuis-Eulerův princip. Řešením úlohy z optiky o tvaru trajektorie světelného paprsku v prostředí s proměnnou rychlostí šíření světla řešili jsme také úlohu z mechaniky o čáře nejrychlejšího pádu. Takovou analogii mezi úlohami z optiky a mechaniky můžeme zjistit u velmi širokého okruhu úloh. V mechanice byla objevena obdoba optického principu Fermatova Maupertuisem a Eulerem a dostal název Maupertuis-Eulerův princip. Omezíme se na podstatu tohoto principu.

Vyšetřujme pohyb volného hmotného bodu M o hmotě $m = 1$ v rovinném silovém poli s daným potenciálem $U(x, y)$. Za těchto podmínek půjde podle obecných zákonů mechaniky zrychlení našeho bodu vždy ve směru normál k ekvipotenciálním čarám

$$U = C \quad (C \text{ je konstanta}),$$

a velikost rychlosti v bude rovna

$$v = \sqrt{2U + h},$$

kde h je konstanta pro každý pohyb. Označíme φ úhel, který svírá trajektorie s příslušnou ekvipotenciální čarou.

Z připomenuté vlastnosti zrychlení plyne,⁴⁾ že rovnice trajektorie pohybujícího se bodu bude souhlasit s Eulerovou rovnicí pro funkcionál

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2U + h} \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Proto trajektorie bodu M při pohybu rychlostí $v = \sqrt{2U + h}$ souhlasí s trajektorií světelného paprsku pohybujícího se rychlostí

$$v_1 = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2U + h}}.$$

Jelikož světelný paprsek při rychlosti světla $v_1 = \frac{1}{v}$ realizuje extrém integrálu

$$\int \frac{ds}{v_1} = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v_1}, \quad (30)$$

je pro trajektorii pohybujícího se bodu realizován extrém integrálu

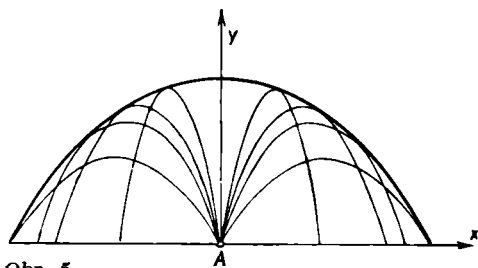
$$\int v ds = \int \sqrt{2u + h} ds. \quad (31)$$

Integrál $\int v ds$ podél trajektorie se nazývá *účinkem*.

Obdrželi jsme variační princip Maupertuis-Eulerův: účinek, t. j. integrál $\int v ds$, podél čáry spojující dva dané body nabývá extrému na trajektorii bodu M .

Takovým způsobem se převede mechanická úloha určit trajektorii pohybu bodu na úlohu variačního počtu.

Analogie mezi mechanikou a optikou. Analogie mezi principem Fermatovým a Maupertuisovým byla dávno zjištěna. Hamilton jí použil k vytvoření své teorie rovnic mechaniky, o níž se zmíníme v dalším. V současné fyzice dala tato analogie počátek k vytvoření tak zvané vlnové mechaniky.



Obr. 5.

Pomocí této opticko-mechanické analogie můžeme, jestliže známe trajektorii některého mechanického pohybu o rychlosti $\sqrt{2U + h}$, obdržet trajektorii světelného paprsku, pohybujícího se rychlostí $\frac{1}{\sqrt{2U + h}}$, a obráceně. Na příklad:

⁴⁾ To bude dokázáno v kapitole VI.

v gravitačním poli se pohybuje bod, který měl v počátečním okamžiku rychlost v_0 , po parabole (obr. 5) rychlosti

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}, \quad (32)$$

kde g je gravitační zrychlení, y pořadnice bodu (horizontální přímka procházející počáteční polohou bodu je vzata za osu Ox). Z počátečního bodu A vychází svazek parabolických trajektorií, obalených rovněž parabolou (ochranná parabola). Je-li nyní rychlost světla v prostředí vyjádřena formulí

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}, \quad (33)$$

pak paprsky, vycházející z počátku souřadnic, budou mít podle mechanicko-optické analogie tvar parabol, obalených zase ochrannou parabolou.

V této kapitole uvedené úlohy o brachystochroně, o šíření světla, o isoperimetrickém problému byly na konci 17. století a na začátku 18. století těmi zkušebními kameny, na nichž se tvořily a zkoušely nové metody matematické analýsy.

Řešením úlohy o brachystochroně, kterou položil I. Bernoulli v r. 1696, se zabývali bratři I. a J. Bernoulliové, Newton, Leibniz, l'Hospital.

Leibniz byl první, kdo při řešení úlohy o brachystochroně přešel od vyšetřování integrační křivky k vyšetřování mnohoúhelníka vepsaného do této křivky a tím nahradil variační úlohu úlohou na obyčejný extrém.

Téhož postupu později použili i při řešení jiných úloh bratři Bernoulliové, avšak byl to teprve člen petrohradské akademie L. Euler, který vytvořil z tohoto postupu, používaného na jednotlivé případy, metodu, když přešel od řešení jednotlivých zvláštních úloh k obecnému problému, jak najít extrém funkcionálu neboli, jak psal Euler, funkce čáry.

Pomocí své metody (viz § 2) převedl Euler shora uvedený problém na řešení tak zvané Eulerovy diferenciální rovnice, vyšetřil velký počet příkladů, na nichž demonstroval účinnost jím vytvořené theorie.

Limitní přechod k diferenciálním rovnicím nemohl být v Eulerově době matematicky přesně proveden a také Eulerovy úvahy neměly onu přesvědčivost, na kterou si zvykla další pokolení matematiků, kteří podali (viz kap. II) obecně platný a na konečných diferenciích nezávislý důkaz Eulerových diferenciálních rovnic a celé další theorie.

Avšak Eulerova metoda konečných diferencí se znovuzrodila a zdokonalila v třicátých letech našeho století, hlavně v pracích sovětských matematiků.⁵⁾

§ 4. Aplikace.

Úloha o minimální rotační ploše. *Mezi všemi křivkami*

$$y = y(x)$$

($y(x)$ i $y'(x)$ jsou spojité), jejichž koncovými body jsou dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, chceme určit křivku, která při svém otáčení kolem osy Ox vytvoří plochu minimálního obsahu.

Tato úloha je zvláštním případem obecné úlohy nalézt minimální plochu, která prochází danou křivkou nebo danou soustavou křivek.

Označme $y = y(x)$ libovolnou křivku splňující zmíněné předpoklady. Jak známo, je obsah S plochy, vytvořené otáčením této čáry kolem osy Ox , vyjádřen integrálem

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ježto integrovaná funkce zřejmě nezávisí explicitně na x , bude řešení Eulerovy rovnice naší úlohy vyjádřeno kvadraturami. První integrál bude:

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha,$$

kde α je libovolná konstanta, neboli po zjednodušení

$$y = \alpha \sqrt{1 + y'^2}. \quad (34)$$

Abychom zkrátili výklad o integrování této rovnice, použijeme umělého obratu; zavedeme novou proměnnou φ :

$$y' = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = \operatorname{sh}\varphi.$$

Dosadíme-li výraz pro y' do rovnice (34), obdržíme

$$y = \alpha \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\varphi} = \alpha \operatorname{ch}\varphi. \quad (35)$$

⁵⁾ Viz sborník „Matematika v SSSR za XV let“ a „Matematika v SSSR za XXX let“.

Tím jsme vyjádřili y pomocí φ . Budeme se snažit vyjádřit rovněž x pomocí φ . Zderivujeme proto podle x rovnost (35):

$$y' = \alpha \operatorname{sh} \varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Z podmínky $y' = \operatorname{sh} \varphi$ obdržíme

$$\alpha \frac{d\varphi}{dx} = 1.$$

Z toho

$$x = \alpha \varphi + \beta,$$

kde β je nová libovolná konstanta. Tím nabude obecný integrál Eulerovy rovnice v parametrickém vyjádření tvaru:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \varphi + \beta, \\ y &= \alpha \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned}$$

neboli

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}. \quad (36)$$

Rovnice (36) ukazuje, že se minima, pokud existuje, dosáhne pro křivku, která vznikne z řetězovky

$$y = \operatorname{ch} x$$

homothetií se středem v počátku souřadnic (α je poměr homothetie) a posunutím ve směru osy Ox (β je velikost posunutí).

Pohyb planet. *Vyšetřujeme soustavu dvou hmotných bodů, které na sebe působí podle Newtonova gravitačního zákona. Chceme, považující jeden bod za pevný, zkoumat pohyb volného bodu.*

Při přechodu k polárním souřadnicím (r, φ) vyjádříme potenciál gravitace podle Newtonova zákona ve tvaru $\frac{\mu}{r}$ (μ je konstanta). Označíme v_0 počáteční rychlost a r_0 počáteční průvodič pohybujícího se bodu. V tom případě je

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r_0},$$

neboli

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + h \right), \quad (37)$$

kde

$$h = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0}.$$

Podle Maupertuis-Eulerova principu je dráha vyšetřovaného pohybu extrémála integrálu

$$\int \sqrt{\frac{2}{r} + h} ds = \int \sqrt{\frac{2}{r} + h} \cdot \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \left(r' = \frac{dr}{d\varphi} \right).$$

Ježto výraz za integračním znaméním nezávisí explicitně na φ , má Eulerova rovnice tvar:

$$\frac{r^2 \sqrt{\frac{2}{r} + h}}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = C,$$

z čehož

$$\varphi + C_1 = C \int \frac{dr}{r \sqrt{2r + hr^2 - C^2}} = \arccos \frac{C^2 - r}{r \sqrt{1 + hC^2}},$$

kde C a C_1 jsou integrační konstanty. Nakonec dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru

$$r = \frac{C^2}{1 + e \cos(\varphi + C_1)} \quad (e = \sqrt{1 + hC^2}). \quad (38)$$

Pohyb se děje po kuželosečce o výstřednosti (numerické) $e = \sqrt{1 + hC^2}$. Podle počáteční rychlosti obdržíme dráhu eliptickou, parabolickou nebo hyperbolickou:

pro $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, $h < 0$, $e < 1$ dráhu eliptickou;

pro $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, $h = 0$, $e = 1$ dráhu parabolickou;

pro $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, $h > 0$, $e > 1$ dráhu hyperbolickou.

V případě eliptické dráhy najdeme velkou poloosu a elipsy ze vzorce

$$a = \frac{C^2}{1 - e^2} = -\frac{1}{h}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} = -h. \quad (39)$$

Poloosa a je úplně určena počáteční polohou r_0 a počáteční rychlostí v_0 , při čemž nezávisí na směru této rychlosti. Směr počáteční rychlosti, jak je zřejmé z předcházejících vzorců, nemá vliv na to, bude-li naše dráha parabolická, eliptická nebo hyperbolická.

Z (37) a (39) plyne

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r}{r_1}}, \quad (40)$$

kde $r_1 = 2a - r$ je průvodič bodu eliptické dráhy vzhledem k druhému ohnisku elipsy.

Umístíme nyní přitahující bod do druhého ohniska naší elipsy a budeme vyšetřovat pohyb po téže eliptické dráze. Při takovém posunutí středu přitažlivosti zamění se role průvodičů r a r_1 a podle formule (40) obdržíme pro rychlost v_1 nového pohybu

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{\mu}{a} \frac{1}{v}.$$

Rychlosti pohybů po eliptické dráze v případě, když přitažlivá hmota je umístěna v různých ohniscích, jsou nepřímo úměrné.

Porovnáme-li výrazy pro dobu T a pro účinek U při pohybu po oblouku trajektorie

$$T = \int \frac{ds}{v}, \quad U = \int v \, ds,$$

dostaneme vlastnost eliptických drah, kterou objevil N. E. Žukovskij:

Doba, za kterou planeta přitahovaná Sluncem, umístěným v ohnisku F , proběhne oblouk AB eliptické trajektorie, je rovna konstantnímu faktoru μ/a násobenému účinkem při pohybu planety po téže oblouku, kdyby Slunce leželo v druhém ohnisku.

§ 5. Methody přibližného řešení úloh variačního počtu.

Shora uvedenou metodu konečných diferencí, kterou vytvořil Euler lze chápat jako metodu přibližného řešení variačních úloh (viz na příklad § 3).

Uvedeme nyní jiné metody přibližných řešení.

Metoda nekonečného počtu proměnných. K metodám variačního počtu, které bezprostředně zobecňují úlohu o extrému diferenciálního počtu, patří také následující metoda. Předpokládejme, že mezi všemi křivkami, které jsou rovny nule v koncových bodech intervalu $[0, \pi]$, chceme určit tu křivku, podél níž integrál

$$J = \int_0^{\pi} F(x, y, y') dx$$

nabývá nejmenší hodnoty. Rozložíme proto hledanou funkci v trigonometrickou řadu:

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx + \dots$$

O tomto rozvoji jsme mohli předpokládat, že neobsahuje ani volný člen, ani kosiny, neboť y se na koncích intervalu rovná nule, a tedy bez újmy na obecnosti můžeme funkci považovat za lichou:

$$y(-x) = -y(x).$$

Za předpokladu, že neznámá funkce má spojitou derivaci, kterou lze rozvinout ve stejnoměrně konvergentní Fourierovu řadu, obdržíme

$$y' = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \dots + na_n \cos nx + \dots$$

Dosadíme-li do výrazu J místo y a y' jejich rozvoje, dostaneme J jako funkci nekonečné posloupnosti koeficientů:

$$J = J(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Naše úloha vede k určení těch hodnot a_n , pro něž J nabývá nejmenší hodnoty. Použijeme-li podmínek extrému, dostaneme systém rovnic, z nichž se mají určit a_n :

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

V obecném případě činí vyšetřování takových soustav nekonečného počtu rovnic o nekonečném množství neznámých velké potíže, ale v některých zvláštních případech vede tato cesta k snadnému a úplnému řešení úlohy. Budeme nyní počítat úlohu, u níž lze této metody použít.

Isoperimetrická úloha. Tak se nazývá následující úloha: *Mezi všemi jednoduchými zavřenými křivkami, které mají předepsanou délku, najít tu, jejíž vnitřek má největší obsah.*

Budiž

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq l) \quad (41)$$

rovnice jednoduché zavřené křivky v parametrickém tvaru, kde jsme vzali za parametr s délku oblouku:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (42)$$

a kde l je předepsaná délka křivky.

Při tomto označení je obsah S oblasti, ohraničené křivkou (41), vyjádřen integrálem

$$S = \int_0^l x \frac{dy}{ds} ds.$$

Naše úloha se tím převede na následující úlohu: mezi funkcemi $x = x(s)$, $y = y(s)$, periodickými s periodou l a vyhovujícími podmínce (42), určit tu, pro niž integrál S nabývá největší hodnoty.

Rozložíme x a y ve Fourierovy řady:⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_0 + \sum \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{l} s + b_n \sin \frac{2\pi n}{l} s \right), \\ y &= \frac{1}{2}c_0 + \sum \left(c_n \cos \frac{2\pi n}{l} s + d_n \sin \frac{2\pi n}{l} s \right), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

kde a_n , b_n , c_n , d_n jsou neznámé Fourierovy koeficienty; z toho

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sum \left(-\frac{2\pi n}{l} a_n \sin \frac{2\pi n}{l} s + \frac{2\pi n}{l} b_n \cos \frac{2\pi n}{l} s \right), \\ \frac{dy}{ds} &= \sum \left(-\frac{2\pi n}{l} c_n \sin \frac{2\pi n}{l} s + \frac{2\pi n}{l} d_n \cos \frac{2\pi n}{l} s \right). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

K dalšímu výkladu připomeneme dvě formule z theorie Fourierových řad. Jsou-li α_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) a β_k ($k = 1, 2, \dots$) Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ s periodou l a jsou-li γ_k a δ_k Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ s touže periodou l , pak

$$\frac{2}{l} \int_0^l [f(x)]^2 dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2), \quad (45)$$

⁶⁾ Předpokládáme, že funkce $x(s)$ a $y(s)$ mají spojité derivace, vyhovující Lipschitzově podmínce. Těchto hypotes ohledně $x(s)$, $y(s)$ je nám třeba k tomu, abychom mohli tyto funkce rozvinout ve Fourierovy řady.

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \alpha_0 \gamma_0 + \sum (\alpha_n \gamma_n + \beta_n \delta_n).^7 \quad (46)$$

Nyní vyjádříme integrál S pomocí Fourierových koeficientů. Podle (43), (44) a (46) dostaneme:

$$S = \pi \sum n (a_n d_n - b_n c_n). \quad (47)$$

Kromě toho, podle podmínky (42) má být

$$\int_0^l \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] ds = l. \quad (48)$$

Z toho dostaneme, vyjádříme-li integrál (48) pomocí Fourierových koeficientů, podle (44) a (45)

$$l = \frac{2\pi^2}{l} \sum n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \quad (49)$$

Použijeme-li získaných formulí (47) a (49), snadno vyčíslíme rozdíl mezi obsahem kruhu, omezeného kružnicí délky l , a obsahem S :

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{4\pi} - S &= \frac{\pi}{2} \sum n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - \pi \sum n (a_n d_n - b_n c_n) = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum \{ (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) \} \geq 0. \end{aligned}$$

Znaménko rovnosti platí jenom pro $a_1 - d_1 = 0$, $b_1 + c_1 = 0$, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), t. j. když

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos s + b_1 \sin s,$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos s + a_1 \sin s.$$

Je tedy hledaná křivka kružnice:

$$(x - \frac{1}{2} a_0)^2 + (y - \frac{1}{2} c_0)^2 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{l^2}{4\pi^2}.$$

Tudíž mezi všemi křivkami dané délky l : $x = x(s)$, $y = y(s)$, které splňují shora uvedené podmínky spojitosti, je to kružnice, která ohraničuje plochu největšího obsahu.

⁷⁾ Viz na příklad knihu G. M. Fichtengol'c, *Kurs differencial'nogo a integral'nogo isčislenija*, sv. III.

Čebyševova metoda. P. L. Čebyšev stanovil následující přibližnou metodu řešení variačních úloh. Místo extrému integrálu

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

se vyšetřuje extrém součtu

$$\sum_{i=1}^n f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

definovaného na třídě mnohočlenů daného stupně. Pro některé zvláštní případy těchto součtů řeší P. L. Čebyšev úlohu o extrémech pomocí řetězových zlomků.

Přímé metody. Způsob nalezení funkcí realizujících extrém, popsáný na str. 31, vede k úloze řešit soustavu nekonečného počtu rovnic o nekonečném počtu neznámých — k úloze, jež je obecně velmi obtížná. Ritz navrhl postup přibližného řešení úlohy tak, že se převede na soustavu konečného počtu rovnic o konečném počtu neznámých.

Hledejme extrém (pro určitost minimum) funkcionálu $J(y)$, kde $y = y(x)$ je určitá třída funkcí, jež lze vyjádřit ve tvaru řad

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x);$$

a_i jsou určité reálné koeficienty, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ je některá posloupnost funkcí (obvykle orthogonální, jako na příklad systém trigonometrických funkcí $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$).

Vyšetřujeme n -parametrovou soustavu funkcí

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x),$$

rozložitelných v konečné řady podle funkcí $\varphi_i(x)$. Pro tyto funkce se stane $J(y)$ funkcí konečného počtu proměnných, a to koeficientů a_1, a_2, \dots, a_n :

$$J(y^{(n)}) = J(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Nyní budeme hledat mezi funkcemi $y^{(n)}(x)$ tu, která minimalisuje $J(y^{(n)})$, t. j. budeme hledat posloupnost o n koeficientech: $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$, minimalisujících funkci $J(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Čísla $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots$

..., $a_n^{(n)}$ najdeme jako řešení soustavy n rovnic o n neznámých:

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jim odpovídá funkce

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \varphi_i(x).$$

Nechť n neomezeně roste. Přirozeně očekáváme, že při tom funkce $y^{(n)}(x)$ konvergují k funkci $y(x)$, která realizuje minimum našeho funkcionálu $J(y)$. V mnoha úlohách je tomu vskutku tak. V každém případě vystanou při tom před námi tyto otázky:

- a) vyšetřovat konvergenci posloupnosti funkcí $y^{(n)}$;
- b) v případě konvergence $y^{(n)}(x)$ k některé funkci $y(x)$ dokázat, že limitní funkce $y(x)$ realizuje minimum $J(y)$;
- c) vezmeme-li jako aproximaci hledané limitní funkce $y(x)$ jednu z funkcí $y^{(n)}(x)$, pak vzniká otázka, jak odhadnout chybu, t. j. odhadnout rozdíl

$$|y(x) - y^{(n)}(x)|.$$

Příklad. Najít minimum

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx$$

za podmínek:

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad \int_{-1}^1 y^2 dx = 1.$$

V dalším dokážeme⁸⁾, že se tohoto minima dosáhne pro funkci

$$y = \cos \frac{\pi}{2} x \text{ a je rovno } \frac{\pi^2}{4} = 2,47 \dots$$

Řešme úlohu přibližně. Budeme třeba hledat minimum daného funkcionálu za daných podmínek mezi mnohočleny prvních tří stupňů:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3.$$

Z podmínky $y(-1) = y(1) = 0$ dostaneme, že mnohočleny y musí mít tvar

$$y = (1 - x^2)(a + bx).$$

⁸⁾ Viz kap. IX.

Z toho

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = \int_{-1}^1 [(1-x^2)(a+bx)]^2 dx = a^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx + \\ + 2ab \int_{-1}^1 x(1-x^2)^2 dx + b^2 \int_{-1}^1 (x^2-x)^2 dx = \frac{1}{3}a^2 + \frac{16}{15}b^2.$$

Dále

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = a^2 \int_{-1}^1 4x^2 dx + 2ab \int_{-1}^1 2x(3x^2-1) dx + b^2 \int_{-1}^1 (3x^2-1)^2 dx = \\ = \frac{8}{3}a^2 + \frac{1}{5}b^2.$$

Minimum výrazu

$$\frac{8}{3}a^2 + \frac{1}{5}b^2$$

za podmínky

$$\frac{1}{3}a^2 + \frac{16}{15}b^2 = 1$$

dostaneme pro $b = 0$, $a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ a je rovno $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2,50$. Absolutní chyba, s níž je minimum určeno, je 0,03, relativní chyba výsledku nepřevyšuje 1,2%.

Odůvodnění Ritzovy metody, objevené v r. 1908, a rovněž Čebyševovy metody provedl N. M. Krylov, který podal r. 1918 důkaz konvergence minimalisující posloupnosti pro celou řadu problémů. Ve svých pracích z let 1925—1931 udal N. M. Krylov řadu odhadů aproximací, při čemž tyto odhady byly uvedeny pro nevelká čísla aproximací a zvláště pro jejich malé hodnoty, což je zvláště důležité v praxi.