Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Biharmonická rovnice (užití Greenovy funkce)

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 174–217.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402774

znak rovnosti platí pouze tenkrát, když $V =$ konst, což je opět možné pro $V \neq 0$ pouze tehdy, když B leží uvnitř Σ.

Normála ν byla zvolena tak, aby byla vnější vzhledem k S. V takovém případě bude vnější vzhledem k D a vnitřní vzhledem k D'; odtud plyne, že integrál nalevo v (21) je nezáporný a integrál napravo nekladný.

Jsou možné tyto případy:

a) Integrál napravo v (21) se rovná nule. Potom $V_e \equiv 0$; protože $V_i = V_e$ na S, je $V_i \equiv 0$ a $\varrho(M) = \frac{\partial V_e}{\partial \nu} - \frac{\partial V_i}{\partial \nu} \equiv 0$. Tento případ nevede k charakteristickému číslu λ.

b) Integrál nalevo je roven nule a integrál napravo je různý od nuly. Pak dostaneme známé charakteristické číslo $\lambda = 1$.

c) Integrál nalevo je kladný a integrál napravo záporný. K tomu je nutné buď $1 - \lambda < 0$, $1 + \lambda > 0$, nebo $1 - \lambda > 0$, $1 + \lambda < 0$, t. j. buď $\lambda > 1$, nebo $\lambda < -1$.

KAPITOLA 2

BIHARMONICKÁ ROVNICE (UŽITÍ GREENOVY FUNKCE)

§ 39. Problémy, vedoucí na biharmonickou rovnici. a) Rovinný problém theorie pružnosti. O rovinné deformaci mluvíme, jestliže se elastická posunutí dějí pouze v rovinách rovnoběžných s rovinou (x, y) a složky posunutí nezávisí na z. Označíme-li u_x, u_y složky posunutí, σ_x, τ_{xy}, σ_y složky napětí, můžeme napsat soustavu diferenciálních rovnic rovinného problému theorie pružnosti:[1]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

[1] Rovnice (1) odpovídají případu, kdy na těleso nepůsobí žádné objemové síly. Viz [28a].

$$\sigma_x = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \sigma_y = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{2}$$

Zde jsou λ a μ Laméovy konstanty a

$$\vartheta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{3}$$

Počet neznámých funkcí v soustavě (1) — (2) lze snížit na jednu. Rovnicím (1) lze totiž vyhovět, položíme-li

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Funkce $W(x, y)$ se nazývá funkcí napětí čili Airyho funkcí. Dosadíme-li výrazy (4) do (2) a vyloučíme-li u_x a u_y, zjistíme, že Airyho funkce vyhovuje biharmonické rovnici

$$\Delta^2 W = \Delta(\Delta W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0. \tag{5}$$

Řešení rovinného problému theorie pružnosti lze tedy převést na integrování biharmonické rovnice za příslušných krajových podmínek.

Objasněme, jaké jsou to podmínky. Nejjednodušeji se formulují, jestliže jsou na hranici pružné oblasti dána posunutí jejích bodů. V tomto případě, označíme-li hranici pružné oblasti L, máme na L

$$u_x = g_1(t), \quad u_y = g_2(t), \tag{6}$$

kde t je parametr, určující polohu bodu na L, a $g_1(t)$ a $g_2(t)$ jsou dané funkce.

Nechť jsou nyní dány vnější síly, působící na hranici L. Označíme-li jejích složky X_ν a Y_ν, dostaneme na základě známých vzorců mechaniky deformovatelných těles

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) &= X_\nu, \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) &= Y_\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Zde je ν vnější normála k hranici L. Poznamenejme, že

$$\cos(\nu, x) = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

kde s je délka oblouku hranice.

Dosadíme-li do (7) napětí vyjádřená pomocí Airyho funkce, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = X_\nu, \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = -Y_\nu,$$

odkud

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= -\int Y_\nu \, ds + C_1 = f_1(s) + C_1, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \int X_\nu \, ds + C_2 = f_2(s) + C_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnice (8) vyjadřují krajové podmínky naší úlohy pro případ, že jsou dány vnější síly působící na hranici. Jestliže je hranice L jednoduše souvislá, lze zvolit konstanty C_1 a C_2 pevně podle libovůle; jestliže hranice L je mnohonásobně souvislá, pak C_1 a C_2 mohou mít různé hodnoty na různých křivkách, tvořících L. V tom případě musí být určeny z požadavku jednoznačnosti posunutí. V tomto smyslu je rovinná úloha theorie pružnosti obdobná modifikovanému Dirichletovu problému.

Uvedené typy krajových podmínek nejsou jediné. Níže ukážeme na příslušných místech některé jiné typy krajových podmínek.

Problémy, jež odpovídají podmínkám (6) a (8), budeme nazývat prvním, resp. druhým biharmonickým problémem.[1]

b) Ustálený rovinný pohyb viskosní nestlačitelné kapaliny. Rovnice Navier-Stokesovy[2] nabývají v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \, \Delta v_x - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \nu \, \Delta v_y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Zde v_x a v_y jsou složky rychlosti, p je tlak, ϱ je hustota kapaliny, ν je koeficient viskosity. Rovnice (9) jsou napsány za předpokladu, že nepůsobí žádné objemové síly.

---

[1] V knize N. I. Muscheliśviliho [28a] se prvým biharmonickým problémem nazývá krajový problém theorie pružnosti s podmínkami (8).

[2] Viz N. E. Kočin, I. A. Kibel', N. V. Roze, Těoretičeskaja gidromechanika, č. II, Gostěchizdat, 1948.

Třetí z rovnic (9) ukazuje, že existuje funkce $\Phi(x, y)$, nazývaná proudovou funkcí, taková, že

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{10}$$

Dosadíme-li toto do prvých dvou rovnic a vyloučíme-li p, nalezneme rovnici, jíž vyhovuje proudová funkce:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial y} \right). \tag{11}$$

Jestliže v rovnici (9) zanedbáme inerciální členy, je pravá strana v (11) identicky rovna nule; dostaneme, že Φ vyhovuje biharmonické rovnici.

V theorii viskosní kapaliny se předpokládá, že viskosní kapalina, stýkající se s tuhým tělesem, k němu přilne, takže se rychlosti tuhého tělesa a s ním se stýkajících částic kapaliny sobě rovnají. Odtud lze lehce odvodit krajové podmínky při problému obtékání. Jestliže viskosní kapalina obtéká jedno nebo několik těles, o nichž budeme pro jednoduchost předpokládat, že se nepohybují, pak na hranici těchto těles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Jestliže osu x orientujeme rovnoběžně s rychlostí proudění v nekonečnu a velikost této rychlosti označíme U, má podmínka v nekonečnu tvar

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} [\Phi(x, y) - Uy] = C, \quad C = \text{konst.} \tag{13}$$

Níže uvidíme, že úloha o obtékání neomezeného proudu viskosní kapaliny okolo tuhého tělesa je neřešitelná, jestliže zanedbáme inerciální členy. V tom spočívá t. zv. Stokesovo paradoxon.

Na biharmonickou rovnici vede také mnoho jiných úloh matematické fysiky. Tak na př. na rovnici tvaru $\Delta^2 W = p(x, y)$ se převádí úloha o ohybu plastické hmoty vlivem zatížení, které je normální k jejímu povrchu. Na rovnice téhož typu se převádějí také některé úlohy oceanologie.[1]

[1] Viz V. V. Štokman, Uravněnija polja polnych potokov, vozbuždajemych větrom v něodnorodnom polje. Doklad AN SSSR, 1946, t. IV, č. 5.

§ 40. Komplexní vyjádření biharmonické funkce. Každá biharmonická funkce $W(x, y)$ (t. j. integrál biharmonické rovnice) může být vyjádřena pomocí dvou analytických funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$. To lze učinit takto: Funkce $P(x, y) = \Delta W$ je harmonická, neboť $\Delta P = \Delta^2 W = 0$. Nechť $Q(x, y)$ je funkce konjugovaná s $P(x, y)$. Označme $P + iQ = 4\varphi'(z)$. Funkce

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y) = \tfrac{1}{4} \int (P + iQ)\, dz$$

je analytická funkce z. Výpočtem se lehce přesvědčíme, že $\Delta(W - px - qy) = 0$, t. j. že funkce $p_1(x, y) = W - px - qy$ je harmonická. Položíme-li $p_1(x, y) = \operatorname{Re}\{\chi(z)\}$ a všimneme-li si, že $px + qy = \operatorname{Re}\{\bar{z}\, \varphi(z)\}$, dojdeme ke Goursatově formuli, jež dává hledané vyjádření biharmonické funkce pomocí analytických funkcí komplexní proměnné $\varphi(z)$ a $\chi(z)$:

$$W(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\, \varphi(z) + \chi(z)\}. \tag{1}$$

Funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z) = \chi'(z)$ budeme nazývat Goursatovými funkcemi.

Je-li dána funkce $W(x, y)$, nejsou Goursatovy funkce určeny úplně jednoznačně. $\varphi'(z)$ je totiž určena až na ryze imaginární aditivní konstantu a $\varphi(z)$ je tedy určena až na aditivní člen tvaru $i\alpha z + \beta$, kde α je reálná a β je komplexní konstanta. Funkce $\psi(z)$ není také úplně určena, avšak to je pro další méně podstatné.

Z Goursatových vzorců lehce dostaneme dvě důležité formule, jež v definitivním tvaru vyslovil N. I. Muschelišvili. Prvá z nich dává vyjádření derivací biharmonické funkce pomocí Goursatových funkcí:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

kde

$$\psi(z) = \chi'(z). \tag{3}$$

Druhý vzorec se vztahuje k rovinnému problému theorie pružnosti; vyjadřuje posunutí pomocí Goursatových funkcí a má tvar

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\, \varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{4}$$

Zde jsme označili

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Poznamenejme, že $\varkappa > 1$. Vzorce (2) a (4) snadno dostaneme z Goursatova vzorce a z rovnic (2) a (4), § 39.

Uveďme ještě dva vzorce G. V. Kolosova, jež váží napětí s Goursatovými funkcemi:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}, \tag{5}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)]. \tag{6}$$

Vzorce (2) a (4) nám dovolují převést základní problémy theorie pružnosti v rovině na krajové úlohy theorie analytických funkcí. Prvý problém se převádí na sestrojení analytických funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, jež na hranici oblasti vyhovují rovnici

$$\varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2). \tag{7}$$

V druhém problému je třeba sestrojit analytické funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, jež na hranici vyhovují krajové podmínce

$$\text{na } L_k \qquad \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + b_k,\ b_k = \text{konst.} \tag{8}$$

Zde

$$f_1 + if_2 = i\int_{s_0}^{s}(X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

kde X_ν a Y_ν jsou složky vnějších sil působících na hranici ve směru os x a y. Konstanty b_k je nutno zvolit tak, aby posunutí byla jednoznačná.

Na tutéž krajovou úlohu, avšak bez libovůle při určení pravé strany,[1] se v hydrodynamice převádí úloha obtékání viskosní kapalinou.

Je užitečné poznamenat, že rovnici (8) lze uvažovat jako speciální případ rovnice (7) pro $\varkappa = -1$.

Jindy bývá užitečné předběžně konformně zobrazit oblast, jež je vyplněna pružným prostředím nebo viskosní kapalinou, na nějakou jinou oblast. Vzorce (7) a (8) se potom poněkud mění. Nechť $z = \omega(\sigma)$ je funkce realisující zobrazení. Označme

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\sigma)) = \Phi(\sigma);\ \psi(z) = \psi(\omega(\sigma)) = \Psi(\sigma).$$

[1] A tedy bez dodatečných požadavků takového typu, jako je jednoznačnost posunutí.

Potom rovnice (7) a (8) jsou nahrazeny rovnicemi:

$$\varkappa\,\Phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \tag{10}$$

a

$$\Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + b_k. \tag{11}$$

Vyšetřme nyní analytický charakter Goursatových funkcí. Jestliže oblast vyplněná pružným prostředím je omezená, jednoduše souvislá a nepůsobí na ni ani bodové síly nebo momenty, pak $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou prostě regulární v oblasti. Právě tak $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou regulární v jednoduše souvislé omezené oblasti, vyplněné viskosní kapalinou, jestliže v oblasti nejsou ani prameny, ani propady.

Zabývejme se nyní případem mnohonásobně souvislé oblasti. Její hranici označme jako obvykle L, vnitřní křivky, z nichž se skládá, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ a křivku omezující oblast z vnějšku (jestliže je oblast omezená) L_0. Vlastní oblast označme písmenem D.

Uvažme ta omezení, jež musí nutně splňovat Goursatovy funkce při rovinném problému theorie pružnosti. Ze vzorce (4), § 39 je patrno, že

$$P(x, y) = \Delta W = \sigma_x + \sigma_y.$$

Napětí je jednoznačná funkce stejně jako posunutí. Odtud plyne, že $P(x, y)$ je jednoznačná. Při tom $Q(x, y)$ vzroste o konstantu při oběhu kolem každé z vnitřních křivek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ proti hodinovým ručičkám. Označme onen přírůstek $8\pi A_k$. Potom při uvedeném oběhu funkce $\varphi'(z)$ vzroste o $2\pi i A_k$. Jestliže z_k je bod uvnitř křivky L_k, pak při tomtéž oběhu funkce $A_k \lg(z - z_k)$ vzroste také o $2\pi i A_k$. Odtud plyne, že

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + f(z), \tag{12}$$

kde $f(x)$ je funkce regulární v D a A_k je reálná konstanta. Není obtížné nahlédnout, že neurčitý integrál

$$\int f(z)\,dz$$

může také obsahovat logaritmické sčítance. Integrujeme-li tedy rovnici (12), dostaneme

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k z \lg(z - z_k) + \sum_{k=1}^{n} B_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z). \tag{13}$$

V tomto vzorci je $\varphi^*(z)$ jednoznačná funkce, regulární v D; B_k je komplexní konstanta a A_k jsou, jak již jsme viděli výše, reálné konstanty.

Obraťme se k funkci $\psi(z)$. Vzorec (12) ukazuje, že $\varphi''(z)$ je jednoznačná. Nyní ze (6) plyne, že $\psi'(z)$ je také jednoznačná a její neurčitý integrál obsahuje logaritmické členy:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{14}$$

kde $\psi^*(z)$ je funkce regulární v D.

Při odvozování vzorců (13) a (14) jsme užili pouze jednoznačnosti napětí. Objasněme, jaká omezení klade na koeficienty A_k, B_k, C_k požadavek jednoznačnosti posunutí. Vzorec (4) ukazuje, že při oběhu křivky L_k vzroste součet $2\mu(u_x + iu_y)$ o

$$2\pi i[(\varkappa + 1) A_k z + \varkappa B_k + \overline{C}_k].$$

Tato veličina se rovná nule, neboť posunutí jsou jednoznačná. Odtud plyne, že

$$A_k = 0, \; C_k = -\varkappa \overline{B}_k, \tag{15}$$

a tak konečně dostaneme následující výrazy pro Goursatovy funkce při rovinném problému theorie pružnosti:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} B_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z). \end{aligned} \tag{16}$$

Koeficienty B_k mají jednoduchý fysikální smysl:

$$B_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1 + \varkappa)}, \tag{17}$$

kde X_k a Y_k jsou složky hlavního vektoru vnějších sil působících na křivce L_k. Při druhém základním problému jsou tyto koeficienty známy v důsledku krajových podmínek, při prvém však zůstávají neznámými.

Poněkud jiný charakter má mnohoznačnost Goursatových funkcí v hydrodynamice viskosní kapaliny. Zde je třeba požadovat jednoznačnost rychlostí, t. j. jednoznačnost derivací biharmonické funkce. Vzorec (13) platí dále. Ze vzorce (4) je patrno, že při oběhu křivky L_k proti hodinovým ručičkám vzroste $\psi(z)$ o $2\pi i B_k$, a tedy

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{18}$$

kde $\psi^*(z)$ je regulární v D.

Formulujme ještě další problém, který budeme nazývat třetím biharmonickým problémem: Jest určit biharmonickou funkci, jsou-li na hranici oblasti dány prvé derivace, za předpokladu, že tyto derivace, jakož i prvé derivace Goursatových funkcí jsou jednoznačné v uvažované oblasti.

Při třetím problému tedy předpokládáme, že $\varphi(z)$ může být vyjádřena vzorcem (16) a $\psi(z)$ vzorcem (18). Poznamenejme, že pro jednoduše souvislou oblast je druhý a třetí problém totožný.

Lze dokázat, že každá ze tří formulovaných úloh má jediné řešení (viz [27d]).

Shora uvedené Stokesovo paradoxon je bezprostředním důsledkem jednoznačnosti řešení třetího problému. Skutečně, jestliže kapalina obtéká pouze jedno těleso, je oblast vyplněná tekutinou jednoduše souvislá, Goursatovy funkce jsou jednoznačné a problém obtékání splývá s třetím problémem, jejž je nutno řešit při těchto podmínkách: prvé derivace hledané funkce se rovnají nule na hranici a jsou omezené v nekonečnu.[1] Z věty o jednoznačnosti plyne, že hledaná biharmonická funkce je identicky rovna konstantě. Avšak potom jsou její derivace, t. j. rychlosti, identicky rovny nule. Tak dostaneme, že viskosní kapalina obtékající tuhé těleso je v klidu.

Jestliže viskosní kapalina obtéká několik tuhých těles, dostaneme řešení, užijeme-li libovolnosti koeficientů A_k. V tom případě má problém obtékání jednoznačné řešení pouze tehdy, když je oblast dvojnásobně souvislá; jestliže je oblast více než dvojnásobně souvislá, pak je řešení nekonečně mnoho.

---

[1] To plyne z toho, že v nekonečnu $v_x = U$, $v_y = 0$.

§ 41. Greenova funkce a Schwarzovo jádro. Nechť D je omezená oblast roviny $z = x + iy$, jednoduše nebo mnohonásobně souvislá, a nechť z a $\zeta = \xi + i\eta$ jsou libovolné body oblasti D. Označme r vzdálenost mezi těmito body: $r = |z - \zeta|$. Jak je známo, Greenovou funkcí oblasti D nazýváme funkci $G(x, y; \xi, \eta)$ dvou bodů této oblasti, jež má tyto vlastnosti:

a) $$G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \lg r, \tag{1}$$

kde $g(x, y; \xi, \eta)$ je harmonická funkce v D proměnných ξ a η pro daná x a y;

b) Jestliže bod $\zeta = \xi + i\eta$ leží na hranici oblasti D, pak

$$G(x, y; \xi, \eta) = 0. \tag{2}$$

Funkci $g(x, y; \xi, \eta)$ lze sestrojit, jestliže řešíme Dirichletův problém při krajové podmínce: na hranici L oblasti D $g = \lg r$.

Z vlastností a) a b) plyne souměrnost Greenovy funkce:

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \tag{3}$$

Pomocí Greenovy funkce se řeší Dirichletův problém v uzavřené formě: Jestliže $U(x, y)$ je harmonická funkce v D, rovnající se $u(\zeta)$ v bodě ζ hranice, pak

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\zeta|, \tag{4}$$

kde ν tentokrát označuje vnitřní normálu k L v bodě ζ.

Ze souměrnosti Greenovy funkce plyne, že je nejen harmonickou funkcí ξ a η, nýbrž také x a y v celé oblasti D, mimo bod (ξ, η). Zaveďme pro další důležitý pojem komplexní Greenovy funkce. Budeme uvažovat $G(x, y; \xi, \eta)$ jako funkci komplexních proměnných z a ζ a ve shodě s tím ji budeme značit $G(z, \zeta)$. Sestrojme funkci $H(z, \zeta)$, konjugovanou s $G(z, \zeta)$ vzhledem k proměnným x a y. Lze na př. položit

$$H(z, \zeta) = \int_a^z -\frac{\partial G}{\partial y} \mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial x} \mathrm{d}y, \tag{5}$$

kde a je libovolný, avšak pevně zvolený bod uvnitř oblasti D. Funkce

$H(z, \zeta)$ je reálná mnohoznačná funkce svých argumentů. Na jedné z jejích větví platí identita

$$H(a, \zeta) \equiv 0. \tag{6}$$

Komplexní Greenovou funkcí nazýváme funkci

$$M(z, \zeta) = G(z, \zeta) + i\,H(z, \zeta). \tag{7}$$

$M(z, \zeta)$ je analytická, nikoliv však regulární funkce proměnné z v D a neanalytická funkce proměnné ζ.

Komplexní Greenova funkce je mnohoznačná, neboť obsahuje člen $-\lg(\zeta - z)$. Mimoto, jestliže je oblast D mnohonásobně souvislá, mění tato funkce své hodnoty při oběhu kolem libovolné vnitřní hranice oblasti v rovině z. Označme jako dříve L_0 vnější a $L_1, L_2, \ldots, L_n$ vnitřní hranice oblasti D. Při oběhu kolem L_k proti hodinovým ručičkám vzroste funkce $H(z, \zeta)$ o nějaký přírůstek, který bude obecně funkcí ζ. Označme jej $2\pi\, b_k(\zeta)$:

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} -\frac{\partial G}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

Zde je $\zeta = \xi + i\eta$ vnitřní bod oblasti D a $z = x + iy$ bod na křivce L_k. Označme n směr vnitřní normály k L_k v bodě z a položme $|\mathrm{d}z| = \mathrm{d}s$. Zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos(s, x) = -\cos(n, y),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos(s, y) = \cos(n, x).$$

Odtud plyne, že

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Při oběhu kolem L_k proti hodinovým ručičkám vzroste komplexní Greenova funkce o $2\pi i\, b_k(\zeta)$. O totéž při témž oběhu vzroste funkce $b_k(\zeta)\lg(z - z_k)$, kde z_k je libovolný, pevně zvolený bod uvnitř L_k. Komplexní Greenova funkce může být tudíž vyjádřena takto:

$$M(z; \zeta) = M_0(z; \zeta) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\zeta)\lg(z - z_k) - \lg(\zeta - z), \tag{9}$$

kde $M_0(z; \zeta)$ je regulární funkce proměnné z v D. Poznamenejme, že $M_0(z; \zeta)$ jako funkce proměnné ζ je jednoznačná.

Dokažme, že $b_k(\zeta)$ je harmonická funkce ξ a η v D, rovna jedné na L_k a nule na L_j, $j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$.

V (8) proveďme substituci z v ζ a ζ v z. Ve shodě s tímto změňme n v ν a ds v dσ. Potom dostaneme

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial G}{\partial \nu} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Uvažujme funkci $\delta_k(\zeta)$ bodu ζ na hranici L, kladouce

$$\delta_k(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \zeta \text{ leží na } L_j, \\ 0, & \text{jestliže } \zeta \text{ leží na } L_j, \ j \neq k. \end{cases} \tag{10}$$

Potom lze napsat $b_k(z)$ ve tvaru

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} \delta_k(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} \, \mathrm{d}\sigma. \tag{11}$$

Porovnáme-li toto se (4), přesvědčíme se o správnosti našeho tvrzení.

Nechť nyní ve vzorci (9) značí z vnitřní bod oblasti D, ζ bod na hranici L a ν vnitřní normálu k L v bodě ζ. Položme

$$\frac{\partial b_k(\zeta)}{\partial \nu} = a_k(\zeta) \tag{12}$$

a

$$\frac{\partial M(z; \zeta)}{\partial \nu} = T(z; \zeta). \tag{13}$$

Derivujeme-li (9) podle ν, dostaneme:

$$T(z; \zeta) = \frac{\partial M_0(z; \zeta)}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) \lg(z - z_k) - \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}. \tag{14}$$

Funkci $T(z; \zeta)$ budeme nazývat Schwarzovým jádrem oblasti D. Určeme jeho nejdůležitější vlastnosti.

Schwarzovo jádro je v D analytická funkce proměnné z a je mnohoznačná, jestliže je oblast D mnohonásobně souvislá. Při oběhu okolo L_k proti hodinovým ručičkám vzroste o $2\pi i a_k(\zeta)$. Dále $T(z; \zeta)$ je jednoznačná a neanalytická funkce ζ. Reálná část Schwarzova jádra je normální derivace Greenovy funkce. Jedna z větví její imaginární části je identicky rovna nule pro $z = a$:

$$\operatorname{Im}\{T(a; \zeta)\} \equiv 0. \tag{15}$$

Nechť $f(\zeta)$ je spojitá reálná funkce bodu na hranici L. Uvažujme integrál

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\zeta)\, T(z; \zeta)\, d\sigma; \tag{16}$$

$\Phi(z)$ je analytická funkce z. Ze vzorce (4) je patrno, že její reálná část je jednoznačná v D a na hranici se rovná $f(\zeta)$. Vzorec (15) dále ukazuje, že jedna z větví imaginární části $\Phi(z)$ je rovna nule pro $z = a$. Vzorec (16) tedy určuje analytickou funkci z hodnot její reálné části na hranici za předpokladu, že tato reálná část je jednoznačná.

Nechť $F(z) = u(z) + i\, v(z)$ je analytická funkce, jež nemá uvnitř D singulární body. Předpokládejme ještě, že její reálná část $u(z)$ je jednoznačná v D a spojitá uvnitř i na hranici D. Jak jsme již viděli, integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta)\, T(z; \zeta)\, d\sigma$$

je analytická funkce z, jejíž reálná část se rovná $u(z)$. Taková funkce se může lišit od $F(z)$ pouze o imaginární aditivní konstantu. Jedna z větví imaginární části posledního integrálu se rovná nule pro $z = a$. Odtud lze lehce nahlédnout, že

$$\frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta)\, T(z; \zeta)\, d\sigma = F(z) - i\, v(a). \tag{17}$$

V tomto vzorci je $v(a)$ hodnota v bodě a jedné z větví funkce $v(z)$.

Jestliže funkce $u(z)$ harmonická v D je jednoznačná, pak funkce $v(z)$ s ní konjugovaná bude obecně mnohoznačná. Vzorec (17) umožňuje vypočítat z hodnot $u(z)$ na hranici veličinu, o niž vzroste $v(z)$ při oběhu podél křivky L proti hodinovým ručičkám. Tento přírůstek je zřejmě roven

$$\int_L u(\zeta)\, a_k(\zeta)\, d\sigma. \tag{18}$$

Jestliže imaginární část $v(z)$ je jednoznačná a spojitá v celé oblasti i s hranicí, platí vzorec analogický vzorci (17):

$$\frac{1}{2\pi}\int_L v(\zeta)\,T(z,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{i}F(z) - \frac{1}{i}u(a). \tag{17_1}$$

Přitom je přírůstek reálné části $F(z)$ při oběhu kolem křivky L_k proti hodinovým ručičkám roven integrálu

$$-\int_L v(\zeta)\,a_k(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{19}$$

Jestliže $F(z)$ je jednoznačná, rovnají se integrály (18) a (19) nule. Odtud lehce dostaneme vzorce, jež platí pro libovolnou analytickou funkci regulární v D a spojitou uvnitř i na hranici D:

$$\int_L F(\zeta)\,a_k(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{20}$$

$$\int_L \overline{F(\zeta)}\,a_k(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{21}$$

Pro jednoznačnou funkci $F(z)$, regulární v D, platí současně vzorce (17) i (17_1). Vynásobíme-li (17_1) i a přičteme-li a odečteme-li výsledek od (17), dostaneme dva vzorce důležité pro vše další:

$$\frac{1}{4\pi}\int_L F(\zeta)\,T(z;\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = F(z) - \frac{1}{2}F(a), \tag{22}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_L F(\zeta)\,T(z;\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\overline{F(a)}. \tag{23}$$

Zdůrazněme, že vzorce (22) a (23) platí pouze tehdy, je-li funkce $F(z)$ regulární a tedy jednoznačná v D.

Uveďme speciální případ vzorce (22), jenž se dostane pro $F(z) \equiv 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L T(z;\zeta)\,\mathrm{d}\sigma \equiv 1. \tag{24}$$

Komplexní Greenova funkce má vlastnost, kterou nazveme invariancí vzhledem ke konformnímu zobrazení. Spočívá v tomto:

Nechť funkce $t = \varepsilon(z)$ konformně zobrazuje oblast D roviny z na oblast D' roviny t a nechť $M'(t;\tau)$ je komplexní Greenova funkce oblasti D'. Potom je komplexní Greenova funkce oblasti D dána vzorcem

$$M(z;\,\zeta) = M'(\varepsilon(z);\,\varepsilon(\zeta)). \tag{25}$$

Důkaz vzorce (25) se dostane jednoduše z definice Greenovy funkce.

Diferencujeme-li obě strany poslední rovnice ve směru normály, nalezneme vztah mezi Schwarzovými jádry oblastí D a D':

$$T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = T'(\varepsilon(z);\,\varepsilon(\zeta))\,\mathrm{d}\sigma',\quad \mathrm{d}\sigma' = |\mathrm{d}\tau|. \tag{26}$$

Na závěr dokažme několik vět pro Schwarzova jádra, jež jsou nutné pro další výklad.

Věta 1. *Nechť $f(\zeta)$ je funkce bodu na hranici L, spojitá podél L a m-krát spojitě diferencovatelná podél jistého oblouku L' této hranice. Nechť mimo to úhel sevřený normálou ν a reálnou osou je také m-krát spojitě diferencovatelný podél L'. Potom funkce*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L f(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma$$

je m — 1-krát spojitě diferencovatelná podél oblouku L'', jenž leží uvnitř L'.

Stačí uvažovat případ, kdy $f(\zeta)$ je reálná. Funkce $\Phi(z)$ je analytická a regulární v každé jednoduše souvislé části oblasti D. Její reálná část se na L shoduje s $f(z)$. Vyjmeme z D jednoduše souvislou část D_1 tak, aby L' ležela na hranici D_1. Zobrazme D_1 na kruh. Potom, vyjdeme-li ze Schwarzova integrálu pro kruh, lehce zjistíme, že $\Phi(z)$ je m — 1-krát diferencovatelná podél oblouku kruhu, odpovídajícímu oblouku L''. Nyní, abychom dokázali větu 1, stačí užít známého faktu, že v důsledku podmínek věty je funkce realisující zobrazení D_1 na kruh m — 1-krát spojitě diferencovatelná podél L''.

Věta 2. *Nechť úhel sevřený normálou ν a osou ξ je spojitý a má derivace až do řádu m-tého včetně vzhledem k σ na celé hranici L. Potom platí vzorec*

$$\frac{1}{4\pi}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + P(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{27}$$

kde funkce $P(z;\,\zeta)$, jestliže nepřihlížíme k jejím logaritmickým singularitám, je spojitá uvnitř i na hranici a m — 2-krát diferencovatelná na hranici vzhledem k z.

Funkce $M(z; \zeta) + \lg(\zeta - z)$, uvažovaná jako funkce proměnné z, nemá singulární body uvnitř D; její reálná část je jednoznačná a na L splývá s $\lg|\zeta - z|$. Na tuto funkci lze užít vzorce (17), jenž dává:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \lg|\zeta - t|\, T(z; t)\, d\sigma_t =$$
$$= M(z; \zeta) + \lg(\zeta - z) + i\, H(a; \zeta) - i\arg(\zeta - a).$$

V tomto vzorci z a ζ jsou body uvnitř D, t je bod na hranici L. Protože $H(a, \zeta) \equiv 0$, platí

$$M(z; \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_L \lg|\zeta - t|\, T(z; t)\, d\sigma_t - \lg(\zeta - z) + i \arg(\zeta - a).$$

Derivujeme-li tuto rovnici ve směru normály ν_ζ, procházející bodem ζ, necháme-li ζ konvergovat k hranici a užijeme-li věty o normální derivaci logaritmického potenciálu jednoduché vrstvy, dostaneme

$$T(z; \zeta) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta}\, T(z; t)\, d\sigma_t - \frac{2}{\zeta - z}\frac{\partial \zeta}{\partial \nu_\zeta} + 2i\, \frac{\partial \arg(\zeta - a)}{\partial \nu_\zeta}.$$

Dále

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu_\zeta} = \cos(\nu_\zeta, \xi) + i \cos(\nu_\zeta, \eta) = \cos(\sigma, \eta) - i \cos(\sigma, \xi) = -i\frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

Tak dojdeme ke vzorci (27), jestliže položíme

$$P(z; \zeta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_L \frac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta}\, T(z; t)\, d\sigma_t + \frac{i}{2\pi}\frac{\partial \arg(\zeta - a)}{\partial \nu_\zeta}.$$

Zbývá dokázat, že $P(z; \zeta)$ je $m - 2$-krát spojitě diferencovatelná podle z v $D + L$. Avšak to přímo plyne z věty 1, neboť v důsledku podmínek věty 2 je funkce $\dfrac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta}$ $m - 1$-krát spojitě diferencovatelná podle σ podél hranice L.

Věta 3. *Identita*

$$g(\zeta) = h(\zeta), \tag{28}$$

kde ζ je bod na hranici L a funkce $g(\zeta)$ a $h(\zeta)$ jsou spojité, je ekvivalentní soustavě identit

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_L g(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4\pi}\int_L h(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma,\\ \frac{1}{4\pi}\int_L \overline{g(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4\pi}\int_L \overline{h(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Je třeba dokázat, že (28) plyne z (29). Sečteme-li obě identity (29) a převedeme-li všechny členy nalevo, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma \equiv 0.$$

Reálná část posledního integrálu je harmonická funkce v D, splývající na L s $\mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\}$. Odtud plyne, že $\mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\} = 0$. Úplně obdobně se dokáže, že $\mathrm{Im}\{g(\zeta) - h(\zeta)\} = 0$.

§ 42. Převedení prvého a třetího problému na integrální rovnici.

V § 40 jsme zjistili, že prvý a třetí biharmonický problém se převádí na následující krajovou úlohu theorie funkcí komplexní proměnné:

Určit analytické funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, vyhovující těmto podmínkám:

1. $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ nemají singulární body uvnitř oblasti D;
2. $\varphi'(z)$ je jednoznačná v D;
3. na hranici L oblasti D platí

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta), \tag{1}$$

kde $\varkappa$ je konstanta a $g(\zeta)$ je daná spojitá a jednoznačná funkce bodu na hranici. Budeme předpokládat, že tato funkce je dostatečně hladká.

V prvém problému

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},\quad g(\zeta) = 2\mu(u_x + iu_y);$$

v třetím je třeba položit

$$\varkappa = -1,\quad g(\zeta) = -f(\zeta) - b_k.$$

O oblasti D budeme předpokládat, že je omezená.

Přistupme k řešení formulované krajové úlohy.

Často bývá užitečné konformně zobrazit oblast D na nějakou oblast D^*. Nechť $z = \omega(t)$ je funkce, realisující toto zobrazení. Označme

$$\varphi(\omega(t)) = \Phi(t),\quad \psi(\omega(t)) = \Psi(t).$$

Dále nechť $\zeta = \omega(\tau)$ a $G(t) = g(\omega(t))$. Úloha se tedy převádí na určení $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ z krajové podmínky

$$\varkappa\, \Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, \overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)} = G(\tau), \tag{1_1}$$

jež má být splněna na hranici γ oblasti D^*. Všimněme si, že $\Phi'(t)$ je jednoznačná v D^*. Odtud plyne, že funkce $\varkappa\, \Phi(t) - \overline{\Psi(t)}$ je také jednoznačná v D^*.

Skutečně z jednoznačnosti $\Phi'(t)$ a $G(t)$ plyne, že $\varkappa\, \Phi(t) - \overline{\Psi(t)}$ je jednoznačná na hranici. Odtud plyne, že tato funkce je jednoznačná i uvnitř oblasti, kde $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ nemají singulární body.

Podle věty 3, § 41 rovnice (1_1) je ekvivalentní těmto dvěma:

$$\frac{1}{4\pi} \int_\gamma \left\{\varkappa\, \Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, \overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)}\right\} T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma G(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma, \tag{2}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_\gamma \left\{\varkappa\, \overline{\Phi(\tau)} - \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\, \Phi'(\tau) - \Psi(\tau)\right\} T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \overline{G(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma. \tag{3}$$

Zde je γ hranice oblasti D^*; $T(t, \tau)$ je Schwarzovo jádro této oblasti.

Rovnice (2) a (3) lze zjednodušit. Položme

$$\Phi(t) = p + iq, \quad \Psi(t) = p_1 + iq_1.$$

Harmonické funkce $\varkappa p - p_1 = \mathrm{Re}\{\varkappa\, \Phi(t) - \overline{\Psi(t)}\}$ a $\varkappa q + q_1 = \mathrm{Im}\{\varkappa\, . \,\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}\}$ jsou jednoznačné v D^*. Na ně lze užít vzorců (17) a (17_1), § 41. Protože

$$\varkappa p - p_1 = \mathrm{Re}\{\varkappa\, \Phi(t) - \Psi(t)\}, \quad \varkappa q + q_1 = \mathrm{Im}\{\varkappa\, \Phi(t) + \Psi(t)\},$$

podle uvedených vzorců

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma (\varkappa p - p_1)\, T(t, \tau)\, d\sigma = \varkappa\, \Phi(t) - \Psi(t) - i[\varkappa\, q(a) - q_1(a)],$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma (\varkappa q + q_1)\, T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{i}\, [\varkappa\, \Phi(t) + \Psi(t)] - \frac{1}{i}\, [\varkappa\, p(a) + p_1(a)].$$

Vynásobme druhou rovnici i. Přičteme-li a odečteme-li ji od prvé, dostaneme:

$$\frac{1}{4\pi} \int_\gamma [\varkappa\, \Phi(\tau) - \overline{\Psi(\tau)}]\, T(t, \tau)\, d\sigma = \varkappa\, \Phi(t) - \frac{1}{2}\, [\varkappa\, \Phi(a) + \overline{\Psi(a)}],$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}[\varkappa\overline{\Phi(\tau)} - \Psi(\tau)]\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = -\Psi(t) + \frac{1}{2}[\varkappa\overline{\Phi(a)} + \Psi(a)].$$

Protože $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ jsou určeny až na aditivní konstantu, můžeme položit

$$\varkappa\,\Phi(a) + \overline{\Psi(a)} = 0.$$

Dosadíme-li nyní poslední dvě rovnice do (2) a (3) a označíme-li pro stručnost

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma} G(\tau)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = A(t),\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\overline{G(\tau)}\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = -B(t), \tag{4}$$

dostaneme

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{\Phi'(\tau)}\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = A(t), \tag{5}$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\,\Phi'(\tau)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = B(t). \tag{6}$$

Rovnice (6) přímo určuje $\Psi(t)$, jestliže je známa $\Phi'(\tau)$. Obraťme se proto k rovnici (5). Přepišme ji v tomto tvaru:

$$\begin{gathered}\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma - \\ - \frac{\omega(t)}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = A(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Funkce $\dfrac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v D^* a podle vzorce (23), § 41 máme

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Dosadíme-li toto do (7) a derivujeme-li podle t, dostaneme:

$$\varkappa\,\Phi'(t) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\right]\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2}\,\omega'(t)\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} = A'(t). \tag{8}$$

Určeme konstantu l z rovnice

$$l - \frac{1}{2\varkappa}\,\overline{l} = \frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} \tag{9}$$

a položme
$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\,\omega'(t). \tag{10}$$

Dosadíme-li toto do (8), dostaneme rovnici pro novou neznámou $\vartheta(t)$:
$$\varkappa\,\vartheta(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t, \tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = A'(t). \tag{11}$$

Budeme předpokládat, že hranice γ je dostatečně hladká. Potom $A(t)$ a $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t, \tau)\right]$ jsou spojité uvnitř i na hranici oblasti. Předpokládejme, že t konverguje k nějakému bodu τ_0 na hranici. Provedeme-li v (11) limitní přechod, dostaneme integrální rovnici
$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{4\pi\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(\tau_0)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(\tau_0, \tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varkappa}A'(\tau_0), \tag{12}$$
v níž neznámou je hodnota funkce $\vartheta(\tau)$ na hranici, při čemž $\vartheta(\tau)$ je regulární v D^*.

Rovnici (12) lze zjednodušit. Užijeme k tomu vzorce (14), § 41, z něhož lze lehce nahlédnout, že
$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t, \tau)\right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k(\tau)\lg(t - t_k),$$
kde $K(t; \tau)$ je v D^* regulární funkce t a t_k je bod uvnitř γ_k; γ_k je obraz L_k. Funkce $\dfrac{\vartheta(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v D^* a podle vzorce (21), § 41
$$\int_\gamma a_k(\tau)\frac{\overline{\vartheta(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pro $\vartheta(\tau)$ nyní dostaneme rovnici
$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{\varkappa}\int_\gamma K(\tau_0, \tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varkappa}A'(\tau_0). \tag{13}$$

Integrální rovnice (13) není Fredholmova, neboť za integračním znaménkem je $\overline{\vartheta(\tau)}$ a nikoliv $\vartheta(\tau)$. Lze ji však převést na soustavu dvou rovnic Fredholmova typu, jestliže oddělíme reálnou a imaginární část a za neznámé považujeme $\mathrm{Re}\{\vartheta(\tau)\}$ a $\mathrm{Im}\{\vartheta(\tau)\}$. Odtud plyne, že na rovnici (13) lze užít Fredholmovy alternativy.

§ 43. Vyšetřování integrální rovnice. Všimněme si především, že pravá strana rovnice (13) § 42 je jednoznačná v D^*. Skutečně v důsledku vzorce (14), § 41

$$A'(t) = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)\frac{\partial T(t,\tau)}{\partial t}\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)\frac{\partial^2 M_0(t,\tau)}{\partial\nu\partial t}\,d\sigma +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{G(\tau)}{(\tau-t)^2}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t-t_k}\int_\gamma a_k(\tau)\,G(\tau)\,d\tau$$

a všechny tři členy napravo jsou jednoznačné a regulární v D^*.

Předpokládejme nyní, že rovnice (13), § 42 je rozřešena a hodnoty $\vartheta(\tau)$ na hranici jsou určeny. Táž rovnice dá potom analytické pokračování $\vartheta(t)$ uvnitř oblasti, totiž

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\varkappa}A'(t) + \frac{1}{\varkappa}\int_\gamma K(t,\tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,d\sigma.$$

Určeme nyní konstantu l ve vzorci (9), § 42. Položme v (10), § 42 $t = a$ a přejděme ke konjugovaným hodnotám. Potom dostaneme $\overline{\Phi'(a)} = \overline{\vartheta(a)} + \bar{l}\,\overline{\omega'(a)}$. Dosadíme-li toto do vzorce (9), § 42, dostaneme rovnici pro l:

$$\varkappa l - \bar{l} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{1}$$

V prvém problému $\varkappa > 1$ a l je jednoznačně určeno rovnicí (1). V třetím problému $\varkappa = -1$ a rovnice (1) přejde v rovnici:

$$l + \bar{l} = -\frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{2}$$

Aby mohla být konstanta l v třetím problému určena, je nutné a stačí, aby veličina $\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ byla reálná. Jestliže je tato podmínka splněna, pak

$$\mathrm{Re}(l) = -\frac{1}{4}\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)} \tag{2_1}$$

a imaginární část l zůstává libovolnou. Funkce $\Phi'(t)$ je určena až na sčítanec tvaru $i\alpha\omega'(t)$, kde α je reálná konstanta.

Je-li určena $\Phi'(t)$, nalezneme ze vzorců (5) a (6), § 42 $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ a lehce se přesvědčíme, že tyto funkce jsou řešením naší úlohy.

Podmínka, že $\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ musí být reálná, je ekvivalentní podmínce:[1]

$$\int_L f_1\,dx + f_2\,dy = 0. \tag{3}$$

Dokažme to. V třetím problému

$$\varkappa = -1,\ g(\zeta) = -(f_1 + if_2)$$

a rovnice (12), § 42 nabývá tvaru

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(\tau_0) + \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,d\sigma &= \lim_{t\to\tau_0}\frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)\,\frac{\partial T(t, \tau)}{\partial t}\,d\sigma,\\ F(\tau) &= f_1 + if_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Řešme pomocnou úlohu: Určit analytické funkce $R(t)$ a $S(t)$ s jednoznačnou $R'(t)$, které nemají singulární body uvnitř D^* a vyhovují na γ rovnici

$$R(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{R'(\tau)} + \overline{S(\tau)} = F(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{2}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{5}$$

Upravujeme-li tuto rovnici obdobně jako rovnici (1), § 42, nalezneme:

$$S(t) + \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\,R'(\tau)\,T(t, \tau)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \overline{F(\tau)}\,T(t, \tau)\,d\sigma + \\ + \frac{\overline{\omega(a)}}{4}\,\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}, \tag{6}$$

$$R(t) + \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{R'(\tau)}\,T(t, \tau)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)\,T(t, \tau)\,d\sigma - \\ - \frac{\omega(a)}{4}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}} + \frac{\omega(t)}{2}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}, \tag{7}$$

$$R'(t) + \int_\gamma K(t, \tau)\,\overline{R'(\tau)}\,d\sigma + \frac{\omega'(t)}{2}\,\frac{\overline{R'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)\,\frac{\partial T(t, \tau)}{\partial t}\,d\sigma + \\ + \frac{\omega'(t)}{2}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{8}$$

---

[1] V problému II rovnice (3) značí, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule. Viz [28a].

Porovnáme-li (8) a (4), vidíme, že rovnici (8) vyhovuje $R'(t) = \vartheta(t)$. Určíme-li takto $R'(t)$, nalezneme z rovnic (6) a (7) $R(t)$ a $S(t)$.

Řešení pomocné úlohy tedy existuje. Označme nyní $R(t) = r(z)$, $S(t) = s(z)$, kde $z = \omega(t)$. Položme dále

$$s(z) = t'(z), \quad \mathrm{Re}\{\bar{z}\, r(z) + t(z)\} = w^*.$$

Rovnice (5) potom nabude tvaru (viz vzorec (2), § 40)

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} + i\frac{\partial w^*}{\partial y} = f_1 + if_2 + \frac{1}{2} z \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Vynásobme ji $d\bar{z}$, zintegrujme podél L a na obou stranách nalezené rovnice vezměme pouze reálné části. Potom dostaneme

$$\int_L dw^* = \int_L (f_1\, dx + f_2\, dy) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}\right)\int_L (y\, dx - x\, dy).$$

Avšak integrál nalevo se zřejmě rovná nule a druhý integrál napravo je dvojnásobná plocha S oblasti D. Odtud

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}\right) = \frac{1}{S}\int_L (f_1\, dx + f_2\, dy)$$

a naše tvrzení je dokázáno.

Všechny úvahy tohoto paragrafu byly učiněny za předpokladu, že integrální rovnice (13), § 42 má řešení. Dokažme nyní, že tento předpoklad je správný, že totiž rovnice je řešitelná, ať je na pravé straně cokoliv.

Na konci § 42 bylo uvedeno, že na rovnici (13), § 42 lze užít Fredholmovy alternativy. Stačí tedy dokázat, že příslušná homogenní rovnice má jediné řešení $\vartheta(\tau) \equiv 0$.

Položme $g(\zeta) \equiv 0$. Potom $A'(t) \equiv 0$ a rovnice (13), § 42 se stane homogenní. Nechť $\vartheta_0(\tau)$ je libovolné její řešení.

Všimněme si, že při třetím problému (pro $\varkappa = -1$) bude veličina $\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ reálná, neboť podmínka (3) je zřejmě splněna pro $f_1 + if_2 \equiv 0$. Pomocí známé funkce $\vartheta_0(\tau)$ nalezneme příslušné funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$, jež řeší prvý nebo třetí problém s nulovými krajovými podmínkami.

Užijeme-li věty o jednoznačnosti, lehce zjistíme, že $\varphi_0'(z) \equiv 0$ v prvém problému a $\varphi_0'(z) = Ci$ (C je reálná konstanta) v třetím problému. V obou případech vzorce (9) a (10), § 42 dávají $\vartheta_0(z) \equiv 0$. Řešitelnost integrální rovnice (13), § 42 je tím dokázána.

Jestliže jsme rozřešili třetí biharmonický problém, jsme s to rozřešit i druhý problém, t. j. problém theorie pružnosti při daných vnějších silách působících na hranici. Jak to lze učinit, ukážeme níže na příkladech.

Týmž způsobem se řeší problémy theorie pružnosti i pro případ nekonečné oblasti. V § 46 na příkladu ukážeme, jak se změní shora uvedená methoda. Zde pouze poznamenáme, že podmínka (3) není nutná, jestliže oblast D je neomezená.

§ 44. Případ jednoduše souvislé oblasti. Objasněme, jak se změní integrální rovnice (13), § 42 v případě, že oblast D je jednoduše souvislá. Nechť funkce $z = \omega(t)$ konformně zobrazuje kruh $|t| < 1$ na oblast D. Položme ještě $\zeta = \omega(\tau)$. Potom se Schwarzovo jádro pro kruh $|t| < 1$, jak známo, rovná

$$T(t, \tau) = \frac{\tau + t}{\tau - t}. \tag{1}$$

Rovnice (5), § 42 nabývá tvaru

$$\varkappa\, \Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, \overline{\Phi'(\tau)}\, \frac{\tau + t}{\tau - t}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma G(\tau)\, \frac{\tau + t}{\tau - t}\, d\sigma.$$

Všimneme-li si, že na kružnici γ $d\sigma = \frac{d\tau}{i\tau}$, lehce převedeme poslední rovnici na tvar

$$\varkappa\, \Phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau - t}\, d\tau + C' = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + C'', \tag{2}$$

kde C' a C'' jsou konstanty, rovné

$$C' = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, \overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma, \quad C'' = -\frac{1}{4\pi} \int_\gamma G(\tau)\, d\sigma.$$

Připočtěme a odečtěme $\omega(t)$ v čitateli integrálu na levé straně rovnice (2). Potom dostaneme

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau-t)}\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\omega(t)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t} +$$

$$+ C' = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau + C''. \tag{3}$$

Podle vzorce (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\tau+t}{\tau-t}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t} = \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$$

a rovnice (3) nabude tvaru

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau-t)}\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\omega(t)\,\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}} + C' = A(t) + C''. \tag{4}$$

Tentokrát jsme označili

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}.$$

Zderivujme (4) a položme jako v § 43

$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\omega'(t),$$

kde l je určeno rovnicí

$$l = \frac{1}{\varkappa}\frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}.$$

Tak dojdeme k rovnici

$$\vartheta(t) - \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(t)-\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-t)}\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = A'(t). \tag{5}$$

Jestliže v této rovnici chápeme t jako bod hranice a $A'(t)$ jako hodnotu této funkce na hranici, pak je to integrální rovnice pro neznámou $\vartheta(t)$. Tuto rovnici odvodil N. I. Muschelišvili.

Všimněme si důležité vlastnosti Muschelišviliho rovnice. Jestliže zobrazující funkce $\omega(t)$ je racionální, pak jádro rovnice (3) je degenerované. Vskutku, nechť $\omega(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, kde $p(t)$ a $q(t)$ jsou polynomy. Potom

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t} = \frac{p(\tau)\,q(t) - p(t)\,q(\tau)}{(\tau-t)\,q(t)\,q(\tau)}.$$

Čitatel se rovná nule pro $\tau = t$ a je proto dělitelný výrazem $\tau - t$. Podíl je polynom v proměnných t a τ. Napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{p(\tau)\,q(t) - p(t)\,q(\tau)}{\tau - t} = \sum_{k=1}^{N} t^k\, q_k(\tau).$$

Jádro rovnice (3) má nyní tvar

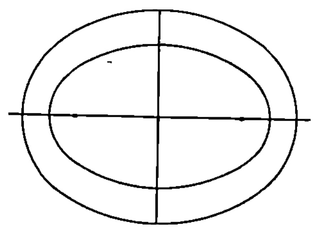
$$\frac{1}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t}\right] = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^k}{q(t)}\right)\frac{q_k(\tau)}{q(\tau)\,\overline{\omega'(\tau)}} \tag{6}$$

a je jasné, že toto jádro je degenerované. Podle toho, co bylo dokázáno v § 4, je rovnice (3) řešitelná v uzavřeném tvaru.

Tak dostáváme větu N. I. Muschelišviliho: Jestliže je kruh zobrazen na oblast D racionální funkcí, je základní úloha theorie pružnosti pro tuto oblast řešitelná v konečném tvaru.

§ 45. Oblast mezi dvěma konfokálními elipsami. Uvažujme oblast ohraničenou konfokálními elipsami

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - c^2} = 1,$$



Obr. 9.

při čemž $a_0 > a_1$ (obr. 9). Nechť na hranici oblasti působí vnější síly, jejichž rozložení je nám známo. Pro jednoduchost předpokládejme, že hlavní vektor vnějších sil působících na každou elipsu zvlášť je roven nule. V tom případě jsou Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jednoznačné v oblasti (§ 40).

Integrujeme-li složky vnějších sil podél oblouku, dostaneme hodnoty derivací funkcí napětí; jsou při tom určeny až na aditivní konstanty, různé na L_0 a L_1. Zvolme je libovolně na L_0; na L_1 zůstanou zatím neurčeny. Označme $f(\zeta)$ veličinu

$$f(\zeta) = i \int (X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s.$$

Potom Goursatovy funkce splňují na hranici rovnici

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{na } L_0 \\ f(\zeta) + C & \text{na } L_1. \end{cases} \tag{1}$$

Oblast mezi konfokálními elipsami se zobrazí na mezikruží funkcí

$$z = \omega(t) = \frac{c}{2}\left(t\sqrt{\varrho_0\varrho_1} + \frac{1}{t\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}\right), \tag{2}$$

kde

$$\varrho_0 = \frac{1}{c}\left(a_0 + \sqrt{a_0^2 - c^2}\right), \quad \varrho_1 = \frac{1}{c}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - c^2}\right).$$

Přitom L_0 a L_1 přejdou v kružnice

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{q}},$$

resp.

$$|t| = \sqrt{q}, \tag{3}$$

kde

$$q = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Tyto kružnice označme γ_0 a γ_1.

Označme nyní

$$\zeta = \omega(\tau), \quad \varphi(\omega(t)) = \Phi(t), \quad \psi(\omega(t)) = \Psi(t), \quad f(\omega(t)) = F(t).$$

Kromě toho označíme B veličinu rovnou nule na γ_0 a C na γ_1. Transformujeme-li proměnné v (1), dostaneme

$$\Phi(\tau) + \frac{\tau\sqrt{\varrho_0\varrho_1} + \dfrac{1}{\tau\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}}{\sqrt{\varrho_0\varrho_1} - \dfrac{1}{\tau^2\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}}\,\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau) + B. \tag{4}$$

Pro kruhové mezikruží je komplexní Greenova funkce známa,[1] totiž

$$M(t, \tau) = -\frac{1}{4}\lg q + \left(\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q}\right)\lg t + \frac{1}{2}\lg \tau - \lg(\tau - t) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 - q^{2n}\frac{t}{\tau}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 - q^{2n}\frac{\tau}{t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 - q^{2n-1} t\bar{\tau}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 - \frac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}\right) - \alpha(\tau), \tag{5}$$

[1] Viz na př. [4] a [24]. Ve výraze pro komplexní Greenovu funkci ve [4] je chyba.

kde $\alpha(\tau)$ je třeba určit tak, aby se imaginární část $M(t, \tau)$ v nějakém bodě a mezikruží rovnala nule.

Z (5) plyne výraz pro Schwarzovo jádro:

$$T(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q}\right)\lg t - \frac{1}{\tau - t}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2}\lg \tau - \alpha(\tau)\right) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}\dfrac{t}{\tau}}\frac{t}{\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}\dfrac{\tau}{t}}\frac{1}{t}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}t\bar{\tau}}t\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - \dfrac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu}. \tag{6}$$

Poznamenejme, že funkce

$$\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q} = b_1(\tau)$$

je harmonická v mezikruží, rovna nule na vnější kružnici a jednotce na kružnici vnitřní; její normální derivace, kterou v souhlase s § 41 označíme $a_1(\tau)$, je orthogonální ke každé funkci, regulární v mezikruží.

Vzorec (6) poněkud upravíme. Především

$$\frac{\partial \tau}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma = i\,\mathrm{d}\tau, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma = -i\,\mathrm{d}\bar{\tau}.$$

Oddělme nyní v (6) členy, jež obsahují rozdíl $t - \tau$ ve jmenovateli. Uvažujme prvé sčítance ve třetím a čtvrtém součtu:

$$A = -\frac{q}{1 - qt\bar{\tau}}t\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} + \frac{q}{1 - \dfrac{q}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} = iq\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{1}{1 - qt\bar{\tau}} - \frac{1}{\bar{\tau}(t\bar{\tau} - q)}\right).$$

Na kružnici γ_1 $\bar{\tau} = \dfrac{q}{\tau}$, a tedy

$$A = -\frac{iq^2}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{t\tau}{\tau - q^2 t} - \frac{\tau^2}{q^2(t - \tau)}\right) = -i\left[\frac{1}{\tau - t} + \frac{q^2 t}{\tau(\tau - q^2 t)}\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Úplně obdobně nalezneme, že na γ_0, kde $\bar{\tau} = \dfrac{1}{q\tau}$,

$$A = -i\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{t}{\tau(t - q^2\tau)}\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Definujme funkci $p(t, \tau)$ vztahy

$$p(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{-iq^2t}{\tau(\tau - q^2t)} & \text{na } \gamma_1, \\ \dfrac{it}{\tau(t - q^2\tau)} & \text{na } \gamma_0. \end{cases} \tag{7}$$

Potom

$$A = \frac{1}{i(\tau - t)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} + p(t, \tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Nyní

$$T(t, \tau) = a_1(\tau)\lg t + \frac{2}{i(\tau - t)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} + p(t, \tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{\tau - q^{2n}t}\frac{t}{\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} + \tag{8}$$

$$+ i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t - q^{2n}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1 - q^{2n+1}t\bar{\tau}}\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau} - q^{2n+1})}\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Určeme nyní jádro $K(t, \tau)$. Máme

$$\omega(\tau) - \omega(t) = \frac{c(\tau - t)}{2\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}\,\frac{\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1}{t\tau}.$$

Odtud

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)}\,T(t, \tau)\right] = -\frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)}a_1(\tau)\lg t + \frac{2}{i}\frac{\bar{\tau}^2}{t^2\tau(\varrho_0\varrho_1\bar{\tau}^2 - 1)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} +$$

$$+ \frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar{\tau}^2}{t^2\tau(\varrho_0\varrho_1\bar{\tau}^2 - 1)}a_1(\tau) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar{\tau}^2}{t\tau(\varrho_0\varrho_1\bar{\tau}^2 - 1)}p(t, \tau)\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar{\tau}^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar{\tau}^2 - 1)}\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) +$$

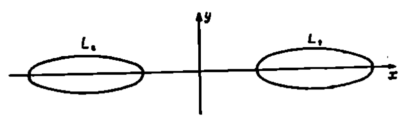
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar{\tau}^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar{\tau}^2 - 1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t}{\tau(\tau - q^{2n}t)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t - q^{2n}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1 - q^{2n+1}t\bar{\tau}}\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau} - q^{2n+1})}\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma}\right]\right\}$$

a
$$K(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\frac{\overline{\tau}^2}{t^2\,\tau(\varrho_0\varrho_1\overline{\tau}^2 - 1)}\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\overline{\tau}^2}{t^2\,\tau(\varrho_0\varrho_1\overline{\tau}^2 - 1)}\,a_1(\tau)\,\mathrm{d}\sigma +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\overline{\tau}^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\overline{\tau}^2 - 1)}\,p(t, \tau)\right]\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\overline{\tau}^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\overline{\tau}^2 - 1)}\right]\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\overline{\tau}^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\overline{\tau}^2 - 1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t\,\mathrm{d}\tau}{\tau(\tau - q^{2n}t)} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\,\mathrm{d}\tau}{t - q^{2n}\tau} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t\,\mathrm{d}\overline{\tau}}{1 - q^{2n+1}t\overline{\tau}} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\,\mathrm{d}\overline{\tau}}{\overline{\tau}(t\overline{\tau} - q^{2n+1})}\right]\right\}. \qquad (9)$$

Rozviňme $K(t, \tau)$ v Laurentovu řadu vzhledem k t. Ponecháme-li v této řadě pouze konečný počet členů, nahradíme přibližně jádro $K(t, \tau)$ degenerovaným. Tím najdeme přibližné řešení naší úlohy.

Nedostatek místa nám nedovoluje podrobněji se zastavit u tohoto přibližného řešení. Poznamenejme pouze, že řešíme-li integrální rovnici, dostaneme $\Phi'(t)$ ve tvaru Laurentovy řady (konečné, jestliže jádro (9) bylo nahrazeno degenerovaným). Konstantu C ve vzorci (1) zvolíme nyní tak, aby ve výrazu $\Phi'(t)$ zmizel člen obsahující $\frac{1}{t}$. Při takové volbě bude $\Phi(t)$ a tedy i $\varphi(z)$ jednoznačná. Tím bude zajištěna jednoznačnost posunutí.



Obr. 10.

§ 46. Vnějšek dvou oválů. V tomto paragrafu formulujeme a řešíme druhý problém theorie pružnosti pro oblast D, kterou dostaneme z roviny odstraněním dvou oválů (obr. 10).

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se hlavní vektor vnějších sil působících na každé z křivek L_1 a L_2 rovná nule. Máme určit funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, regulární vně vyňatých oválů L_1 a L_2 a vyhovující krajové podmínce
$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{na } L_1, \\ f(\zeta) + C & \text{na } L_2, \end{cases} \qquad (1)$$

O oválech L_1 a L_2 učiníme předpoklad sloužící k zjednodušení řešení naší úlohy.

Rovina, rozdělená řezy $(-b, -a)$ a (a, b) na reálné ose, se zobrazuje na kruhovém mezikruží

$$\sqrt{q} < |t| < \frac{1}{\sqrt{q}}$$

pomocí funkce

$$t = \exp\left\{\frac{\pi b}{K'} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}\right\}.^{1} \tag{2}$$

Zde jsme položili

$$q = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi K}{K'}}, \quad K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2z^2)}}$$

a $k = \frac{a}{b}$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Za ovály L_1 a L_2 zvolíme křivky, ve které při zobrazení (2) přejdou kružnice $|t| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ a $|t| = q_1^{\frac{1}{2}}$, kde q_1 je číslo větší než q a jemu dostatečně blízké. Funkce (2) zobrazuje oblast D na mezikruží

$$q_1^{\frac{1}{2}} \leqq |t| \leqq q_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Řešíme-li rovnici (2) pro neznámou z, dostaneme

$$z = \omega(t) = a \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \lg t\right),$$

kde sn je eliptická funkce Jacobiho. Položíme-li v (1) $\zeta = \omega(t)$ a užijeme-li našich obvyklých označení, dostaneme tutéž krajovou podmínku jako v předcházejícím paragrafu:

$$\Phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \begin{cases} F(\tau) & \text{na } \gamma_1, \\ F(\tau) + C & \text{na } \gamma_2; \end{cases} \tag{3}$$

[1] Viz na př. [24]. Užíváme zde označení $\exp u = \mathrm{e}^u$.

γ_1 a γ_2 značí kružnice $|\tau| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ a $|\tau| = q_1^{\frac{1}{2}}$. Obvyklým způsobem dostaneme rovnice

$$\Phi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma + \\ + \frac{C}{4\pi} \int_{\gamma_1} T(t, \tau)\, d\sigma, \tag{4}$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \Phi'(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{F(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma + \\ + \frac{\overline{C}}{4\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, d\sigma. \tag{5}$$

Zde Γ značí celou hranici mezikruží.

Jako v obecném případě rovnice (5) přímo určuje $\Psi(t)$, jestliže $\Phi'(t)$ je známa, a stačí vyšetřovat pouze rovnici (4).

Poznamenejme nyní: Protože oblast D je neomezená, funkce $z = \omega(t)$ nabývá uvnitř mezikruží nekonečné hodnoty (a to $\omega(-1) = \infty$) a je v něm tedy neregulární. Jestliže v rovnici (5) provedeme tytéž úpravy, jichž jsme užili v § 42, dojdeme nakonec k rovnici (viz (11), § 42)

$$\vartheta(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta(\tau)}\, d\sigma = A'(t). \tag{6}$$

Avšak řešíme-li ji, neřešíme tím naší úlohu. Vskutku určíme-li ze (6) hodnoty $\vartheta(\tau)$ na hranici, pomocí téže rovnice (6) analyticky pokračujeme $\vartheta(t)$ dovnitř mezikruží. Přitom, vzhledem ke sčítanci $-\omega(t)$ v integrandu, bude $\vartheta(t)$ obecně neregulární v mezikruží a proto nevhodná pro řešení problému z theorie pružnosti.

Rovnici (4) upravíme tak, že v ní položíme $t = -1$ a výsledek odečteme od (4). Dostaneme rovnici:

$$\Phi(t) - \Phi(-1) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, \overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(\tau)[T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, d\sigma + \frac{C}{4\pi} \int_{\gamma_1} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, d\sigma. \tag{7}$$

V čitateli integrandu nalevo odečteme a přičteme $\omega(t)$. Všimněme si, že

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\,\overline{\frac{\Phi'(\tau)}{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma=0. \tag{8}$$

Funkce $\dfrac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v mezikruží a podle vzorce (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}T(t,\tau)\,\overline{\frac{\Phi'(\tau)}{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\,\overline{\frac{\Phi'(a)}{\omega'(a)}}.$$

Tato identita je správná pro libovolné t uvnitř mezikruží. Speciálně pro $t=-1$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}T(-1,\tau)\,\overline{\frac{\Phi'(\tau)}{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\,\overline{\frac{\Phi'(a)}{\omega'(a)}}.$$

Odečteme-li toto od předcházející rovnice, dostaneme rovnici (8).

Rovnice (7) nabývá nyní tvaru:

$$\Phi(t)-\Phi(-1)+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\,\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}F(\tau)[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\,\mathrm{d}\sigma+\frac{C}{4\pi}\int_{\gamma_2}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\,\mathrm{d}\sigma.$$

V této rovnici je jádro integrálu nalevo regulární v mezikruží. Derivujeme-li podle t, dostaneme:

$$\Phi'(t)+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\right\}\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Gamma}F(\tau)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{C}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_2}T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{9}$$

Schwarzovo jádro $T(t,\tau)$ pro mezikruží je určeno vzorcem (8), § 45, v němž je pouze třeba místo q psát q_1.

Stejně jako v případě omezené oblasti lze v (9) nalevo zanedbat v integrandu člen obsahující funkci

$$a_1(\tau)\lg t=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lg|\tau|}{\lg q_1}\right)\lg t.$$

Zbývající část jádra označme $K(t, \tau)$. Tak dojdeme k rovnici pro neznámou $\Phi'(t)$:

$$\Phi'(t) + \int_\Gamma K(t, \tau)\, \overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_\Gamma F(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma +$$

$$+ \frac{C}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, d\sigma, \tag{10}$$

jejíž jádro jako funkce t je regulární uvnitř Γ.

Označme

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma F(\tau) T(t, \tau)\, d\sigma = A(t).$$

Druhý integrál napravo v (10) se vypočte lehce, neboť integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, d\sigma$$

je analytická funkce uvnitř Γ, jejíž reálná část se rovná jedné na γ_2 a nule na γ_1. Týmž podmínkám vyhovuje funkce

$$\frac{\lg t}{\lg q_1} + \frac{1}{2}$$

a poslední integrál se od ní může lišit pouze čistě imaginární aditivní konstantou:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{\lg t}{\lg q_1} + \tfrac{1}{2} + i\alpha. \tag{11}$$

Dosaďme toto do (10). Necháme-li $t \to \tau_0$, kde τ_0 je bod na Γ, dostaneme integrální rovnici

$$\Phi'(\tau_0) + \int_\Gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma = A'(\tau_0) + \frac{C}{2\tau_0 \lg q_1}. \tag{12}$$

Stejně jako v případě omezené oblasti lze dokázat, že rovnice (12) má vždy řešení. Při řešení je třeba zvolit C tak, aby v Laurentově rozvoji funkce $\Phi'(t)$ nebyl člen obsahující $\frac{1}{t}$. Potom $\Phi(t)$ bude jednoznačná v mezikruží a naše úloha bude rozřešena.

Abychom prakticky řešili rovnici (12), lze rozvinout $K(t, \tau)$ v Laurentovu řadu a ponechat z ní konečný počet členů. Ve článcích [24] a [25] je rovnice (12) řešena v tom případě, kdy jsou q a q_1 velmi malé, takže lze zanedbat vyšší mocniny těchto čísel, než je prvá. V uvedených článcích je funkce $f(\zeta)$ dána výrazem

$$f(\zeta) = \tfrac{1}{2}h[(1 + n)\,\zeta + (1 - n)\,\bar{\zeta}], \tag{13}$$

kde h a n jsou konstanty. Na tento případ vede úloha o tlaku horniny na nadloží dvou slojí.

Naznačme stručně toto řešení. Nebudeme zde provádět podrobné výpočty a uvedeme většinou pouze výsledky. Především se dá $\omega(t)$ uvnitř Γ rozvinout v řadu

$$\omega(t) = \frac{\pi b}{K'}\left[-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1+q^m}\left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\pi b}{K'(t+1)} + \omega_0(t). \tag{14}$$

Dále, klademe-li v (13) $\zeta = \omega(\tau)$, dostaneme

$$F(\tau) = \tfrac{1}{2}h(1 + n)\,\omega(\tau) + \tfrac{1}{2}h(1 - n)\,\overline{\omega(\tau)}$$

a

$$A(t) = \frac{h}{2}(1+n)\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \omega_0(\tau)\,T(t, \tau)\,d\sigma +$$

$$+ \frac{h}{2}(1-n)\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \overline{\omega_0(\tau)}\,T(t, \tau)\,d\sigma - \tag{15}$$

$$-\frac{bh}{8K'}\left\{(1+n)\int_{\Gamma}\frac{1}{1+\tau}T(t, \tau)\,d\sigma + (1-n)\int_{\Gamma}\frac{1}{1+\bar{\tau}}T(t, \tau)\,d\sigma\right\}.$$

Funkce $\omega_0(t)$ je regulární uvnitř Γ a prvé dva integrály v (15) se vypočtou přímo na základě vzorců (22) a (23), § 41. Obtížnější je výpočet druhých dvou integrálů. Provedeme-li tyto výpočty a ponecháme-li pouze členy s nižšími mocninami, dostaneme výraz pro pravou stranu v (12)

$$A'(t) + \frac{C}{2t\lg q_1} = -\frac{h\pi b}{2K'}\Big\{[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1] + [(1+n)\,q +$$

$$+ (1-n)\,q_1]\frac{1}{t^2} - 2[(1+n)q^2 + (1-n)q_1^2]\left(t + \frac{1}{t^3}\right) + 3[(1+n)q^3 +$$

$$+ (1-n)\, q_1^3]\, t^2 + 3[(1+n)\, q^3 + (1-n)\, q_1^3]\frac{1}{t^4} + \frac{1-C_0}{t \lg q_1}\Big\};$$

$$C_0 = \frac{CK'}{h\pi b}. \tag{16}$$

Ponecháme-li v jádře $K(t, \tau)$ pouze nižší členy, nahradíme (12) rovnicí s degenerovaným jádrem:

$$\Phi'(\tau_0) + \frac{ib}{4K'}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{2q}{\tau+1} + \frac{q_1^2}{\tau(\tau+1)}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau -$$

$$-\frac{ib}{4K'}\int\limits_{\gamma_2}\frac{q_1^2}{\tau^2(\tau+1)}\,\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau - \frac{ib}{4K'\tau_0\lg q_1}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{2} + q\tau -\right.$$

$$\left. -\frac{q}{\tau} - q^2\tau^2 + \frac{q^2}{\tau^2} + q^3\tau^3 - \frac{q^3}{\tau^3}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau\,\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{ib}{4K'\tau_0^2}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{2q(1-q)}{\tau(\tau+1)} -\right.$$

$$\left. -\frac{2q^2(1-q)}{\tau^2(\tau+1)} + \frac{2q^3}{\tau^3(\tau+1)} + \frac{qq_1^2}{\tau^2} + \frac{q_1^2\tau}{\tau+1}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+\frac{ib}{4K'\tau_0^2}\int\limits_{\gamma_2}\frac{qq_1^2}{\tau^2}\,\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau + \frac{ib}{4K'\tau_0^3}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{4q^2(1-q)}{\tau(\tau+1)} -\right.$$

$$\left. -\frac{4q^3}{\tau^2(\tau+1)}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau - \frac{ib}{4K'\tau_0^4}\int\limits_{\Gamma}\frac{6q^3}{\tau(\tau+1)}\,\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau = B(\tau_0). \tag{17}$$

Pro stručnost jsme označili $B(\tau_0)$ veličinu (16). Z rovnice (17) je patrno, že

$$\Phi'(\tau_0) = B(\tau_0) + D_0 + \frac{D_1}{\tau_0} + \frac{D_2}{\tau_0^2} + \frac{D_3}{\tau_0^3} + \frac{D_4}{\tau_0^4}. \tag{18}$$

Dosadíme-li toto do (17) a porovnáme-li koeficienty při stejných mocninách τ_0, dostaneme soustavu pěti rovnic s neznámými $D_0, \ldots, D_4$. K nim je třeba připojit šestou rovnici

$$D_1 - \frac{h\pi b}{2K'\lg q_1}(1 - C_0) = 0,$$

jež vyjadřuje, že $\Phi'(t)$ neobsahuje člen s $\frac{1}{t}$.

Řešíme-li uvedenou soustavu, najdeme

$$D_0 = D_2 = D_3 = D_4 = 0,$$

$$D_1 = \frac{h\pi^4 b^2 q}{4aK'(1+k)\,q_1 \lg q_1}\,[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1],$$

$$C_0 = 1 - \frac{\pi^3 bq[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1]}{2a(1+k)\,q_1}.$$

Odtud plyne, že přibližné řešení rovnice (12) zní:

$$\Phi'(t) = -\frac{h\pi b}{2K'}\left\{[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1]\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - 2[(1+n)\,q^2 + \right.$$
$$\left. + (1-n)\,q_1^2]\left(t+\frac{1}{t^3}\right) + 3[(1+n)\,q^3 + (1-n)\,q_1^3]\left(t^2+\frac{1}{t^4}\right)\right\}.$$

§ 47. O konvergenci postupných aproximací. Integrální rovnice (13), § 42, jak už jsme uvedli, je ekvivalentní soustavě dvou rovnic Fredholmova typu. Abychom sestavili tuto soustavu, položme

$$\vartheta(\tau) = p(\tau) + i\,q(\tau),\ K(\tau_0, \tau) = R(\tau_0, \tau) + i\,S(\tau_0, \tau),$$
$$\frac{1}{\varkappa}A'(\tau) = A_1(\tau) + i\,A_2(\tau);\ \frac{1}{\varkappa} = \lambda. \tag{1}$$

Oddělíme-li nyní v (13), § 42 reálnou a imaginární část, dostaneme uvedenou soustavu:

$$\begin{aligned} p(\tau_0) - \lambda \int_\gamma \{R(\tau_0, \tau)\,p(\tau) + S(\tau_0, \tau)\,q(\tau)\}\,d\sigma &= A_1(\tau_0),\\ q(\tau_0) - \lambda \int_\gamma \{S(\tau_0, \tau)\,p(\tau) - R(\tau_0, \tau)\,q(\tau)\}\,d\sigma &= A_2(\tau_0). \end{aligned} \tag{2}$$

O soustavě (2) dokážeme následující větu.[1]

Věta 1. *Všechna charakteristická čísla soustavy* (2) *jsou reálná a jejich absolutní hodnoty jsou větší než jedna.*

Fredholmova alternativa nám dovoluje nahradit tvrzení vyslovené ve větě 1 tvrzením, jež také budeme dokazovat:

Jestliže λ je buď číslo komplexní, nebo číslo reálné, jehož absolutní hodnota není větší než jedna, má homogenní soustava

[1] Pro případ jednoduše souvislé oblasti dokázal tuto větu D. I. Šerman [37e]; jeho důkaz lze snadno přenést i na případ mnohonásobně souvislé oblasti.

$$\begin{aligned} p(\tau_0) - \lambda \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma &= 0, \\ q(\tau_0) - \lambda \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

pouze triviální řešení $p(\tau) \equiv 0$, $q(\tau) \equiv 0$.

Předpokládejme nejdříve, že λ je reálné. Potom $|\lambda| \leqq 1$. Vynásobme druhou rovnici (3) i a přičtěme k prvé. Označme ještě $p(\tau) + iq(\tau) = \vartheta(\tau)$. Potom

$$\vartheta(\tau_0) - \lambda \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta(\tau)}\, \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{4}$$

Mohou nastat tyto případy:

a) $0 < \lambda < 1$. Rovnice (2) potom odpovídá prvému biharmonickému problému pro nulová posunutí na hranici a pro koeficient $\varkappa = \dfrac{1}{\lambda}$. Podle toho, co bylo dokázáno v § 43, má rovnice (4) a s ní i soustava (3) pouze triviální řešení.

b) $\lambda = -1$. Rovnice (4) odpovídá třetímu biharmonickému problému s nulovými hodnotami derivací hledané biharmonické funkce na hranici a uvedená rovnice má opět pouze triviální řešení.

c) Jestliže $-1 < \lambda < 0$ nebo $\lambda = 1$, položme $\lambda = -\lambda^*$, $\vartheta(\tau) = i\,\vartheta^*(\tau)$. Rovnice (4), jestliže krátíme i, přejde v

$$\vartheta^*(\tau_0) - \lambda^* \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta^*(\tau)}\, \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{5}$$

Zde je buď $0 < \lambda^* < 1$, nebo $\lambda^* = -1$. V důsledku a) a b) má rovnice (5) pouze triviální řešení $\vartheta^*(\tau) \equiv 0$. Avšak potom $\vartheta(\tau) \equiv 0$, $p(\tau) = q(\tau) \equiv 0$.

Nechť je nyní číslo λ komplexní: $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ a $\lambda_2 \neq 0$. Funkce $p(\tau)$ a $q(\tau)$ vyhovující soustavě (3) budou v tomto případě také obecně komplexní. Položme $p(\tau) = p_1(\tau) + i\, p_2(\tau)$, $q(\tau) = q_1(\tau) + i\, q_2(\tau)$. Oddělíme-li v (3) reálnou a imaginární část, dojdeme k soustavě čtyř integrálních rovnic:

$$\begin{aligned} p_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma &+ \\ + \lambda_2 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma &= 0, \qquad (6) \\ p_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma &- \end{aligned}$$

$$-\lambda_1 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0,$$

$$\begin{aligned} q_1(\tau_0) &- \lambda_1 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma + \\ &+ \lambda_2 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0, \\ q_2(\tau_0) &- \lambda_2 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma - \\ &- \lambda_1 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Třetí a čtvrtou rovnici této soustavy násobme i a přičtěme k prvé resp. k druhé rovnici. Zavedeme-li nová označení

$$p_1(\tau) + i\, q_1(\tau) = \vartheta_1(\tau), \quad p_2(\tau) + i\, q_2(\tau) = \vartheta_2(\tau),$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_1(\tau)}\, d\sigma + \lambda_2 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_2(\tau)}\, d\sigma = 0, \\ \vartheta_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_1(\tau)}\, d\sigma - \lambda_1 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_2(\tau)}\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Vyšetřujme podrobněji soustavu (7). Jádro $K(t, \tau)$ je regulární v oblasti D^*; odtud plyne, že funkce $\vartheta_1(\tau_0)$ a $\vartheta_2(\tau_0)$, vyhovující soustavě (7), lze analyticky pokračovat dovnitř D^* a že jsou v této oblasti regulární. Avšak v tomto případě jsou orthogonální k funkcím $a_k(\tau)$.

Připomeneme-li si vzorec (§ 42)

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} a_k(\tau) \lg(t - t_k),$$

přesvědčíme se o tom, že

$$\int_\gamma K(t, \tau)\, \overline{\vartheta_j(\tau)}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta_j(\tau)}\, d\sigma, \quad j = 1, 2.$$

Dosadíme toto do (7) a takto nalezené rovnice, na základě analytického pokračování, napíšeme pro vnitřní bod t oblasti D^*:

$$\vartheta_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] [\lambda_1 \overline{\vartheta_1(\tau)} - \lambda_2 \overline{\vartheta_2(\tau)}]\, d\sigma = 0,$$

$$\vartheta_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] [\lambda_2 \overline{\vartheta_1(\tau)} + \lambda_1 \overline{\vartheta_2(\tau)}]\, d\sigma = 0.$$

Označme $\Theta_1(t)$ a $\Theta_2(t)$ neurčité integrály funkcí $\vartheta_1(t)$ a $\vartheta_2(t)$. Integrujme poslední rovnice vzhledem k t. Zvolíme-li vhodným způsobem libovolné konstanty, až na které jsou určeny $\Theta_1(t)$ a $\Theta_2(t)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\Theta_1\, t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)[\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, \mathrm{d}\sigma = 0,\\
&\Theta_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)[\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, \mathrm{d}\sigma = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Poslední rovnice lze zjednodušit. Vskutku podle vzorce (23), § 41

$$
\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_1 \overline{\Theta_1'(a)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}, \tag{9}
$$

$$
\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_2 \overline{\Theta_1'(a)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{10}
$$

Konstanty na pravých stranách v (9) a (10) označme k_1 a k_2. Nyní lze rovnice (8) napsat takto:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_1(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)[\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, \mathrm{d}\sigma + k_1\, \omega(t) = 0\\
&\Theta_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau)\, [\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, \mathrm{d}\sigma + k_2\, \omega(t) = 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Předpokládejme, že $\omega(a) = 0$. Tím je určena pouze volba počátku v rovině t. Definujme nyní nové analytické funkce $\Psi_1(t)$ a $\Psi_2(t)$ vzorci

$$
\begin{aligned}
&\Psi_1(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\, T(t, \tau)[\lambda_1 \Theta_1'(\tau) - \lambda_2 \Theta_2'(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma = 0,\\
&\Psi_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\, T(t, \tau)[\lambda_2 \Theta_1'(\tau) + \lambda_1 \Theta_2'(\tau)]\, \mathrm{d}\sigma = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Lze přímo ověřit, že funkce $\Theta_1(t) + \overline{\Psi_1(t)}$ a $\Theta_2(t) + \overline{\Psi_2(t)}$ jsou jednoznačné v D^*. Dále z (11) a (12) plyne, že na γ jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_1(\tau)} + k_1\, \omega(\tau) = 0, \\
\Theta_2(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_2(\tau)} + k_2\, \omega(\tau) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

O tom se lze okamžitě přesvědčit, aplikujeme-li na každou z rovnic (13) větu 3, § 41. Potom dostaneme rovnici (11) a (12).

Položme

$$\Theta_j(t) = \Phi_j(t) + a_j\, \omega(t), \; j = 1, 2 \tag{14}$$

a zvolme a_1 a a_2 tak, aby v (13) vymizely členy, jež obsahují $\omega(\tau)$. Aby tomu tak bylo, musí a_1 a a_2 vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
a_1 - \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + k_1 = 0, \\
a_2 - \lambda_2 \bar{a}_1 - \lambda_1 \bar{a}_2 + k_2 = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Není obtížné se přesvědčit, že pro $\lambda_2 \neq 0$ je tato soustava řešitelná.

Vrátíme se opět k proměnné z, kladouce $\omega(t) = z$ a $\omega(\tau) = \zeta$. Označme

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(z), \; \Psi_j(t) = \psi_j(z), \; j = 1, 2.$$

Rovnice (13) nyní nabývají tvaru

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\zeta) - \zeta[\lambda_1 \overline{\varphi_1'(\zeta)} - \lambda_2 \overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_1(\zeta)} = 0, \\
\varphi_2(\zeta) - \zeta[\lambda_2 \overline{\varphi_1'(\lambda)} + \lambda_1 \overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_2(\zeta)} = 0.
\end{aligned}$$

Sečteme-li a odečteme-li poslední rovnice, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 + \lambda_2)\, \zeta\, \overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} = - \varphi_2(\zeta) + \\
+ (\lambda_1 - \lambda_2)\, \zeta \overline{\varphi_2'(\zeta)} - \overline{\psi_2(\zeta)}, \\
\varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 - \lambda_2)\, \zeta\, \overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} = \varphi_2(\zeta) - \\
- (\lambda_1 + \lambda_2)\, \zeta\, \overline{\varphi_2'(\zeta)} + \overline{\psi_2(\zeta)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Rovnice (16) platí na hranici L.

Zaveďme reálné funkce $u_1^1(x, y)$, $v_1^1(x, y)$, ..., $v_2^2(x, y)$ definované v oblasti D relacemi

$$\begin{aligned}
u_1^1 + iv_1^1 &= \varphi_1(z) - (\lambda_1 + \lambda_2)\, z\, \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}, \\
u_2^1 + iv_2^1 &= \varphi_1(z) - (\lambda_1 - \lambda_2)\, z\, \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}, \\
u_1^2 + iv_1^2 &= - \varphi_2(z) + (\lambda_1 - \lambda_2)\, z\, \overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)}, \\
u_2^2 + iv_2^2 &= \varphi_2(z) - (\lambda_1 + \lambda_2)\, z\, \overline{\varphi_2'(z)} + \overline{\psi_2(z)}.
\end{aligned}$$

V tomto označení lze rovnice (16) napsat takto:

na L $\qquad u_1^1 + iv_1^1 = u_1^2 + iv_1^2;\ u_2^1 + iv_2^1 = u_2^2 + iv_2^2.$ (17)

Zaveďme dále označení

$$\varphi_1(z) = p^1 + iq^1,\ \varphi_2(z) = p^2 + iq^2.$$

Není obtížné se přesvědčit o platnosti rovnic:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1^1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^1}{\partial y} = 2(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_1^1}{\partial x} - \frac{\partial u_1^1}{\partial y} = 2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial q^1}{\partial x};\\
&\frac{\partial u_2^1}{\partial x} + \frac{\partial v_2^1}{\partial y} = 2(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_2^1}{\partial x} - \frac{\partial u_2^1}{\partial y} = 2(1 + \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\mathrm{d} q^1}{\mathrm{d} y};\\
&\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial v_1^2}{\partial y} = -\ 2(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_1^2}{\partial x} - \frac{\partial u_1^2}{\partial y} = -2(1 + \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial x};\\
&\frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} = 2(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_2^2}{\partial x} - \frac{\partial u_2^2}{\partial y} = 2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Ze (17) zřejmě plyne platnost těchto rovnic:

$$\begin{aligned}
&\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^1\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^1\right)\mathrm{d}x\right] =\\
&= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^2 + \frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^2\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^2 - \frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^2\right)\mathrm{d}x\right],\\
&\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^1 + \frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^1\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^1 - \frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^1\right)\mathrm{d}x\right] =\\
&= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^2\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^2\right)\mathrm{d}x\right],
\end{aligned} \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^1\right) \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^1\right) \mathrm{d}x\right] = \\
&= \int\limits_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^2\right) \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^2\right) \mathrm{d}x\right], \\
&\int\limits_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^1\right) \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^1\right) \mathrm{d}x\right] = \\
&= \int\limits_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^2\right) \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^2\right) \mathrm{d}x\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Integrály v (19) transformujeme podle Greenova vzorce na dvojné. Zaveďme označení:

$$
\iint\limits_D \left(\frac{\partial p^j}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = A_j, \quad \iint\limits_D \left(\frac{\partial q^j}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = B_j, \ j = 1, 2, \tag{20}
$$

$$
\iint\limits_D \frac{\partial p^1}{\partial x} \frac{\partial p^2}{\partial x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = A_{12}, \quad \iint\limits_D \frac{\partial q^1}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = B_{12}. \tag{21}
$$

Užijeme-li rovnic (18) a Cauchy-Riemannových rovnic pro funkce p^j a q^j, dostaneme z (19):

$$
\begin{aligned}
(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_1 &= -(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} - \\
&\quad - (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12}, \\
(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_1 &= (1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} + \\
&\quad + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12}, \\
(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_2 &= (1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} + \\
&\quad + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12}, \\
(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_2 &= -(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} - \\
&\quad - (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12}.
\end{aligned}
$$

Vyloučíme-li odtud A_{12} a B_{12}, dostaneme

$$
2\lambda_2(A_1 + A_2) = 0, \quad 2\lambda_2(B_1 + B_2) = 0.
$$

Protože čísla A_j, B_j jsou nezáporná a $\lambda_2 \neq 0$, je

$$
A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0.
$$

Avšak v takovém případě

$$\frac{\partial p^1}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\partial q^1}{\partial x} = \frac{\partial q^2}{\partial x} \equiv 0,$$

a tedy

$$\varphi_1'(z) = \varphi_2'(z) \equiv 0.$$

Vrátíme-li se opět k proměnné t, $z = \omega(t)$, nalezneme, že

$$\Phi_1'(t) = \Phi_2'(t) \equiv 0$$

čili

$$\Theta_1'(t) - a_1\,\omega'(t) \equiv 0,\ \Theta_2'(t) - a_2\,\omega'(t) \equiv 0.$$

Určíme-li odtud čísla k_1 a k_2 (vzorce (9) a (10)) a dosadíme-li je do (15), najdeme $a_1 = a_2 = 0$, a tedy $\Theta_1'(t) = \Theta_2'(t) \equiv 0$. Uvědomíme-li si nyní, že

$$\Theta_j'(t) = \vartheta_j(t) = p_j + iq_j,$$

přesvědčujeme se, že $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \equiv 0$, a soustava (3) má pro komplexní λ pouze triviální řešení. Tím je věta 1 úplně dokázána.

Věta 2. *Posloupnost postupných aproximací pro rovnici* (13), § 42 *konverguje.*

Parametr λ v rovnici (13), § 42 je reálný a jeho absolutní hodnota není větší než jedna. Uvedená rovnice pro reálná λ je ekvivalentní soustavě (3), pro kterou body kruhu $|\lambda| \leqq 1$ nejsou charakteristické. Řešení soustavy (13), § 42 lze v tomto kruhu rozvinout v Taylorovu řadu podle mocnin λ. To je ekvivalentní tomu, že posloupnost postupných aproximací pro soustavu (3) čili pro rovnici (13), § 42 konverguje.

Je třeba poznamenat, že užití methody postupných aproximací v praxi je ztíženo tím, že je při ní třeba vypočítat veliké množství kvadratur.

KAPITOLA 3

ZOBECNĚNÝ SCHWARZŮV ALGORITMUS

§ 48. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti v rovině. Nechť D je mnohonásobně souvislá rovinná oblast, o níž budeme zprvu předpokládat, že je omezená. Stejně jako výše označíme křivky hranice $L_0, L_1, \ldots, L_n$, při čemž L_0 bude označovat křivku, omezu-