Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

---

Dirichletův problém a jeho užití

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 135–174.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402773

Terms of use:

© Přírodovědecké vydavatelství

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ČÁST II

UŽITÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

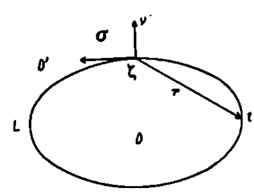
KAPITOLA 1

DIRICHLETŮV PROBLÉM A JEHO UŽITÍ

Dirichletův problém má v matematice co do četnosti a různorodosti aplikací mimořádné místo. Na něj se bezprostředně převádí základní úloha hydrodynamiky — úloha o obtékání, dále problémy torse a ohybu v theorii pružnosti. S ním jsou také těsně svázány základní úlohy statické theorie pružnosti jak v rovině, tak v prostoru. S týmž problémem mají styčné body i úlohy z theorie šíření vln v pružném prostředí. Tento výčet by bylo lehce možno rozšířit.

V této kapitole vyložíme methody řešení Dirichletova problému, jež jsou spojeny s theorií integrálních rovnic, a některé jeho aplikace. Budeme se zde především zabývat rovinným problémem, jenž má pro nás zvláštní význam jak pro hojnost aplikací, tak pro větší rozpracovanost a efektivnost method řešení.

Připomeňme, že Dirichletův problém spočívá v určení funkce, harmonické uvnitř oblasti, jestliže jsou známy hodnoty této funkce na hranici oblasti.



Obr. 4.

§ 29. Dirichletův problém pro jednoduše souvislou rovinnou oblast. Uvažujme nejdříve případ konečné oblasti (obr. 4). Označme oblast písmenem D, její hranici písmenem L. O křivce L budeme předpokládat, že je hladká a má spojitou křivost. Hledanou harmonickou funkci označme $U(x, y)$, její hodnoty dané na L označme $u(t)$, kde t je komplexní souřadnice bodu na hranici. Harmonická funkce $U(x, y)$ v jednoduše souvislé oblasti může být považována za reálnou část nějaké analytické funkce $\varphi(z)$, regulární v této oblasti;[1] naši úlohu rozřešíme, jestliže nalezneme funkci $\varphi(z)$. Tuto poslední budeme hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{1}$$

jehož hustotu $\mu(\zeta)$ budeme považovat za reálnou. Tím se úloha převádí na určení $\mu(\zeta)$.

Nechme bod z ve vzorci (1) konvergovat z vnitřku oblasti k nějakému bodu t na hranici. Užijeme-li vzorce (2), § 22, dostaneme:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta. \tag{2}$$

Určeme ve (2) reálnou část. Všimneme-li si, že $\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = u(t)$, najdeme

$$\mu(t) + \left[\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta = 2u(t)\right]$$

čili, protože funkce $\mu(\zeta)$ je reálná,

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \, \mathrm{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) = 2u(t).$$

Vypočtěme jádro integrálu. Nechť $\zeta - t = re^{i\vartheta}$. Potom

$$\mathrm{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}\lg(\zeta - t)) = d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} d\sigma,$$

kde $d\sigma$ je element oblouku hranice. V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

[1] Zde i dále budeme funkci komplexní proměnné nazývat *analytickou* v oblasti, jestliže tato funkce je holomorfní v každém bodě oblasti, až snad na konečný počet bodů nebo čar. Budeme nazývat analytickou funkci *regulární* v oblasti, jestliže tato funkce je jednoznačná a nemá uvnitř oblasti singulární body. Námi užívaná terminologie není obecně přijata.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg r}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \nu}\text{[1]}.$$

Zvolme směr radius-vektoru r od ζ k t. Potom, jak lze snadno vidět $\frac{\partial r}{\partial \nu} = -\cos(r, \nu)$, a tedy definitivně

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta - t}\right) = -\frac{\cos(r, \nu)}{r} d\sigma.$$

Jestliže $r \to 0$, pak i $\cos(\nu, r) \to 0$; bez obtíží lze dokázat, že při našem předpokladu spojitosti křivosti křivky L je jádro $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ spojité. Tím docházíme k integrální rovnici Fredholmova typu s neznámou $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = 2u(t). \tag{3}$$

Ve speciálním případě, kdy hranice L je elipsa, jsme tuto rovnici studovali v §§ 5 a 7. Dokážeme, že rovnice (3) je řešitelná a má jediné řešení pro libovolnou pravou stranu. Jinými slovy dokážeme, že $\lambda = \frac{1}{\pi}$ není charakteristické číslo jádra $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. Podle Fredholmovy alternativy (§ 8) stačí dokázat, že příslušná homogenní rovnice má pouze triviální řešení.

Nechť $u(t) \equiv 0$. Rovnice (3) se stane homogenní. Nechť $\mu_0(t)$ je její libovolné řešení, takže

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = 0. \tag{4}$$

Položme (z je bod uvnitř D)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5}$$

Podmínka $u(t) \equiv 0$ ukazuje, že $\operatorname{Re}\{\varphi_0(t)\} = 0$, jestliže t je bod na L. Podle věty o jednoznačnosti Dirichletova problému $\operatorname{Re}\{\varphi_0(z)\} \equiv 0$ v celé oblasti D. Nyní z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že $\varphi_0(z)$ je ryze imaginární konstanta, $\varphi_0(z) = ia$. Rovnici (5) lze převést na tvar

[1] ν je vnější normála k L.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta) - ia}{\zeta - z}\, d\zeta \equiv 0,$$

při čemž tato identita platí pro každý bod z uvnitř D. Avšak potom, podle známé věty o Cauchyho integrálech, $\mu_0(\zeta) - ia$ je limitní hodnota na L nějaké funkce $\psi(z)$, regulární vně L a rovné nule v nekonečnu. Imaginární část této funkce se rovná na L konstantě a, avšak potom $\psi(z) = $ konst. Protože se rovná nule pro $z = \infty$, $\psi(z) \equiv 0$. Funkce $\mu_0(t)$ je hodnota $\mathrm{Re}\{\psi(x)\}$ na hranici, a proto $\mu_0(t) \equiv 0$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Protože $\frac{1}{\pi}$ není charakteristické číslo rovnice (3), lze na tuto rovnici užít přibližných method řešení, vyložených v §§ 5 a 7.

Řešme nyní Dirichletův problém pro oblast D', vnější vzhledem k L. Tentokráte nelze hledat $\varphi(z)$ ve tvaru integrálu typu Cauchyho, protože se takový integrál rovná nule pro $z = \infty$, zatím co $\varphi(z)$ je pouze omezená v nekonečnu. Budeme proto hledat $\varphi(z)$ ve tvaru součtu integrálu typu Cauchyho a nějaké konstanty; položíme

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_L \mu(\zeta)\, d\sigma. \tag{6}$$

Hustotu $\mu(\zeta)$ budeme podle předcházejícího považovat za reálnou. Necháme-li z konvergovat k bodu t na hranici, dostaneme v souhlase se vzorcem (3), § 22:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\mu(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_L \mu(\zeta)\, d\sigma.$$

Opakujeme-li předcházející úvahy, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\, d\sigma = -2u(t). \tag{7}$$

Dokažme, že rovnice (7) je řešitelná. Nechť jako výše $u(t) \equiv 0$, $\mu_0(\zeta)$ nechť je řešení homogenní rovnice

$$\mu_0(t) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\, d\sigma = 0 \tag{8}$$

a
$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma; \quad z \in D'. \tag{9}$$

Z rovnice (8) plyne, že $\mathrm{Re}\{\varphi_0(t)\} = 0$, $t \in L$. Avšak potom, stejně jako výše $\varphi_0(z) = ia$. Dosadíme-li toto do (9) a necháme-li $z \to \infty$, dostaneme
$$ia = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Protože funkce $\mu_0(\zeta)$ je reálná, je
$$a = 0, \quad \int\limits_L \mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{10}$$

Nyní zřejmě
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \equiv 0, \quad z \in D'.$$

V důsledku známých vlastností integrálu typu Cauchyho odtud plyne, že $\mu_0(\zeta)$ je limitní hodnota na L nějaké funkce $\psi_1(z)$, regulární v D. Při tom $\mathrm{Im}(\psi_1(z)) \equiv 0$, protože $\mu_0(\zeta)$ je reálná. Odtud $\psi_1(z) = C =$ $=$ konst. a tudíž $\mu_0(\zeta) = C$. Dosadíme-li toto do (10), přesvědčíme se, že $C = 0$ a konečně $\mu_0(\zeta) \equiv 0$.

V souhlase s Fredholmovou alternativou můžeme nyní tvrdit, že rovnice (7) má řešení, a to jediné, ať je funkce $u(t)$ jakákoliv. Řešíme-li tuto rovnici a dosadíme-li řešení do (6), dostaneme řešení Dirichletova problému pro oblast D'.

§ 30. Příklad: Konformní zobrazení vnitřku elipsy na kruh. Jak je známo, Dirichletův problém se dá jednoduše řešit, jestliže je známo konformní zobrazení oblasti na kruh. Naopak jestliže je pro nějakou jednoduše souvislou oblast známo řešení Dirichletova problému, lze najít funkci, konformně zobrazující oblast na kruh. Dokažme to.

Nechť $w = \omega(z)$ je funkce realisující konformní zobrazení oblasti D na kruh $|w| < 1$. Nechť dále $z = a$ je bod oblasti D, jenž je zobrazen na střed kruhu $w = 0$. Potom
$$\omega(z) = (z - a)\,\psi(z), \tag{1}$$

kde $\psi(z)$ je regulární a různá od nuly v D. V tom případě funkce

$$\varphi(z) = \lg\psi(z)$$

je také regulární v D. Najděme podmínky, určující funkci $\varphi(x)$.

Jestliže z splyne s bodem t hranice, pak

$$|w| = |t - a| \,.\, |\psi(t)| = 1.$$

Odtud

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = \lg|\psi(t)| = -\lg|t - a|. \tag{2}$$

Abychom tedy určili $\varphi(t)$, je třeba řešit Dirichletův problém pro $u(t) = -\lg|t - a|$. Najdeme-li $\varphi(t)$, pak již lehce určíme $\omega(z)$.

Jako příklad najdeme funkci, která konformně zobrazuje vnitřek elipsy

$$x = a\cos\vartheta,\ y = b\sin\vartheta$$

na kruh $|w| < 1$.

Tuto úlohu lze řešit pomocí eliptických funkcí. Podáme však zde jiné řešení užitím integrálních rovnic.

Žádejme, aby střed elipsy přešel v střed kruhu. Pro funkci $\varphi(t)$ dostaneme podmínku na hranici

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = -\lg|t|.$$

Položíme-li

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

dojdeme k integrální rovnici (§ 5, vzorce (14) až (15))

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{1}{2}(\vartheta + \tau)} = -2\lg|t|,\quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \tag{3}$$

Najděme Fourierův rozvoj funkce $2\lg|t|$. Máme:

$$2\lg|t| = \lg(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta).$$

Bez obtíží si ověříme identitu

$$\lg(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta) = 2\lg\frac{a + b}{2} + 2\mathrm{Re}\,\lg\left(1 + \frac{a - b}{a + b}\sigma^2\right),$$

kde $\sigma = e^{i\vartheta}$. Rozvineme-li v nekonečnou řadu logaritmus na pravé straně rovnice a oddělíme-li reálnou část, nalezneme hledaný rozvoj:

$$\lg(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta) = 2\lg\frac{a+b}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^k\cos 2k\vartheta. \quad (4)$$

Podle vzorců (14), § 5 nalezneme Fourierovy koeficienty funkce $\mu(t)$:

$$A_0 = -\lg\frac{a+b}{2},\quad A_{2k} = -\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}};$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Ostatní koeficienty se rovnají nule. Nyní

$$\mu(\zeta) = -\lg\frac{a+b}{2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\cos 2k\vartheta \quad (5)$$

a

$$\varphi(z) = -\lg\frac{a+b}{2} -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad (6)$$

při čemž $\zeta = a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta$. Vypočtěme integrály v (6):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2k\vartheta(-a\sin\vartheta + ib\cos\vartheta)}{a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta - z}\,d\vartheta.$$

Položíme-li $e^{i\vartheta} = \sigma$, převedeme tento integrál na integrál

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{(\sigma^{2k}+\sigma^{-2k})[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,\frac{d\sigma}{\sigma} = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

kde I_1 a I_2 jsme označili integrály

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{2k-1}[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,d\sigma,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{-2k-1}[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,d\sigma.$$

Integrand v I_1 má jednoduché póly v bodech

$$\sigma_1 = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b},\quad \sigma_2 = \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b}.$$

Residua v těchto bodech se rovnají

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k}, \quad \left(\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k}. \tag{7}$$

Dokažme, že oba póly σ_1 a σ_2 leží uvnitř kruhu $|\sigma| < 1$.

Součin $\sigma_1\sigma_2$ se rovná $\dfrac{a-b}{a+b}$, a tudíž je menší než jedna. Jedno z čísel σ_1, σ_2 je tedy v absolutní hodnotě nutně menší než jedna. Jestliže by absolutní velikost druhého byla větší než jedna, pak by se integrál I_1 rovnal jednomu z residuí (7) a nebyl by regulární uvnitř elipsy, což zřejmě není možné.[1] Z již dokázaného plyne, že

$$I_1 = \frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^{2k} + (z-\sqrt{z^2-c^2})^{2k}}{(a+b)^{2k}}.$$

---

[1] Proveďme přímý důkaz našeho tvrzení. Označme

$$\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{c} = \chi,$$

odkud $z = \dfrac{c}{2}\left(\chi + \dfrac{1}{\chi}\right)$. Toto zobrazení transformuje rovinu z rozdělenou řezem podél úsečky $\langle -c, c\rangle$ buď na vnitřek, nebo na vnějšek kružnice $|\chi| = 1$, což závisí na volbě znaménka před odmocninou. Nechť na příklad při volbě znaménka minus před odmocninou dostaneme $|\chi| < 1$. Potom tím spíše

$$\left|\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right| < 1.$$

Uvažujme nyní kružnici $|\chi| = \dfrac{a+b}{c}$. Jestliže provedeme zobrazení

$$\chi = \frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c},$$

přejde tato kružnice v danou elipsu

$$x = a\cos\vartheta,\ y = b\sin\vartheta.$$

Vnitřním bodům elipsy při tom odpovídají body roviny χ, pro něž $1 \leqq |\chi| < \dfrac{a+b}{c}$. Tudíž uvnitř elipsy

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right| < \frac{a+b}{c}$$

čili

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right| < 1.$$

Abychom vypočetli I_2, položme $\sigma = \frac{1}{\tau}$. Potom

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau^{2k-1}[a + b - (a - b)\,\tau^2]}{(a - b)\,\tau^2 - 2z\tau + (a + b)}\,d\tau.$$

Uvažujeme-li obdobně jako v předcházejícím, najdeme, že oba póly integrandu leží vně jednotkové kružnice, a tedy $I_2 = 0$. Tak dostaneme

$$\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{L} \frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2}\,\frac{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{2k} + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{2k}}{(a + b)^{2k}}. \tag{8}$$

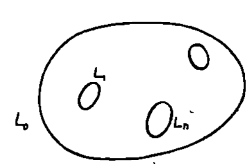
Čitatel na pravé straně je zřejmě polynom stupně $2k$. Označme jej pro stručnost $F_{2k}(z)$. Potom

$$\varphi(z) = -\lg\frac{a + b}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{1}{(a + b)^{2k}}\,\frac{c^{2k}}{(a + b)^{2k} + (a - b)^{2k}}\,F_{2k}(z) \tag{9}$$

a hledané zobrazení se rovná

$$\omega(z) = \frac{2z}{a + b}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{1}{(a+b)^{2k}}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}}\,F_{2k}(z)}. \tag{10}$$

§ 31. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti. Nechť D je omezená $(n + 1)$-násobně souvislá oblast. Její hranice L se skládá z $n + 1$ uzavřených křivek, jež označíme L_0, $L_1, \ldots, L_n$, při čemž index nula připíšeme křivce, omezující oblast z vnějšku (obr. 5).



Obr. 5.

Dříve než přistoupíme k řešení našeho problému, učiňme jednu poznámku. Jestliže funkce $U(x, y)$ je jednoznačná a harmonická v mnohonásobně souvislé oblasti, bude funkce $V(x, y)$ s ní konjugovaná obecně mnohoznačná. Objasněme charakter její mnohoznačnosti. Nechť ν je směr vnější normály k L. Označme

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ a

$$-\int_{L_k} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \mathrm{d}\sigma = 2\pi A_k.$$

Avšak poslední integrál se rovná přírůstku $V(x, y)$ při oběhu kolem křivky L_k proti hodinovým ručičkám. Jestliže tedy je harmonická funkce jednoznačná v D, vzroste funkce s ní konjugovaná o konstantu $2\pi A_k$ při oběhu kolem křívky L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Při tomtéž oběhu vzroste analytická funkce $\varphi(z) = U(x, y) + i\, V(x, y)$ o $2\pi i A_k$. Tentýž přírůstek získá funkce $A_k \lg(z - z_k)$, kde z_k je libovolný bod uvnitř D. Odtud plyne, že $\varphi(z)$ lze napsat ve tvaru

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{2}$$

kde $\varphi^*(z)$ je jednoznačná funkce regulární v D.

Dirichletův problém lze řešit takto: Nechť $u(t)$ je daná hodnota funkce $U(x, y)$ na L. Potom z (2) plyne

$$\mathrm{Re}\{\varphi^*(t)\} = u(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{3}$$

Jednoznačnou funkci $\varphi^*(z)$ budeme hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho:

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \tag{4}$$

s reálnou hustotou $\mu(\zeta)$. Činíme-li tytéž úsudky jako v předcházejícím paragrafu, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mathrm{d}\sigma = 2u(t) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{5}$$

Lze dokázat, že $\frac{1}{\pi}$ je charakteristické číslo jádra $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ a že mu přísluší n lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Koeficienty A_k určíme z podmínky, že pravá strana (5) je orthogonální k charakteristickým funkcím konjugované rovnice. Potom je rovnice (5) řešitelná. Řešíme-li ji, nalezneme podle vzorců (4) a (2) řešení Dirichletova problému.

Vyložená methoda je v praxi málo vhodná, neboť vyžaduje výpočet charakteristických funkcí konjugované rovnice. Uvedeme proto jinou methodu, oproštěnou od uvedeného nedostatku.

Označme $a(t, \zeta)$ funkci, která se rovná jedné, jestliže body t a ζ leží na téže vnitřní křivce L_k, a která se rovná nule ve všech ostatních případech. Rovnici (5) nahradíme touto:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) \, d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{6}$$

Napíšeme-li tuto rovnici podrobněji, má tento tvar:

Jestliže t leží na L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) \, d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|, \tag{7_1}$$

jestliže t leží na L_0, pak

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) \, d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{7_2}$$

Dokažme, že rovnice má řešení, a to jediné, ať je pravá strana jakákoliv. K tomu stačí se přesvědčit o tom, že homogenní rovnice

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu_0(\zeta) \, d\sigma = 0 \tag{7}$$

má pouze triviální řešení $\mu_0(t) \equiv 0$.

Nechť $\mu_0(t)$ je libovolné řešení rovnice (7). V rovnici (7) převeďme napravo integrál s jádrem $a(t, \zeta)$. Potom lze tuto rovnici napsat ve tvaru:

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu_0(\zeta) \, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu_0(\zeta) \, d\sigma, \quad t \in L_k, \ k > 0,$$

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu_0(\zeta) \, d\sigma = 0, \qquad t \in L_0.$$

Zaveďme označení

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = b_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n;$$

položme ještě $b_0 = 0$. Rovnici, jíž vyhovuje $\mu_0(t)$, lze napsat v následujícím tvaru:

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\cos(\nu, r)}{r}\mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 2b_k,\ \ t \in L_k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Uvažujme integrál typu Cauchyho:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,\ \ z \in D.$$

Užijeme-li rovnice (8) a opakujeme-li úvahy § 29, nalezneme, že $\varphi_0(z)$ vyhovuje na křivkách L_k vztahům

$$\mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\} = b_k,\ \ \zeta \in L_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial\mathrm{Im}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial\nu} = -\frac{\partial\mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial\sigma} = 0,\ \ \zeta \in L,$$

neboť veličiny b_k jsou konstantní. Funkce $\varphi_0(z)$ je regulární v D a její imaginární část je harmonická v D. Normální derivace imaginární části se rovná nule na L; podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému $\varphi_0(z) \equiv$ konst. Při tom $\mathrm{Re}\{\varphi_0(z)\} \equiv 0$, neboť tato funkce se rovná nule na L_0. Tudíž $b_k = 0$ a $\varphi_0(z) = ia$, kde a je reálná konstanta. To dává

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu_0(\zeta) - ia}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \equiv 0,\ \ z \in D.$$

Odtud plyne, že na každé z křivek L_k je funkce $\mu_0(\zeta) - ia$ limitní hodnota funkce, rovné nule v nekonečnu a regulární v každé oblasti komplementární k D, omezené křivkou L_k. Imaginární část této funkce je konstanta rovná a; avšak potom je i její reálná část konstanta:

$$\mu_0(\zeta) = c_k = \text{konst.},\ \ \zeta \in L_k.$$

Při tom $c_0 = 0$, neboť pro $z = \infty$ se $\mu_0(\zeta) - ia$ rovná nule. Dále

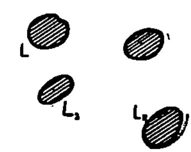
$$0 = b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu_0(\zeta)\, d\sigma = \frac{c_k}{2\pi} \int_{L_k} d\sigma.$$

Odtud $c_k = 0$ a tudíž $\mu_0(\zeta) \equiv 0$. Nyní z Fredholmovy alternativy plyne, že rovnice (6) má řešení, a to jediné, ať je pravá strana jakákoliv. Řešíme-li rovnici (6), podrobíme koeficienty A_k požadavku, aby

$$\int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$ [1]

Potom rovnice (6) a (5) jsou si rovny a podle vzorců (4) a (2) nalezneme řešení naší úlohy.

Přejděme k případu neomezené oblasti. Nechť oblast D je vnějšek n křivek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (obr. 6). Vzorec (2) zůstává v platnosti, pouze koeficienty A_k jsou tentokráte podrobeny podmínce



Obr. 6.

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0. \tag{9}$$

Kdyby rovnice (9) neplatila, rostla by harmonická funkce $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\}$ v nekonečnu jako $\lg|z| \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, což odporuje definici harmonické funkce. Jako v § 29 nemůže být $\varphi^*(z)$ napsána ve tvaru pouhého integrálu typu Cauchyho, a proto položíme

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma. \tag{10}$$

To vede na rovnici

$$\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{11}$$

Tato rovnice má $n - 1$ charakteristických funkcí. Podmínky orthogonality pravé strany (11) k charakteristickým funkcím konjugované

[1] Rovnice $\int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma = 0$ představují soustavu lineárních nehomogenních algebraických rovnic pro koeficienty A_k. Tato soustava má vždy řešení, neboť v opačném případě by měl homogenní Dirichletův problém, jak se lehce přesvědčíme, netriviální řešení.

rovnice tvoří spolu s rovnicí (9) soustavu n rovnic, kterou jsou určeny koeficienty A_k.

Abychom nemuseli počítat charakteristické funkce konjugovaného jádra, budeme postupovat jako v případě omezené oblasti. Označme $b(t, \zeta)$ funkci, jež se rovná jedné, jestliže t a ζ leží na téže křivce L_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, a nule v ostatních případech. Rovnici (11) nahradíme touto rovnicí:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k| \tag{12}$$

nebo podrobněji: Jestliže t leží na L_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, pak

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|; \tag{13_1}$$

jestliže t leží na L_n, pak

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{13_2}$$

Právě tak jako shora lze dokázat, že rovnice (12) má řešení pro libovolnou pravou stranu. Řešíme-li ji, žádáme, aby

$$\int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Rovnice (9) a (14) tvoří soustavu n lineárních rovnic, z nichž určíme koeficienty A_k. Jestliže jsou splněny podmínky (14), pak rovnice (11) a (12) splynou; takto určená funkce $\mu(\zeta)$ umožní řešení Dirichletova problému.

§ 32. Modifikovaný Dirichletův problém a Neumannův problém. Modifikovaným Dirichletovým problémem budeme nazývat úlohu určit analytickou funkci, regulární v mnohonásobně souvislé oblasti, jestliže na každé z křivek tvořících hranici je dána reálná část této funkce až na aditivní konstantu.

Hledaná analytická funkce $\varphi(z)$ musí tedy na hranici vyhovovat této podmínce: Jestliže t leží na křivce L_k, pak

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = f(t) + b_k, \tag{1}$$

kde $f(t)$ je daná funkce a b_k jsou nějaké konstanty. Ty musí být určeny z podmínky, že $\varphi(z)$ je jednoznačná v oblasti. Jednu z konstant b_k lze zvolit libovolně. Ostatní jsou pak určeny jednoznačně. Dokažme to sporem. Zvolme na př. pevně b_0 a nechť $\varphi_1(z)$ a $\varphi_2(z)$ jsou dvě funkce regulární v oblasti D, vyhovující rovnicím

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\varphi_1(t)\} &= f(t) + b_k',\\ \mathrm{Re}\{\varphi_2(t)\} &= f(t) + b_k'',\end{aligned} \quad b_0' = b_0'', \quad t \in L_k.$$

Potom rozdíl $\omega(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$ je také regulární v D a jeho reálná část se rovná konstantě $b_k' - b_k''$ na každé z křivek L_k. V takovém případě

$$\frac{\partial \mathrm{Im}\{\omega(t)\}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathrm{Re}\{\omega(t)\}}{\partial \sigma} = 0.$$

Protože $\omega(z)$ je regulární v D, je $\mathrm{Im}\{\omega(z)\}$ harmonická v D. Podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému $\mathrm{Im}\{\omega(z)\} = $ $=$ konst. Potom z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} =$ $=$ konst. Avšak na L_0 $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} = 0$, neboť $b_0' = b_0''$, a proto $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} =$ $= 0$, a tedy $b_k' = b_k''$. Z toho mezi jiným plyne, že řešení modifikovaného Dirichletova problému je určeno až na čistě imaginární aditivní konstantu.

Výsledky předcházejícího paragrafu dovolují jednoduše řešit modifikovaný Dirichletův problém. V případě omezené oblasti (obr. 5) napišme integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 2f(t). \tag{2}$$

V souhlase s tím, co bylo řečeno v předcházejícím paragrafu, má tato rovnice jediné řešení. Řešme ji. Označme nyní

$$b_0 = 0, \;\; b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma; \;\; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Potom, jestliže t leží na L_k,

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) \, d\sigma = 2[f(t) + b_k]. \tag{4}$$

Položme nyní

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{5}$$

Levá strana v (4) se rovná $2\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}$ (viz § 29) a z (4) plyne, že jednoznačná funkce $\varphi(z)$, regulární v D, vyhovuje podmínce (1) a je tudíž řešením modifikovaného Dirichletova problému.

Jestliže je oblast neomezená, pak řešení problému dostaneme, jestliže řešíme integrální rovnici

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \, d\sigma = -2f(t). \tag{6}$$

Zde položíme

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) \, d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta) \, d\sigma \tag{7}$$

a potom integrál (5) dává řešení modifikovaného Dirichletova problému pro nekonečnou oblast.

Na modifikovaný Dirichletův problém lze převést řadu úloh: problém konformního zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí, problém kroucení dutých tyčí, problém obtékání a mnohé jiné. Na tentýž problém se převede t. zv. Neumannův problém.

Neumannův problém zní takto: Určit funkci harmonickou v oblasti, jestliže jsou na hranici známy hodnoty její normální derivace.

Podmínka nutná a postačující, aby Neumannův problém měl řešení, je

$$\int_L F(\zeta) \, d\sigma = 0,$$

kde $F(\zeta)$ je daná hodnota normální derivace hledané funkce. Důkaz tohoto dobře známého tvrzení se uvádí v učebnicích matematické fysiky.

Nechť $U(x, y)$ je hledaná funkce a $F(\zeta)$ je daná hodnota její normální derivace na hranici. Nechť dále $V(x, y)$ je funkce konjugovaná s $U(x, y)$ a $\varphi(z) = U + iV$.

Jak už jsme ukázali v předešlém paragrafu,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{8}$$

kde $\varphi^*(z)$ je jednoznačná funkce. V tomto případě jsou koeficienty A_k známy:

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} F(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma$$

a úloha se tím převádí na určení jednoznačné funkce $\varphi^*(z)$.

Bez obtíží lze určit krajové podmínky pro $\varphi^*(z)$. Nechť

$$\varphi^*(z) = U^* + iV^*.$$

Na hranici L známe normální derivaci funkce U^*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = F(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \lg|t - z_k|}{\partial \nu} = F^*(t). \tag{9}$$

Na křivce L_k zvolme libovolný bod t_k. Potom na této křivce máme

$$V^* = \int_{t_k}^{t} F^*(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma + b_k, \tag{10}$$

kde b_k je dosud neurčená konstanta. Funkce $-i\,\varphi^*(z) = V^* - iU^*$ je řešením modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (10). Řešíme-li tento problém, řešíme tím současně i problém Neumannův.

§ 33. Kroucení plných a dutých tyčí. V theorii kroucení tyčí se předpokládá, že od nuly různé jsou pouze složky napětí τ_{xz} a τ_{yz}.[1] Tyto vyhovují podmínce rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

[1] Předpokládáme, že osa z je rovnoběžná s povrchovými přímkami tyče.

Označme u_x, u_y, u_z složky elastických posunutí podél os x, y, z. Z Hookova zákona lze odvodit, že

$$u_x = -\vartheta yz + \alpha, \quad u_y = \vartheta xz + \beta, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Zde jsou ϑ, α a β konstanty. Veličina ϑ je úměrná zkroucení tyče. Dále z rovnic vyjadřujících Hookův zákon dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \vartheta y\right), \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \vartheta x\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Derivujeme-li prvou rovnici podle y a druhou podle x a odečteme-li je, dostaneme:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu\vartheta. \tag{4}$$

Rovnici (1) lze vyhovět, položíme-li

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vartheta y\right), \quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vartheta x\right). \tag{5}$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme, že $\Delta\varphi = 0$. Funkce $\varphi(x, y)$ bude tedy harmonickou v oblasti D, kterou dostaneme, protneme-li tyč rovinou (x, y).

Najděme krajové podmínky pro funkci $\varphi(x, y)$. Na povrchu pláště a tedy i na hranici oblasti D je splněna rovnice

$$\tau_{xz}\cos(\nu, x) + \tau_{yz}\cos(\nu, y) = 0, \tag{6}$$

kde ν je vnější normála k plášti. Rovnice (6) vyjadřuje, že povrch pláště tyče není podroben vnějším silám. Dosadíme-li do ní výraz (5), uvedeme ji na tvar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\nu, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\nu, x) = -\vartheta[x\cos(\nu, y) - y\cos(\nu, x)].$$

Dále

$$\cos(\nu, x) = -\cos(\sigma, y) = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma},$$

$$\cos(\nu, y) = \cos(\sigma, x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Odtud plyne, že
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = -\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial\sigma}.$$

Integrujeme-li podél oblouku σ, dostaneme konečně, že na hranici L oblasti D
$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\vartheta(x^2+y^2) + c, \quad c = \text{konst.} \tag{7}$$

Jestliže je tyč plná, je oblast D jednoduše souvislá. Konstantu c lze zvolit libovolně a funkce $\varphi(x, y)$ se určí jako řešení Dirichletova problému s krajovou podmínkou (7). Jestliže je tyč dutá, je oblast D mnohonásobně souvislá a konstanta c může mít různé hodnoty na různých křivkách, tvořících hranici.

Dokažme nyní, že v případě duté tyče je funkce $\psi(x, y)$, konjugovaná s $\varphi(x, y)$, jednoznačná v D. Podle Cauchy-Riemannových rovnic
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Dosadíme-li toto do (5), dostaneme:
$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \vartheta y\right), \quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vartheta x\right).$$

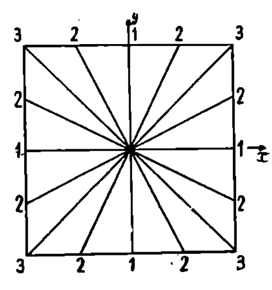
Porovnáme-li to se vzorci (3), vidíme, že $\psi = u_z + A$, kde A je konstanta. Avšak u_z jako posunutí bodu tyče je nutně jednoznačné. Odtud plyne, že $\psi(x, y)$ je také jednoznačná.

Nyní je jasné, že $\varphi(x, y)$ je řešení modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (7).

Poznamenejme, že poněkud pohodlněji než $\varphi(x, y)$ lze určit funkci $U(x, y) = -\dfrac{2}{\vartheta}\varphi(x, y)$, která vyhovuje krajové podmínce
$$U = x^2 + y^2 + c'. \tag{8}$$

§ 34. Kroucení tyče čtvercového průřezu.

Uvažujme problém kroucení tyče, jejíž průřez s rovinou kolmou na osu je čtverec. Souřadnicové osy zvolíme tak, jak je ukázáno na obr. 7. Pro jednoduchost výpočtu předpoklá-



Obr. 7.

dejme, že se strana čtverce rovná dvěma. Konstantu c' ve vzorci (8), § 33 položme rovnou nule. Funkce $U(x, y)$ vyhovuje krajové podmínce

$$U(x, y) = x^2 + y^2.$$

Položíme-li jako obvykle $U(x, y) = \mathrm{Re}\{\Phi(z)\}$ a

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

dostaneme integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} \, d\sigma = 2(x^2 + y^2), \tag{1}$$

kde $t = x + iy$ je bod na hranici čtverce.

Ve vrcholech čtverce je jádro $\dfrac{\cos(\nu, r)}{r}$ nekonečně velké, takže rovnice (1) přestává být Fredholmovou. Je však dokázáno (viz [32]), že Fredholmova alternativa zde platí. Příslušná homogenní rovnice má pouze triviální řešení. Odtud plyne, že rovnice (1) je řešitelná.

Napišme naši rovnici v jiném tvaru, příhodnějším pro numerické výpočty. Je totiž (§ 29)

$$-\frac{\cos(\nu, r)}{r} \, d\sigma = d\vartheta, \tag{2}$$

kde ϑ je úhel sevřený vektorem směřujícím od ζ k t a osou x; rovnice (1) nabývá tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \, d\vartheta = 2(x^2 + y^2). \tag{3}$$

Rovnici (3) budeme řešit methodou § 7, užívajíce k výpočtu integrálu formule vztahující se k obdélníkovému dělení.

Zvolme na hranici čtverce 16 bodů, označených na obr. 7 číslicemi 1, 2, 3. To jsou body, jejichž jedna souřadnice je rovna ± 1 a druhá se rovná jednomu z čísel 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Poznamenejme, že se hodnoty $\mu(t)$ v bodech souměrně položených vzhledem k osám x, y a vzhledem k přímkám $y = \pm x$ v důsledku souměrnosti krajových podmínek sobě rovnají.[1] Tudíž v bodech označených touž číslicí se hodnoty $\mu(t)$ shodují, takže budou pouze tři různé hodnoty $\mu(t)$, příslušející hodnotám $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \frac{1}{2}i$, $t_3 = 1 + i$. Označme

$$\mu(1) = \mu_1, \ \mu(1 + \tfrac{1}{2}i) = \mu_2, \ \mu(1 + i) = \mu_3. \tag{4}$$

Nahradíme-li integrál v (3) podle obdélníkové formule, dostaneme:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{16} \mu(t_k) \, \Delta\vartheta_k(t) = 2|t|^2. \tag{5}$$

Zde t_k označují námi zvolené body a $\Delta\vartheta_k(t)$ úhel, sevřený úsečkami, které spojují body t_k a t_{k+1} s bodem t. Položíme-li v (5) $t = t_1, t_2, t_3$, dostaneme soustavu tří rovnic s třemi neznámými μ_1, μ_2, μ_3:

$$\begin{aligned}
1{,}2432\mu_1 + 0{,}5000\mu_2 + 0{,}2658\mu_3 &= 2{,}000,\\
0{,}1992\mu_1 + 1{,}4273\mu_2 + 0{,}3734\mu_3 &= 2{,}500,\\
0{,}1269\mu_1 + 0{,}2508\mu_2 + 1{,}1239\mu_3 &= 4{,}000.
\end{aligned} \tag{6}$$

Veličiny $\Delta\vartheta_k(t_i)$ se lehce určí z obrázku; při sestavování rovnic (6) bylo přihlédnuto k tomu, že v bodech označených na obrázku stejnými číslicemi má $\mu(t)$ stejné hodnoty.

---

[1] Proveďme důkaz tohoto tvrzení. Funkce $U(y, x)$ je harmonická a vyhovuje téže krajové podmínce (8), § 33 jako funkce $U(x, y)$. Avšak potom $U(y, x) \equiv U(x, y)$. Dále

$$U(y, x) = \mathrm{Re}\{\Phi(y + ix)\} = \mathrm{Re}\{\Phi(i\bar{z})\} = \mathrm{Re}\{\overline{\overline{\Phi(i\bar{z})}}\}.$$

Odtud plyne, že $\Phi(z) = \overline{\Phi(i\bar{z})}$ čili

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\bar{\zeta} + iz} \, \mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

Ve druhém integrálu nahraďme ζ výrazem $i\bar{\zeta}'$. V rovině ζ' dostaneme tutéž hranici L, avšak orientovanou opačným směrem. Jestliže změníme směr orientace a znaménko integrálu, dostaneme (čárku u ζ' vynecháváme):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(i\bar{\zeta})}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Avšak vyjádření analytické funkce ve tvaru integrálu typu Cauchyho s reálnou hustotou je jednoznačné. Odtud plyne, že $\mu(\zeta) = \mu(i\bar{\zeta})$, t. j. funkce $\mu(\zeta)$ nabývá stejných hodnot v bodech souměrně položených vzhledem k ose úhlu prvního souřadnicového kvadrantu. Podobně dokážeme souměrnost $\mu(\zeta)$ i v ostatních případech.

Řešíme-li soustavu (6), dostaneme:

$$\mu_1 = 0{,}60, \ \mu_2 = 0{,}80, \ \mu_3 = 3{,}32. \tag{7}$$

Interpolujme funkci μ na každé ze stran čtverce. Tato funkce je souměrná a lze ji interpolovat polynomem tvaru $ax^4 + bx^2 + c$ na stranách čtverce rovnoběžných s osou x. Na dvou ostatních stranách zřejmě dostaneme interpolační polynom $ay^4 + by^2 + c$ s týmiž koeficienty. Vypočteme-li koeficienty, najdeme: $a = 2{,}56$, $b = 0{,}16$, $c = 0{,}60$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} \mu(x \pm i) &= 2{,}56x^4 + 0{,}16x^2 + 0{,}60, \\ \mu(\pm 1 + iy) &= 2{,}56y^4 + 0{,}16y^2 + 0{,}60. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Známe-li $\mu(t)$, není obtížné vypočítat $\Phi(z)$ a potom i napětí τ_{xz} a τ_{yz}.

§ 35. Problém obtékání. Rovinný problém obtékání spočívá v určení rychlostního pole pro paralelní proudění v rovině, jež na své dráze naráží na několik tuhých těles, které se buď nepohybují nebo se pohybují daným způsobem. Rychlost proudění v nekonečnu považujeme za danou.

Jestliže máme co činit s potenciálním prouděním ideální nestlačitelné kapaliny, převádí se úloha na určení komplexního potenciálu

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y), \tag{1}$$

kde φ je potenciální funkce (rychlostí) a ψ je proudová funkce, z daných krajových podmínek. Položme osu x rovnoběžně s rychlostí proudění v nekonečnu; velikost této rychlosti označme U. Potom krajové podmínky nabývají tvaru:

a) v nekonečnu

$$\lim_{z \to \infty} [\varphi(x, y) - Uy] = C, \tag{2}$$

b) na hranici obtékaného tělesa

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \tfrac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2) + C', \tag{3}$$

kde U_0 a V_0 jsou průměty rychlosti postupného pohybu obtékaného tělesa na osy x a y, Ω je úhlová rychlost jeho otáčení. Veličiny C a C' jsou konstanty. Jestliže je obtékaných těles několik, může konstanta C' na hranici každého z nich nabýt jiné hodnoty.

Proudová funkce $\psi(x, y)$ je jednoznačná, jak je patrno ze vzorce (3); pokud se týče potenciálu $\varphi(x, y)$, ten je jednoznačný, jestliže oblast proudění je jednoduše souvislá, jinak řečeno, jestliže proudění obtéká pouze jedno těleso. V případě několika obtékaných těles potenciální funkce bude obecně řečeno mnohoznačná. Veličina

$$\Gamma_L = \int_L u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y = \int_L \mathrm{d}\varphi, \tag{4}$$

kde u_x a u_y jsou složky rychlostí proudění, se nazývá cirkulací podél křivky L.[1] Jestliže cirkulace podél hranic $L_1, L_2, \ldots, L_n$ se rovnají $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, pak

$$w = Uz + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \lg(z - z_k) + w^*(z), \tag{5}$$

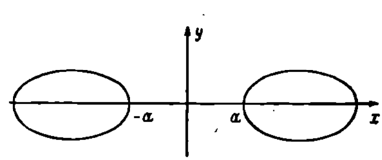
kde $w^*(z)$ je funkce regulární a jednoznačná v oblasti proudění. Na hranicích obtékaných těles $w^*(z)$ vyhovuje podmínce:

$$\text{na } L_k \quad \mathrm{Im}\{w^*(z)\} = (U_{0k} - U)\, y - V_{0k}x - \frac{\Omega_k}{2}(x^2 + y^2) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \lg|z - z_k| + C_k. \tag{6}$$

Ve vzorcích (5) a (6) z_k značí bod libovolně zvolený uvnitř L_k. U_{0k}, V_{0k}, Ω_k a C_k značí hodnoty veličin U_0, V_0, Ω, C na hranici L_k. Nyní lze funkci $\frac{1}{i}\, w^*(z)$ určit jako řešení modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (6). Jestliže tento problém rozřešíme methodou § 32, pak již lehce najdeme rychlostní pole proudění.

§ 36. Obtékání dvou eliptických válců.

§ 36. Obtékání dvou eliptických válců. Jako příklad budeme uvažovat problém obtékání dvou stejných elips s poloosami a a b, položených jako na obr. 8. Pro jednoduchost výpočtu budeme předpokládat, že



Obr. 8.

[1] Viz na př. N. E. Kočin, I. A. Kibel' a N. V. Rozė, Těoretičeskaja gidromechanika, č. II, Gostechizdat 1948, nebo L. I. Sedov, Priloženija těorii funkcij kompleksnogo peremennogo k někotorym zadačam ploskoj gidrodinamiky, Uspěchi matěmatičeskich nauk, vyp. VI, 1939.

proudění je necirkulární a elipsy se nepohybují. Předpokládejme také, že rychlost proudění v nekonečnu se rovná U a má směr osy x. Vzorec (5), § 35 nabývá tvaru:

$$w(z) = Uz + w^*(z). \tag{1}$$

Krajové podmínky pro funkci $\omega(z) = \frac{1}{i} w^*(z)$ jsou:

$$\text{na } L_k \qquad \mathrm{Re}\{\omega(z)\} = -Uy - C_k, \ k = 1, 2. \tag{2}$$

Položme

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{3}$$

V souhlase s § 32 dostaneme pro $\mu(\zeta)$ následující integrální rovnici:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) \mathrm{d}\sigma = 2Uy, \tag{4}$$

při čemž funkci $b(t, \zeta)$ určíme takto:

$$b(t, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \tfrac{1}{2} \mathrm{d}\tau, \tag{5_1}$$

kde τ je parametr určující polohu bodu na elipse, jestliže t a ζ leží na téže elipse, a

$$b(t, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{5_2}$$

v opačném případě.[1]

Vypočtěme jádro $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. Zaveďme parametrické vyjádření elipsy L_1:

$$x = \alpha + a + a \cos t, \ y = b \sin t,$$

a elipsy L_2:

$$x = -\alpha - a + a \cos t, \ y = b \sin t.$$

Jestliže body t a ζ leží na téže elipse, pak obdobnými výpočty jako v § 5 nalezneme:

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} \mathrm{d}\sigma = -\frac{b}{2a} \frac{\mathrm{d}\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

---

[1] Integrální rovnice (4) a funkce $b(t, \zeta)$ jsou zde dány poněkud jinak než v §§ 31 a 32. To jsme učinili, abychom trochu zjednodušili výpočty podstatné to však není.

Jestliže t leží na L_1, a ζ na L_2, pak

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{b\left[(\alpha + a)\cos\tau - a\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right]\mathrm{d}\tau}{2\left[(\alpha+a)^2 + a(\alpha+a)(\cos t - \cos\tau) + a^2\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)\right]}.$$

Konečně, jestliže t leží na L_2 a ζ leží na L_1, pak

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{-b\left[(\alpha + a)\cos\tau + a\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right]\mathrm{d}\tau}{2\left[(\alpha+a)^2 - a(\alpha+a)(\cos t - \cos\tau) + a^2\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)\right]}.$$

Označme $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ hodnoty $\mu(t)$ na křivkách L_1 a L_2. Rovnici (4) lze napsat jako soustavu s neznámými $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$:

$$\mu_1(t) - \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}} +$$

$$+ \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau - \sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right)\mu_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\gamma^2 + \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2bU\sin t, \tag{6_1}$$

$$\mu_2(t) - \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau + \sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right)\mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\gamma^2 - \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)} -$$

$$- \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2bU\sin t. \tag{6_2}$$

Označili jsme zde pro stručnost

$$\gamma = \frac{\alpha + a}{a}.$$

Zřejmě

$$\gamma > 1.$$

Rozvineme-li jádra ve Fourierovy řady a ponecháme-li pouze konečný počet jejich členů, převedeme soustavu (6) na degenerovanou, kterou lze lehce řešit.

Vyšetřeme nyní podrobněji případ, když γ je dostatečně veliké, takže vzdálenost mezi elipsami je veliká ve srovnání s jejich rozměry. V tom případě můžeme přibližně položit, jestliže ponecháme členy, jež obsahují $\frac{1}{\gamma}$ a $\frac{1}{\gamma^2}$:

$$\frac{\gamma \cos\tau - \sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 + \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\tau}{\gamma} + \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} - \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2},$$

$$\frac{\gamma \cos\tau + \sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 - \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\tau}{\gamma} - \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} + \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2}.$$

Dále, jak už jsme nalezli v § 5,

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}} = \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(\cos kt \cos k\tau - \sin kt \sin k\tau)\right].$$

Nyní lze soustavu (6) napsat ve tvaru

$$\mu_1(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos k\tau\,d\tau - \sin kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin k\tau\,d\tau\right] +$$

$$+ \frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,d\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos 2\tau\,d\tau -$$

$$- \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,d\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\sin\tau\,d\tau = 2bU\sin t,$$

$$(7)$$

$$\mu_2(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos k\tau\,d\tau - \sin kt\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\sin k\tau\,d\tau\right] -$$

$$- \frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,d\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos 2\tau\,d\tau -$$

$$- \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,d\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin\tau\,d\tau = 2bU\sin t.$$

Rozviňme $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ ve Fourierovy řady:

$$\mu_1(t) = A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(1)}\cos kt + B_k^{(1)}\sin kt),$$

$$\mu_2(t) = A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(2)}\cos kt + B_k^{(2)}\sin kt).$$

Potom

$$A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(1)}\cos kt + B_k^{(1)}\sin kt) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(1)}\cos kt -$$

$$- B_k^{(1)}\sin kt) + \frac{bA_1^{(2)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(2)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\cos t + \frac{bB_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\sin t = 2bU\sin t,$$

$$(8)$$

$$A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(2)}\cos kt + B_k^{(2)}\sin kt) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(2)}\cos kt -$$

$$- B_k^{(2)}\sin kt) - \frac{bA_1^{(1)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(1)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\cos t + \frac{bB_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\sin t = 2bU\sin t.$$

Porovnáme-li Fourierovy koeficienty napravo a nalevo v (8), zjistíme, že od nuly různé jsou pouze koeficienty $B_1^{(1)}$ a $B_1^{(2)}$, jež jsou určeny rovnicemi

$$\left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) B_1^{(1)} - \frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(2)} = 2bU,$$

$$-\frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(1)} + \left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) B_1^{(2)} = 2bU.$$

Odtud

$$B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)}$$

a tedy

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)} \sin t. \tag{9}$$

Nyní

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\mu_1(\tau)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\mu_2(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

čili

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a + \alpha + a\cos\tau + ib\sin\tau - z} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)\,\mathrm{d}\tau}{-(a+\alpha) + a\cos\tau + ib\sin\tau - z} \right\}. \tag{10}$$

Vypočtěme integrály v (10). Označme v prvém integrálu $z - (a + \alpha) = z'$, a ve druhém $z + a + \alpha = z'$; tak dojdeme k integrálu

$$I(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)}{a\cos\tau + ib\sin\tau - z'} \mathrm{d}\tau.$$

Položme $\mathrm{e}^{i\tau} = \sigma$. Potom

$$I(z') = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\,\sigma^2 - 2z'\sigma + a - b} \mathrm{d}\sigma - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\,\sigma^2 - 2z'\sigma + a - b} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2} \right\} = I_1 - I_2.$$

Kořeny jmenovatele integrandu v I_1 jsou

$$\sigma_1 = \frac{z' + \sqrt{z'^2 - c^2}}{a + b}, \quad \sigma_2 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{a + b}.$$

Zvolme tu hodnotu kořene, jež je kladná pro nekonečně velká kladná z'. Potom, jestliže opakujeme úvahy § 30 (viz pozn. pod čarou na str. 142), nalezneme, že uvnitř kruhu $|\sigma| < 1$ leží pouze kořen σ_2. Potom už bez obtíží zjistíme, že

$$I_1 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2i(a + b)}.$$

Úplně obdobně nalezneme

$$I_2 = -\frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2i(a - b)}$$

a tedy

$$I(z') = \frac{a}{i(a^2 - b^2)}(z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

Nakonec dostaneme

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{8a^2b\gamma^2U}{i(a - b)[8a^2\gamma^2 + b(a + b)]}(2z - \sqrt{(z - a - \alpha)^2 - c^2} - \\ - \sqrt{(z + a + \alpha)^2 - c^2}) \tag{11}$$

a

$$w(z) = Uz + \frac{8a^2b\gamma^2U}{(a - b)[8a^2\gamma^2 + b(a + b)]}(2z - \sqrt{(z - a - \alpha)^2 - c^2} - \\ - \sqrt{(z + a + \alpha)^2 - c^2}). \tag{12}$$

Jestliže ve vzorci (12) považujeme veličinu $z' = z - a - \alpha$ za pevně zvolenou a necháme-li α konvergovat k nekonečnu, dostaneme známý výraz pro komplexní potenciál, příslušející obtékání jednoho eliptického válce:

$$w(z') = Uz' + \frac{bU}{a - b}(z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

Pro velká α jsou změny rychlosti v blízkosti prvého válce způsobené přítomností druhého válce řádu γ^{-2}.

§ 37. Konformní zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí. a) Konformní zobrazení dvojnásobně souvislé oblasti na mezikruží.

Uvažujme v rovině komplexní proměnné z oblast D omezenou z vnějšku křivkou L_0 a z vnitřku křivkou L_1. Položme si tuto úlohu: zobrazit oblast D na mezikruží $R < |w| < 1$ tak, aby křivka L_0 se zobrazila na kružnici $|w| = 1$ a křivka L_1 na kružnici $|w| = R$. Budeme předpokládat, že křivky L_0 a L_1 jsou hladké se spojitou křivostí.

Počátek souřadnic v rovině z položme dovnitř L_1. Hranici oblasti D označme L. Je zřejmé, že L se skládá z křivky L_0 orientované proti ručičkám hodinovým a z křivky L_1 orientované ve směru ručiček hodinových.

Zobrazující funkce $w = \omega(z)$ se na D nerovná ani nule, ani nekonečnu, a proto funkce $\lg\omega(z) = \lg w$ nemá v D singulárních bodů. Jdeme-li po křivce L_0 v kladném směru, $\arg w$ vzroste o 2π, neboť přitom w opisuje, také v kladném směru, kružnici $|w| = 1$. Odtud plyne, že při oběhnutí křivky L_0 v kladném směru $\lg\omega(z)$ vzroste o $2\pi i$, a funkce

$$\varphi(z) = \lg \frac{\omega(z)}{z}$$

je regulární v D. Není obtížné určit krajové podmínky, jež splňuje $\varphi(z)$. Jestliže $t \in L_0$, pak $|\omega(t)| = 1$, jestliže $t \in L_1$, pak $|\omega(t)| = R$. Odtud

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = \begin{cases} -\lg|t|, & t \in L_0, \\ -\lg|t| + \lg R, & t \in L_1. \end{cases} \tag{1}$$

Jestliže necháme R libovolné a sestrojíme harmonickou funkci, vyhovující podmínce (1), pak funkce s ní konjugovaná bude v D obecně mnohoznačná. Proto musíme R podrobit podmínce, že analytická funkce $\varphi(z)$, jež má být určena podmínkou (1), je regulární v D. Tudíž, $\varphi(z)$ je řešením modifikovaného Dirichletova problému; k určení $\varphi(z)$ lze užít methody § 32.

Řešíme-li modifikovaný Dirichletův problém s podmínkou (1), dojdeme k nějaké zcela určité hodnotě R. Předpokládejme, že tato hodnota je menší než jedna; dokažme, že potom funkce $w = \omega(z) = ze^{\varphi(z)}$ realisuje konformní zobrazení oblasti D na mezikruží $R < |w| < 1$. Protože funkce $ze^{\varphi(z)}$ je regulární v D, stačí dokázat, že L_0 a L_1 se vzájemně jednoznačně zobrazují na příslušné kružnice.

Jestliže $z \in L_0$, pak $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} = -\lg|z|$ a tedy $|w| = 1$. Dále, $\arg w =$

$= \arg z + \operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$. Když z probíhá uzavřenou křivku L_0, funkce $\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$, jež je harmonická v D, nabude po oběhnutí původní hodnoty, avšak $\arg z$ vzroste o 2π. Avšak potom i $\arg w$ vzroste o 2π a bod w proběhne uzavřenou kružnici $|w| = 1$. Zbývá dokázat, že body této kružnice vzájemně jednoznačně odpovídají bodům křivky L_0. Stačí dokázat, že pro $|w| = 1$ je $\arg w$ rostoucí funkce σ, kde σ je délka oblouku křivky L_0.

Funkce $\lg \omega(z)$, harmonická v D, se rovná nule na L_0 a $\lg R < 0$ na L_1. Podle věty o maximu a minimu harmonické funkce, $\lg|\omega(z)| < 0$ uvnitř D. Avšak potom na L_0 $\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \nu} \geqq 0$ (ν je vnější normála k L_0). Dále, z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že na L_0

$$\frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \nu} \geqq 0, \tag{2}$$

takže $\arg w$ je neklesající funkce σ. Nechť nyní bodům z_1 a z_2 příslušejí oblouky σ_1 a σ_2, při čemž $\sigma_1 < \sigma_2$ a předpokládejme, že $\arg \omega(z_1) = \arg \omega(z_2)$. Potom

$$0 = \arg \omega(z_2) - \arg \omega(z_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} \, d\sigma.$$

V důsledku nerovnosti (2) bude na oblouku $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ křivky L_0 $\frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} \equiv 0$ a $\arg \omega(z) \equiv \alpha =$ konst. Avšak potom na tomto oblouku $\lg \omega(z) = \lg|\omega(z)| + i \arg \omega(z) = i\alpha$. Analytická funkce $\lg \omega(z)$, rovnající se konstantě na nějakém oblouku, se potom rovná této konstantě identicky. Odtud

$$\varphi(z) = \lg \omega(z) - \lg|z| = i\alpha - \lg|z|$$

a $\varphi(z)$ není regulární v D, což je spor, jak je patrno ze sestrojení této funkce. Je tedy nutně $\arg \omega(z_1) < \arg \omega(z_2)$, čímž je dokázána vzájemná jednoznačnost zobrazení křivky L_0 na kružnici $|w| = 1$.

Obdobně se dokáže, že L_1 se vzájemně jednoznačně zobrazí na kružnici $|w| = R$.[1]

---

[1] Nyní lze dokázat, že znak rovnosti ve (2) je vyloučen. Skutečně, nechť v bodu $z_0 \in L_0$ $\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \sigma} = 0$. Při tom zřejmě $\left.\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \sigma}\right|_{z=z_0} = 0$; odtud lze lehce usoudit, že $\omega'(z) = 0$, což je nemožné, neboť křivka L_0 je hladká.

Dokažme nyní, že veličina R, určená z řešení modifikovaného Dirichletova problému, je skutečně menší jedné. Předpokládejme opak. Podle předcházejícího dokážeme, že L_0 se vzájemně jednoznačně zobrazuje pomocí funkce $w = \omega(z)$ na kružnici $|w| = 1$, avšak tentokráte $\lg R > 0$, a uvnitř D $\lg|\omega(z)| > 0$. Opakujeme-li předcházející úvahy, zjistíme, že

$$\frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} \leqq 0, \quad z \in L_0,$$

takže kružnice $|w| = 1$ je probíhána ve směru hodinových ručiček, když L_0 je probíhána proti ručičkám hodinovým. To je ve sporu s tím, že při takovém oběhu $\arg w = \arg z + \mathrm{Im}\{\varphi(z)\}$ vzroste o 2π.

Ze všeho, co bylo shora řečeno, plyne, že existuje jedna a jen jedna hodnota R, pro niž je možné zobrazení dané dvojnásobně souvislé oblasti, ohraničené dvěma nedegenerovanými křivkami, na mezikruží $R < |w| < 1$.

b) Konformní zobrazení mnohonásobně souvislé oblasti na rovinu, jež je rozdělena přímými řezy.

Vyskytuje se úloha konformně zobrazit $(n + 1)$-násobně souvislou omezenou oblast D, omezenou hladkými uzavřenými křivkami $L_0, L_1, \ldots, L_n$ se spojitou křivostí, na oblast D_1, jež vznikne z roviny odstraněním řezů rovnoběžných s imaginární osou. Nechť oblast D leží v rovině z, oblast D_1 v rovině w. Počátek souřadnic $z = 0$ položme dovnitř D a předpokládejme, že se nezobrazuje na bod $w = \infty$. Zobrazující funkci budeme hledat ve tvaru

$$w = \frac{1}{z} + \varphi(z), \tag{3}$$

kde $\varphi(z)$ je regulární v D. Zvolíme-li vhodným způsobem počátek souřadnic v rovině w, dosáhneme toho, že úsečka, na níž se zobrazuje křivka L_0, bude ležet na imaginární ose. Označme b_k abscissu úsečky, na níž se zobrazuje křivka L_k. Potom $\varphi(z)$ splňuje následující krajovou podmínku:

$$t \in L_k, \ \mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{t}\right) + b_k, \ b_0 = 0. \tag{4}$$

$\varphi(z)$ je tedy řešením modifikovaného Dirichletova problému. Řešíme-li tento problém, určíme funkci $\varphi(t)$, z níž jednoznačným způsobem určime abscissu b_k. Úplně obdobně jednoznačně určíme ordináty koncových bodů úseček, tvořících hranici D_1, jestliže libovolně zvolíme čistě imaginární aditivní konstantu, jež se vyskytuje v řešení modifikovaného Dirichletova problému.

Zbývá dokázat, že funkce (3) je jednolistá.[1] Především je jednolistou v blízkosti bodu $z = 0$, neboť potom lze jednoznačně rozřešit rovnici (3) vzhledem k z. Nechť nyní z_0 je jeden z bodů, v nichž $\omega(z)$ je jednolistou, a nechť $\omega(z_0) = w_0$. Vyšetřme integrál

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega'(z)\, dz}{\omega(z) - w},$$

kde L je hranice oblasti D a w je libovolný bod oblasti D_1.

Integrál $I(w)$, jenž se rovná rozdílu mezi počtem těch nulových bodů a pólů funkce $\omega(z) - w$, které leží uvnitř D, je celé číslo. Pokud w probíhá vnitřek D_1, $I(w)$ je spojitou funkcí w. $I(w)$, rovnající se celému číslu, je tedy konstantní. Avšak $I(w_0) = 0$, neboť $\omega(z) - w_0$ má uvnitř D jediný pól $z = 0$ a jediný nulový bod $z = z_0$. Odtud plyne, že $I(w) \equiv 0$, jestliže $w \in D_1$. Uvnitř D funkce $\omega(z) - w$ má pouze jeden jednoduchý pól $z = 0$, a protože $I(w) = 0$, má $\omega(z) - w$ právě jeden nulový bod v oblasti D, jestliže w leží v oblasti D_1.

Obdobně můžeme uvažovat některé jiné typy konformního zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí. Tak lze na modifikovaný Dirichletův problém lehce převést úlohu konformního zobrazení mnohonásobně souvislé oblasti na rovinu, rozdělené řezy podél oblouků soustředných kružnic nebo podél úseček přímek, procházejících jedním a týmž bodem.

§ 38. Dirichletův a Neumannův problém v prostoru. Omezme se pro jednoduchost na oblast, omezenou či neomezenou, jejíž hranice je uzavřená hladká plocha S, vyhovující t. zv. *Ljapunovovým podmínkám*:

1. úhel ϑ, sevřený normálami ve dvou bodech M a M_1 plochy S, vyhovuje nerovnosti

[1] Níže provedený důkaz je vzat ze článku M. V. Keldyše „Konformnyje otobraženija mnogosvjaznych oblastěj na kanoničeskije oblasti“, Uspěchi mat. nauk, vyp. VI, 1939.

$$\vartheta < Ar^{\alpha}, \; 0 < \alpha \leqq 1$$

kde A a α jsou konstanty a r je vzdálenost mezi M a M_1;

2. existuje konstanta $\delta > 0$ taková, že každá přímka rovnoběžná s normálou k S v bodě M neprotíná víc než jednou tu část plochy S, která leží uvnitř koule poloměru δ a se středem v M.

Integrály

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\mathrm{d}S_1}{r}, \tag{1}$$

$$W(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \mathrm{d}S_1, \tag{2}$$

se nazývají, jak je známo, potenciál vrstvy, resp. dvojvrstvy; $\varrho(M)$ a $\sigma(M)$ se nazývají hustoty příslušných potenciálů. Ve vzorcích (1) a (2) r je vzdálenost mezi M a M_1, kde M_1 je bod plochy S, a M je bod uvnitř nebo vně S, ν_1 je vnější normála k S v bodě M_1; $\mathrm{d}S_1$ je element plochy S.

Platí následující tvrzení[1] (hustoty $\varrho(M_1)$ a $\sigma(M_1)$ považujeme za spojité):

1. Potenciál vrstvy i dvojvrstvy jsou funkce harmonické jak uvnitř, tak i vně S.

2. Potenciál jednoduché vrstvy je spojitý v celém prostoru.

3. Jestliže ν značí vnější normálu k S v bodě M a indexy i a e označují hodnoty potenciálu uvnitř, resp. vně plochy S, pak hodnoty normální derivace potenciálu vrstvy na ploše S jsou určeny následujícími vzorci:

$$\frac{\partial V_i(M)}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} \varrho(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \mathrm{d}S_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_e(M)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \varrho(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} \mathrm{d}S_1. \tag{4}$$

[1] Viz na př. [12].

4. Limitní hodnoty potenciálu dvojvrstvy na ploše S jsou dány vzorci

$$W_i(M) = \frac{1}{2}\sigma(M) + \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1, \tag{5}$$

$$W_e(M) = -\frac{1}{2}\sigma(M) + \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1. \tag{6}$$

Ve vzorcích (3) a (6) je r orientováno od M_1 k M.

5. Normální derivace potenciálu dvojvrstvy nabývá na S stejných limitních hodnot jak z vnějšku, tak z vnitřku S.

Lze také dokázat (viz [12]), že když M a M_1 leží na ploše S, pak (C = konst.)

$$\left|\frac{\cos(\nu, r)}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha}}; \quad \left|\frac{\cos(\nu_1, r)}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha}}; \tag{7}$$

α je konstanta, jež se vyskytuje v Ljapunovových podmínkách.

Uvažujme Dirichletův problém pro oblast D, ležící uvnitř S. Danou hodnotu neznámé harmonické funkce W na S označme $f(M)$. Funkci W budeme hledat ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s neznámou hustotou $\sigma(M)$. Užijeme-li vzorce (5), lehce pro tuto neznámou dostaneme integrální rovnici

$$\sigma(M) + \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1 = 2f(M). \tag{8}$$

Druhá z nerovností (7) ukazuje, že jádro rovnice (8) má slabou singularitu. Podle toho, co jsme dokázali v § 10, lze na tuto rovnici užít Fredholmovy theorie. Dokažme, že rovnice (8) je řešitelná. Ve shodě s Fredholmovou alternativou uvažujme homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) + \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{9}$$

Z této rovnice a ze vzorce (5) plyne, že potenciál dvojvrstvy

$$W_0(M) = \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\,\mathrm{d}S_1,$$

kde $\sigma_0(M)$ je řešení rovnice (9), má na S limitní hodnoty z vnitřku rovné nule. Podle věty o jednoznačnosti řešení Dirichletova problému, $W_0(M) \equiv 0$ uvnitř D. Avšak potom $\frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} = 0$. Dále, v důsledku vlastnosti 5,

$$\frac{\partial W_{0e}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} = 0.$$

Podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému, $W_{0e}(M) =$ $=$ konst, a poněvadž v nekonečnu zřejmě $W_{0e} = 0$, je $W_{0e}(M) \equiv 0$. Nyní, odečteme-li rovnice (5) a (6), najdeme

$$\sigma_0(M) = W_{0i}(M) - W_{0e}(M) \equiv 0.$$

Tudíž homogenní rovnice (9) má pouze triviální řešení a rovnice (8) je řešitelná. Řešíme-li ji a dosadíme-li řešení do (2), dostaneme řešení našeho Dirichletova problému.

Když uvažujeme Dirichletův problém pro oblast D', ležící vně S, a hledáme-li řešení jako dříve ve tvaru potenciálu dvojvrstvy, pak užívajíce vzorce (6) dojdeme k integrální rovnici

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = -2f(M). \tag{10}$$

Tato rovnice je obecně neřešitelná. Skutečně, uvažujeme-li homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = 0 \tag{11}$$

a opakujeme-li předcházející úvahy, nalezneme, že nutně $\sigma_0(M) =$ $=$ konst. Tato hodnota $\sigma_0(M)$ vyhovuje rovnici (11), což přímo plyne ze známého Gaussova vzorce

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 \equiv 1, \quad M \in S.$$

Nehomogenní rovnice (11) je tedy neřešitelná, neboť příslušná homogenní rovnice má netriviální řešení.

Mohli jsme předem předvídat, že rovnice (10) bude neřešitelná. Skutečně, potenciál dvojvrstvy klesá do nekonečna řádově jako R^{-2}, kde R je vzdálenost počátku souřadnic od bodu M, zatím co libovolná harmonická funkce v D' klesá do nekonečna jako R^{-1}.

Řešení Dirichletova problému pro oblast D' budeme hledat ve tvaru

$$W(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1 - \frac{1}{2R} \int_S \sigma(M_1) \, dS_1. \tag{12}$$

Počátek souřadnic umístíme uvnitř S. Výraz (12) vede na integrální rovnici pro neznámou $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \, dS_1 + \frac{1}{R} \int_S \sigma(M_1) \, dS_1 = -2f(M). \tag{13}$$

Uvažujme homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \, dS_1 + \frac{1}{R} \int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 = 0. \tag{14}$$

Ukazuje, že harmonické funkce v D',

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1$$

a

$$\frac{1}{2R} \int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1$$

jsou totožné na S. Potom se sobě rovnají identicky.

Odtud

$$\int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \, R \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1.$$

Necháme-li $R \to \infty$ a všimneme-li si, že přitom $R \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \to 0$, dostaneme

$$\int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 = 0. \tag{15}$$

Nyní se rovnice (14) shoduje s (11). Odtud plyne, že $\sigma_0(M) \equiv$ $\equiv$ konst. Dosadíme-li toto do (15), najdeme, že $\sigma_0(M) = 0$. Tím je dokázána řešitelnost rovnice (13).

Obraťme se k Neumannovu problému. Danou hodnotu normální derivace hledané harmonické funkce na S označme $\psi(M)$; řešení budeme hledat ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy (1). Neumannův problém pro oblast D vede na integrální rovnici

$$\varrho(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = -2\psi(M) \tag{16}$$

a pro oblast D' na rovnici

$$\varrho(M) + \frac{1}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = 2\psi(M). \tag{17}$$

Rovnice (17) je konjugovaná s (8) a stejně jako ona je vždy řešitelná. V trojrozměrném prostoru je tedy „vnější“ Neumannův problém vždy řešitelný.

Rovnice (16) je konjugovaná s (10). Aby rovnice (16) byla řešitelná, je nutné a stačí, aby pravá strana byla orthogonální k řešením rovnice (11). Jediným řešením této rovnice, jak jsme viděli, je konstanta. Proto podmínka řešitelnosti rovnice (16) zní takto:

$$\int_S \psi(M_1)\, \mathrm{d}S_1 = 0. \tag{18}$$

Z theorie harmonických funkcí je známo, že podmínka (18) je nutná k tomu, aby „vnitřní“ Neumannův problém měl řešení. Předcházejícími úvahami jsme dokázali, že tato podmínka je také postačující.

Na závěr uvažujme rovnici s proměnným parametrem λ:

$$\varrho(M) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = 0. \tag{19}$$

Již jsme viděli, že $\lambda = -1$ je regulární a $\lambda = +1$ charakteristické číslo této rovnice. Dokažme, že všechna charakteristická čísla rovnice (19) leží na polopřímkách $\lambda \geqq 1$ a $\lambda < -1$. Uvažujme potenciál jednoduché vrstvy

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\mathrm{d}S_1}{r},$$

kde $\varrho(M)$ je netriviální řešení rovnice (19). Vzorce (3) a (4) nám umožňují přepsat rovnici (19) ve tvaru

$$\frac{\partial V_i}{\partial \nu} - \frac{\partial V_e}{\partial \nu} + \lambda \left(\frac{\partial V_i}{\partial \nu} + \frac{\partial V_e}{\partial \nu} \right) = 0$$

čili

$$(1 + \lambda) \frac{\partial V_i}{\partial \nu} = (1 - \lambda) \frac{\partial V_e}{\partial \nu}. \tag{20}$$

Připomeňme, že podle vlastnosti 2 $V_i = V_e$. Připouštíme-li, že λ, $\varrho(M)$ a $V(M)$ jsou komplexní, násobme (20) $\overline{V}_i = \overline{V}_e$ a integrujme po S. Položme ještě $V = V_1 + iV_2$. Potom dostaneme

$$(1 + \lambda) \left\{ \int\limits_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} + V_{2i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int\limits_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} - V_{2i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \right\} =$$

$$= (1 - \lambda) \left\{ \int\limits_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} + V_{2e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int\limits_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} - V_{2e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \right\}.$$

Druhé integrály nalevo i napravo jsou rovny nule, neboť funkce V_{1i}, V_{2i} jsou harmonické uvnitř S a funkce V_{1e}, V_{2e} jsou harmonické vně S; tak docházíme k jednodušší rovnici

$$(1 + \lambda) \int\limits_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} + V_{2i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S =$$

$$= (1 - \lambda) \int\limits_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} + V_{2e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S. \tag{21}$$

Připomeňme známý vzorec z theorie potenciálu: Jestliže je oblast B omezená (není podstatné, zda z vnitřku či z vnějšku) plochou Σ, je-li $V(M)$ harmonická funkce v B a je-li n normála k Σ, vnější vzhledem k oblasti B, pak

$$\int\limits_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}S = \int\limits_B \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Odtud speciálně plyne, že

$$\int\limits_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}S \geqq 0;$$

znak rovnosti platí pouze tenkrát, když $V =$ konst, což je opět možné pro $V \neq 0$ pouze tehdy, když B leží uvnitř Σ.

Normála ν byla zvolena tak, aby byla vnější vzhledem k S. V takovém případě bude vnější vzhledem k D a vnitřní vzhledem k D'; odtud plyne, že integrál nalevo v (21) je nezáporný a integrál napravo nekladný.

Jsou možné tyto případy:

a) Integrál napravo v (21) se rovná nule. Potom $V_e \equiv 0$; protože $V_i = V_e$ na S, je $V_i \equiv 0$ a $\varrho(M) = \frac{\partial V_e}{\partial \nu} - \frac{\partial V_i}{\partial \nu} \equiv 0$. Tento případ nevede k charakteristickému číslu λ.

b) Integrál nalevo je roven nule a integrál napravo je různý od nuly. Pak dostaneme známé charakteristické číslo $\lambda = 1$.

c) Integrál nalevo je kladný a integrál napravo záporný. K tomu je nutné buď $1 - \lambda < 0$, $1 + \lambda > 0$, nebo $1 - \lambda > 0$, $1 + \lambda < 0$, t. j. buď $\lambda > 1$, nebo $\lambda < -1$.

KAPITOLA 2

BIHARMONICKÁ ROVNICE (UŽITÍ GREENOVY FUNKCE)

§ 39. Problémy, vedoucí na biharmonickou rovnici. a) Rovinný problém theorie pružnosti. O rovinné deformaci mluvíme, jestliže se elastická posunutí dějí pouze v rovinách rovnoběžných s rovinou (x, y) a složky posunutí nezávisí na z. Označíme-li u_x, u_y složky posunutí, σ_x, τ_{xy}, σ_y složky napětí, můžeme napsat soustavu diferenciálních rovnic rovinného problému theorie pružnosti:[1]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

[1] Rovnice (1) odpovídají případu, kdy na těleso nepůsobí žádné objemové síly. Viz [28a].