KAPITOLA III

NEEUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

16. Nový axiom. Ve druhé kapitole jsme mluvili o dvojí geometrii roviny a ukázali jsme, že geometrie roviny s vlastností I splňuje V. Eukleidův postulát. Překračuje tedy již oblast absolutní geometrie a přechází v geometrii eukleidovskou. Podobně geometrie roviny s vlastností II se vymyká již absolutní geometrii; rozšířena také na prostorové vlastnosti tvoří *Lobačevského neeukleidovskou geometrii.* Tato geometrie se tedy vedle dosud uvedených axiomů absolutní geometrie opírá ještě o další axiom, který můžeme formulovat různě, nejjednodušeji však jako axiom o incidenci.

Axiom Lobačevského geometrie:

$\mathfrak{I}$, 10. *V rovině prochází bodem mimo přímku alespoň dvě různé s ní se neprotínající přímky.*

Některé věty neeukleidovské geometrie jsme odvodili již v minulém odstavci. Jsou to tyto věty:

Věta 16,1. *Existují tři nekolineární body, jež neleží na žádné kružnici.*

Věta 16,2. *Ekvidistanta přímky není přímka.*

Věta 16,3. *Součet úhlů v trojúhelníku je vždy menší než 2R.*

Věta 16,4. *Součet úhlů ve čtyrúhelníku je vždy menší než 4R.*

Věta 16,5. *Existují oba případy, že dvě neprotínající se přímky v rovině tvoří s příčkou po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je v jednom případě roven a v druhém různý od 2R.*

Věta 16,6. *Existuje kolmice na rameno ostrého úhlu, která neprotne druhé rameno.*

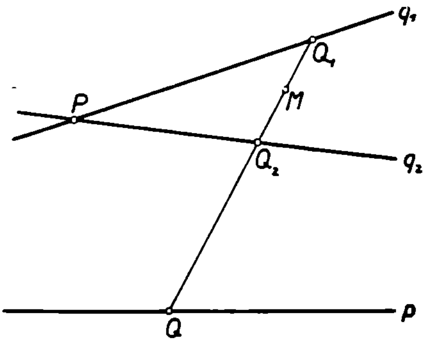
Věta 16,7. *Neexistují trojúhelníky se shodnými odpovídajícími úhly, které by měly odpovídající strany neshodné.*

Poslední větě je možno dát tvar věty o shodnosti trojúhelníků:

Věta 16,8. *Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže mají shodné odpovídající úhly.*

17. Přímky různoběžné, souběžné a rozběžné.

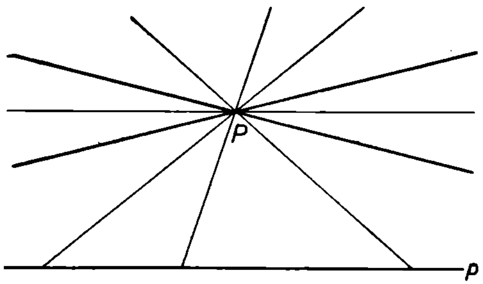
Předním úkolem tohoto paragrafu je provést *klasifikaci dvojic přímek v rovině* podle jejich incidenčních vlastností na tři typy: přímky *různoběžné, souběžné a rozběžné* a odvodit základní vlastnosti těchto dvojic přímek (věty 17,1 až 17,12). Dále jsou zkoumány přímky v prostoru a vztah různoběžnosti, souběžnosti a rozběžnosti je rozšířen na dvojici *přímky s rovinou* nebo *dvojici dvou rovin*. Poslední věta tohoto odstavce (VĚTA 17,28) bude mít později důležitý důsledek (viz str. 140).



Obr. 63.

VĚTA 17,1. *V rovině prochází bodem mimo danou přímku nekonečně mnoho přímek, jež danou přímku neprotínají.*

DŮKAZ. Buďtež q_1, q_2 dvě nerůznoběžky vedené bodem P k přímce p (viz obr. 63). Na přímce q_1 určeme bod Q_1 tak, aby ležel na opačné straně od q_2 než leží přímka p. Je-li nyní Q jakýkoli bod přímky p, pak úsečka Q_1Q protne přímku q_2, průsečík označme Q_2. Pro každý bod M úsečky Q_1Q_2 leží polopřímka (PM) mezi rameny úhlu $\sphericalangle\, Q_1PQ_2$, takže přímka $\overline{PM}$ je nerůznoběžná s p. Neboť kdyby $\overline{PM}$ měla s přímkou p průsečík N, pak by bylo buď $\mu(PMN)$, buď $\mu(NPM)$. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle\, MQN$ bychom dostali, že buď q_2 nebo q_1 protíná p, což by byl spor.



Obr. 64.

Mezi nekonečně mnoha přímkami, o nichž mluví předcházející věta, jsou dvě, které hrají v celé Lobačevského geometrii význačnou roli. Dojdeme k nim touto úvahou: všechny přímky procházející bodem P (viz obr. 64) mohou být vzhledem k přímce p (neprocházející bodem P) rozděleny do dvou tříd tak, že v jedné třídě jsou přímky, jež protínají p, a v druhé ty, které neprotínají přímku p. Hranici mezi oběma třídami tvoří dvě přímky, o nichž později dokážeme, že neprotínají p, a to jsou právě ony význačné přímky neeukleidovské geometrie. Lobačevskij nazýval tyto přímky *rovnoběžkami* k přímce p (viz citát z Lobačevského na str. 182 této knížky!).

Již v odstavci **14** jsme řekli, že se budeme pokud možno vyhýbat názvu „rovnoběžky", protože má několikerý význam. Tato nejednotnost nevede sice k žádným nedorozuměním, přesto však může některé pojmy zatemnit.

Termín „rovnoběžný" má v matematice tři různé významy. U Eukleida znamenají dvě rovnoběžné přímky totéž jako „dvě přímky v rovině, které se neprotínají". Jiný význam má tento název v eukleidovské geometrii, kde se ho přeneseně užívá pro význačnou dvojici přímek v rovině (pro přímky, které se neprotínají; obráceně, každé dvě neprotínající se přímky v rovině patří do kategorie význačných dvojic přímek, totiž mezi rovnoběžky). Konečně s třetím významem termínu rovnoběžný jsme se právě nyní setkali v Lobačevského geometrii. V této geometrii nepatří každé dvě neprotínající se přímky do kategorie dvojic přímek rovnoběžných. Rovnoběžné přímky podle původní Eukleidovy definice by na druhé straně zahrnovaly každou dvojici neprotínajících se přímek v neeukleidovské rovině.

V dalším budeme přímky rovnoběžné ve smyslu Lobačevského raději nazývat přímkami *souběžnými* nebo *souběžkami*, zatím co termín „rovnoběžky" ponecháme pouze geometrii eukleidovské. Pro přímky v rovině, které se neprotínají, nebudeme užívat žádného zvláštního názvu.[20])

Lobačevskij měl určité důvody, když souběžné přímky nazýval rovnoběžkami. Jestliže totiž odlišíme obě souběžky jdoucí bodem P pomocí orientace přímky p, pak platí, jak zanedlouho ukážeme:

1. bodem P lze k přímce $\vec{p}$ (orientované) vést právě jednu souběžku,

2. je-li $\vec{q}$ souběžka vedená bodem P k přímce $\vec{p}$ a Q jiný bod na přímce $\vec{q}$, potom souběžka vedená bodem Q k $\vec{p}$ splývá s $\vec{q}$,

3. je-li $\vec{q}$ souběžka k přímce $\vec{p}$, pak $\vec{p}$ je souběžka k přímce $\vec{q}$,

4. je-li $\vec{p}$ souběžka k přímce $\vec{r}$ a $\vec{q}$ ($\neq \vec{p}$) také souběžka k přímce $\vec{r}$, pak přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.

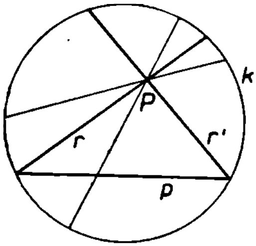
Je tedy vztah orientované souběžnosti symetrický, transitivní a vyznačuje se jednoznačností, právě tak jako vztah rovnoběžnosti v eukleidovské geometrii.

Pojem přímek souběžných lze osvětlit na každém z dříve uvedených modelů Lobačevského roviny. Na př. na modelu Beltrami-Kleinově (viz obr. 65a) má „přímka" p za souběžky ty „přímky", které s ní mají společný bod na kružnici k (který se tedy už nepočítá jako „bod" „roviny"). Současně je vidět, že „souběžky" r a r' tvoří ve svazku „přímek" určeném bodem P hranici mezi „přímkami" protínajícími a neprotínajícími „přímku" p. Podobně je tomu u ostatních modelů (obr. 65 b, c).

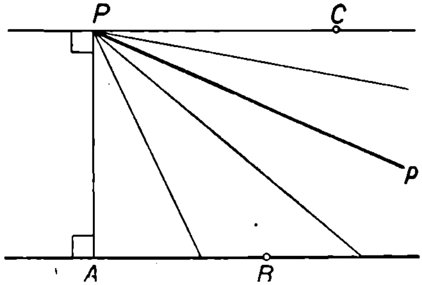
[20]) *Jan Vyšín* ve své knížce *Elementární geometrie III* (Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952) užívá termínu souběžné přímky právě pro přímky v rovině, které se neprotínají.

VĚTA 17,2. *Budiž* $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ a $\overline{CP} \perp \overline{AP}$ (viz obr. 66), *při čemž body* B *a* C *jsou po téže straně přímky* $\overline{AP}$. *Rozdělíme-li všechny polopřímky dutého úhlu* $\sphericalangle CPA$ *na dvě třídy tak, že do jedné dáme polopřímky neprotínající přímku* $\overline{AB}$ *a do druhé ty polopřímky, jež přímku* $\overline{AB}$ *protínají, pak*

1. *obě třídy tvoří řez na množině polopřímek úhlu* $\sphericalangle CPA$,
2. *vytvořující polopřímka tohoto řezu neprotíná přímku* $\overline{AB}$.



Obr. 65.



Obr. 66.

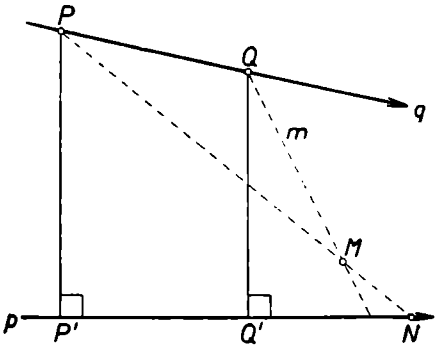
DŮKAZ. 1. Rozdělení polopřímek úhlu $\sphericalangle CPA$ určené v naší větě zřejmě splňuje podmínky a), b) definice řezu (viz odst. **6**, str. 34). Zbývá dokázat, že splňuje i podmínku c′) (viz str. 35). V důkazu VĚTY 17,1 jsme však viděli, že všechny polopřímky mezi dvěma polopřímkami úhlu $\sphericalangle ABC$ neprotínajícími přímku $\overline{AB}$ jsou rovněž neprotínající. O protínajících polopřímkách je to zřejmé podle $\mathfrak{R}$, 4.

2. Označíme-li písmenem p vytvořující polopřímku řezu, o němž mluví naše věta, máme dokázat, že polopřímka p neprotíná přímku $\overline{AB}$. Předpokládejme naopak, že by p protínala $\overline{AB}$ v bodě M. Pak by existoval na $\overline{AB}$ bod N tak, že by platilo $\mu(AMN)$. Polopřímka (PN) by ležela mezi p a (PC) (protože by ležela v polorovinách $(\overline{p}, A)$* a $(\overline{PC}, A)$) a neprotínala by v důsledku vlastnosti vytvořující polopřímky Dedekindova řezu přímku $\overline{AB}$, což by byl spor.

DEFINICE. O orientovaných přímkách $\vec{p}$ a $\vec{q}$ v rovině, které se neprotínají, budeme říkat, že jsou *orientovány souhlasně*, jestliže polopřímky $(P\vec{p})$ a $(Q\vec{q})$, kde P resp. Q je bod na p resp. q, leží v téže polorovině, určené přímkou $\overline{PQ}$. (Je vidět, že tato definice nezávisí na volbě bodů P, Q na přímkách p, q).

Definice. *Souběžka vedená bodem P k orientované přímce $\overrightarrow{AB}$, jež* neprochází bodem P, je definována takto:

Budiž $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ a $\overline{CP} \perp \overline{AP}$ (viz obr. 66), při čemž body B a C jsou po téže straně přímky $\overline{AP}$. Budiž p vytvořující polopřímka Dedekindova řezu polopřímek úhlu $\sphericalangle CPA$, jehož jedna třída obsahuje polopřímky protínající $\overline{AB}$ a druhá polopřímky neprotínající $\overline{AB}$. Souběžkou vedenou bodem P k orientované přímce $\overrightarrow{AB}$ se nazývá *orientovaná přímka* $\vec{p}$ taková, že



Obr. 67.

a) $\overline{p}$ je přímka, jíž je polopřímka p částí,

b) orientace přímky $\vec{p}$ je taková, že jest $P\vec{p} = p$ a že orientované přímky $\vec{p}$ a $\overrightarrow{AB}$ jsou orientovány souhlasně.

Věta 17,3. *Bodem mimo orientovanou přímku lze k ní vést právě jednu souběžku.*

Důkaz je patrný přímo z definice a z toho, že řez má nejvýše jeden vytvořující prvek.

Věta 17,4. *Je-li $\vec{q}$ souběžka vedená bodem P k orientované přímce $\vec{p}$, pak q je také souběžka k $\vec{p}$ vedená jakýmkoli bodem ležícím na $\vec{q}$.*

Důkaz. Nechť Q je bod na q různý od P. Máme dokázat, že souběžka bodem Q k $\vec{p}$ je $\vec{q}$. Označíme-li Q' (viz obr. 67) průsečík p s kolmicí na p vedenou bodem Q, pak stačí dokázat, že libovolná polopřímka mezi $(Q\vec{q})$ a (QQ') protíná přímku p. Budiž m taková polopřímka s počátkem Q. Je-li $P \prec Q$, při čemž $\prec$ je uspořádání, příslušející orientaci přímky $\vec{q}$, zvolme na m libovolný bod $M \neq Q$, takže polopřímka (PM) leží mezi (PP') (P' je průsečík přímky p a kolmice na ni bodem P vedené) a $(P\vec{q})$, a tudíž podle předpokladu souběžnosti protíná p, průsečík označme N. Podle $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle PP'N$ protíná přímka $\overline{QM}$ a tedy i polopřímka m přímku p.

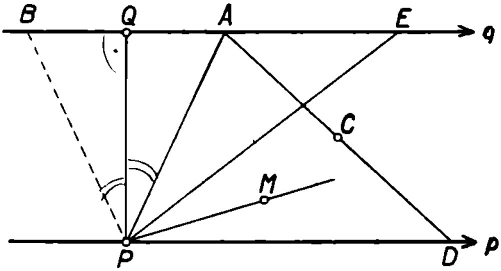
Je-li $Q \prec P$, zvolíme bod M na m^* (t. j. opačné polopřímce k m) a důkaz je obdobný.

Poznámka. V důsledku Věty 17,4 můžeme mluvit o „souběžce $\vec{q}$

k orientované přímce $\vec{p}$", t. j. můžeme vynechat dodatek „vedené bodem P", kde P je určitý bod na q, protože za bod P můžeme podle Věty 17,4 volit kterýkoli bod přímky q.

Věta 17,5. *Je-li $\vec{q}$ souběžka k orientované přímce $\vec{p}$, pak je $\vec{p}$ souběžka k přímce $\vec{q}$.*

Důkaz. Bodem P na p veďme kolmici ke q (viz obr. 68), průsečík označme Q. Stačí dokázat, že $\vec{p}$ je souběžka bodem P ke $\vec{q}$ čili že každá polopřímka mezi (PQ) a $(P\vec{p})$ protíná q.



Obr. 68.

Nechť naopak (PM) leží mezi (PQ) a $(P\vec{p})$ a je s q nerůznoběžná. Budiž A na $(Q\vec{q})$ a B na $(Q\vec{q})^*$ tak, aby $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle BPQ \equiv \frac{1}{2} \sphericalangle MP\vec{p}$ a bod C v polorovině (qP) tak, že $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PBA$. Podle předpokladu, že $\vec{q}$ je souběžná s $\vec{p}$, polopřímka (AC) protne p; tento průsečík označme D a na polopřímce (BA) určeme E tak, že $BE \equiv AD$. Potom $\triangle APD \equiv \triangle BPE$, takže $\sphericalangle BPE \equiv$ $\equiv \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle BPM$, takže (PE) splývá s (PM), což je spor.

Poznámka. V důsledku Věty 17,5 můžeme vedle rčení *„přímka $\vec{q}$ je souběžná k orientované přímce $\vec{p}$"* říkat také *„orientované přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné"* (vztah souběžnosti je totiž *symetrický*).

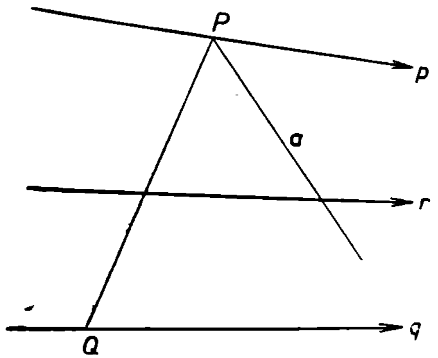
Definice. Vedle souběžnosti orientovaných přímek mluvíme také často o *souběžnosti přímek neorientovaných*. Potom nazýváme dvě přímky souběžnými tehdy, jestliže je lze obě orientovat tak, aby byly souběžnými orientovanými přímkami. (Je zřejmé, že takto orientovat dvě přímky lze nejvýše jedním způsobem.)

Definice. Dvě *splývající přímky* budeme vždy považovat za *souběžné* (tato definice, která říká, že vztah souběžnosti je *reflexivní*, je nutná, abychom mohli dokázat následující větu).

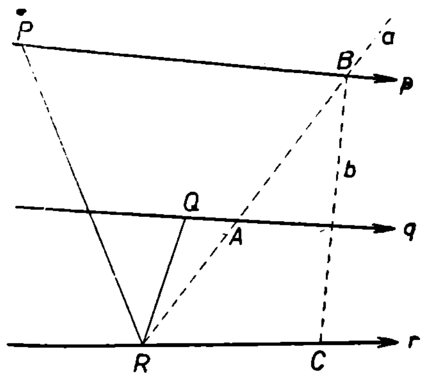
Věta 17,6. *Je-li každá z orientovaných přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžná s orientovanou přímkou $\vec{r}$, pak přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou také souběžné.*

Důkaz. 1. Leží-li p a q, $p \neq q$ (viz obr. 69) po různých stranách od r, vezměme P na p a Q na q. Každá polopřímka a úhlu $\sphericalangle QP\vec{p}$ protne přímku r, protože $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné, a protne také q, protože i $\vec{q}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné. Protože však přímky p a q se nemohou protnout a protože jsou souhlasně orientovány, jsou souběžné.

2. Leží-li p a q, $p \neq q$ na téže straně od r, označme q tu přímku, která leží mezi ostatními dvěma (viz obr. 70). Přímky p a q se nemohou



Obr. 69.



Obr. 70.

protnout, protože jinak by polopřímka přímky p za průsečíkem byla mezi q a r a protla by r. Zvolme nyní na r bod R, na q bod Q. Budiž polopřímka a současně v úhlu $\sphericalangle PR\vec{r}$ i $\sphericalangle QR\vec{r}$. Protože $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jsou souběžné s $\vec{r}$, protne a přímku q (v bodě A) a přímku p (v bodě B). Každá polopřímka b úhlu $\sphericalangle RB\vec{p}$ protne přímku r v bodě C. Podle $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle RBC$ protne b také přímku q, takže orientované přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.

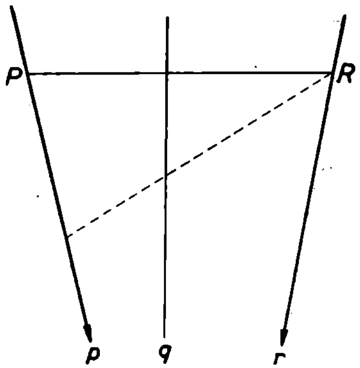
3. Jestliže je $p = q$, pak tvrzení je správné v důsledku reflexivnosti vztahu souběžnosti.

POZNÁMKA. Důsledkem poslední věty je *transitivnost vztahu souběžnosti*. Jsou-li přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžné a $\vec{q}$ a $\vec{r}$ také souběžné, pak i $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné.

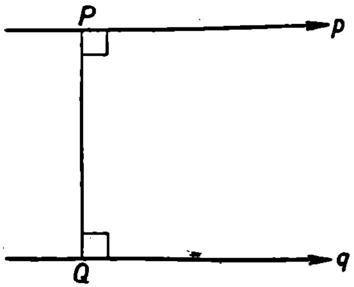
DEFINICE. Přímka q leží *mezi nerůznoběžnými přímkami* p a r, jestliže přímky p a r leží v různých polorovinách určených přímkou q v rovině $\overline{pr}$.

VĚTA 17,7. *Přímka ležící mezi dvěma souběžkami je s oběma souběžná.*

Důkaz. Nechť přímka q leží mezi přímkami p a r (viz obr. 71) a nechť $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné. Je-li P na p a R na r, pak každá polopřímka úhlu $\sphericalangle PR\vec{r}$ se protne s p a podle $\mathfrak{R}$, 4 se protne i s q. Jsou tedy přímky q a r souběžné.



Obr. 71.



Obr. 72.

Věta 17,8. *Dvě souběžné přímky nemají společnou kolmici (t. j. přímku kolmou k oběma zároveň).*

Důkaz. Kdyby souběžky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ měly společnou kolmici, která by je protla v bodech P a Q (viz obr. 72), pak by každá polopřímka úhlu $\sphericalangle QP\vec{p}$ protla q a bodem P by procházela jediná nerůznoběžka k přímce q, což by bylo ve sporu s axiomem $\mathfrak{I}$, 10.

Definice. Nerůznoběžným přímkám, ležícím v rovině, které nejsou souběžné, budeme říkat *přímky rozběžné* nebo *rozběžky.*

Věta 17,9. *Dvě rozběžky mají vždy právě jednu společnou kolmici.*

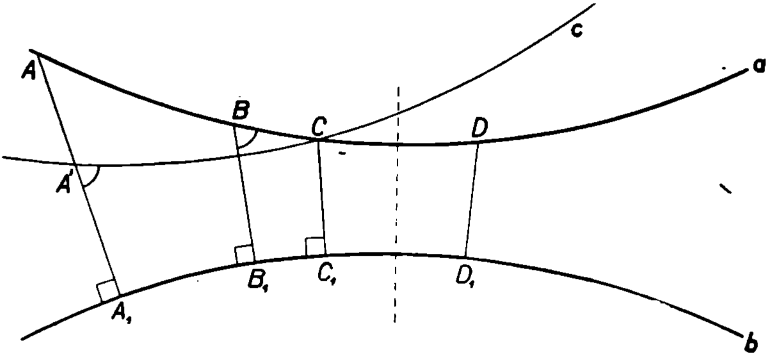
Důkaz.[21]) Jestliže $\square$ $MNPQ$ je Saccheriho čtyrúhelník, pak spojnice půlících bodů stran MN a PQ (viz obr. 59 a Větu 15,11) je společná kolmice přímek $\overline{MN}$ a $\overline{PQ}$. Při důkazu naší věty se budeme proto snažit nalézt společnou kolmici jako spojnici středů příslušných stran jistého Saccheriho čtyrúhelníka.

1. *Existence.* Buďtež a, b dvě rozběžky. Na a (viz obr. 73) zvolme body A a B a veďme jimi kolmice na b, průsečíky označme A_1 a B_1.

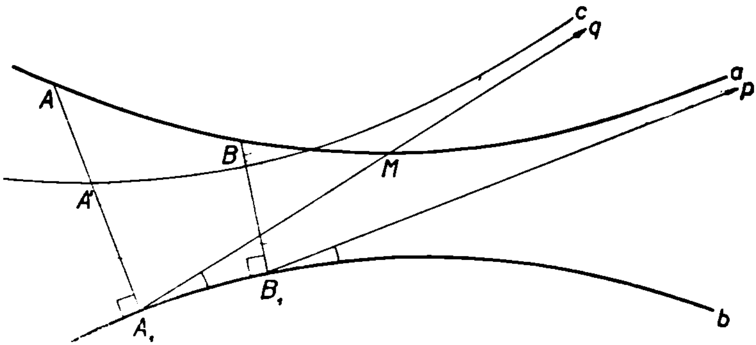
[21]) Podle Hilbert [2] str. 164—165.

Je-li $AA_1 \equiv BB_1$, je $\square\, A_1B_1BA$ Saccheriho čtyřúhelník a osa úsečky A_1B_1 je podle VĚTY 15,11 společná kolmice.

Není-li $AA_1 \equiv BB_1$, budiž na př. $AA_1 > BB_1$. Na úsečce AA_1 zvolme bod A' tak, že $A_1A' \equiv B_1B$, a bodem A' veďme přímku c tak, že s $(A'A_1)$ v polorovině $(\overline{A_1A'}, B)$ svírá týž úhel jako přímka a s (BB_1)



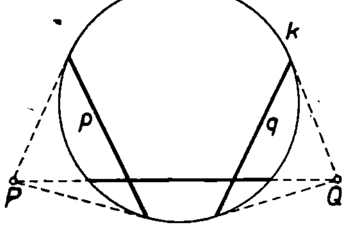
Obr. 73.



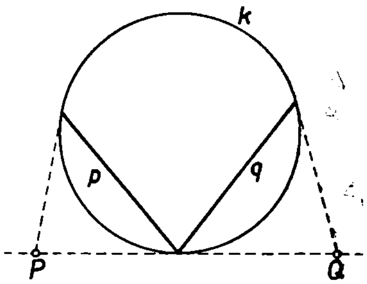
Obr. 74.

v polorovině $(\overline{BB_1}, A)$*. Přímky a a c se *protnou* (důkaz uvedeme na konci této úvahy), průsečík označme C. Kolmice bodem C vedená na b nechť b protne v C_1. Na a zvolme nyní bod D tak, že $AC \equiv BD$ a $B \prec D$, při čemž $\prec$ je dáno tak, že $A \prec C$; na b zvolme D_1 tak, že $A_1C_1 \equiv B_1D_1$ a $A_1 \prec C_1$, $B_1 \prec D_1$. Podle konstrukce je $\square\, A_1A'CC_1 \equiv$ $\equiv \square\, B_1BDD_1$, takže $\square\, C_1D_1DC$ je Saccheriho čtyřúhelník. Osa úsečky C_1D_1 je podle VĚTY 15,11 společná kolmice přímek a a b.

Zbývá ještě dokázat, že přímky a a c se protnou. Bodem B_1 (viz obr. 74) veďme přímku p souběžnou s $\overrightarrow{AB}$ a bodem A_1 přímku q, svírající v polorovině (bA) s polopřímkou (A_1B_1) týž úhel jako (B_1P) s (B_1A_1)*. Protože q není souběžné s p (VĚTA 14,2), není souběžné ani s a. Bod A_1 je mezi přímkami a a p, a protože q je s p nerůznoběžná, dokážeme podle VĚTY 17,7 nepřímo, že q protne a, průsečík označme M. Ze shodnosti útvarů pB_1Ba a $qA_1A'c$ plyne, že c a q jsou souběžné. Přímka c neprotne tedy úsečku A_1M, takže podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle\ A_1AM$ přímka c protne úsečku AM.



Obr. 75.



Obr. 76.

2. *Jednoznačnost*: Dvě nerůznoběžky nemohou mít dvě společné kolmice, protože by pak existoval čtyrúhelník se čtyřmi pravými úhly, což by bylo ve sporu s axiomem $\mathfrak{S}$, 10 (viz VĚTU 16,4).

VĚTA 17,10. *Dvě různé přímky ležící v téže rovině jsou rozběžné tehdy a jen tehdy, jestliže mají společnou kolmici.*

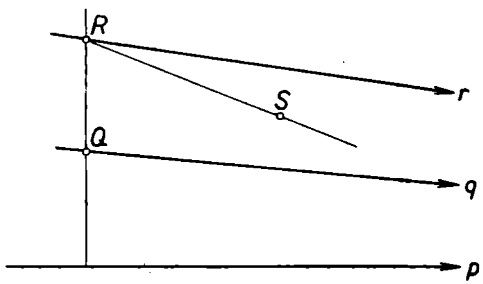
DŮKAZ. 1. Jsou-li dvě přímky rozběžné, pak mají podle VĚTY 17,9 vždy právě jednu kolmici.

2. Jestliže dvě přímky (v rovině) mají společnou kolmici, pak především musí být nerůznoběžné (VĚTY 12,17 a 12,21). Podle VĚTY 17,8 však nemohou být souběžné, takže podle definice rozběžek jsou rozběžné.

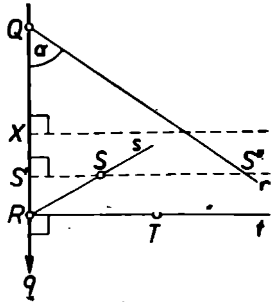
Okolnost, že přímky rozběžné mají právě jednu kolmici a že obráceně přímky, které mají společnou kolmici, jsou rozběžné, lze výstižně ilustrovat na modelu Beltrami-Kleinově. Podle toho, jak jsme u tohoto modelu definovali shodnost úhlů, jsou zde „přímky“ „kolmé“, jestliže náležejí přímkám polárně sdruženým vzhledem ke kružnici k (t. j. takovým, že jedna prochází pólem přímky druhé). „Rozběžky“ p a q (viz obr. 75) mají společnou „kolmici“ na sečně určené póly

P a Q. Jsou-li „přímky" p a q „souběžné" (viz obr. 76), pak póly P a Q leží na téže tečně kružnice k, takže neurčují žádnou „přímku". Podobně je tomu v případě „různoběžek", neboť spojnice pólů P a Q kružnici k neprotíná.

VĚTA 17,11. *Dvě přímky, které s třetí přímkou tvoří po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je $2R$, jsou rozběžné.*



Obr. 77.



Obr. 78.

DŮKAZ. Jsou-li p, q obě přímky a P, Q průsečíky s třetí přímkou, o níž mluví naše věta, pak kolmice vedená středem úsečky PQ na jednu z přímek p, q je kolmá i na druhou (podle věty o shodnosti trojúhelníků). Mají tedy přímky p, q společnou kolmici.

DEFINICE. Buďtež $\vec{p}$ a $\vec{q}$ dvě souběžky. Je-li Q bod na přímce $\vec{q}$ a P průsečík přímky p s kolmicí vedenou k ní bodem Q, pak úhel $\sphericalangle PQ\vec{q}$ nazýváme *úhlem souběžnosti bodu Q vzhledem k přímce p*. Budeme ho označovat $\Pi(pQ)$, protože závisí jen na vzdálenosti bodu Q od p.[21a]) Mají-li totiž body Q a R stejné vzdálenosti od přímky p, pak je $\Pi(pQ) \equiv \equiv \Pi(pR)$, jak se snadno dokáže nepřímo pomocí věty, že bodem lze k orientované přímce vést právě jednu souběžku.

VĚTA 17,12. *Je-li $pQ < pR$, pak $\Pi(pQ) > \Pi(pR)$.*

DŮKAZ. Nechť body Q a R leží na kolmici k přímce p (viz obr. 77) tak, že $pQ < pR$; rovnoběžky v téže orientaci vedené těmito body k p označme q a r. Kdyby bylo $\Pi(pQ) \equiv \Pi(pR)$, pak by přímky q a r tvořily s $\overline{QR}$ po jedné straně vnitřní úhly o součtu $2R$, byly by tedy rozběžné, zatím co podle VĚTY 17,6 jsou souběžné. Kdyby bylo $\Pi(pQ) < < \Pi(pR)$, potom polopřímka (RS) taková, že $\sphericalangle SRQ \equiv \Pi(pQ)$, by

[21a]) Tento symbol zavedl Lobačevskij.

padla do úhlu $\sphericalangle QR\vec{r}$ a při tom podle VĚTY 17,11 by neprotla q, což by byl spor, neboť by pak neprotla ani p.

VĚTA 17,13. *Je-li α jakýkoli ostrý úhel, pak vždy existuje k přímce p bod P tak, že je $\Pi(pP) = \alpha$.*

DŮKAZ. Budiž $\vec{q}$ orientovaná přímka, na níž leží bod Q (viz obr. 78). Určeme polopřímku r s počátkem v Q tak, že je $\sphericalangle (Q\vec{q})r \equiv \alpha$. Podle VĚTY 16,6 nemohou všechny kolmice na q (mající s q průsečík na polopřímce $(Q\vec{q})$) protnout rameno r. Podle toho můžeme nyní rozdělit body přímky q do dvou skupin S_1, S_2 takto: do skupiny S_1 dáme všechny body X, jimiž vedená kolmice na přímku q protíná rameno r, a s každým bodem X také všechny body polopřímky $(X\vec{q})$. Do skupiny S_2 dáme všechny ostatní body přímky q. Je zřejmé, že takto dostaneme Dedekindův řez a podle odstavce **13** víme, že existuje jeho vytvořující bod, který označíme R.

Nyní dokážeme, že kolmice t vedená bodem R k přímce q je souběžná s přímkou $\bar{r}$. K tomu stačí dokázat dvojí.

1. Jednak to, že t neprotíná přímku $\bar{r}$, což se sporem snadno odvodí.

2. Dále to, že každá polopřímka úhlu $\sphericalangle TRQ$ (kde T je bod na t po téže straně přímky q jako polopřímka r) protíná přímku $\bar{r}$. Je-li s taková polopřímka, potom kolmice vedená některým jejím bodem S protne přímku q v bodě S', pro který je $\mu(QS'R)$, takže s protne i přímku r; průsečík označme S''. Aplikujeme-li nyní axiom $\mathfrak{R}$, 4 na trojúhelník $\triangle QS'S''$ a přímku $\bar{s}$, pak vidíme, že s musí protnout mezi body Q a S'' přímku $\bar{r}$.

Je-li nyní dána přímka p, o níž mluví naše věta, pak stačí volit bod P tak, že je $pP \equiv Qt$, a potom bude $\Pi(pP) = \alpha$.

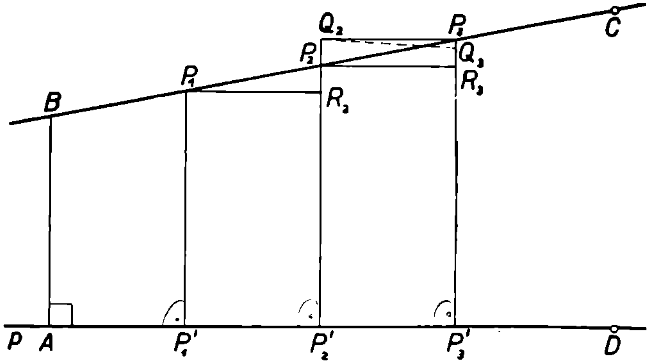
VĚTA 17,14. *Jestliže se úhel α neomezeně zmenšuje, pak*

1. *vzdálenost pP, pro kterou je $\Pi(pP) = \alpha$, se neomezeně zvětšuje,*

2. *vzdálenost pP, pro kterou je $\Pi(pP) = R - \alpha$, se neomezeně zmenšuje.*

DŮKAZ plyne okamžitě z VĚT 17,12 a 17,13.

Výsledek této věty by bylo lze říci také tak (jestliže bychom zavedli velikost úsečky a úhlu jako čísla), že úhel souběžnosti konverguje k nule, jestliže příslušná vzdálenost konverguje do ∞, a že úhel souběžnosti konverguje k R, jestliže příslušná vzdálenost konverguje k nule. Protože v eukleidovské geometrii je úhel souběžnosti pro všechny vzdálenosti roven R, vidíme, že neeukleidovská geometrie se tím více podobá eukleidovské, čím menší je část neeukleidovského prostoru, na niž tuto geometrii omezíme. Tento fakt lze vyjádřit ještě jinak. Kdyby na př. ve vesmíru platila neeukleidovská geometrie, při čemž by třeba úhel souběžnosti příslušející k vzdálenosti 10^6 světelných let měřil 10^{-6} sekund, potom by se neeukleidovská geometrie v oblasti nám dostupné prakticky nelišila od geometrie eukleidovské. Srovnej odstavec **1**, str. 13 a odstavec **3**, str. 21.



Obr. 79.

VĚTA 17,15. *Buďtež dány přímky $\overline{AD}$ a $\overline{BC}$ takové, že body C a D jsou po téže straně přímky $\overline{AB}$, úhel $\sphericalangle BAD$ je pravý, úhel $\sphericalangle ABC$ pravý nebo tupý. Jsou-li P_1, P_2 dva body polopřímky (BC), při čemž $P_1 \neq B$ a $BP_1 < BP_2$, potom platí, jestliže přímku $\overline{AD}$ označíme p,*

1. $BA < pP_1$,
2. $pP_1 < pP_2$,
3. *je-li dána jakákoli úsečka $MN > BA$, pak existuje na polopřímce (BC) bod S tak, že $pS \equiv MN$.*

DŮKAZ. 1.—2. Jsou-li předpoklady věty splněny a jsou-li P_1' a P_2' (viz obr. 79) průsečíky přímky $\overline{AD}$ s kolmicemi vedenými body P_1 a P_2 na přímku $\overline{AD}$, pak ve čtyrúhelníku $\square\, AP_1'P_1B$ musí být součet úhlů menší než $4R$, takže je $\sphericalangle ABC < \sphericalangle P_1'P_1C$ čili úhel $\sphericalangle P_1'P_1C$ je vždy tupý. Nechť nyní R_2 je bod na polopřímce $(P_2'P_2)$ a takový, že $P_1'P_1 \equiv$ $\equiv P_2'R_2$. V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, P_1'P_2'R_2P_1$ je úhel $\sphericalangle P_1$ vždy ostrý, takže polopřímka (P_1R_2) padne do úhlu $\sphericalangle P_1'P_1C$, takže R_2 leží mezi P_2' a P_2 čili $P_1P_1' < P_2P_2'$. Právě tak je vidět, že platí $BA <$ $< P_1P_1'$.

3. Budiž na $\overline{BC}$ bod P_3 takový, že je $\mu(P_1P_2P_3)$ a $P_1P_2 \equiv P_2P_3$, a budiž P'_3 průsečík $\overline{AD}$ s kolmicí vedenou bodem P_3 na $\overline{AD}$. Budiž dále R_3 bod polopřímky (P'_3P_3) takový, že $P'_3R_3 \equiv P'_2P_2$. Víme už, že R_3 padne mezi P'_3 a P_3.

Dokážeme nejdříve, že pro přírůstky R_3P_3 a R_2P_2 platí $R_2P_2 < R_3P_3$. Budiž Q_2 bod polopřímky $(P_2P'_2)^*$ takový, že $P_2Q_2 \equiv P_2R_2$. Trojúhelníky $\triangle P_1P_2R_2$ a $\triangle P_3P_2Q_2$ jsou shodné, takže $\sphericalangle P_2Q_2P_3 > R$, protože $\sphericalangle P_2R_2P_1 > R$. Jestliže na polopřímce (R_3P_3) určíme bod Q_3 tak, že $P_2Q_2 \equiv R_3Q_3$, pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square P_2R_3Q_3Q_2$ je $\sphericalangle Q_2 < R$, takže Q_3 leží mezi R_3 a P_3 čili $P_2Q_2 < R_3P_3$ čili $R_2P_2 < < R_3P_3$.

Je-li nyní dána úsečka MN, existuje podle Archimedova axiomu přirozené číslo n tak, že $n \,.\, R_2P_2 > MN - P_1P'_1$, takže pro bod P_{n+1}, který je určen vztahy $P_1 \prec P_2 \prec \ldots \prec P_n \prec P_{n+1}$ a $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \equiv \ldots \equiv P_nP_{n+1}$ platí $pP_{n+1} > pP_1 + n \,.\, R_2P_2 > MN$. Rozdělíme-li nyní body úsečky P_1P_{n+1} tak, že do jedné třídy dáme ty body X, pro něž je $pX < MN$, do druhé dáme zbývající, je tím definován Dedekindův řez a vytvořující bod S má pak zřejmě tu vlastnost, že $pS \equiv \equiv MN$.

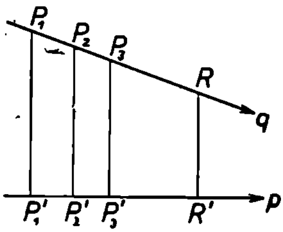
VĚTA 17,16. *Dvě rozběžky se od společné kolmice, na níž leží nejkratší spojnice jejich bodů, na obě strany od sebe neomezeně vzdalují.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 17,15 a z toho, že ve čtyrúhelníku je součet úhlů menší než $4R$.

VĚTA 17,17. *Souběžné přímky $\vec{p}$, $\vec{q}$ se sobě bez omezení (asymptoticky) blíží, t. j.*

1. *jsou-li body P_1, P_2, P_3 přímky q takové, že je $P_2 \in (P_1\vec{q})$, $P_3 \in (P_2\vec{q})$, pak platí vztahy $pP_1 < pP_2 < pP_3$,*

2. *je-li dána libovolná úsečka MN, existuje na q bod S tak, že $pS < MN$.*

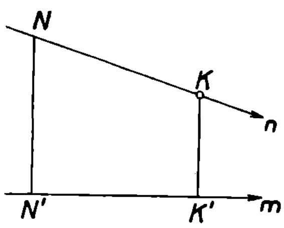


Obr. 80.

DŮKAZ. 1. Body P_1, P_2, P_3 veďme na p (viz obr. 80) kolmice $\overline{P_1P'_1}$, $\overline{P_2P'_2}$, $\overline{P_3P'_3}$. Úhel $\sphericalangle P'_3P_3P_1$ je vždy tupý, tedy podle VĚTY 17,15 je $pP_1 > pP_2 > pP_3$.

2. Zvolme orientovanou přímku $\vec{m}$ (viz obr. 81) a ve vzdálenosti menší než MN zvolme bod K a veďme jím souběžku $\vec{n}$. Podle VĚTY

17,15 existuje na polopřímce $(K\vec{n})^*$ bod N tak, že $mN \equiv pP_1$. Označíme-li N', K' průsečíky přímky m s kolmicemi vedenými body N a K k přímce m a zvolíme-li na polopřímce (P_1P_3) bod R tak, že $P_1R \equiv \equiv NK$, pak je $pR < MN$, jak plyne ze shodnosti čtyrúhelníků $\square\, P_1'R'RP_1$ a $\square\, N'K'KN$.



Obr. 81.

Nyní se budeme zabývat geometrií neeukleidovského prostoru, zavedeme vztah různoběžnosti, souběžnosti a rozběžnosti pro přímky a roviny a odvodíme vlastnosti těchto vztahů.

DEFINICE. Dvě přímky v prostoru, kterými nelze proložit rovinu, nazýváme *mimoběžné*. Dvě přímky v prostoru, kterými lze proložit rovinu, nazýváme tak, jak se chovají ve společné rovině.

Víme tedy, co to znamená, že dvě přímky v prostoru jsou různoběžné, souběžné nebo rozběžné.

VĚTA 17,18. *Dvě rozběžky mají právě jednu společnou kolmou rovinu.*

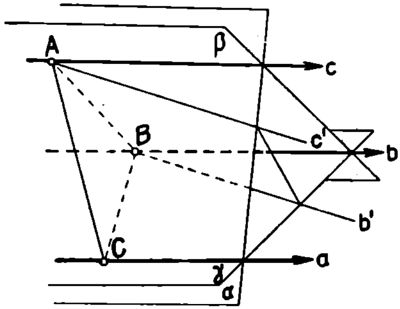
DŮKAZ. Vedeme-li společnou kolmici k oběma přímkám ve společné rovině a jsou-li P a Q její průsečíky s oběma přímkami a vedeme-li body P a Q kolmice na rovinu rozběžek, pak podle VĚTY 12,44 lze oběma kolmicemi proložit právě jednu rovinu a ta je kolmá na obě přímky a je jediná této vlastnosti.

VĚTA 17,19. *Buďtež dány v prostoru dvě souběžné přímky. Průsečnice dvou rovin* (různých od roviny obou souběžek), *z nichž každá prochází jednou z obou souběžek, je s oběma přímkami souběžná.*

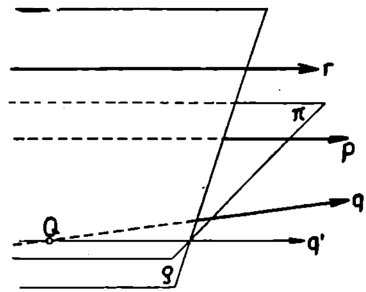
DŮKAZ. Buďtež $\vec{a}$, $\vec{b}$ dvě souběžky (viz obr. 82), α resp. β rovina incidentní s a resp. b a c průsečnice rovin α a β. Rovinu přímek a a b označme γ. Dokážeme nejdříve, že přímky a a c jsou souběžné. Je jasné, že jsou nerůznoběžné, protože jinak by jejich společný průsečík byl průsečíkem rovin α, β, γ a tedy by se i přímky a a b protly, což je proti předpokladu. Na přímkách a, b, c zvolme postupně body A, B, C. Přímku c orientujme tak, aby polopřímky $(A\vec{a})$, $(B\vec{b})$, $(C\vec{c})$ ležely vždy v téže polorovině určené přímkou $\overline{AC}$ resp. $\overline{BC}$ resp. $\overline{AB}$ na rovině α resp. β resp. γ. Každá polopřímka úhlu $\sphericalangle AC\vec{c}$ protne přímku a. Neboť je-li c' taková polopřímka, potom průsečnice b' rovin γ a $\overline{Bc'}$ leží uvnitř úhlu $\sphericalangle AB\vec{b}$, takže podle předpokladu protne přímku a. Roviny α, γ a $\overline{Bc'}$ se tedy protnou v jednom bodě, takže c' protne přímku a.

Analogicky se dokáže, že přímky b a c jsou souběžné.

VĚTA 17,20. *Je-li každá z orientovaných přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžná s orientovanou přímkou $\vec{r}$, pak také přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.*



Obr. 82.



Obr. 83.

DŮKAZ. Jsou-li všechny tři přímky v jedné rovině, byla věta dokázána již dříve (17,6). Nechť tedy přímky p, q, r neleží v jedné rovině. Na q zvolme bod Q (viz obr. 83) a označme písmenem π rovinu $\overline{pQ}$ a písmenem ϱ rovinu $\overline{rQ}$. Protože $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné, bude s nimi souběžná průsečnice $\vec{q}'$ rovin π a ϱ. Budou tedy souběžné dvojice přímek $\vec{r}$, $\vec{q}$ i $\vec{r}$, $\vec{q}'$. Protože ale bodem Q lze k $\vec{r}$ vést právě jednu souběžku, přímky q a q' splývají a tedy q a p jsou souběžné.

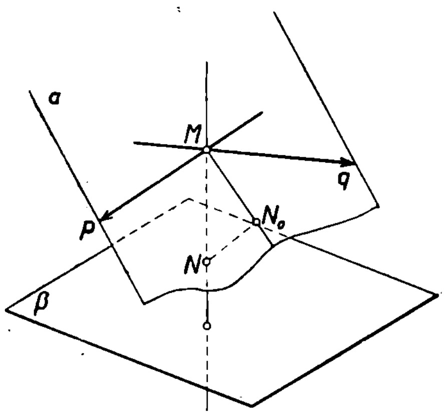
VĚTA 17,21. *Jsou-li dány dvě rozběžky a každou rozběžkou prochází rovina různá od roviny obou rozběžek, pak průsečnice obou rovin je rozběžná s oběma přímkami.*

DŮKAZ. Zmíněná průsečnice nemůže s nimi být různoběžná, protože by se pak dané přímky musely protnout. Podle VĚTY 17,19 nemohou být ani souběžné.

VĚTA 17,22. *Budiž dána přímka p a rovina α, při čemž $p \overline{\nabla} \alpha$. Přímky v rovině α, které leží s přímkou p v téže rovině (které nejsou tedy s p mimoběžné), jsou mezi sebou i s přímkou p buď různoběžné nebo souběžné nebo rozběžné a to podle toho, je-li p alespoň s jednou přímkou roviny α různoběžná nebo souběžná nebo rozběžná.*

DŮKAZ. Případ, kdy přímka p je různoběžná alespoň s jednou přímkou roviny α, je jasný. V obou ostatních případech naši větu snadno dokážeme pomocí VĚT 17,19 a 17,21.

DEFINICE. *Přímka je různoběžná* resp. *souběžná* resp. *rozběžná s rovinou*, jestliže není s touto rovinou incidentní a jestliže je různoběžná resp. souběžná resp. rozběžná alespoň s jednou její přímkou.



Obr. 84.

Je zřejmé, že když přímka je různoběžná s rovinou, pak s ní má právě jeden společný bod. Dále je podle předcházející věty patrné, že přímka nemůže být s rovinou současně souběžná i rozběžná.

VĚTA 17,23. *Jestliže přímka a rovina jsou rozběžné, pak mají společnou právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. Danou rozběžkou vedeme k rovině rovinu kolmou. Podle VĚT 17,21 a 17,22 je průsečnice obou těchto rovin rozběžná s danou rozběžkou. Závěr plyne z toho, že dvě rozběžky mají vždy právě jednu společnou kolmici.

DEFINICE. Dvě různé roviny nazýváme *různoběžné*, jestliže mají alespoň jeden společný bod. Podle VĚTY 10,8 víme, že pak mají společnou přímku, které říkáme *průsečnice* obou rovin.

VĚTA 17,24. *Dvě roviny jsou různoběžné tehdy a jen tehdy, lze-li každým bodem jedné vést k druhé dvě souběžky.*

DŮKAZ. 1. Jsou-li dvě roviny různoběžné, zvolme v jedné z nich bod mimo průsečnici a veďme jím v této rovině obě souběžky k průsečnici. Podle definice jsou obě tyto souběžky zároveň souběžné s druhou rovinou.

2. Buďtež dány dvě roviny α a β a nechť bodem M prochází v rovině α dvě souběžky p, q k rovině β. Dokážeme, že roviny α a β mají společný bod.

Bodem M veďme kolmici $\overline{MN}$ (viz obr. 84) na β. Budiž N_0 průsečík roviny α s kolmicí vedenou k ní bodem N. Bod N_0 neleží podle VĚTY

12,46 na žádné z přímek p, q, protože přímky p, q svírají s $\overline{MN}$ stejné úhly a jsou různé. Podle VĚTY 12,46 platí $\sphericalangle NMN_0 < \sphericalangle NM\vec{p}$. Úhel $\sphericalangle NM\vec{p}$ je však úhel souběžnosti, tedy přímka $\overline{MN_0}$ protíná průsečnici rovin β a $\overline{MN_0N}$. Průsečík je společným bodem rovin α a β.

VĚTA 17,25. *Jestliže jedním bodem roviny β lze vést právě jednu v rovině β ležící souběžku s rovinou α, pak tuto vlastnost má každý bod roviny β.*

DŮKAZ. Budiž M bod roviny β, jímž prochází právě jedna v rovině β ležící souběžka p roviny α. Kdyby některým bodem roviny β procházely v rovině β dvě souběžky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ k rovině α, pak by bodem M k přímkám $\vec{p}, \vec{q}$ vedené orientované souběžky musely být podle transitivnosti souběžnosti souběžné s α, což je proti předpokladu. Zbývá dokázat, že každým bodem roviny β lze (za předpokladu vytčeného na počátku našeho důkazu) v této rovině vést alespoň jednu souběžku s rovinou α. To je však zřejmé, neboť souběžka s přímkou p vedená tímto bodem v rovině β je v důsledku transitivnosti vztahu souběžnosti souběžná i s rovinou α.

DEFINICE. Roviny α a β jsou *souběžné*, jestliže alespoň jedním bodem roviny α lze vést právě jednu v rovině α ležící souběžku s rovinou β. Dvě roviny jsou *rozběžné*, jestliže žádná z nich neobsahuje přímky souběžné s druhou.

VĚTA 17,26. *Průsečnice roviny s dvěma rozběžnými rovinami jsou rozběžné přímky.*

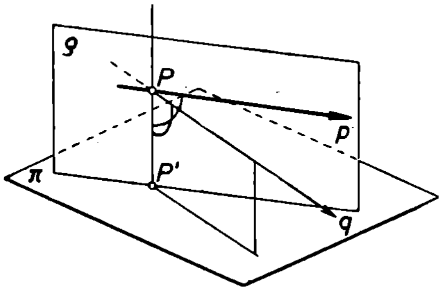
DŮKAZ. To je zřejmé, protože obě průsečnice nemohou být ani různoběžné, ani souběžné.

VĚTA 17,27. *Dvě rozběžné roviny mají vždy právě jednu společnou kolmici.*

DŮKAZ. Buďtež roviny α a β rozběžné. Zvolme v rovině α bod M a veďme jím kolmici na rovinu β a budiž N průsečík. Jestliže $\overline{MN}$ je kolmá na α, jsme hotovi. Jinak veďme bodem N kolmici $\overline{NP}$ na α. Rovina $\overline{MNP}$ je zároveň kolmá na α i na β a přitom protíná α a β ve dvou rozběžkách. Společná kolmice těchto rozběžek je společná kolmice rovin α a β. Tím je důkaz existence hotov. Tvrzení, že dvě rozběžné roviny mají nejvýše jednu společnou kolmici, lze snadno dokázat sporem.

VĚTA 17,28. *Je-li p souběžka k rovině π, pak přímkou p lze proložit právě jednu rovinu souběžnou s π.*

Důkaz. 1. *Existence*: Budiž P bod na p (viz obr. 85) a P' budiž průsečík π s kolmicí vedenou na π bodem P. Je-li ϱ rovina procházející přímkou p a bodem P', pak lze ukázat, že rovina δ procházející přímkou p kolmo na ϱ je souběžná s π. K tomu stačí vzhledem k Větě 17,25 dokázat, že bodem P nelze v rovině δ vést mimo $\vec{p}$ jinou souběžku k π. To je ale zřejmé, neboť je-li $\vec{q}$ nějaká souběžka vedená bodem P k π, pak jednak



Obr. 85.

$$\sphericalangle P'P\vec{q} \equiv \sphericalangle P'P\vec{p} \equiv \Pi(P'P),$$

jednak rovina vedená přímkou q kolmo na ϱ protne ϱ v přímce, která svírá s (PP') podle Věty 12,46 menší úhel než je $\Pi(P'P)$. Nemůže tedy q ležet v δ.

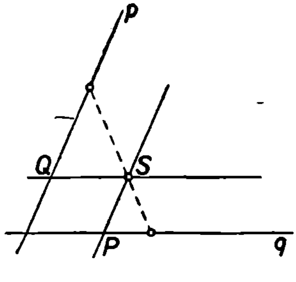
2. *Jednoznačnost*: Jestliže by rovina τ procházela přímkou p a nebyla kolmá na ϱ, pak průsečík P'' roviny τ a kolmice vedené k τ bodem P' padne mimo p, takže podle Věty 12,45 je $\sphericalangle P'PP'' < \sphericalangle P'P\vec{p} \equiv$ $\equiv \Pi(P'P)$, takže $\overline{PP''}$ protíná π.

18. Svazek a trs přímek; cykl a sféra.

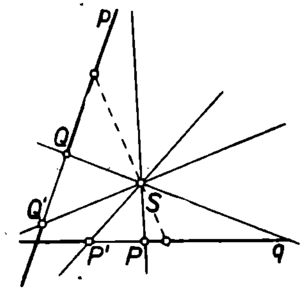
Pod vlivem rozvoje perspektivy v malířství (Leonardo da Vinci 1452—1519, A. Dürer 1471—1528, matematik G. Ubaldi 1545—1607) se v eukleidovské geometrii vytvořilo pojetí t. zv. *bodu v nekonečnu* a to jakožto bodu společného dvěma rovnoběžkám (tak to formuloval okolo 1640 G. Desargues). Často se takový bod nazývá také bod nevlastní nebo úběžný. K zavedení pojmu nevlastního bodu jsme v geometrii vedeni úvahami o centrální projekci, jestliže nechceme rozeznávat různé případy, ale naopak docílit jednotnosti v úvahách. Při vhodné centrální projekci dvou rovin na sebe mohou totiž, jak známo, rovnoběžkám v jedné rovině odpovídat různoběžky v druhé rovině, takže průsečíku různoběžek neodpovídá v původní rovině žádný bod.

Tento zjev můžeme sledovat také při centrální projekci v rovině. Jsou-li p a q dvě různoběžky a promítáme-li v eukleidovské rovině p na q ze středu S (který leží mimo obě přímky — viz obr. 86), pak každému bodu na p je přiřazen právě jeden bod na q s výjimkou bodu Q (pro který platí $QS \parallel q$), jemuž není na q přiřazen žádný bod. Na druhé straně však zbývá na přímce q bod P (pro který je $PS \parallel p$), k němuž neexistuje na přímce p bod, jemuž by mohl být přiřazen.

Jestliže přímku p orientujeme a budeme si myslit na ní bod pohybující se v jednom či druhém smyslu tak, že se bude neustále vzdalovat (od nějakého pevného bodu), potom jemu přiřazený bod na přímce q se bude stále blížit z té či oné strany bodu P. Okolí bodu P na přímce q nám zobrazuje tedy body přímky p, které jsou na př. od bodu Q na obě strany nad pomyšlení vzdáleny. Proto bod, který přidáváme přímce p a o kterém říkáme, že mu je přiřazen na q bod Q, nazýváme bodem v nekonečnu.



Obr. 86.

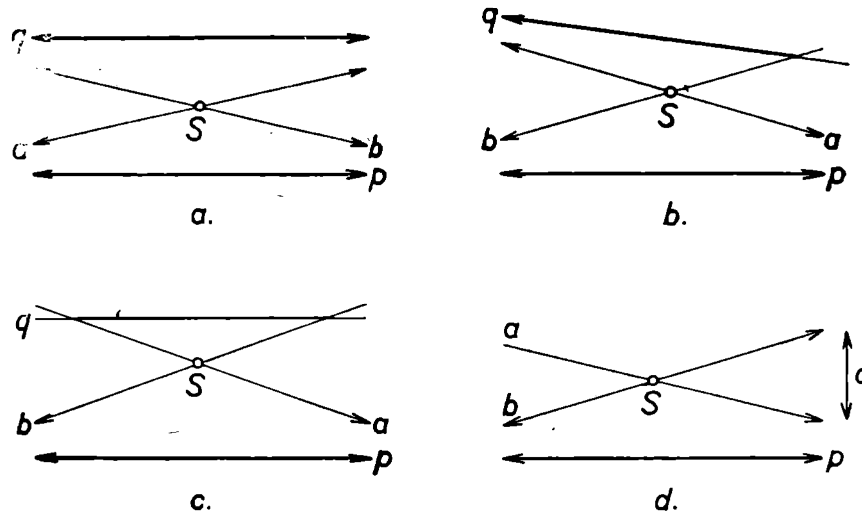


Obr. 87.

Okolí bodu P na přímce q nám také ukazuje, že z téhož důvodu, proč vůbec zavádíme nevlastní bod, je nutné, abychom zavedli pro přímku takový bod jen jeden, zatím co naivní představa by nám vnucovala nevlastní body dva, každý na jednom „konci" přímky. Protože tedy každá přímka má jen jeden nevlastní bod, má každá přímka roviny s geometrickým místem nevlastních bodů této roviny společný právě jeden bod. Odtud lze snadno pochopit, proč se toto geometrické místo pojímá jakožto *přímka*, t. zv. *přímka v nekonečnu* neboli přímka úběžná čili nevlastní (v geometrii se tento pojem vytvořil kolem r. 1750 a je spojen se jmény B. Taylora a J. H. Lamberta).

Zavedením nevlastních bodů bylo možno zobecnit pojem svazku přímek. Při vhodné centrální projekci dvou rovin na sebe odpovídá svazku různoběžek jedné roviny množina přímek, které jsou všechny navzájem rovnoběžné. Pojem nevlastního bodu nás vede k tomu, abychom takovou množinu rovnoběžek pojímali opět jako svazek, t. j. množinu všech přímek roviny, incidentních s jedním bodem — tentokráte incidentních s nevlastním bodem. V eukleidovské rovině, k jejímž bodům jsme přidali nevlastní body, máme tedy dva druhy svazků přímek: svazek různoběžek se společným bodem v konečnu a svazek rovnoběžek se společným bodem v nekonečnu.

Obraťme se nyní na Lobačevského neeukleidovskou geometrii. Budeme-li promítat na sebe body různoběžek p a q ze středu S (ležícího v rovině přímek p, q, avšak mimo tyto přímky — viz obr. 87), pak místo bodů P a Q obrázku 86 nastoupí úsečky PP' a QQ', jestliže žádná z přímek bodem nebude současně souběžná i k p i ke q. Jestliže při centrální projekci přímek v eukleidovské geometrii se přímka zobrazovala na útvar, který vznikl z přímky vyjmutím jediného bodu, zobrazuje se celá přímka v neeukleidovské geometrii na útvar vzniklý z přímky vyjmutím jisté množiny bodů, která je buď *prázdná* (obr. 88a, přímky p a q se neprotínají, přímky $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou obě orientované souběžky bodem S k p; přímka q je souběžná s $\vec{a}^*$ i s $\vec{b}^*$) nebo je to *polopřímka* (obr. 88b, disposice táž, jako na obr. 88a, až na přímku q, která je souběžná s $\vec{a}^*$ a protíná b) nebo jsou to *dvě*

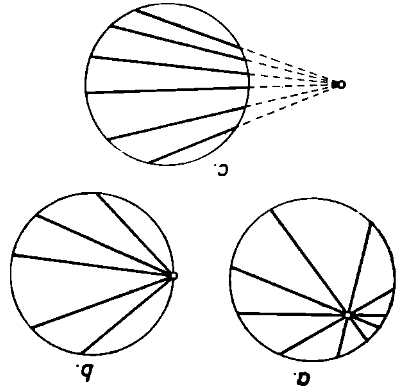


Obr. 88.

polopřímky bez společného bodu (obr. 88c, totéž jako na obr. 88a, až na přímku q, která protíná a i b) nebo konečně to je *celá přímka* (obr. 88d, disposice táž jako na obr. 88a, až na přímku q, která je souběžná s oběma přímkami $\vec{a}$, $\vec{b}^*$).

Podobně jako v eukleidovské rovině, tak také v rovině neeukleidovské bychom mohli zavedením nových bodů rozšířit pojem dosavadního bodu (který bychom mohli nazývat vlastním bodem) na pojem bodu jakožto „průsečíku" jakýchkoli dvou přímek v rovině, i nerůznoběžných. Zde by však musely být nevlastní body dvojího druhu. Bod prvého druhu by náležel dvěma souběžným přímkám a mohli bychom ho nazývat *limitním nevlastním bodem.* Potom by každá přímka měla dva různé limitní nevlastní body. V modelu Beltrami-Kleinově by mu odpovídal bod základní kružnice k. Nevlastní bod druhého druhu by náležel dvěma rozběžkám a mohli bychom jej nazývat *vnějším nevlastním bodem.* Ve zmíněném modelu by mu odpovídal společný bod na prodloužení dvou nerůznoběžných přímek neboli vnější bod vzhledem ke kružnici k.

Odtud můžeme tušit, že v neeukleidovské geometrii budeme mít tři druhy svazků: *svazek různoběžek,* t. j. množinu všech přímek incidentních s určitým vlastním bodem (obr. 89a), *svazek souběžek* (v němž každé dvě přímky jsou souběžné), který bychom mohli pojímat jako množinu přímek incidentních s určitým limitním nevlastním bodem (obr. 89b), a *svazek rozběžek* (v němž každé dvě přímky jsou rozběžné), který by bylo možno chápat jako množinu všech bodů incidentních s určitým vnějším nevlastním bodem (obr. 89c).



Obr. 89.

V této knížce pojem nevlastního bodu zavádět nebudeme a k definici svazků použijeme jiného jednotícího hlediska, totiž centrálního promítání svazku různoběžek. Mimochodem ještě poznamenáváme, že jak eukleidovská přímka s nevlastním bodem, tak i neeukleidovská přímka se všemi nevlastními body se chová jako uzavřená čára. Vedle nevlastních bodů bychom mohli v neeukleidovské geometrii zavést také pojem nevlastní přímky a nevlastní roviny[22]) a pak ukázat, že vlastní i nevlastní elementy společně vyhovují všem incidenčním axiomům $\mathfrak{I}$. Pro tyto elementy platí navíc ještě na př., že každé dvě přímky v rovině se protínají, každé dvě roviny mají společnou přímku. Takto bychom dostali t. zv. *projektivní geometrii* a to obdobným způsobem, jako k ní lze zavedením nevlastních elementů dospět z geometrie eukleidovské (o tomto způsobu viz podrobněji M. Pasch [3], §§ 5, 6, 7, 8).

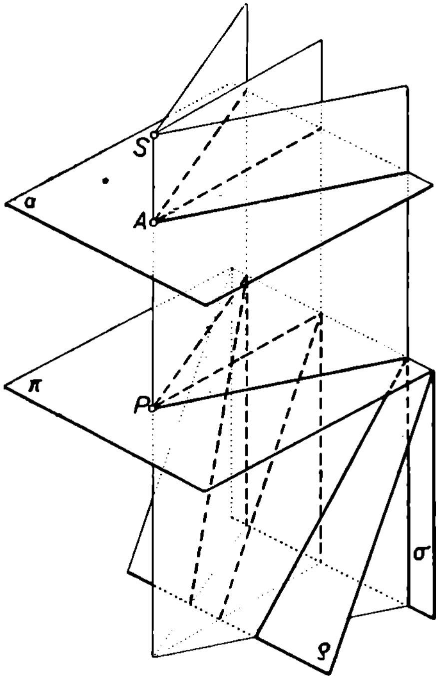
DEFINICE. *Svazek přímek* je množina všech přímek roviny, procházejících jedním bodem, který nazýváme *střed svazku.*

Svazek rovin je množina všech rovin, procházejících jednou přímkou, kterou nazýváme *osou svazku.*

OZNAČENÍ. Protože svazek přímek je určen středem a rovinou, svazek rovin osou, budeme svazky označovat tak, že symboly prvků, které svazek určují, napíšeme do hranatých závorek, na př. $[A,\alpha]$, $[p]$, $[\overline{AB}]$.

[22]) Při tom bychom museli rozlišovat dva druhy nevlastních přímek: s přímkou prvého druhu by byly incidentní pouze vnější nevlastní body, zatím co přímka druhého druhu by obsahovala vedle vnějších nevlastních bodů ještě právě jeden nevlastní bod limitní. Přímka, jež by vedle vnějších nevlastních bodů obsahovala právě dva nevlastní body limitní, by byla již vlastní (a incidentní ještě s nekonečně mnoha body vlastními). To vše lze názorně sledovat na modelu Beltrami-Kleinově. Současně je vidět, že geometrické místo limitních nevlastních bodů roviny bychom nemohli pojímat jako přímku, ale byla by to čára druhého stupně. Všechny tyto poznámky bychom mohli nyní přenést na roviny neeukleidovského (hyperbolického) prostoru.

Definice. Buďtež dány roviny α a β a bod C mimo ně. Říkáme, že *rovinu α promítáme centrálně z bodu C do roviny β*, jestliže každému bodu A roviny α přiřadíme bod A' roviny β jakožto průsečík roviny β s přímkou $\overline{CA}$ (pokud průsečík A' existuje) a jestliže podobně každé přímce a roviny α přiřadíme přímku a' roviny β jakožto průsečnici roviny β s rovinou $\overline{aC}$. Stručně říkáme, že bod A resp. přímka a se z bodu C promítá na rovinu β jako bod A' resp. přímka a', nebo ještě stručněji, že bod A resp. přímka a se centrálně promítají jako bod A' resp. přímka a'.



Obr. 90.

Poznámka. Mohlo by se zdát, že když už jsme definovali centrální průmět bodu, pak bychom průmět přímky mohli definovat jako množinu průmětů jejích bodů. Takový průmět by však nemusel být vždy přímkou, jak nás o tom poučuje obr. 88. Naproti tomu naše definice průmětu přímky je taková, že průmět, jestliže vůbec existuje, je vždy přímkou.

Věta 18,1. *Daný svazek přímek se centrálně promítá buď jako svazek nebo jako množina přímek, v níž kterékoli dvě přímky jsou souběžné (při souhlasné orientaci všech přímek množiny) nebo jako množina přímek, v níž kterékoli dvě přímky jsou rozběžné a při tom mají všechny společnou kolmici.*

Důkaz. Budiž dán svazek $[A, \alpha]$. Mimo rovinu α zvolme libovolně bod S. Ten s každou přímkou svazku $[A, \alpha]$ určí rovinu, při čemž množina všech takových rovin bude tvořit svazek rovin $[\overline{SA}]$.

1. Zvolíme-li rovinu π (viz obr. 90) nepatřící svazku $[\overline{SA}]$, ale *protínající přímku $\overline{SA}$* v bodě P, pak rovina π protne každou rovinu svazku $[\overline{SA}]$, všechny průsečnice mají společný bod P, takže tvoří svazek $[P, \pi]$.

2. Zvolíme-li rovinu ϱ *souběžnou s orientovanou přímkou* $\overrightarrow{SA}$, pak všechny průsečnice roviny ϱ s rovinami svazku $[\overline{SA}]$ jsou podle VĚTY 17,21 souběžné s přímkou $\overline{SA}$ a tedy podle VĚTY 17,19 i mezi sebou.

3. Zvolíme-li rovinu σ *rozběžnou s přímkou* $\overline{SA}$, pak průsečnice roviny σ s rovinami svazku $[\overline{SA}]$ jsou s přímkou $\overline{SA}$ (VĚTA 17,22) i mezi sebou rozběžné. Zbývá dokázat, že mají společnou kolmici. Zvolme jednu rovinu svazku $[\overline{SA}]$ a určeme její průsečnici s rovinou σ. Podle VĚTY 17,17 existuje právě jedna rovina φ kolmá na tuto průsečnici a zároveň na přímku $\overline{SA}$. Rovina φ je kolmá na rovinu σ (protože je kolmá alespoň na jednu její přímku) a na každou rovinu svazku $[\overline{SA}]$ (z téhož důvodu), je tedy kolmá na průsečnici roviny σ s každou rovinou svazku $[\overline{SA}]$. Její průsečnice s rovinou σ je společná kolmice všech našich rozběžek.

Vzhledem k předcházející větě můžeme nyní rozšířit pojem svazku přímek.

DEFINICE. Svazek přímek, který jsme výše definovali, budeme určitěji nazývat *svazkem různoběžek*. Je jednoznačně určen svým středem a rovinou (incidentní se středem), v níž leží přímky svazku.

Svazek souběžek je množina všech přímek roviny, souběžných s danou orientovanou přímkou. Tento svazek je jednoznačně určen kteroukoli orientovanou přímkou do něho patřící a s ní incidentní rovinou, v níž leží přímky svazku.

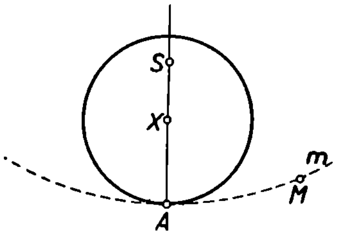
Svazek rozběžek je množina všech přímek kolmých na danou přímku, která se nazývá *básí svazku*. Basí a s ní incidentní rovinou, v níž leží přímky svazku, je svazek jednoznačně určen.

Obecně můžeme říci, že dvě přímky určují právě jeden svazek, jemuž obě patří. Svazek má tu vlastnost, že každým bodem roviny, v níž svazek leží (různým od středu svazku, jde-li o různoběžky), prochází právě jedna jeho přímka.

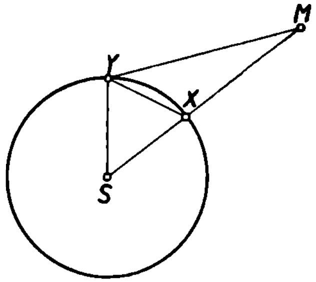
DEFINICE. *Kružnice* je množina všech bodů roviny, které mají od pevného bodu roviny touž vzdálenost. Tento pevný bod se nazývá *střed kružnice* a vzdálenost bodů od středu *poloměr kružnice*. Kružnici, která má střed S a obsahuje bod A, budeme symbolicky značit $\mathfrak{K}(S, A)$.

V dalším ukážeme, že pojem kružnice úzce souvisí s pojmem svazku přímek, jehož zobecnění nás vede i k obecnějšímu pojmu kružnice, kterému zde budeme říkat *cykl*. S obecnějším pojmem kružnice se setkáváme již v eukleidovské geometrii, ve které se někdy na *přímku* díváme jako na *limitní případ kružnice,* jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje.

DEFINICE. Jestliže střed X kružnic $\mathfrak{K}(X, A)$ probíhá polopřímku (AS) tak, že se neomezeně vzdaluje od bodu A (viz obr. 91), potom čára m je *limitní čarou kružnic* $\mathfrak{K}(X, A)$, jestliže pro každý bod M na čáře m a k libovolně zvolené vzdálenosti d lze určit na polopřímce (AS) bod C tak, že pro všechny body Y polopřímky $(CA)^*$ má kružnice



Obr. 91.



Obr. 92.

$\mathfrak{K}(Y, A)$ od bodu M vzdálenost menší než d. Při tom *vzdáleností bodu M od kružnice k* rozumíme infimum (viz odstavec **6**) všech vzdáleností MZ, kde Z probíhá všechny body kružnice k (pomocí infima jsme podobně již dříve definovali vzdálenost bodu od přímky, viz str. 76, pozn. [17])).

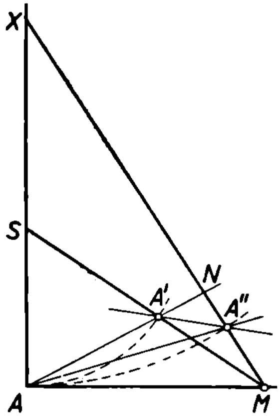
V eukleidovské geometrii lze dokázat, že limitní čára kružnic s neomezeně rostoucím poloměrem je přímka. Toto tvrzení je přímo *ekvivalentní* s Eukleidovým postulátem o rovnoběžkách, jak nyní dokážeme. Nejdříve však odvodíme dvě pomocné věty.

VĚTA 18,2. *Budiž dána kružnice $k = \mathfrak{K}(S, A)$ a nechť pro bod M platí $SM > SA$. Pak existuje společný bod X kružnice k a úsečky SM a vzdálenost bodu M od kružnice k je úsečka MX.*

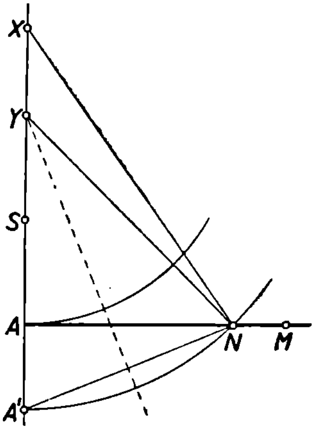
DŮKAZ. Na polopřímce (SM) (viz obr. 92) vždy existuje bod X tak, že je $SX \equiv SA$. Protože je $SM > SA$, je zřejmě $\mu(SXM)$. Budiž nyní $Y \neq X$ libovolný bod kružnice k. Jsou-li body Y, M, X kolineární, pak zřejmě $YM > XM$. Nejsou-li Y, M, X kolineární, pak úhel $\sphericalangle YXM$ je vždy tupý, protože je vedlejší k úhlu při základně rovnoramenného trojúhelníka $\triangle YSX$, který je vždy ostrý. V trojúhelníku $\triangle YXM$ je tedy $YM > XM$, takže XM je skutečně infimum (dokonce minimum) vzdáleností MY pro všechny body Y kružnice k.

VĚTA 18,3. *Budiž úhel* $\sphericalangle SAM$ *pravý. Je-li* X *jakýkoli bod polopřímky* $(SA)^*$, *pak bod* M *má od kružnice* $\mathfrak{K}(X, A)$ *vzdálenost menší než od kružnice* $\mathfrak{K}(S, A)$.

DŮKAZ. Budiž A' resp. A'' (viz obr. 93) bod na polopřímce (SM) resp. (XM) takový, že je $SA' \equiv SA$ a $XA'' \equiv XA$. Protože podle VĚTY 12,26 platí $XA' < XS + SA' \equiv XA''$, jest $\sphericalangle XA''A' < \sphericalangle XA'A''$



Obr. 93.



Obr. 94.

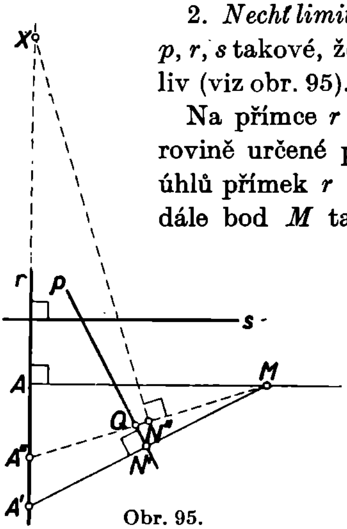
čili také $2R - \sphericalangle XA''A' > 2R - \sphericalangle XA'A''$. Protože body X a A'' leží po téže straně přímky $\overline{SM}$, leží polopřímka $(A'M)$ uvnitř úhlu $\sphericalangle (A'A'')(A'X)^*$, takže je $\sphericalangle MA'A'' < 2R - \sphericalangle XA'A''$. Protože je $\sphericalangle A'A''M \equiv 2R - \sphericalangle XA''A'$, je splněn vztah $\sphericalangle MA''A' > > \sphericalangle A''A'M$, takže v trojúhelníku $\triangle MA''A'$ platí $MA' > MA''$. Podle VĚTY 18,2 je důkaz hotov.

VĚTA 18,4. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže limitní čára kružnic, procházejících bodem* A *a jejichž střed* X *se neomezeně vzdaluje od bodu* A *po polopřímce* (AS), *je přímka.*

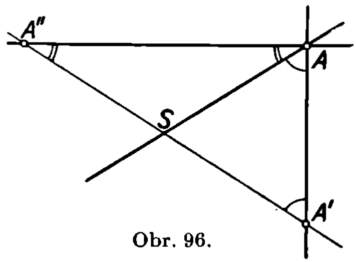
DŮKAZ. 1. *Nechť nejdříve rovina má vlastnost* I. Je-li dána jakákoli úsečka d, pak zvolme na přímce $\overline{SA}$ bod A' (viz obr. 94) tak, že je $\mu(SAA')$, $AA' \equiv d$. Budiž nyní N jakýkoli bod polopřímky (AM), pro kterou je $\sphericalangle SAM \equiv R$. Osa úsečky $A'N$ nestojí na $\overline{AM}$ nikdy kolmo, protíná tedy přímku $\overline{SA}$, průsečík označme Y. Tento průsečík leží vzhledem k větě o součtu dvou úhlů trojúhelníka na polopřímce $(A'S)$ a je-li d dosti malé, dokonce na (AS). Kružnice $\mathfrak{K}(Y, A)$ prochází bodem A a má od bodu N vzdálenost d. Pro všechna X polopřímky $(YA)^*$ má bod N podle VĚTY 18,3 od kružnice $\mathfrak{K}(X, A)$ vzdálenost menší než d, takže přímka $\overline{AM}$ je limitní čára kružnic $\mathfrak{K}(X, A)$.

2. *Nechť limitní čára kružnic je přímka.* Buďtež přímky p, r, s takové, že přímka r je kolmá na s a přímka p nikoliv (viz obr. 95). Dokážeme, že přímky p a r se protínají.

Na přímce r zvolme bod A' tak, aby ležel v té polorovině určené přímkou s, ve které je součet vnitřních úhlů přímek r a p s přímkou s větší než $2R$. Určeme dále bod M tak, že $A'M$ protíná přímku p v bodě



Obr. 95.

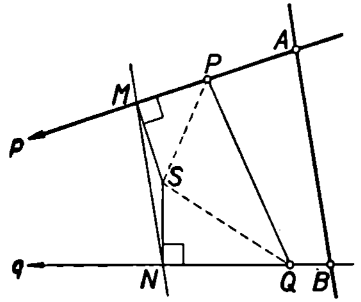


Obr. 96.

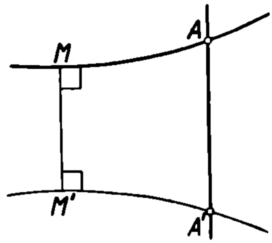
N', při čemž $A'M \perp p$, $A'N' \equiv N'M$. Vedeme-li bodem M kolmici na přímku r, která ji protne v bodě A, pak ke vzdálenosti AA', existuje bod C na r tak, že kružnice $\mathfrak{K}(X, A)$, jejíž střed X leží na polopřímce $(CA)^*$, má od bodu M vzdálenost menší než AA'. Kružnice $\mathfrak{K}(X, M)$ má podle VĚTY 18,2 s úsečkou AA' společný bod, označme jej A''; je tedy $\mu(AA''A')$. Je-li N'' půlící bod úsečky $A''M$, pak osa q této úsečky prochází jednak bodem N'', jednak bodem X.

Přímka p protíná stranu $A'M$ trojúhelníka $\triangle A'A''M$, protíná tedy ještě buď stranu $A'A''$, buď $A''M$. V prvém případě (nehledě na to, může-li skutečně nastat nebo ne) bychom byli s důkazem naší věty hotovi. V druhém platí pro průsečík Q se stranou $A''M$ dokonce $\mu(A''QN'')$, neboť ze vztahu $\mu(AA''A')$ plyne $A''M < A'M$ čili $N''M < N'M$, a protože $\triangle QN'M$ má při vrcholu N' pravý úhel, je $N'M < QM$, takže je $\mu(QN''M)$ a tedy také $\mu(A''QN'')$. Přímka p protíná tedy stranu

$A''N''$ trojúhelníka $\triangle A''N''X$. Stranu $N''X$ protnout nemůže, protože neprotíná ani polopřímku $(N''X)$. Kdyby totiž T byl průsečík, pak by úhel $\sphericalangle N'QM$, který je ostrý, byl vnějším úhlem trojúhelníka $\triangle QN''T$, tedy menší než $\sphericalangle QN''T \equiv R$, což by byl spor. Z toho plyne, že přímka p protíná stranu $A''X$ čili přímku r, což jsme měli dokázat.



Obr. 97.



Obr. 98.

Z Věty 18,4 plyne, že v Lobačevského geometrii není limitní čarou kružnice s neomezeně rostoucím poloměrem přímka, nýbrž nějaká zvláštní křivka. Tu lze však zavést také bez limitních přechodů, jestliže vhodně modifikujeme definici kružnice tak, aby nová definice nezávisela již na poloměru nebo na středu kružnice. Taková definice je skutečně možná a spočívá na tom, že spojnice koncových bodů dvou různých průměrů kružnice svírá s těmito průměry shodné úhly.

Definice. Přímka $\overline{AC}$ se nazývá *isogonální k přímkám* $\overline{AB}$ *a* $\overline{CD}$, jestliže platí (v případě, že B a D leží po téže straně od $\overline{AC}$) $\sphericalangle BAC \equiv$ $\equiv \sphericalangle DCA$.

Věta 18,5. *Ke dvěma přímkám svazku lze bodem na jedné z nich vždy vést přímku k oběma isogonální. Ta je v případě svazku souběžek a rozběžek jednoznačně určena.*

Důkaz. 1. *Existence.* Daný bod přímky svazku označme A.

a) Jde-li o svazek různoběžek se středem S, pak nemá smysl uvažovat, že je $S = A$. Je-li $S \neq A$, pak přímka $\overline{AA'}$ (viz obr. 96) je isogonální k přímkám $\overline{SA}$ a $\overline{SA'}$, jestliže je $SA \equiv SA'$ (na SA' existuje ještě bod $A'' \neq A'$ tak, že $SA' \equiv SA''$).

b) Jde-li o rozběžky, jež mají společnou kolmici $\overline{MM'}$ (viz obr. 97), pak AA' je isogonální k přímkám $\overline{MA}$ a $\overline{MA'}$, jestliže je $MA \equiv M'A'$ a body A a A' leží po téže straně od $\overline{MM'}$ (Saccheriho čtyřúhelník).

c) Jde-li o svazek souběžek, zvolme na obou souběžkách $\vec{p}, \vec{q}$ po jednom bodu P, Q (viz obr. 98). Půlící polopřímky úhlů $\sphericalangle PQ\vec{q}$ a $\sphericalangle QP\vec{p}$ se protnou (neboť p a q jsou souběžné) v bodě S, který podle VĚTY 12,31 je stejně vzdálen od přímek p a q. Je-li M průsečík přímky p s kolmicí vedenou na ni bodem S a podobně N bod s analogickou vlastností na přímce q, je trojúhelník $\triangle MNS$ rovnoramenný a přímka $\overline{MN}$ isogonální k přímkám p, q. Zvolíme-li nyní na q bod B tak, že A a B jsou po téže straně od $\overline{MN}$ a $MA \equiv NB$, pak přímka $\overline{AB}$ je hledaná isogonální přímka vedená bodem A k přímkám p, q, neboť platí vztah $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ a tedy také $\triangle CDA \equiv \triangle DCB$.

2. *Jednoznačnost* v případě svazku souběžek a rozběžek dokážeme snadno sporem pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníka (VĚTA 12,23).

DEFINICE. Dva body na dvou různých přímkách p, q se nazývají *korespondující vzhledem k přímkám p, q* nebo krátce *korespondující*, jestliže jejich spojnice je k oběma přímkám p, q isogonální.

VĚTA 18,6. *Body A a A' na dvou různých přímkách svazku jsou korespondující tehdy a jen tehdy, je-li osa úsečky AA' přímka svazku.*

DŮKAZ. 1. *Body A a A' buďtež korespondující.* Pro svazek různoběžek je tvrzení zřejmé. U svazku rozběžek buďtež B a B' průsečíky base s oběma přímkami. V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ BB'A'A$ mají strany BB' a AA' společnou kolmici, která je půlí (VĚTA 15,11).

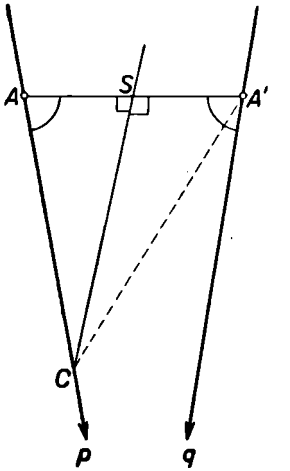
Jsou-li $p, \vec{q}$ souběžky, procházející body A a A' (viz obr. 99), a S je střed úsečky, pak osa úsečky AA' nemůže protnout žádnou z obou přímek p, q, neboť kdyby průsečík s jednou byl C, potom by bylo $\triangle ASC \equiv \triangle A'SC$ ($AS \equiv A'S$, $\sphericalangle ASC \equiv \sphericalangle A'SC \equiv R$). Platilo by tedy $\sphericalangle SA'C \equiv \sphericalangle SA'\vec{q}$, což by byl spor. Leží tedy osa úsečky AA' mezi souběžkami, takže podle VĚTY 17,7 je s nimi souběžná.

2. *Nechť osa úsečky AA' je přímka svazku.* Pro svazek různoběžek a rozběžek je tvrzení zřejmé, protože jde o rovnoramenný trojúhelník resp. o Saccheriho čtyrúhelník. Jde-li o svazek souběžek, pak AA' je k oběma přímkám isogonální, protože úhly $\sphericalangle SA\vec{p} \equiv \Pi(\frac{1}{2}AA') \equiv \equiv \sphericalangle SA'\vec{q}$.

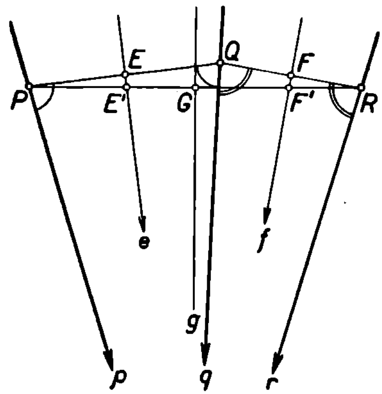
VĚTA 18,7. *Body A a A' na dvou různých přímkách svazku různoběžek resp. rozběžek jsou korespondující tehdy a jen tehdy, jestliže mají od středu resp. base svazku touž vzdálenost.*

DŮKAZ. Nechť oba body mají od středu resp. base svazku touž vzdálenost. Pak je věta zřejmá, neboť pak oba body tvoří se středem resp. s průsečíky base s přímkami svazku, incidentními s oběma body, rovnoramenný trojúhelník resp. Saccheriho čtyrúhelník.

Nechť spojnice $\overline{AA'}$ je isogonální k oběma přímkám svazku incidentními s body A, A'. Jsou-li to různoběžky s průsečíkem S, pak je $SA \equiv SA'$ podle VĚTY 12,25. Jsou-li obě přímky rozběžky a M a M'



Obr. 99.



Obr. 100.

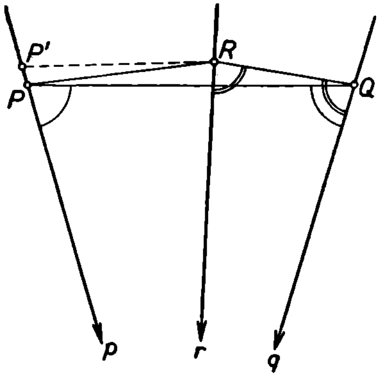
průsečíky s jejich společnou kolmicí (při čemž A a M resp. A' a M' leží na téže přímce), je-li H půlící bod úsečky AA' a je-li K průsečík osy úsečky AA' s přímkou $\overline{MM'}$, pak je $\triangle\, KHA \equiv \triangle\, KHA'$, a protože platí $\sphericalangle\, KAM \equiv \sphericalangle\, KA'M'$, je podle VĚTY 12,24 $\triangle KMA \equiv \triangle K'M'A$ a tedy také $MA \equiv M'A'$.

VĚTA 18,8. *Buďtež p, q, r tři přímky náležející témuž svazku a nechť bod P leží na p, Q na q a R na r. Jsou-li body P a Q korespondující a Q a R také, pak i body P a R jsou korespondující.*

DŮKAZ. Věta je zřejmá pro svazek různoběžek nebo rozběžek, protože v tom případě korespondující body mají stejné vzdálenosti od středu resp. base svazku.

Pro svazek souběžek dokážeme větu takto: Podle VĚTY 18,6 osa e úsečky PQ (viz obr. 100) a osa f úsečky QR jsou souběžné. Patří totiž do téhož svazku se souběžkami p, q, r. Vzhledem k VĚTĚ 18,6 stačí dokázat, že osa g úsečky PR je souběžná s e nebo f.

Předpokládejme nejprve, že q leží mezi p a r. Protože průsečík E' úsečky PR s e neleží mezi q a r, je $\sphericalangle RQE' > \sphericalangle RQ\vec{q} \equiv \sphericalangle QR\vec{r} > \sphericalangle QRE'$, takže je $PE' \equiv E'Q < E'R$. Podobně je $F'R < F'P$, takže střed G úsečky PR leží mezi E' a F'. Osa g úsečky PR nemůže protnout ani přímku e ani f. Kdyby totiž některou z nich protla, byl by průsečík stejně vzdálen od všech tří bodů P, Q, R, takže by jím procházely obě přímky e a f, což není možné, protože jsou souběžné. Přímka g leží tedy mezi souběžkami e a f a je tedy s nimi souběžná podle VĚTY 17,7.



Obr. 101.

Předpokládejme nyní, že na př. přímka r leží mezi p a q (viz obr. 101). Kdyby P a R nebyly korespondující, mohli bychom vést bodem R isogonální přímku k p a r a dostali bychom tak na p bod $P' \neq P$, korespondující bodu R. Podle předcházející úvahy by body P' a Q byly korespondující, tedy by $\overline{P'Q}$ byla isogonální přímka k p a q. Přímky $\overline{PQ}$ a $\overline{P'Q}$ jsou různé, procházející týmž bodem, a obě by byly isogonální k přímkám p, q, což není možné (VĚTA 18,5).

DEFINICE. *Cykl* určený svazkem přímek a bodem A je množina bodů, která má tyto vlastnosti:

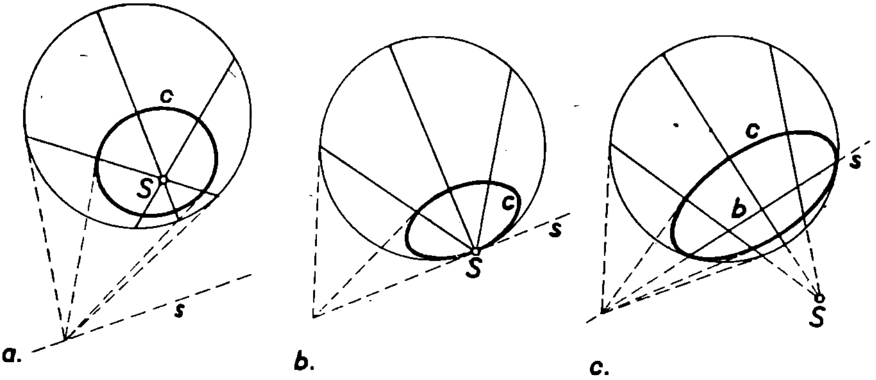
1. patří do ní bod A,

2. patří-li do ní bod X na přímce x svazku, pak do ní patří každý bod Y, který leží na některé přímce y svazku, při čemž body X, Y jsou korespondující vzhledem k přímkám x a y.

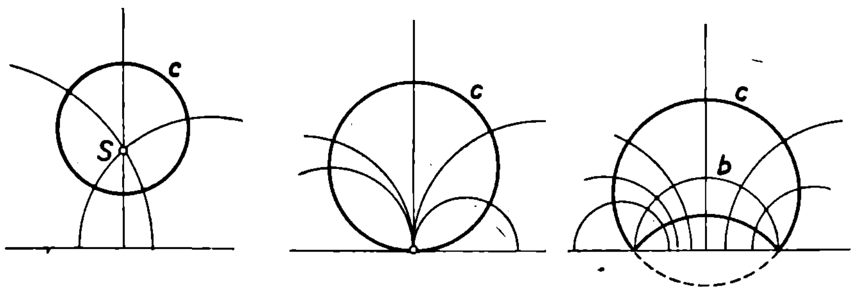
Klasifikace svazků nám dovoluje provést klasifikaci cyklů následujícím způsobem:

cykl určený svazkem různoběžek je *kružnice*, jejíž střed leží ve středu svazku, cykl určený svazkem souběžek se nazývá *horocykl* a můžeme jej pojímat jako limitní případ kružnice, jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje,

cykl určený svazkem rozběžek se nazývá *ekvidistanta*, protože jeho body mají od base svazku konstantní vzdálenost. Je zřejmé, že mezi ekvidistanty patří i přímka.[23])



Obr. 102.

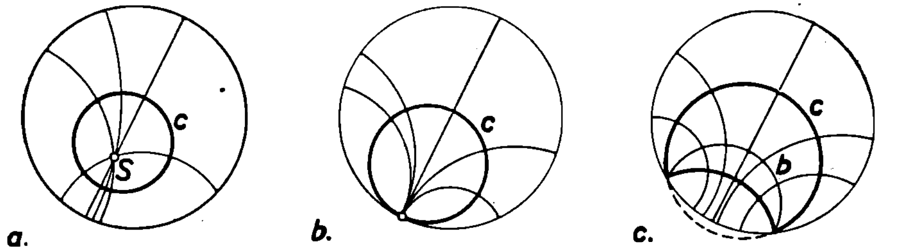


Obr. 103.

Uvedené tři druhy cyklů můžeme jednoduchým způsobem znázornit na našich modelech. Toto znázornění se zakládá na tom, že cykl určený svazkem je orthogonální trajektorie přímek tohoto svazku. Při tom orthogonální tra-

[23]) Místo *ekvidistanta* se také říká *hypercykl* (podle Gausse). Slovo *horocykl* znamená limitní kružnici, protože řecké slovo ὅρος značí hranici, mez. V témž duchu se někdy místo kružnice říká *endocykl* (ἔνδον — uvnitř) a místo ekvidistanta *exocykl* (ἔξω — vně, mimo). (Gauss používal pro horocykl názvu *paracykl.*)

jektorií nějaké množiny přímek se rozumí čára, jež je na každou přímku množiny kolmá, t. j. taková, že tečna v průsečíku křivky s přímkou svírá s touto přímkou pravý úhel. Uvedená vlastnost by se dala odvodit z naší definice cyklu limitními úvahami. V modelu Beltrami-Kleinově (viz obr. 102) se cykl zobrazuje jako *elipsa*, která má k základní kružnici modelu jisté polární vlastnosti, jež se dají odvodit z toho, že „přímky“ v tomto modelu jsou „kolmé“, jestliže náleží přímkám polárně sdruženým vzhledem k základní kružnici (srv. str. 115). Na obr. je bod S pólem přímky s jak vzhledem k základní kružnici, tak vzhledem k „cyklu“



Obr. 104.

c. Na obr. c je b base svazku rozběžek a příslušná elipsa zobrazuje ekvidistanty po obou stranách přímky b.

U obou modelů Poincaréových (viz obr. 103 a 104) se cykly znázorňují jako *kružnice* (u „ekvidistanty“ jsou to dva oblouky kružnic), jež jsou orthogonální ke kružnicím znázorňujícím „přímky“ svazku, protože v Poincaréových modelech se úhly zobrazují v pravé velikosti. Zde o označení na obrázcích platí táž poznámka jako u obr. 102.

VĚTA 18,9. *Třemi různými body prochází právě jeden cykl.*

DŮKAZ. Leží-li všechny tři body na přímce, je tato přímka cyklem, o němž mluví naše věta, a je jednoznačně určena. Neleží-li všechny tři body P, Q, R na přímce, pak osy úseček PQ a QR určují svazek přímek, vzhledem k jehož přímkám jsou body P, Q, R korespondující (podle VĚTY 18,6). Svazkem a některým z bodů P, Q, R je jednoznačně určen cykl, procházející body P, Q, R.

Jako analogické pojmy svazku a cyklu definujeme v prostorové geometrii trs a sféru.

DEFINICE. *Trs různoběžek* je množina všech přímek v prostoru, jež procházejí jedním bodem, který nazýváme *střed trsu.*

Trs souběžek je množina všech přímek prostoru souběžných s danou orientovanou přímkou. Za tuto přímku můžeme vzít jakoukoli orientovanou přímku svazku.

Trs rozběžek je množina všech přímek kolmých na danou rovinu, která se nazývá *basí trsu.*

Obecně má trs tu vlastnost, že každým bodem prostoru prochází právě jedna jeho přímka (výjimku činí bod, který splývá se středem trsu, jde-li o různoběžky). Dále je zřejmé, že kterýmikoli dvěma přímkami trsu lze proložit rovinu. Můžeme tedy hovořit o přímce isogonální ke dvěma přímkám trsu a právě tak o korespondujících bodech vzhledem k přímkám trsu.

DEFINICE. *Sféra* určená trsem přímek a bodem A je množina bodů, která má tyto vlastnosti:

1. patří do ní bod A,
2. patří-li do ní bod X na přímce x trsu, pak do ní patří každý bod Y, který leží na některé přímce y trsu, při čemž body X, Y jsou korespondující vzhledem k přímkám x a y.

Podle trsů můžeme jimi vytvořené sféry roztřídit takto:

sféra určená trsem různoběžek je *koule*, jejíž střed je totožný se středem trsu;

sféra určená trsem souběžek se nazývá *horosféra* a můžeme ji pojímat jako limitní případ koule, jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje;

sféra určená trsem rozběžek se nazývá *ekvidistantní plocha*, protože její body mají od base trsu konstantní vzdálenost. Je zřejmé, že mezi ekvidistantní plochy patří také rovina.[24])

VĚTA 18,10. *Rovina, která prochází alespoň jednou přímkou trsu, který určuje kouli resp. horosféru resp. ekvidistantní plochu, protíná tuto sféru v kružnici, resp. horocyklu resp. ekvidistantě.*

DŮKAZ je zřejmý z toho, že množina všech přímek společných trsu a rovině, jež prochází alespoň jednou jeho přímkou, je svazek, a to téhož druhu jako trs.

DEFINICE. *Elementární čarou na sféře* budeme rozumět každou průsečnici sféry s rovinou procházející alespoň jednou přímkou trsu, určujícího sféru, tedy každou z křivek, o nichž mluví VĚTA 18,10.

---

[24]) Podobně jako u cyklů užívá se i pro sféry názvů *horosféra* (*parasféra*), *endosféra* a *exosféra* (*hypersféra*).

Kdybychom měli definován pojem *délky křivé čáry*, pak bychom pomocí limitních úvah mohli dokázat, že elementární čára na sféře má tu vlastnost, že *její oblouk mezi jakýmikoli dvěma jejími body A, B nemá větší délku než oblouk omezený body A, B na jakékoli jiné čáře plochy* (jde-li o čáru uzavřenou, rozumíme jejím obloukem mezi body A, B ten z obou oblouků, na něž dvojice bodů A, B čáru rozděluje, který nemá větší délku než oblouk druhý). Krátce bychom to mohli říci také tak, že elementární čára na sféře je *nejkratší spojnicí dvou bodů.*

Elementární čarou na rovině je podle definice každá její přímka. Výše zmíněnou vlastnost přímky jakožto nejkratší spojnice dvou bodů dokazuje částečně naše VĚTA 12,32, podle níž je úsečka AB kratší než jakákoli *lomená* čára, která spojuje body A a B.

O jedné vlastnosti elementárních čar na sférách, která připomíná ještě jinou vlastnost přímek, mluví následující věta.

VĚTA 18,11. *Jsou-li dány dva body na sféře, jež jsou různé (a jde-li o kouli, neleží na téže přímce, jdoucí středem), pak na ní existuje právě jedna elementární čára, jež oběma body prochází.*

DŮKAZ. Tato elementární čára je průsek sféry s rovinou, určenou přímkami trsu sféry, které procházejí oběma danými body. Každým bodem prochází však právě jedna přímka trsu a každé dvě přímky trsu, pokud nesplývají, leží právě v jedné rovině. Odtud plyne jednoznačné určení elementární čáry.

Každá sféra se svými elementárními čarami jakožto „přímkami" může být v určitém smyslu považována za jakýsi zvláštní případ roviny, a proto můžeme hovořit o geometrii této sféry podobně, jako u koule mluvíme o geometrii sférické.

Protože každý druh sfér eukleidovského prostoru (totiž rovina a koule) má jinou geometrii, je nasnadě otázka, zda každá ze tří sfér různého druhu, jež poskytuje Lobačevského prostor, nemá svou vlastní geometrii. Odpověď na tuto otázku je kladná:

na kouli platí *geometrie sférická*, zcela tak jako na kouli eukleidovské;

na ekvidistantní ploše platí táž *rovinná geometrie Lobačevského* jako na rovině Lobačevského prostoru, což je patrné z toho, že mezi ekvidistantní plochy patří také všechny roviny;

na horosféře platí *geometrie eukleidovská*, neboť máme-li na horosféře elementární čáru g a mimo ni bod A, pak bodem A lze na sféře vést právě jednu elementární čáru, neprotínající g. Je-li totiž γ rovina čáry g a a přímka trsu incidentní s bodem A, pak přímka a je souběžná s rovinou γ. Máme-li nyní určit elementární čáru neprotínající g, musí ležet v rovině souběžné s γ a incidentní s A. Podle VĚTY 17,28 lze však přímkou a vést takovou rovinu právě jednu.

Výsledek, že na horosféře platí geometrie eukleidovská, je jistě velmi překvapující. V geometrii eukleidovské nemá obdoby, neboť v eukleidovském prostoru neexistuje plocha, na které by platila Lobačevského rovinná geometrie. Existují v něm pouze plochy (na př. pseudosféra Beltramiho, srv. odstavec **19**, str. 143), na nichž platí toliko geometrie *části* Lobačevského roviny, nikoli však geometrie Lobačevského *celé* roviny.

Vidíme, že ačkoli jsme při budování Lobačevského geometrie vyšli z předpokladu, že geometrie eukleidovská neplatí, přece však se nám Eukleidova geometrie znovu objevila, i když na místě, kde bychom to nejméně čekali. Tato zvláštnost utvrdila Lobačevského v tom, že jeho nová geometrie je právě tak logicky bezesporná jako geometrie Eukleidova.