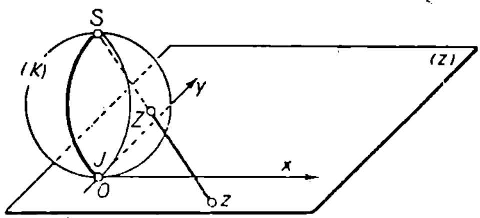
KAPITOLA I.

# ZÁKLADNÍ POJMY THEORIE FUNKCÍ KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

**§ 5. Zobrazení roviny komplexních čísel na kouli.** Současně s geometrickou interpretací komplexních čísel jako vektorů nebo bodů v rovině se v mnohých případech aplikuje i jiný způsob jejich geometrické interpretace. Sestrojme si kouli $K$ dotýkající se roviny komplexních čísel v bodě $O$ svým jižním pólem $J$. Severní pól $S$ koule $K$ spojíme přímkami se všemi body roviny $(z)$. Takovým způsobem bude každému bodu roviny $(z)$ přiřazen jediný bod na kouli $K$, a to



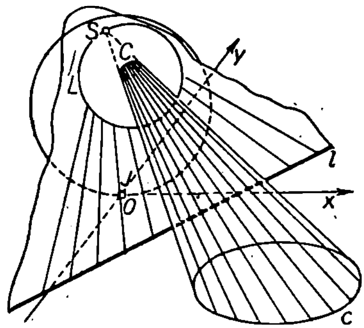

Obr. 7.

průsečík spojnice bodu $z$ se severním pólem $S$ koule $K$. A naopak, každému bodu na kouli $K$ (kromě severního pólu $S$) odpovídá jediný bod v rovině $(z)$, a to průsečík spojnice bodu $Z$ na kouli $K$ se severním pólem $S$ s rovinou $(z)$ (obr. 7). Právě popsané přiřazení bodů roviny $(z)$ a bodů koule $K$ se nazývá *stereografická projekce*.

Budeme nazývat bod $Z$ na kouli $K$ odpovídající ve stereografické projekci bodu $z$ v rovině $(z)$ novým zobrazením komplexního čísla $z$. Při operacích nad komplexními čísly representovanými body na kouli $K$ promítneme nejprve tyto body stereograficky do roviny $(z)$, zde provedeme operace nad průměty podle pravidel §§ 2—4 a výsledek operací promítneme opět stereograficky zpět na kouli $K$.

Severnímu pólu $S$ koule $K$ neodpovídá dosud žádné komplexní číslo roviny $(z)$. Zavedeme nové komplexní „číslo“ $\infty$ (čteme nekonečno), které je přiřazeno tomuto bodu. Číslo $z = \infty$ s hlediska geometrické interpretace má tutéž funkci jako čísla $z = 2 + 5i$, $z = 3$, $z = i$, t. j. určuje polohu odpovídajícího bodu $Z$ na kouli $K$. Ovšem pro toto nové číslo neplatí aritmetická pravidla dříve odvozená, která platí pouze pro komplexní čísla (body koule) odpovídající bodům roviny.

Na rozdíl od bodu $S$, který budeme nazývat nekonečně *vzdáleným bodem* (bodem v nekonečnu) nazýváme všechny ostatní body koule $K$ (ostatní komplexní čísla) *konečnými*. Kdykoliv v dalších úvahách nebudeme chtít vyloučit z úvah bod $S$, budeme si vždy vypomáhat koulí $K$, kterou budeme nazývat *koulí komplexních čísel*. Jestliže bod $S$ (číslo $z = \infty$) bude vyloučen z našich úvah, budeme používat pouze roviny ($z$).



Obr. 8.

V prvém případě je nutné nazírat na rovinné obrazce doprovázející výklad jako na geografické „mapy" odpovídajících sférických útvarů. Pro množinu všech konečných komplexních čísel (bodů) si zavedeme název *konečná* čili *otevřená rovina* a pro množinu všech komplexních čísel název *úplná* čili *uzavřená rovina*. Termín „otevřená rovina" je ekvivalentní termínu „rovina komplexních čísel" (viz § 1) a termín „uzavřená rovina" termínu „koule komplexních čísel".

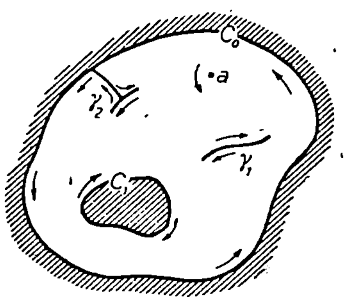
Stereografická projekce zobrazuje geometrická místa bodů v rovině na geometrická místa bodů na kouli. Na příklad libovolné kružnici $c$ v rovině $z$ odpovídá na kouli opět kružnice $C$ neprocházející bodem $S$; libovolné přímce $l$ v rovině $z$ odpovídá kružnice $L$ na kouli $K$ procházející bodem $S$ (obr. 8). Vidíme, že sférický obraz přímek a kružnic je tentýž. V souhlase s tím je možno říci, že *v úplné rovině komplexních čísel je přímka speciálním případem kružnice* (je to kružnice procházející bodem v nekonečnu). Zavedeme-li si tuto interpretaci, vidíme, že dvě různoběžky se protínají ve dvou bodech; jeden z nich je konečný, druhý je bod $z = \infty$. Dvě rovnoběžky je pak nutno považovat za dvojici kružnic procházejících bodem $z = \infty$ a navzájem se v tomto bodě dotýkajících.

Kružnice dělí kouli $K$ na dvě části. Každou z nich budeme nazývat *kruhem.* „Kruhy“ jsou v této interpretaci i poloroviny, na př. polorovina $\operatorname{Im} z > 0$, která se stereograficky zobrazí na zadní polokouli $K$. Když kružnice $C$ na kouli $K$ neprochází bodem $S$ (t. j. je stereografickým obrazem kružnice $c$ v rovině $z$), pak jeden z obou kruhů, které ohraničuje, obsahuje bod $S$. Tento kruh budeme nazývat *vnějškem kružnice C.*

**§ 6. Oblasti a jejich hranice.** *Oblastí* v komplexní rovině nebo na kouli komplexních čísel budeme rozumět bodovou množinu $M$ těchto vlastností:

a) s každým bodem $z$ patří do $M$ aspoň jedno jeho kruhové okolí;

b) libovolné dva body $z_1$ a $z_2$ z $M$ je možno spojit spojitou čarou, která se skládá jen z bodů množiny $M$;



Obr. 9.

Na příklad kruhy $|z| < 1$, $|z - 1| < 2$ jsou oblastmi, ale uzavřený kruh $|z| \leq 1$ není oblastí, neboť pro body kružnice $|z| = 1$ není splněna podmínka a).

*Hranicí* $C$ oblasti $D$ budeme rozumět množinu všech bodů na kouli komplexních čísel (v rovině komplexních čísel) těchto vlastností:

a) body množiny $C$ nepatří do $D$;

b) každé okolí bodu z množiny $C$ obsahuje aspoň jeden bod z množiny $D$.

Na příklad hranici kruhu $|z| < 1$ tvoří kružnice $|z| = 1$.

Přidáme-li k oblasti $D$ všechny body její hranice, dostaneme bodovou množinu, kterou budeme nazývat *uzavřená oblast* a budeme ji značit $\overline{D}$.

Na obr. 9 tvoří hranici oblasti $D$ dvě uzavřené křivky $C_0$ a $C_1$, které oddělují množinu $D$ od vnějších bodů,*) bod $a$ a dva „výřezy“

*) Vnějším bodem jisté oblasti $D$ na kouli komplexních čísel, resp. v rovině komplexních čísel, nazýváme bod $z$, neležící v oblasti $D$, pro nějž existuje okolí $U_z$, které neobsahuje body z $D$.

podél křivek $\gamma_1$ a $\gamma_2$. V dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že hranice všech uvažovaných oblastí budou mít tuto strukturu, t. j. budou tvořeny konečným počtem uzavřených křivek (oddělujících vnější body) výřezů a jednotlivých bodů.

Počet souvislých částí, na které se rozpadá hranice oblasti, nazýváme *stupeň souvislosti* této oblasti. Tak na př. oblast na obr. 9 má souvislost stupně čtyři, t. j. hranice je tvořena čtyřmi souvislými částmi 1. $C_0$ a $\gamma_2$, 2. $C_1$, 3. $\gamma_1$ a 4. bod $a$. Speciálně, jestliže je hranice $C$ oblasti $D$ tvořena jedinou souvislou čarou, nazývá se $D$ *jednoduše souvislá oblast.**)

Často budeme pracovat s oblastmi, na jejichž hranicích bude definován smysl oběhu. Na příklad na obr. 9 je naznačen smysl oběhu, při kterém zůstává vždy celá oblast vlevo.

Nakonec se budeme zabývat pojmem okolí. *Okolím* bodu $z_0$ budeme rozumět libovolnou oblast, která obsahuje bod $z_0$. Často bude výhodné uvažovat jisté „standardní" okolí. Jako standardní zavedeme (pro konečné body) kruhové okolí takto definované:

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

a pro bod $z_0 = \infty$ je definujeme jako kruh

$$|z| > \varepsilon.$$

Tento kruh zřejmě obsahuje bod $z = \infty$. Takové okolí budeme nazývat $\varepsilon$-okolí.

**§ 7. Limita posloupnosti.** Budiž dána posloupnost komplexních čísel

$$z_n = x_n + iy_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde $x_n$ a $y_n$ jsou libovolné reálné funkce celočíselného argumentu $n$.

Definice. Bod $z$ je *limitou posloupnosti* $\{z_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \tag{1}$$

*) Nebudeme zde zavádět pojem křivky, oblouku, výřezu (řezu) a souvislé části, neboť jejich přesné definice by nás zavedly mimo rámec knihy. Třebaže se zdají tyto pojmy velmi prosté, vyžadují velmi jemných topologických úvah.

jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ je možno najít číslo $N$ takové, že pro všechna $n > N$ leží všechny body $z_n$ v $\varepsilon$-okolí bodu $z$, jinými slovy, jestliže pro $z \neq \infty$

$$|z - z_n| < \varepsilon \text{ pro } n > N \tag{2}$$

a pro $z = \infty$

$$|z_n| > \varepsilon \text{ pro } n > N. \tag{3}$$

Budeme též říkat, že posloupnost $\{z_n\}$ konverguje k bodu $z$.

Jestliže bude existovat takové kladné číslo $M \neq \infty$, že pro všechna $n$ bude

$$|z_n| \leqq M,$$

budeme nazývat posloupnost $\{z_n\}$ *ohraničenou*. Geometricky to znamená, že všechny body posloupnosti $\{z_n\}$ leží v kruhu o konečném poloměru.

*Každá bodová posloupnost konečných bodů $\{z_n\}$, která konverguje ke konečnému bodu $z$, je ohraničená.* Důkaz: Podle (2) všechna $z_n$ počínaje $z_{N+1}$ leží v jistém konečném kruhu $K'$ (o poloměru $\varepsilon$). Vně $K'$ leží tedy jen konečný počet bodů $z_1, z_2, \ldots, Z_N$. Konečný počet konečných bodů $z_n \neq \infty$ lze však vždy pokrýt jistým konečným kruhem $K''$. Stačí pak sestrojit kruh $K$ obsahující oba kruhy $K'$ a $K''$ a věta je dokázána.

Nechť je limita $z = x + iy$ konečná ($z \neq \infty$), pak lze nerovnost (2) psát ve tvaru

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \text{ pro } n > N. \tag{4}$$

Ze (4) plyne, že reálné posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergují k limitám $x$ a $y$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{5}$$

Přenecháváme čtenáři, aby se přesvědčil, že naopak, jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, má i posloupnost $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$ limitu $z = x + iy$.

Podobná úvaha platí i pro polární souřadnice. Budiž $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ a bod $z$ nechť neleží na záporné reálné poloose, $z \neq 0$, $z \neq \infty$. Pak je-li

$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $z = re^{i\varphi}$, kde $\varphi_n$ a $\varphi$ jsou hlavní hodnoty argumentu, platí

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi. \tag{6}$$

Důkaz. Je $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ a v důsledku vztahu (5) a spojitosti druhé odmocniny $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Protože i argument je funkce spojitá (spojitost je zahrnuta v předpokladech o bodu $z$, viz § 12) je správná i druhá rovnice (6). Kdyby bod $z$ ležel na záporné reálné poloose, položíme $z = re^{i\varphi}$, $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$; pro $\varphi_n$ a $\varphi$ budeme však uvažovat jinou libovolnou jednoznačnou větev funkce Arg $z$, na př. větev $0 \leqq \varphi < 2\pi$, která má nespojitost na reálné kladné poloose. Rovnice (6) budou zřejmě i v tomto případě správné.

Platí tedy:

**Věta [1].** Jestliže posloupnost $\{z_n = x_n + iy_n = r_n e^{i\varphi_n}\}$ konverguje ke konečné limitě $z = x + iy \neq \infty$, pak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y; \tag{5}$$

je-li $z = re^{i\varphi} \neq 0$, $\neq \infty$, pak platí pro hodnoty $\varphi_n$ a $\varphi$ vybrané výše uvedeným způsobem

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r; \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi. \tag{6}$$

Věta platí i naopak bez jakýchkoliv omezení.

Poznámka. Nemá smyslu zavádět symboly $x + i\infty$ a $\infty + iy$, kde $x$ a $y$ jsou konečné, neboť na kouli komplexních čísel leží pouze jediný nekonečně vzdálený bod. K němu konvergují všechny posloupnosti $\{z_n = x_n + iy_n\}$, v nichž buď jedna z posloupností $\{x_n\}$, resp. $\{y_n\}$, nebo obě dvě vzrůstají nade všechny meze.*) Uvedených symbolů možno použít jen k udání směru v komplexní rovině nebo na komplexní kouli. Tak na př. říkáme: reálná čísla probíhají reálnou osu „od $-\infty$ do $+\infty$", čísla probíhají přímku $x = 3$ „od $3 - i\infty$ do $3 + i\infty$". Tím chceme (při běžném označení os) říci, že kladný smysl na reálné ose je odleva doprava, na přímce $x = 3$ odzdola nahoru.

*) Budeme nazývat veličinu $x_n$ nekonečně velkou, bude-li $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, t. j. pro libovolné $\varepsilon > 0$, existovat číslo $N$ tak, že pro všechna $n > N$ bude $|x_n| > \varepsilon$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že všechna pravidla pro počítání s limitami známá z analysy reálné proměnné zůstávají v platnosti i v našem rozšíření této analysy.

**§ 8. Komplexní funkce reálného argumentu.** Definice. Budeme nazývat $z = z(t)$ *komplexní funkcí reálného argumentu* v intervalu $t_1 < t < t_2$, jestliže bude každé hodnotě $t$ z tohoto intervalu přiřazeno komplexní číslo $z = z(t)$.

Komplexní funkce reálného argumentu je ekvivalentní dvěma reálným funkcím reálné proměnné: $x = x(t)$ a $y = y(t)$, takovým, že platí

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \tag{7}$$

Definice. Budeme říkat, že bod $z_0$ je *limitou* funkce $z = z(t)$ pro $t \to t_0$

$$z_0 = \lim_{t \to t_0} z(t), \tag{8}$$

když pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $t$ vyhovující nerovnosti*) $0 < |t - t_0| < \delta$ body $z(t)$ leží v $\varepsilon$-okolí bodu $z_0$. Když pro $z_0 \neq \infty$ položíme $z_0 = x_0 + iy_0$ čtenář si snadno dokáže ekvivalenci rovnice (8) se dvěma rovnicemi pro reálné funkce

$$x_0 = \lim_{t \to t_0} x(t);\ y_0 = \lim_{t \to t_0} y(t). \tag{9}$$

Definice. Jestliže limita $\lim\limits_{\Delta t \to 0} z(t + \Delta t)$ je konečná a shodná s hodnotou funkce $z = z(t)$ v bodě $t$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} z(t + \Delta t) = z(t) \tag{10}$$

říkáme, že funkce $z = z(t)$ je *spojitá v bodě t*.

Omezíme se na vyšetřování funkcí spojitých ve všech bodech oblasti, v níž jsou definovány. Probíhá-li argument $t$ definiční oblast

*) Hodnotu $t = t_0$ vylučujeme, neboť nemá na limitu vliv. Jako pro reálnou proměnnou, funkce $z = z(t)$ nemusí být v bodě $t = t_0$ definována. Na př. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nehledě na to, že $\frac{\sin x}{x}$ není definována v bodě $x = 0$.

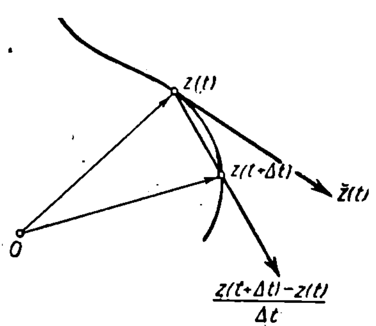
funkce $z = z(t)$, opisuje bod $z(t)$ v komplexní rovině křivku, která se ve vektorovém počtu nazývá *hodograf* vektoru $z(t)$.

Definice. Konečná limita

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \mathrm{i}\, \frac{y(t + \Delta t - y(t)}{\Delta t} \right\} = \dot{x}(t) + \mathrm{i}\dot{y}(t) \qquad (11)$$

se nazývá *derivací* funkce $z = z(t)$ v bodě $t$. Použitím obr. 10 si čtenář sám snadno dokáže, že vektor derivace $\dot{z}(t)$ leží ve směru tečny ke křivce $z = z(t)$ v bodě $t$, při čemž z existence konečné derivace $\dot{z}(t) \neq 0$ plyne existence tečny. Body křivky, pro něž $\dot{z}(t) = 0$, t. j. $\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) = 0$, jsou t. zv. singulární body křivky (body zvratu, dvojné body atd.).



Obr. 10.

Příklad. Funkce

$$z = z_0 + re^{\mathrm{i}t}, \quad -\pi \leq t < \pi, \qquad (12)$$

kde $z_0$ je komplexní a $r$ reálné číslo, definuje kružnici o poloměru $r$ se středem v bodě $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Důkaz. Z (12) plyne, že vektor spojnice bodů $z_0$ a $z_1$, $z - z_0 = re^{\mathrm{i}t}$ má konstantní modul a argument probíhá od $-\pi$ do $\pi$ (uvažujeme hlavní hodnoty argumentu). Komplexní funkce (12) je ekvivalentní dvěma reálným funkcím

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos t, \\ y &= y_0 + r\sin t. \end{aligned} \qquad (13)$$

Rovnice (13) jsou zřejmě obyčejnými parametrickými rovnicemi naší kružnice. Derivace funkce (12)

$$\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} = -r\sin t + \mathrm{i}\, r\cos t = \mathrm{i}r(\cos t - \mathrm{i}\sin t) = \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}(z - z_0)$$

je representována vektorem tečny k naší kružnici.

Pro další úvahy si musíme zavést ještě několik pojmů. Rovinnou křivku budeme nazývat *hladkou*, bude-li definována funkcí $z = z(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ a bude-li mít ve všech bodech intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou derivaci $\dot{z}(t) \neq 0$.*)

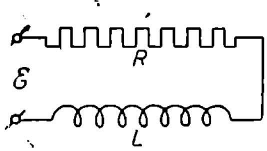
Pojem hladkosti říká, že směr (směrnice) tečny ke křivce se mění spojitě s bodem dotyku. Křivka se nazývá *po úsecích hladká*, jestliže se skládá z konečného počtu hladkých křivek navzájem souvisejících. V bodech styku nemusí tečna k takové křivce existovat. Je jasné, že každá po úsecích hladká (a též hladká) křivka má konečnou délku. *V dalších úvahách budeme vždy předpokládat křivky po úsecích hladké.*

**§ 9. Vyjádření kmitů v komplexním tvaru.** Použití komplexních funkcí reálného argumentu je důležité v theorii kmitů. Mějme jednoduchý harmonický pohyb, který je popsán rovnicemi

$$A_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{a} \quad A_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{14}$$

Místo dvou funkcí (14) budeme psát jedinou komplexní funkci reálného argumentu

$$A(t) = A_0\{\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i} \sin(\omega t + \varphi)\} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)} = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{15}$$



Obr. 11.

kde $A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. $A_0 = |A|$ je amplituda, $\varphi = \arg A$ fázový posun, $\omega$ kruhová frekvence harmonických kmitů, které dostaneme po oddělení reálné a imaginární části rovnice (15). Budeme nazývat (15) *komplexním tvarem harmonického kmitu* nebo též stručněji *komplexním kmitem.*

Komplexní kmit $A(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}$ lze geometricky interpretovat jako vektor konstantního modulu $A_0$, otáčející se úhlovou rychlostí $\omega$. V elektrotechnice je často výhodné jej při konstantní frekvenci $\omega$ zobrazit jako vektor s konstantním modulem $A_0$ a argumentem $\varphi$, t. j. podle naší úmluvy jako komplexní číslo $A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (viz obr. 12).

Použijme komplexního tvaru kmitu k některým zjednodušením. Ukážeme si to na jednoduchém fysikálním příkladě. Budiž dán obvod

*) Derivací na levém, resp. pravém konci intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ budeme rozumět limitu zprava, resp. zleva výrazu (11). Bude-li křivka uzavřená, t. j. $z(t_1) = z(t_2)$, budeme ještě žádat, aby $\dot{z}(t_1) = \dot{z}(t_2)$.

sestavený z ohmického odporu $R$ a samoindukce $L$ v serii, na nějž aplikujeme elektromotorickou sílu $\mathcal{E}$ (e.m.s.). Viz obr. 11. Z fysiky je známá tato diferenciální rovnice pro elektrický proud $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{E} - L\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t} = R\mathcal{J}. \tag{16}$$

Nechť je vnější e.m.s. kosinusová nebo sinusová, t. j. rovna buď $E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ nebo $E_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Podle dříve řečeného budeme předpokládat komplexní e.m.s. $\mathcal{E} = E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, kde $E = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Ustálené (stacionární) řešení diferenciální rovnice (16) dostaneme též v komplexním tvaru*), tedy $\mathcal{J} = I\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, kde $I = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Je (viz př. § 8) $\dfrac{d\mathcal{J}}{dt} = I\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{i}\omega\mathcal{J}$ a rovnice (16) má tvar

$$\mathcal{E} - \mathrm{i}\omega L\mathcal{J} = R\mathcal{J}$$

čili

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R + \mathrm{i}\omega L} = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \tag{17}$$

kde

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L. \tag{18}$$

Veličina $Z$ se nazývá *impedance* neboli *komplexní odpor* okruhu. Vztah (17) je možno považovat za všeobecnění Ohmova zákona. Položme $Z = Z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ kde $Z_0 = |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, $\delta = \arg Z = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{R}$, a dostaneme z (17)

$$\mathcal{J} = \frac{E_0}{Z_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi - \delta)}. \tag{19}$$

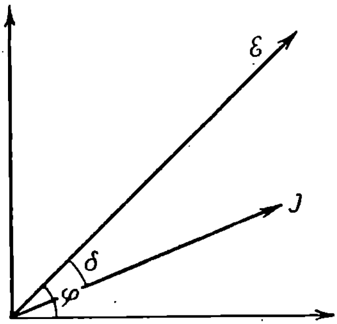
Z (19) je ihned vidět, že amplituda proudu se dostane z amplitudy pro e.m.s. dělením veličinou $Z_0$ a proud je proti e.m.s. fázově posunut o $\delta$. Veličina $Z_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ — modul komplexního odporu, — se nazývá *úplným* (*zdánlivým*) *odporem*. Oddělíme-li ve výrazu (19) reálnou a imaginární část, dostaneme proudy odpovídající kosinusové, resp. sinusové e.m.s.

Zkoumejme proměnné vektory $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ zobrazující komplexní e.m.s.

---

*) To plyne z theorie lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Rovnice (16) je rovnice tohoto typu.

a proud. Z výše uvedeného plyne, že oba vektory se otáčejí kolem počátku s touže frekvencí $\omega$, a to tak, že proud $\mathcal{J}$ bude konstantně posunut o $\delta$ vzhledem k $\mathcal{E}$. Z toho plyne, že oba vektory $\mathcal{J}$ i $\mathcal{E}$ se budou pohybovat jako jeden pevný celek. V elektrotechnice se zobrazují $\mathcal{J}$ a $\mathcal{E}$ jako dva pevné vektory (viz obr. 12).



Obr. 12.

V obecnějším případě, když pro komplexní e.m.s. $E = E_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$ se amplituda proudu i fázový posun $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ mění s časem, nepohybuje se dvojice vektorů $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ jako pevný celek. V tomto případě se zobrazí $\mathcal{E}$ jako konstantní vektor $E = E_0 e^{i\varphi}$ a sestrojí se křivka, kterou opisuje konec vektoru $\mathcal{J}$ (proudový diagram). Zaveďme si veličiny

$$Z_R = R, \; Z_L = i\omega L.$$

Budeme je nazývat impedancí ohmického odporu, resp. samoindukce. Vztah (18) ukazuje, že při zapojení $R$ a $L$ v serii se jejich impedance sčítají. Snadno se dokáže, že rovnice (17) je platná i pro zapojení $R$ a $L$ paralelně, jestliže si vyjádříme impedanci $Z$ podle pravidla pro paralelní zapojení:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}.$$

Analogicky je možno odvodit i impedanci kapacity $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$. V elektrotechnice se dokazuje, že zobecněný zákon Ohmův (17) platí pro libovolný okruh vytvořený libovolnou kombinací $R$, $L$ a $C$, při čemž při výpočtu impedance používáme běžných pravidel pro zapojení. Popsaná methoda výpočtu okruhů je formálně značně prostší než methoda diferenciálních rovnic.

**§ 10. Funkce komplexní proměnné.** Mějme libovolnou množinu $M$ bodů koule komplexních čísel, při čemž může k $M$ patřit i bod $z = \infty$.

**Definice.** Budeme říkat, že na množině $M$ je definována *funkce komplexní proměnné*,

$$w = f(z), \tag{20}$$

když každému $z$ z množiny $M$ bude přiřazena jedna nebo několik hodnot $w$ (mezi nimi může být i hodnota $w = \infty$).

Proměnná $z$ se nazývá *nezávisle proměnná* neboli *argument funkce* a $w$ — *závisle proměnná* neboli *funkce*. Jestliže každému $z$ je přiřazeno jen jedno jediné $w$, funkce (20) se nazývá *jednoznačná*, v opačném případě *mnohoznačná*.

Množinu všech bodů $w$, odpovídajících podle vztahu (20) všem bodům $z$ z $M$, označíme $N$ a budeme říkat, že funkce (20) je zobrazení množiny $M$ na množinu $N$. Jestliže ani $M$ ani $N$ nebudou obsahovat bod $\infty$, můžeme je interpretovat jako množiny ležící v komplexních rovinách $z$, resp. $w$.

Je-li speciálně množina $M$ množinou všech kladných celých čísel, funkce (20) přejde v posloupnost, o níž byla řeč v § 7. Je-li funkce $M$ množina všech reálných čísel, je (20) komplexní funkcí reálné proměnné (viz § 8).

Podle (20) bodu $w$ z množiny $N$ odpovídá jeden nebo více (může se stát, že i nekonečně mnoho) bodů $z$ z množiny $M$ (druhý případ nastane, když funkce $w = f(z)$ nabývá stejných hodnot v různých bodech množiny $M$). To znamená, že je na množině $N$ definována funkce

$$z = \varphi(w), \tag{21}$$

zobrazující množinu $N$ na množinu $M$; funkce (21) se nazývá *inversní* k (20).

Zvláště důležitý je případ, kdy funkce $w = f(z)$ je jednoznačná na $M$ a funkce $z = \varphi(w)$ je jednoznačná na $N$; v tomto případě nazýváme zobrazení $w = f(z)$ *vzájemně jednoznačné* nebo též *jedno-jednoznačné*. Při jedno-jednoznačném zobrazení každým dvěma různým bodům $z_1, z_2$ z $M$ odpovídají dva různé body $w_1, w_2$ z $N$ a naopak.

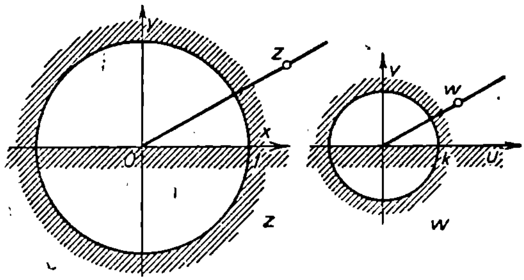
V dalším budeme mít často co dělat se zobrazeními definovanými složenými funkcemi. Nechť funkce $\omega = f_1(z)$ zobrazí množinu $M$ na množinu $N$ a nechť funkce $w = f_2(\omega)$ zobrazí množinu $N$ na množinu $Q$

($M$, $N$, $Q$ leží na koulích $z$, $\omega$, $w$). Zobrazení množiny $M$ na množinu $Q$ zprostředkované funkcí

$$w = f(z) = f_2[f_1(z)] \tag{22}$$

se nazývá *složením* neboli *superposicí* zobrazení $f_1$ a $f_2$.

V dalším budeme často studovat zobrazení vzniklé superposicí tří i více zobrazení.




Obr. 13.

Podotkněme ještě nakonec, že jedna funkce komplexní proměnné $w = f(z)$ definovaná na množině $M$ je ekvivalentní se dvěma reálnými funkcemi dvou reálných proměnných

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{23}$$

(kde jsme položili $z = x + iy$, $w = u + iv$).

V dalších úvahách budeme nejčastěji studovat případ, kdy množiny $M$ a $N$ budou oblasti*) na koulích komplexních čísel $z$, resp. $w$. Budeme je značit $D$ a $\Delta$.

**§ 11. Příklady.** Uveďme na příkladech pojmy definované v § 10.

Příklad 1. Budiž

$$w = kz, \tag{24}$$

kde $k$ je reálná kladná konstanta. V polárních souřadnicích $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$, přejde (24) na dvě rovnice

$$\varrho = kr, \quad \psi = \varphi^{**}, \tag{25}$$

které nám umožňují geometrickou interpretaci zobrazení (24). Druhá z rovnic (25) nám říká, že každý bod $z$ zůstane při zobrazení (24) na

---

*) Viz princip zachování oblastí § 23.

**) Měli bychom vlastně psát $\psi = \varphi + 2k\pi$, ale to nemá smysl, neboť připočtení $2k\pi$ nemění nic na zkoumaném zobrazení. Podobně budeme postupovat i v ostatních příkladech § 11.

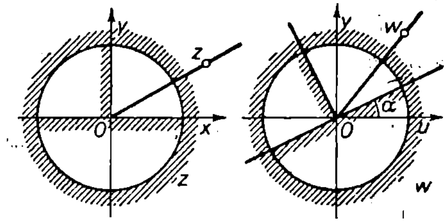
svém polopaprsku $Oz$. Podle prvé z rovnic (25) modul $z$ se při zobrazení (24) $k$-krát zvětší (pro $k > 1$), resp. zmenší (pro $k < 1$). Mluvíme o *dilataci roviny* (v širším slova smyslu) s modulem dilatace $k$ (na obr. 13 $k = \frac{1}{2}$). Jestliže na příklad oblast $D$ je jednotkový kruh $|z| < 1$, pak jeho obraz $\Delta$ je kruh $|w| < k$, je-li $D$ horní polorovina $\operatorname{Im} z > 0$, její obraz $\Delta$ je tatáž polorovina $\operatorname{Im} w > 0$.

Příklad 2. Budiž

$$w = e^{i\alpha}z, \tag{26}$$

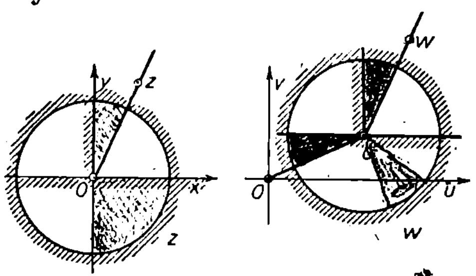
kde $\alpha$ je reálné číslo. Položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r,\ \psi = \varphi + \alpha.$$



Obr. 14.

Z toho plyne, že při zobrazení (26) každý bod $z$ zůstane na své kružnici $|z| = r$, kde $r$ je modul bodu $z$, ale pootočí se o úhel $\alpha$: zobrazení (26) je *pootočení* roviny $z$ o úhel $\alpha$ (viz obr. 14). Jestliže je speciálně $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, má (26) tvar $w = iz$ a je to tedy pootočení roviny o pravý úhel v kladném smyslu; pro $\alpha = \pi$ dostane (26) tvar $w = -z$, t. j. pootočení o $\pi$ v kladném smyslu.



Obr. 15.

Příklad 3. Budiž

$$w = z + b, \tag{27}$$

kde $b = \beta_1 + i\beta_2$ je komplexní číslo. Položme $z = x + iy$, $w = u + iv$ a (27) přejde na tvar

$$u = x + \beta_1,\ v = y + \beta_2.$$

Z toho ihned vidíme, že zobrazení (27) je *rovnoběžné posunutí* roviny $z$ o vektor $b$. Na příklad kruh $|z| < r$ přejde v kruh $|w - b| < r$ (obr. 15).

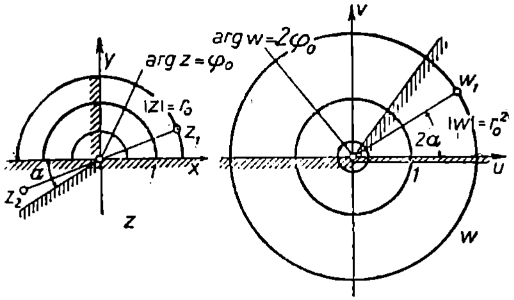
Příklad 4. Budiž obecně

$$w = az + b, \tag{28}$$

kde $a = ke^{i\alpha}$ a $b = \beta_1 + i\beta_2$ jsou komplexní čísla, *lineární funkce komplexní proměnné z*. Zobrazení (28) můžeme považovat za superposici tří zobrazení:

$$\omega = kz,\ \omega_1 = e^{i\alpha}\omega,\ w = \omega_1 + b.$$

*Redukuje se tedy zobrazení* (28) *geometricky na otočení, dilataci v širším slova smyslu (záleží na velikosti k, $k \gtrless 1$) a rovnoběžný posun.* Zobrazení zprostředkované funkcí typu (28) budeme nazývat *lineární zobrazení.*



Obr. 16.

Příklad 5. Budiž

$$w = z^2; \qquad (29)$$

položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r^2,\ \psi = 2\varphi.$$

Z toho plyne, že při zobrazení (29) se zdvojnásobí argument každého bodu; body ležící na kružnici $|z| = r_0$ přejdou na kružnici $|w| = r_0^2$. Horní polorovině $\mathrm{Im}\, z > 0$ odpovídá celá rovina $w$ s vyloučením paprsku $\psi = 0$. Zobrazení (29) je jedno-jednoznačné uvnitř horní půlroviny $\mathrm{Im}\, z > 0$; jestliže budeme u výřezu podél reálné kladné poloosy $\psi = 0$ v rovině $w$ uvažovat dva „břehy", horní a dolní, bude funkce $w = z^2$ jedno-jednoznačná v uzavřené oblasti $\mathrm{Im}\, z \geqq 0$. Přitom bodům $\varphi = 0$ odpovídá horní „břeh" polopřímky $\psi = 0$ a bodům $\varphi = \pi$ odpovídá dolní „břeh" polopřímky $\psi = 0$ (obr. 16).

Bude-li $D$ nekonečná výseč $0 < \varphi < \pi + \alpha$, kde $\alpha > 0$, vyplňují body $w = z^2$ celou rovinu $w$. Zobrazení nebude jedno-jednoznačné, neboť body $z_1$ a $z_2 = -z_1$, z nichž prvý leží v I. kvadrantě a druhý ve III. kvadrantě, mají tentýž obraz $w_1 = z_1^2 = z_2^2$ (obr. 16).

Příklad 6. Budiž $w = f(z)$ definována v uzavřeném kruhu $|z| \leqq 1$ rovnicí*)

*) Druhou z rovnic (30) musíme vypsat, neboť dělení nulou není definováno.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-|z|}\ \text{pro}\ |z| < 1,\\
f(z) &= \ \infty\ \text{pro}\ |z| = 1.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Funkce (30) zobrazí kruh $|z| \leqq 1$ na uzavřený interval $1 \leqq u \leqq \infty$, $v = 0$ reálné kladné poloosy roviny $w$ čili na uzavřený menší oblouk poledníku koule komplexních čísel $w$ procházejícího bodem $w = 1$ a rozděleného body $w = 1$ a $w = \infty$.

Příklad 7. Zkoumejme ještě funkci

$$w = |z|\, z. \tag{31}$$

Položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r^2,\ \psi = \varphi.$$

Zobrazení (31) připomíná zobrazení (29), ale není s ním totožné. Zobrazení (31) je na příklad jedno-jednoznačné uvnitř kruhu $|z| < 1$.

V dalším odkryjeme hluboké rozdíly mezi příklady 1—5 a dvěma posledními příklady.

**§ 12. Limita funkce.** Nechť je funkce komplexní proměnné $w = f(z)$ definována všude v okolí bodu $z_0$, případně s vyloučením tohoto bodu samého (viz pozn. na str. 30).

Definice. *Jednoznačná funkce $w = f(z)$ má limitu $w_0$ pro $z \to z_0$,* což píšeme takto

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z), \tag{32}$$

když k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ takové, že funkce $w = f(z)$ zobrazí $\delta$-okolí bodu $z_0$ na $\varepsilon$-okolí bodu $w_0$, s případnou výjimkou bodu $z_0$ samého.

Poznamenejme ještě, že naše definice platí jak pro konečné, tak pro nekonečné hodnoty čísla $z_0$ i $w_0$. V případě, že $z_0$ i $w_0$ jsou konečné body, limita (32) existuje, když z nerovnosti

$$0 < |z - z_0| < \delta \tag{33}$$

plyne nerovnost

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \tag{34}$$

Pro případ na př. $z_0 \neq \infty$, $w_0 = \infty$ limita (32) existuje, když z nerovniny

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

plyne

$$|f(z)| > \varepsilon. \tag{35}$$

Přenecháváme čtenáři přesnou formulaci případů

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \neq \infty \text{ a } \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

jako cvičení.

Z definice plyne okamžitě: budiž $\{z_n\}$ libovolná nekonečná posloupnost komplexních čísel konvergujících k bodu $z_0$, pak nekonečná posloupnost bodů $\{w_n = f(z_n)\}$ konverguje k bodu $w_0$ ve smyslu § 7. Je-li $z = z(t)$ libovolná spojitá křivka procházející bodem $z_0 = z(t_0)$, pak komplexní funkce reálné proměnné $f[z(t)]$ konverguje k $w_0$ pro $t \to t_0$ ve smyslu § 8. Tedy: *limita v komplexním oboru je nezávislá na způsobu, kterým se z blíží k* $z_0$.

Poznamenejme ještě, že *každá funkce $w = f(z)$, která má konečnou limitu pro $z \to z_0$ je v okolí bodu $z_0$ ohraničená.* Důkaz je zcela analogický odpovídajícímu důkazu pro posloupnosti v § 7, a proto jej ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Konečně stejně jako věta [1] § 7 se dokáže:

**Věta [2].** *Je-li $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $w_0 = u_0 + iv_0 = \varrho_0 e^{i\psi_0}$, pak z konvergence funkce $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) = \varrho(r, \varphi)\, e^{i\psi(r, \varphi)}$ k limitě $w_0$ pro $z \to z_0$ plyne pro $w_0 \neq \infty$*

$$\lim_{z \to z_0} u(x, y) = u_0, \lim_{z \to z_0} v(x, y) = v_0 \tag{36}$$

*a pro $w_0 \neq 0$, $\neq \infty$ při vhodné volbě obou argumentů*

$$\lim_{z \to z_0} \varrho(r, \varphi) = \varrho_0, \lim_{z \to z_0} \psi(r, \varphi) = \psi_0. \tag{37}$$

*Věta* [2] *platí i naopak, bez výjimek.*

Poznamenejme ještě závěrem, že všechna pravidla pro počítání s limitami, známá čtenáři z theorie funkcí reálné proměnné, platí bez výjimky i pro funkce komplexní proměnné. Nebudeme se zde tedy zdržovat ani jejich formulací ani jejich důkazy.

**§ 13. Spojitost.** Definice. Funkce $w = f(z)$ je *spojitá v bodě* $z = z_0$, když existuje konečná limita v tomto bodě a její hodnota je rovna hodnotě funkce v tomto bodě, t. j.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{38}$$

Tuto definici možno formulovat i pomocí nerovností. Tak na př. pro konečný bod $z_0$ má tvar: funkce $w = f(z)$ je spojitá v bodě $z = z_0$ když pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ lze nalézt takové $\delta > 0$, že pro všechna*) $z$, jež vyhovují nerovnosti

$$|z - z_0| < \delta, \tag{39}$$

platí nerovnost

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{40}$$

Tak jako v theorii funkcí reálné proměnné položíme $z - z_0 = \Delta z$ a budeme $\Delta z$ nazývat *přírůstkem argumentu* a $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ *přírůstkem funkce*. Podmínku (38) spojitosti funkce v bodě $z_0$ lze pak formulovat pomocí přírůstků též takto:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0. \tag{41}$$

Podle běžné terminologie nazveme *nekonečně malou veličinou* funkci konvergující k 0. Pak je možno vztah (41) číst též takto: funkce $w = f(z)$ je spojitá v bodě $z$, jestliže nekonečně malému přírůstku argumentu $\Delta z$ odpovídá nekonečně malý přírůstek funkce $\Delta w$.

Definice. Funkce spojitá v každém bodě oblasti $D$ se nazývá *spojitá v oblasti* $D$.

Nyní si budeme ilustrovat naše definice na několika příkladech. Funkce př. 1—7 § 11 jsou kromě př. 6 spojité v celé otevřené rovině $z$. Funkce z př. 6 je spojitá v jednotkovém otevřeném kruhu. Uveďme si ještě dva další příklady.

Příklad 1. *Hlavní hodnota* arg $z$ *je spojitá pro všechna* $z \neq 0, \neq \infty$ *neležící na záporné reálné poloose.* Důkaz: Budiž $z_0$ libovolný bod a $\varepsilon$

*) Zde nemusíme vyloučit hodnotu $z = z_0$, neboť pro $z = z_0$, $f(z) - f(z_0) = 0$, a nerovnost (40) je splněna. Kdybychom ale nevyloučili hodnotu $z = z_0$ při definici limity, nebylo by rozdílu mezi funkcemi majícími limitu a funkcemi spojitými. Neboť pak by pro každé $\varepsilon > 0$ bylo $|f(z_0) - w_0| < \varepsilon$ a protože $f(z_0)$ a $w_0$ jsou konstanty a $\varepsilon$ libovolně malé kladné číslo, muselo by být $f(z_0) = w_0$.

libovolné reálné číslo. Označme si $\delta$ poloměr největší kružnice se středem v bodě $z_0$, uvnitř které neleží žádný bod záporné reálné poloosy tak, že celá kružnice leží ve výseči o středovém úhlu $2\varepsilon$. Pak pro všechna $|z - z_0| < \delta$ zřejmě platí $|\arg z - \arg z_0| < \varepsilon$.

V bodech $z = 0$ a $z = \infty$ není funkce definována, proto nelze ani mluvit o její spojitosti v těchto bodech. V bodech záporné reálné poloosy má hlavní hodnota $\arg z$ nespojitost: $\arg z \to \pi$ pro body $z \to z_0$ z horní poloroviny ($z_0$ leží na záporné reálné poloose), ale $\arg z \to -\pi$ pro body $z \to z_0$ z dolní poloroviny.

Příklad 2. Budiž

$$w = f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right); \tag{42}$$

položíme $z = re^{i\varphi}$ a použijeme Eulerova vzorce (14) § 3 a dostaneme

$$w = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \sin 2\varphi.$$

Z toho je ihned vidět, že v libovolně malém okolí bodu $z_0 = 0$ nabývá funkce všech hodnot intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy nerovnost (34) nemůže být splněna pro všechna $z$ z $\varepsilon$-okolí bodu $z_0$, volíme-li $\varepsilon$ dostatečně malé ($\varepsilon < \frac{1}{2}$), ať při tom volíme $w_0$ jakkoliv. Vidíme tedy, že naše funkce nemá limitu pro $z \to 0$. Poznamenejme ještě, že limita $f(z) = f[z(t)]$ pro $z \to 0$ podél libovolné křivky $z = z(t)$ existuje (pokud má $z = z(t)$ tečnu v bodě $z = 0$). Tyto limity jsou však pro různé křivky obecně různé.

Základní věty o spojitých funkcích reálné proměnné zůstávají v platnosti i pro funkce komplexní proměnné, nebudeme se tedy zdržovat ani jejich formulací ani jejich důkazy. Z vět o funkcích spojitých v jisté oblasti $D$ uvedeme bez důkazu dvě:

1. *Každá funkce $w = f(z)$ spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$, je v této oblasti ohraničená, t. j. existuje takové pevné reálné číslo $M \neq \infty$, že $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z$ z $\bar{D}$.*

2. *Funkce $w = f(z)$ spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$, nabývá v této oblasti své maximální a minimální hodnoty (vzhledem k modulu).*

Obě věty platí v témže znění i pro funkce spojité na uzavřené křivce nebo na oblouku, k němuž počítáme oba jeho koncové body.

**§ 14. Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice.** Budiž $w = f(z)$ jednoznačná funkce definovaná v jistém okolí bodu $z \neq \infty$. Vybereme z okolí tohoto bodu body $Z = z + \Delta z$ a označíme $\Delta w$ přírůstek funkce při přechodu od bodu $Z$ do bodu $z$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Definice. Funkce $w = f(z)$ je *diferencovatelná* v bodě $z$, když existuje konečná limita $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Tato limita se nazývá *derivace* funkce $w = f(z)$ v bodě $z$ a označujeme ji symbolem

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{43}$$

Stejným způsobem jako v analyse funkcí reálné proměnné se dokáže, že z diferencovatelnosti funkce (je-li $f'(z) \neq \infty$) v bodě $z$ plyne ihned spojitost funkce v bodě $z$. Opačná věta neplatí.

Budiž $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a hledejme podmínky, které musí splňovat funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$, aby funkce $w = f(z)$ byla diferencovatelná v bodě $z$. Předpokládejme, že derivace $f'(z)$ existuje. Pak podle definice (43) § 12 k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\Delta z$, pro která $|\Delta z| < \delta$ platí

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \right| < \varepsilon \tag{44}$$

Položme nejprve $\Delta z = te^{i\alpha}$, kde $\alpha$ — je libovolná reálná konstanta a $t = |\Delta z|$. Pak pro $t < \delta$ bude nerovnost (44) splněna nezávisle na volbě konstanty $\alpha$ (viz § 12). To znamená, že $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ je nezávislá na volbě konstanty $\alpha$ a rovná se $f'(z)$. Použijeme toho a zvolíme $\alpha = 0$. Pak je přírůstek $\Delta z = t$ reálný. Označme ho $\Delta x$. Podle (43) dostaneme

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)\} + i\{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{45}$$

Položme nyní $\alpha = \frac{\pi}{2}$ potom přírůstek $\Delta z = it$ je ryze imaginární, označme ho $i\Delta y$ a podle (43) dostaneme

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\} + i\{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)\}}{i\Delta y} =$$

$$\boxed{= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.} \qquad (46)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (45) a (46) dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \qquad (47)$$

Rovnice (47) se nazývají *Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice.* Dokázali jsme tedy, že pro diferencovatelnost funkce $w = f(z)$ v bodě $z$ je nutná: 1. existence parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ a 2. splnění Cauchy-Riemannových diferenciálních rovnic.

Hledejme nyní postačující podmínky. Předpokládejme, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě $z$ totální diferenciál*) a dokážeme, že pak z platnosti Cauchy-Riemannových rovnic plyne existence derivace $f'(z)$. Z diferencovatelnosti funkce dvou proměnných plyne, že lze jejich přírůstky psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta_1|\Delta z|, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_2|\Delta z|, \end{aligned} \qquad (48)$$

kde $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ a $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$ pro $\Delta z \to 0$. Podle (48) je

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\eta_1 + i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}.$$

*) Jak známo, neplyne z existence prvních parciálních derivací ještě existence totálního diferenciálu. K tomu však stačí, aby uvedené parciální derivace byly spojité v bodě $z$. [Viz V. Jarník: Úvod do počtu diferenciálního, II. vyd., str. 389, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951. *Pozn. překl.*]

Použijeme Cauchy-Riemannových rovnic a píšeme $-\frac{\partial v}{\partial x}$ místo $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial x}$ místo $\frac{\partial v}{\partial y}$. Po malé úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} + (\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z},$$

čili

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Z toho

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| = |\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2| \to 0 \text{ pro } \Delta z \to 0$$

a konečně

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

existuje. Tím jsme dokázali tuto větu:

**Věta.** *Aby funkce $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ byla diferencovatelná v bodě $z = x + \mathrm{i}y$ je nutné, aby v tomto bodě existovaly parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ a byly splněny Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{47}$$

*Splnění Cauchy-Riemannových diferenciálních rovnic stačí pro diferencovatelnost funkce $w = f(z)$, když připojíme doplňující předpoklad o existenci totálních diferenciálů funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$ ve zkoumaném bodě.*

Dodejme ještě, že *všechna pravidla a vzorce pro derivování funkcí reálné proměnné zůstávají v platnosti i pro funkce komplexní proměnné.* To plyne okamžitě z toho, že definice derivace, věty o limitách a algebraické operace, na kterých spočívají důkazy, jsou stejně platné jak v reálném, tak v komplexním oboru.

Funkce v př. 1—5 § 11 jsou diferencovatelné v celé otevřené rovině $z$. To si snadno dokážeme ověřením platnosti Cauchy-Riemannovýčh diferenciálních rovnic pro tyto funkce a ověřením spojitosti prvních parciálních derivací příslušných funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$. Tak na př. pro funkci $w = z^2$ (př. 5):

$$u = x^2 - y^2, \; v = 2xy$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Funkce

$$w = z|z| \tag{31}$$

(př. 7) je diferencovatelná v bodě $z = 0$. Důkaz: Je $\Delta z = z$, $\Delta w = w = z|z|$ a $f'(0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{z \to 0} |z| = 0$ existuje. Pro žádné $z \neq 0$ není však diferencovatelná, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem parciálních derivací funkcí $u = x\sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = y\sqrt{x^2 + y^2}$ a dosazením do Cauchy-Riemannových rovnic. Také pro funkci z př. 6 si snadno ověříme, že rovnice Cauchy-Riemannovy nejsou splněny pro žádný bod uvnitř definiční kružnice.

Nakonec uvedeme ještě dvě definice fundamentálního významu:

Definice 1. Funkce $w = f(z)$ jednoznačná a diferencovatelná ve všech bodech oblasti $D$ se nazývá *regulární v oblasti $D$*.

Definice 2. Funkce $w = f(z)$ se nazývá *regulární v bodě $z_0$*, lze-li najít takové okolí bodu $z_0$, že $w = f(z)$ je v něm regulární.

Podtrhněme ještě tu okolnost, že naše definice se vztahují na jednoznačné funkce. Kromě toho jsme se nezabývali diferencovatelností a regularitou funkce $w = f(z)$ v nekonečně vzdáleném bodě (viz § 6).

Podmínky regularity a diferencovatelnosti funkce v celé oblasti *jsou stejné*. Naproti tomu jsou podmínky regularity v bodě *silnější* než podmínky diferencovatelnosti. Tak na př. funkce (31) je v bodě $z = 0$ diferencovatelná, ale není regulární, protože není diferencovatelná v žádném okolí bodu $z = 0$.

ÚLOHY.

1. Napište v kartézských souřadnicích rovnice stereografické projekce. Co odpovídá v stereografické projekci: a) dvojici bodů $z$ a $-z$; b) dvojici bodů $z$ a $\bar{z}$?

2. Tvoří oblasti geometrická místa bodů:

a) $|z^2 - 1| \leqq 1$;

b) $\cos\varphi < r < 2\cos\varphi$; $-\pi \leqq \varphi < \pi$ ($r$ a $\varphi$ polární souřadnice)?

3. Stanovte limitu posloupností:

a) $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (položte $z = x + iy$ a $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ a stanovte $\lim_{n\to\infty} r_n$ a $\lim_{n\to\infty} \varphi_n$),

b) $z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{2^k}$ (znázorněte graficky).

4. Jakými křivkami jsou tvořeny hodografy komplexních funkcí reálné proměnné

a) $z = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$ ($\alpha$, $\beta$ reálné),

b) $z = e^{at}$ ($a$ komplexní)?

5. Budiž $z = z(t)$ dráha, po níž se pohybuje hmotný bod v rovině. Stanovte složky rychlosti a zrychlení do směru $Oz$ a směru k němu kolmého.

6. Nechť bod $z$ obíhá po kružnici o poloměru R s konstantní úhlovou rychlostí $\omega = 1$. Stanovte vektor rychlosti bodu $w$ pohybujícího se společně s bodem $z$ podle vztahu $w = f(z)$.

7. Stanovte ustálený proud v obvodě složeném z ohmického odporu R a kapacity $C$ zapojených v serii, je-li na svorky přiložena sinusoidální e.m.s.

8. Na jakou množinu zobrazuje rovinu $z$ (s vyloučením bodů $z = 0$ a $z = \infty$) funkce (42)?

9. Zobrazení, definované dvojicí reálných funkcí dvou proměnných

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1,$$
$$v = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2,$$

($\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$) se nazývá *afinní*. Dokažte:

a) afinní zobrazení zobrazuje libovolný čtverec roviny $z$ na rovnoběžník v rovině $w$,

b) jestliže obrazem alespoň jednoho čtverce je opět čtverec, pak funkce $w = u + iv$ je lineární funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$.

10. Co odpovídá při zobrazení $w = z^2$ soustavě přímek $y = \alpha$ ($\alpha > 0$) a soustavě polopřímek $x = \beta$, $y > 0$?

11. V jaké křivky roviny $w$ se zobrazí

a) přímky $x = \alpha$ a $y = \beta$ funkcí $w = \frac{1}{z}$;

b) polopřímky $\arg z = \alpha$ funkcí $w = \frac{1+z}{1-z}$;

c) kružnice $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ a výseče $\arg z = \alpha$, $0 \leq |z| \leq 1$ funkcí

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

d) kružnice $|z| = 1$ funkcí $w = \sqrt{z + 1}$.

12. Na jakou oblast se zobrazí výseč $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}$ funkcí $w = z^3$? Co odpovídá v tomto případě soustavám $\operatorname{Re} w = \alpha$, $\operatorname{Im} w = \beta$?

13*. Uveďte příklad takové funkce $w = f(z)$, pro kterou limity podél libovolné přímky existují a jsou si rovny, ale $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ přesto neexistuje.

14. Prozkoumejte spojitost funkce $w = \operatorname{tg}(\arg z)$.

15. Dokažte: jestliže je funkce $w = f(z)$ v některé oblasti regulární a reálná, pak je konstantní.

16. Dokažte: je-li funkce $w = f(z)$ regulární v oblasti $D$ a je tam všude $f'(z) \equiv 0$, pak je $f(z)$ konstantní v oblasti $D$.

17. Prozkoumejte regularitu funkcí: a) $w = z^3$; b) $w = \dfrac{1}{z^2}$; c) $w = \sqrt[3]{z}$; d) $w = z \operatorname{Re} z$.