ÚVOD

§ 1. Komplexní čísla. Pojem komplexního čísla zná čtenář již z kursu elementární algebry. V elementárních kursech algebry se obyčejně zavádí komplexní čísla při řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$. Především se dokáže, že neexistuje reálné číslo, které by bylo kořenem této rovnice, a pak se zavede nové „imaginární" číslo $i = \sqrt{-1}$. Pomocí tohoto čísla se stane rovnice $x^2 + 1 = 0$ řešitelnou a její kořeny jsou $+i$ a $-i$.

Pak se zavedou „komplexní čísla" tvaru $x + iy$ jako součet reálných čísel x a čísel ryze imaginárních iy. Pravidla pro počítání s těmito čísly nám dávají možnost provádět s těmito čísly tytéž operace jako s čísly reálnými a ve výsledku vždy dosadit $i^2 = -1$. Zavedením komplexních čísel se stanou řešitelnými všechny kvadratické rovnice typu $x^2 + px + q = 0$ a dokonce obecně i všechny rovnice typu $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ s libovolnými koeficienty.

Právě popsaný způsob zavedení komplexních čísel je neuspokojující, protože způsobuje, že se na komplexní čísla nazírá jako na reálně neexistující objekty, v doslovném slova smyslu „imaginární". Toto nazírání způsobuje, že ještě dnes existují inženýři, kteří mají strach před komplexními čísly a nedůvěřují jejich použití k praktickým výpočtům.

Půjdeme proto jinou cestou.

Mějme systém všech volných vektorů ležících v jisté rovině. *Volnými* budeme nazývat vektory s takto definovanou rovností: dva vektory jsou si *rovny*, je-li možno je ztotožnit rovnoběžným posunováním. V následujících paragrafech (§§ 2, 3 a 4) zavedeme některé operace pro vektory našeho systému. Tyto operace budou tvořit dvě skupiny.

Do prvé skupiny patří součet, rozdíl a násobení reálným číslem (skalárem) — operace, které se provádějí stejně jako v obyčejné vektorové algebře (viz § 2). Operace patřící do druhé skupiny naproti tomu podstatně odlišují algebru námi zkoumaných vektorů od obyčejné vektorové algebry. V obyčejné vektorové algebře se zavádí dva různé součiny — skalární a vektorový, ale ani jeden z nich nesplňuje všechny zákony pro součin reálných čísel. Tak na př. ani jeden z nich nedovoluje obrácení operace, t. j. ani skalární ani vektorové dělení. Čtenář uvidí v dalších paragrafech, že pro rovinný systém vektorů lze zavést operaci násobení a dělení (§ 3) i umocňování a odmocňování při zachování všech zákonů algebry reálných čísel. Tyto operace tvoří druhou skupinu, o níž už byla řeč výše. To, co jsme si právě řekli, nám dovoluje považovat rovinný systém vektorů s uvedenými dvěma skupinami vlastností za systém nového druhu čísel, které budeme nazývat čísla komplexní.

Tedy *množina všech čísel komplexních je tvořena rovinným systémem volných vektorů, pro které jsou definovány operace způsobem uvedeným v §§ 2, 3 a 4.*

Výše vyložený způsob zavedení komplexních čísel nemá nedostatky, o kterých jsme hovořili na začátku tohoto paragrafu. V jeho prospěch mluví i to, že vektorové veličiny se vyskytují ve značné části aplikací. Čtenář shledá (v § 9 a též v kap. IV. a i v jiných částech knihy), že takto zavedené operace nad komplexními čísly mají použití ve značném počtu aplikací.

Rovinu, v níž leží uvažované vektory, budeme nazývat *rovinou komplexních čísel*. Zvolíme si v této rovině libovolný bod O a používajíce toho, že vektory jsou volné, posuneme rovnoběžně počáteční body všech vektorů do bodu O. Pak je každý vektor (komplexní číslo) z jednoznačně určen svým koncovým bodem P. A naopak, každý bod P dané roviny je jednoznačně určen koncem vektoru (komplexního čísla) $z = \overrightarrow{OP}$. Existuje tedy jedno-jednoznačný vztah mezi komplexními čísly a body dané roviny.*)

Toto zjištění nám dovoluje interpretovat komplexní čísla jednak jako vektory, jednak jako *body v rovině*. V dalším výkladu budeme používat výrazu „bod z“ stejně často jako výrazu „vektor z“.

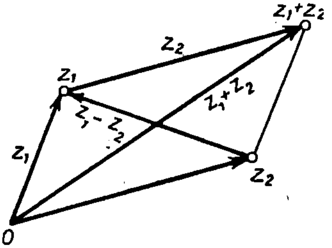
§ 2. Jednoduché operace. Definice: *Součtem* a *rozdílem* dvou komplexních čísel z_1 a z_2 budeme nazývat diagonály v rovnoběžníku sestrojeném z vektorů z_1 a z_2 (obr. 1).

Jinak řečeno, součet $z_1 + z_2$ je třetí doplňující stranou v trojúhelníku, jehož dvě prvé strany tvoří vektory z_1 a z_2. Rozdíl $z_1 - z_2$ je

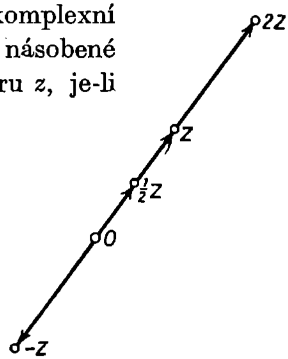
*) Bodu O odpovídá nulový vektor (komplexní číslo 0).

vektor spojující bod z_2 s bodem z_1 v tomto pořadí (viz obr. 1). Definice součtu se dá zřejmě bez obtíží rozšířit na konečný počet sčítanců.

Definice: *k-násobkem* komplexního čísla z, kde k je reálné číslo, budeme rozumět vektor (komplexní číslo) kz, jehož délka je rovna délce vektoru násobené číslem $|k|$ a jehož směr je tentýž jako vektoru z, je-li



Obr. 1.



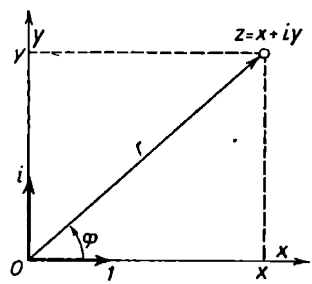
Obr. 2.

$k > 0$, a opačný, je-li $k < 0$. Pro $k = 0$ definujeme $kz = 0 \,.\, z = 0$ (viz obr. 2, kde jsou zobrazena čísla z, $2z$, $\frac{1}{2}z$, $- z$).

V každé učebnici vektorové algebry se dokazuje, že uvedené operace se řídí zákony algebry reálných čísel.

Zaveďme si nyní v rovině komplexních čísel pravoúhlý kartézský systém souřadnic xOy tak, že počátek položíme do bodu O (viz § 1). Označme si jednotkové vektory na ose Ox, resp. na ose Oy, 1, resp. i. Pak můžeme, používajíce našich definic a běžného vyjádření z vektorové algebry, vyjádřit libovolný vektor (komplexní číslo) z pomocí projekcí x a y takto*) (obr. 3):

$$z = x \,.\, 1 + y \,.\, \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y. \qquad (1)$$



Obr. 3.

algebraický

Výraz (1) se nazývá *kartézský tvar* komplexního čísla z. Jednotkové vektory 1,

*) Jak ukazuje rovnice (1), vypouštíme označení jednotkového vektoru osy Ox.

resp. i, se nazývají *reálná, resp. imaginární,***) *jednotka* a v souhlase s tím osy Ox, resp. Oy, *reálná, resp. imaginární, osa.* Projekce x, resp. y, se nazývají *reálná, resp. imaginární, část* komplexního čísla z a značí se

$$x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z. \tag{2}$$

Leží-li konec vektoru z (s počátkem v bodě O) na reálné ose, budeme číslo $z = x + 0\mathrm{i}$ pokládat za totožné s reálným číslem x určeným koncovým bodem vektoru z. Z toho plyne: množina všech komplexních čísel obsahuje množinu všech reálných čísel jako podmnožinu. Bude-li koncový bod vektoru z ležet na imaginární ose, budeme komplexní číslo $z = 0 + y\mathrm{i} = \mathrm{i}y$ nazývat čísle *ryze imaginárním.*

Rovnost dvou komplexních čísel je dána rovností odpovídajících vektorů (§ 1). Snadno si odvodíme podmínky rovnosti v souřadnicích. Dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ a $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ jsou si tehdy a jen tehdy rovna, jestliže

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2. \tag{3}$$

Z toho vidíme, že jedna rovnice mezi komplexními čísly je ekvivalentní dvěma rovnicím mezi čísly reálnými.

Zavedeme si nyní ještě pojem komplexně sdruženého čísla: Číslo $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ se nazývá *komplexně sdruženým* s číslem $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, je-li

$$x_2 = x_1,\ y_2 = -y_1. \tag{4}$$

V tomto případě budeme psát $z_2 = \bar{z}_1$. Obrazem čísla $\bar{z}$ je bod symetricky sdružený s bodem z podle osy Ox.

Sčítání (odčítání) komplexních čísel se převádí na sčítání (odčítání) jejich reálných, resp. imaginárních částí: Budiž $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, pak

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2). \tag{5}$$

**) Zde i v dalším používáme termínu „imaginární" jen z tradičních důvodů, aniž tímto termínem chceme označit něco neexistujícího nebo neskutečného.

Máme-li násobit komplexní číslo $z = x + iy$ reálným číslem k, násobíme jím reálnou i imaginární část čísla z:

$$z_1 = kz = kx + i\,ky. \tag{6}$$

Kromě vyjádření komplexního čísla v kartézském tvaru je v mnoha případech výhodné jeho vyjádření v polárních souřadnicích. Zavedeme v rovině komplexních čísel polární souřadný systém a to tak, že položíme pól do bodu O a polární osa bude totožná s kladnou reálnou poloosou Ox. Označíme-li polární souřadnice bodu $z = x + iy$ r a φ, bude (viz obr. 3)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{7}$$

a vzorec (1) bude mít tvar

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8}$$

Tvar (8) se nazývá *polárním* (*goniometrickým*) tvarem komplexního čísla. Veličiny r, resp. φ, se nazývají *modul* (absolutní hodnota, amplituda), resp. *argument* komplexního čísla, a označují se

$$r = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z. \tag{9}$$

Kartézské souřadnice komplexního čísla jsou určeny jednoznačně, kdežto v případě polárních souřadnic tomu tak není. Sice

$$r = |z| = {}_{+}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{10}$$

je jednoznačná funkce proměnných x, y, ale

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi \quad (k \text{ libovolné celé číslo}), \tag{11}$$

kde $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ volíme tak, aby $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ($r = {}_{+}\sqrt{x^2 + y^2}$ podle (10)). Tím je zřejmě úhel φ určen až na násobky 2π. Je tedy funkce (11) zřejmě mnohoznačná a má nekonečně mnoho hodnot lišících se navzájem o celočíselné násobky čísla 2π. Kromě toho pro $z = 0$ není funkce $\operatorname{Arg} z$ definována.

Často je nutné pracovat s jednoznačnou větví funkce $\operatorname{Arg} z$. Pro tento účel bývá zvykem definovat funkci $\operatorname{Arg} z$ v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$,*) kde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ volíme podle výše zavedené úmluvy. Takto definovanou jednoznačnou funkci nazýváme *hlavní hodnota argumentu* a označujeme ji symbolem $\arg z$.**) Platí tedy pro hlavní hodnotu argumentu vztah

$$-\pi < \arg z \leqq \pi. \tag{12}$$

Hlavní hodnota argumentu je nespojitá na záporné reálné poloose: blížíme-li se k bodu z_0 na záporné reálné poloose shora, t. j. kladnými hodnotami y, blíží se hodnota funkce $\arg z$ hodnotě $+\pi$; blížíme-li se témuž bodu zdola, t. j. zápornými hodnotami y, blíží se hodnota funkce $\arg z$ k hodnotě $-\pi$. Při tom předpokládáme samozřejmě $z_0 \neq 0$, neboť pro bod $z = 0$ není funkce $\arg z$ vůbec definována. Ve všech ostatních bodech roviny komplexních čísel kromě již uvedeného bodu $z = 0$ je funkce $\arg z$ spojitá.*)

Použijeme-li *Eulerova vzorce* známého čtenáři z kursu vyšší matematiky**)

$$\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{13}$$

můžeme výraz (8) přepsat na tvar

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{14}$$

---

*) Symbol (a, b) značí otevřený interval, t. j. všechna x, pro něž platí $a < x < b$. Symbol $\langle a, b\rangle$ značí uzavřený interval, t. j. všechna x, pro něž platí $a \leqq x \leqq b$, a konečně symbol $(a, b\rangle$ značí zleva otevřený (t. j. a do intervalu nepatří) a zprava uzavřený (t. j. b do něho patří) interval. (Pozn. překl.)

**) Někdy upustíme od této úmluvy, ale v takovém případě vždy vytkneme, o kterou větev půjde.

*) Podrobněji viz § 8.

**) Tento vzorec můžeme též považovat za definici ryze imaginární mocniny čísla e. Podrobněji viz § 29.

Výraz (14) se nazývá *exponenciální tvar* komplexního čísla.

Podmínky rovnosti dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ daných v polárním nebo exponenciálním tvaru se lehko vyjádří v polárních souřadnicích:

$$r_1 = r_2, \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \tag{15}$$

kde k je libovolné číslo celé, kladné, záporné nebo nula. Podmínka pro čísla komplexně sdružená je vyjádřena vztahy

$$|\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z \ (\arg z \neq \pi). \tag{16}$$

Polární souřadnice součtu, resp. rozdílu komplexních čísel, nelze stanovit ze souřadnic obou sčítanců, resp. ze souřadnic menšence a menšitele, tak jednoduchým způsobem jako v případě kartézského tvaru. Nicméně z obr. 1 a z elementárních vlastností trojúhelníků dostaneme snadno tyto nerovnosti:

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \ |z_1 - z_2| \geqq \big||z_1| - |z_2|\big|. \tag{17}$$

Obě tyto nerovnosti přecházejí v rovnost pro $\arg z_1 = \arg z_2$.

V závěru paragrafu vyložíme ještě na několika příkladech, jak lze pomocí komplexních čísel stanovit geometrická místa bodů v rovině.

Příklad 1. Lehko odvodíme, jakým rovnicím vyhovují body, ležící na kružnici o poloměru r a středu v bodě $z = a$, resp. body ležící uvnitř, resp. vně této kružnice (a jen tyto body):

$$|z - a| = r, \ |z - a| < r, \ |z - a| > r.$$

Můžeme tedy tyto vztahy považovat za určující rovnice pro uvedená geometrická místa bodů v rovině. Nerovnost

$$r \leqq |z - a| < R$$

je splněna všemi body mezikruží ohraničeného kružnicemi o poloměrech r, resp. R ($r < R$), a středu v bodě $z = a$, při čemž body kružnice o poloměru r do mezikruží počítáme, body kružnice o poloměru R nikoli.

Příklad 2. Rovnice

$$\arg z = \alpha$$

určuje polopřímku (polopaprsek) vycházející z bodu O a svírající s kladnou reálnou poloosou Ox úhel α. Nerovnost

$$\alpha < \arg z < \beta$$

určuje nekonečnou výseč omezenou dvěma polopřímkami vycházejícími z bodu O a svírajícími s kladnou reálnou poloosou Ox úhel α, resp. β (přímky samotné v to nepočítaje).

Příklad 3. Rovnice

$$\operatorname{Re} z = \alpha, \ \operatorname{Im} z = \beta$$

určují dvě přímky rovnoběžné se souřadnými osami, nerovnost

$$\alpha \leqq \operatorname{Re} z \leqq \beta,$$

určuje svislý pás mezi přímkami $x = \alpha$ a $x = \beta$ (přímky v to počítaje); nerovnost

$$\alpha \leqq \operatorname{Re} z \leqq \beta, \ |\operatorname{Im} z| \leqq \gamma$$

určuje vnitřek obdélníka (strany v to počítaje).

§ 3. Násobení a dělení. Definice. *Součinem* dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ budeme rozumět komplexní číslo

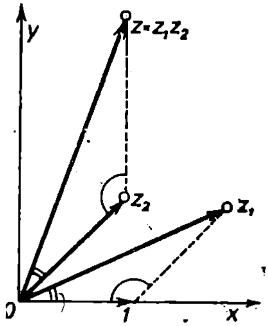
$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} . \tag{18}$$

Z toho plyne, že při násobení komplexních čísel se jejich moduly násobí a argumenty sčítají. Hodnoty mnohoznačných funkcí $\operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$ je možno vybrat zcela libovolně, jejich součet určuje $\operatorname{Arg} z$. V případě, že všechny tři hodnoty φ_1, φ_2 a $\varphi_1 + \varphi_2$ leží v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, stačí uvažovat pouze hlavní hodnoty argumentů.

Geometricky značí násobení komplexního čísla z_1 komplexním číslem z_2 délkovou dilataci (modul dilatace $|z_2|$) a pootočení o úhel $\varphi_2 = \operatorname{Arg} z_2$ (viz obr. 4, kde trojúhelníky $O1z_1$ a Oz_2z jsou podobné).

Z naší definice plyne ihned, že takto definované násobení splňuje komutativní a asociativní zákon:

$$z_1z_2 = z_2z_1;\; z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)\,z_3. \tag{19}$$



Obr. 4.

Příklad. $z\bar{z} = re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2$, t. j. součin komplexně sdružených čísel je roven čtverci jejich modulu. Násobení čísla z imaginární jednotkou $i = e^{\frac{1}{2}i\pi}$ značí geometricky pootočení o pravý úhel, neboť $|i| = 1$; *vynásobení i sebou samým* dává

$$i\,.\,i = i^2 = e^{\frac{1}{2}i\pi}\,.\,e^{\frac{1}{2}i\pi} = e^{i\pi} = -1. \tag{20}$$

Jsou-li dána komplexní čísla z_1 a z_2 v kartézském tvaru, potom vyjdeme-li od naší definice a použijeme-li Eulerova vzorce (13), dostaneme:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\} = \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + ir_1r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &+ \sin\varphi_2\cos\varphi_1). \end{aligned}$$

Použijeme-li ještě vztahu (7), dostáváme konečně

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{21}$$

Výraz (21) dostáváme přímo, jestliže v prvém výrazu odstraníme závorky tak, že násobíme v algebře běžným způsobem a podle (20) dosadíme do výsledku $i\,.\,i = i^2 = -1$. Z výrazu (21) ihned plyne platnost distributivního zákona

$$(z_1 + z_2)\,z = z_1z + z_2z. \tag{22}$$

Operace násobení se zřejmě snadno zevšeobecní na konečný počet činitelů.

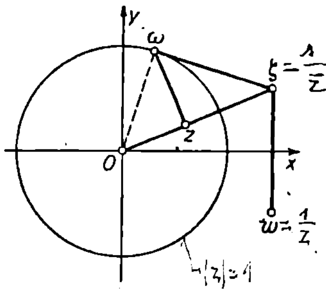
Námi zavedený součin se podstatně liší od skalárního a vektorového součinu. Jak jsme zdůraznili již dříve, tkví v tom základní rozdíl naší vektorové algebry od obyčejné vektorové algebry.

Definice. *Podílem* dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \neq 0$ budeme rozumět číslo

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{23}$$

Z toho plyne, že při dělení komplexních čísel se dělí modul dělence modulem dělitele a od argumentu dělence se odečte modul dělitele.*)

Z definice plyne dále, že dělení je inversní operace k násobení, neboť z rovnice $z = \frac{z_1}{z_2}$ plyne $zz_2 = z_1$. Dělení čísla z_1 číslem $z_2 \neq 0$ se dá převést na násobení číslem $\frac{1}{z_2}$. Vyložíme si nyní geometrickou konstrukci bodu $\frac{1}{z_2}$, je-li dán bod $z_2 \neq 0$ nebo obecněji konstrukci bodu



Obr. 5.

$$w = \frac{1}{z}, \tag{24}$$

je-li dán bod $z \neq 0$.

Budiž $|z| < 1$. V bodě z vztyčíme kolmici na polopřímku Oz. Průsečík této kolmice s jednotkovou kružnicí $|z| = 1$ nazveme ω. V bodě ω sestrojíme tečnu ke kružnici $|z| = 1$. Její průsečík s polopřímkou Oz nazveme ζ (pro $|z| > 1$ provedeme konstrukci v opačném pořádku). Viz obr. 5. Protože jsou trojúhelníky $Oz\omega$ a $O\omega\zeta$ podobné (jsou pravoúhlé a mají tentýž ostrý úhel), je $\frac{\overline{Oz}}{\overline{O\omega}} = \frac{\overline{O\omega}}{\overline{O\zeta}}$ čili $\frac{|z|}{1} = \frac{1}{|\zeta|}$, t. j. $|\zeta| = \frac{1}{|z|}$.

---

*) O výběru větví funkcí Arg z_1, Arg z_2, Arg z_3 platí totéž, co již bylo řečeno pro případ součinu.

A jelikož jsou argumenty z a ζ sobě rovny, je

$$\zeta = \frac{1}{\bar{z}}. \tag{25}$$

Vztah mezi komplexním číslem z a komplexním číslem $\zeta = \frac{1}{\bar{z}}$ se nazývá inverse vzhledem k jednotkové kružnici a body z a ζ se nazývají inversně sdružené vzhledem k této kružnici.

Zbývá ještě sestrojit bod w symetrický s bodem ζ podle osy Ox. Bude $|w| = |\zeta| = \frac{1}{|z|}$, $\arg w = -\arg \zeta = -\arg z$, t. j. $w = \frac{1}{z}$, což jsme měli dokázat.

Jestliže jsou komplexní čísla z_1 a z_2 dána v kartézském tvaru, pak použijeme definice (23) a vzorců (11) a (7) a dostaneme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - \mathrm{i}\frac{r_1}{r_2}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - \mathrm{i}(x_2y_1 - y_2x_1)}{r_2^2}.$$

Lehko se přesvědčíme, že čitatel je rovný číslu $z_1\bar{z}_2$ a jmenovatel $|z_2|^2$. Tedy konečně

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Příklady. 1. $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1 \,.\, \bar{\mathrm{i}}}{|\mathrm{i}|^2} = -\mathrm{i}$,

2. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = \mathrm{i}$, 3. $\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

§ 4. Umocňování a odmocňování. Definice. *n-tou mocninou* komplexního čísla z budeme rozumět číslo

$$z^n = \underbrace{z \,.\, z \,.\, z \ldots z}_{n\text{krát}}, \quad (n \text{ číslo celé}).$$

Podle naší definice násobení dostaneme pro $z = re^{i\varphi}$.

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{26}$$

Příklady 1. Pro $z = i$ je

$$i^2 = i \,.\, i = -1,\ i^3 = i^2 \,.\, i = -i,\ i^4 = i^3 \,.\, i = 1 \text{ atd.}$$

obecně

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,$$

kde k je libovolné celé číslo.

Příklad 2. Pro $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ dává vzorec (26) t. zv. *Moivreův vzorec*

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Oddělíme-li v této rovnici část reálnou a imaginární, dostaneme na př. pro $n = 3$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi \sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = \sin^3\varphi + 3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Definice. *n-tou odmocninou* (n-tým kořenem) z komplexního čísla $z = re^{i\varphi}$ budeme rozumět číslo $w = \varrho e^{i\psi}$, pro které platí $w^n = z$ (n je číslo celé). Z definice plyne okamžitě

$$\varrho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}$$

čili

$$\varrho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

kde k je libovolné celé číslo. Tyto dvě poslední rovnice definují jednoznačně kladné číslo ϱ a nekonečně mnoho hodnot čísla ψ:

$$\varrho = +\sqrt[n]{r},\ \psi = \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{27}$$

Budeme-li v druhém ze vzorců (27) postupně dosazovat $k = 0, 1, 2, \ldots, \ldots, n-1$, dostaneme n hodnot ψ_k: $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ takových, že všechny další se od nich liší o násobky 2π.

Vzorec (27) tedy definuje pouze n různých komplexních hodnot $\sqrt[n]{z}$:

$$w_0 = (\sqrt[n]{z})_0 = +\sqrt[n]{r}\,.\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}},\quad w_1 = (\sqrt[n]{z})_1 = +\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{n}},\ \ldots,$$

$$w_{n-1} = (\sqrt[n]{z})_{n-1} = +\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}},$$

protože přičtení celistvého násobku 2π k argumentu komplexního čísla nemá vliv.

Body $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v bodě $z = 0$ a o poloměru $\varrho = +\sqrt[n]{r}$. To plyne ihned z toho, že moduly všech w_k jsou stejné a rovny číslu $\varrho = +\sqrt[n]{r}$ a od jednoho k druhému lze přejít pootočením o stejný úhel $\dfrac{2\pi}{n}$. Po provedení n takových pootočení se vrátíme zpět k výchozí hodnotě odmocniny.

Z uvedeného plyne, že n-tá odmocnina lichého stupně z kladného reálného čísla má n komplexních kořenů, z nichž jeden je reálný a kladný; n-tá odmocnina sudého stupně z kladného reálného čísla má n komplexních kořenů, z nichž dva jsou reálné, a to jeden kladný a druhý záporný. Důkaz přenecháváme čtenáři.

Příklad. Hledejme všechny hodnoty $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$. Je $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ a tedy

$$w_0 = (\sqrt[4]{1+\mathrm{i}})_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

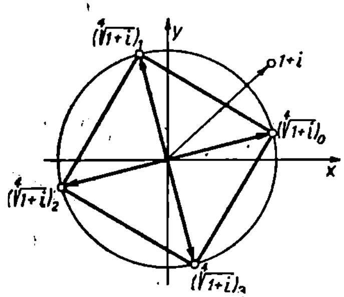
Ostatní hodnoty se liší od w_0 pootočením o úhel $\dfrac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. Tedy

$$w_1 = (\sqrt[4]{1+\mathrm{i}})_1 = \mathrm{i}w_0,$$

$$w_2 = (\sqrt[4]{1+\mathrm{i}})_2 = -w_0,$$

$$w_3 = (\sqrt[4]{1+\mathrm{i}})_3 = -\mathrm{i}w_0.$$

Body w_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ leží ve vrcholech čtverce vepsaného do kružnice o poloměru $|w| = \sqrt[8]{2}$ (obr. 6).



Obr. 6.

ÚLOHY.

1. Napište v exponenciálním tvaru komplexní čísla $1 + i\sqrt{3}$, $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$.
2. Budiž $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokažte, že body z_k $(k = 1, 2, 3)$ leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka.
3. Jsou dány tři vrcholy rovnoběžníka z_1, z_2, z_3. Najděte čtvrtý!
4. Najděte těžiště hmot $m_1, m_2, \ldots, m_n$ působících v bodech $z_1, z_2, \ldots, z_n$.
5. Jsou dány dva za sebou jdoucí vrcholy z_1 a z_2 pravidelného n-úhelníka. Najděte ostatní vrcholy!
6. Dokažte platnost identity $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\}$ a vyložte ji geometricky!
7. Vyjádřete $\cos 4\varphi$ pomocí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$!
8. Vypočtěte: $\sqrt{3 + 4i}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt[3]{i - 1}$.
9. Řešte rovnice:

   a) $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$; b) $z^2 - 2iz - 5 = 0$.
10. Řešte systémy rovnic:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 &= 2 - 3i \end{aligned}\right\} \qquad \text{b)}\quad \left.\begin{aligned} (1 + i)z_1 - (1 - i)z_2 &= 0 \\ (2 + i)z_1 - (1 - 2i)z_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

V následujících příkladech značí $a, b, \ldots$ komplexní konstanty, $\alpha, \beta, \ldots$ reálné konstanty.

11. Která geometrická místa bodů jsou definována rovnicemi, resp. nerovnostmi

   a) $|z - a| = |z - b|$; b) $\mathrm{Re}\,(az + b) = \alpha$;

   c) $\alpha < \arg z < \beta$, $\gamma \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq \delta$; d) $|z - a| + |z - b| = \alpha$;

   e) $|z| < 1 - \mathrm{Re}\, z$; f*) $0 < \arg \dfrac{z - i}{z + i} < \dfrac{\pi}{4}$?

12. Vyšetřete soustavy křivek:

a) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \alpha;$

b) $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \alpha;$

c) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \alpha;$

d*) $|z-1|\,|z+1| = \alpha$

(Vyšetřujte odděleně případy $0 < \alpha < 1,\ \alpha = 1,\ \alpha > 1$);

e*) $|z^2 + 2az + b| = \alpha.$

13. Napište v komplexním tvaru rovnice:

a) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1;$ b) $x^2 - y^2 = 1.$

14. Napište rovnice inverse v kartézských souřadnicích!

15. Co odpovídá v kruhové inversi podle jednotkové kružnice $|z| = 1$:

a) přímce $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (zvláště diskutujte případ $\gamma = 0$),

b) kružnici $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$

c) hyperbole $x^2 - y^2 = 1,$

d*) parabole $y^2 = 2px$?