# Kapitola VI.

## ELIPTICKÁ ROVINA.

### § 1. Formulace problému.

V této kapitole zmíníme se stručně o geometrii eliptické v rovině, krátce o eliptické rovině. Ježto základní úvahy, jimiž dospějeme k nejdůležitějším vzorcům, neliší se podstatně od úvah obdobných, provedených při studiu roviny hyperbolické, nebudeme je opakovati, nýbrž jen stručně na ně poukážeme, kde toho bude potřeba vyžadovati. Úkol geometrie eliptické v rovině jsme již definovali v kap. II, 4. Uvedeme jej nyní v přesné formě:

Eliptická geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$1)\qquad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho' x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{gathered} (a_{ij} \text{ konst. reálné} \\ ij = 1, 2, 3), \end{gathered}$$

které reprodukují jednoduchou, imaginární kuželosečku

$$2)\qquad f_{\xi\xi} \equiv g_{11}\xi_1^2 + g_{22}\xi_2^2 + g_{33}\xi_3^2 + 2g_{12}\xi_1\xi_2 + 2g_{23}\xi_2\xi_3 + 2g_{13}\xi_1\xi_3 = 0$$
$$(g_{ij} = g_{ji} \text{ reálné konst.}).$$

Této kuželosečce budeme opět říkati absolutní kuželosečka. Podobným způsobem mohli bychom definovati úkol geometrie eliptické vzhledem ke studiu přímek:

Eliptická geometrie v rovině zabývá se též studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$1')\qquad \begin{aligned} \varrho' X_1 &= A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 \\ \varrho' X_2 &= A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3 \\ \varrho' X_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3\,, \end{aligned}$$

které reprodukují kuželosečku 2), jejíž přímková rovnice jest

$$2')\quad F_{\Xi\Xi} \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \Xi_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \Xi_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \Xi_3 \\ \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv G_{11}\,\Xi_1^2 + G_{22}\,\Xi_2^2 + G_{33}\,\Xi_3^2 + 2G_{12}\,\Xi_1\Xi_2 + $$

$$+ 2G_{13}\,\Xi_1\Xi_3 + 2G_{23}\,\Xi_2\Xi_3 = 0\,.$$

V rovnicích 1') mají koeficienty $A_{ij}$ a přímkové souřadnice $X_j$ tentýž význam, jako v kapitole (IV, 1, 1'). Tak jako dříve v geometrii hyperbolické, budeme i nyní činiti rozdíl mezi útvary v eliptické rovině a mezi jejich euklidovskými obrazy na euklidovském modelu roviny eliptické. Je tedy na příklad rovnice 2) rovnicí „absolutní kuželosečky“, souřadnice $x_1 : x_2 : x_3$ souřadnicemi „bodu“ atd.

## § 2. Základní úvahy.

1. Základní vzorce. Z definice geometrie eliptické jest zřejmo, že ty pojmy, které jsou definovány bez ohledu na reálnost absolutní kuželosečky v geometrii hyperbolické, můžeme přenésti i do geometrie eliptické. To platí zejména o definici vzdálenosti dvou bodů (IV, 2, 7) a úhlu dvou přímek (IV, 2, 8). Pro tyto pojmy obdrželi jsme na udaných místech rovnice

$$3)\qquad m\,(x\,y) = \frac{c}{2}\log \lambda = \frac{c}{2}\log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}\,f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}\,f_{yy}}}\,,$$

$$4)\qquad M(XY) = \frac{C}{2}\log \Lambda = \frac{C}{2}\log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}\,F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}\,F_{YY}}}\,.$$

Jde nyní o to, stanoviti vhodným způsobem konstanty $c$, resp. $C$. Ty určíme z požadavků, které klademe na vzdálenost, resp. na úhel. O vzdálenosti předpokládáme, že

pro dva různé body reálné jest vždy reálná, od nuly různá.

Ježto absolutní body jsou vždy imaginárně sdružené, jest možno $\log \lambda$ psáti vždy ve formě ryze imaginární (VIII, 2, 15). Zavedeme-li tedy označení $c = k + k'i$, jest

$$m\,(x\,y) = \frac{k + k'i}{2}\log \lambda = \frac{k + k'i}{2}\,i\,(\varphi + 2\varkappa\pi) = \frac{k\,i - k'}{2}\,(\varphi + 2\varkappa\pi)\,.$$

Má-li býti hořejšímu požadavku vyhověno, je nutno voliti $k = 0$, t. j.

$$\boxed{m\,(xy) = \frac{k'i}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}} \tag{5}$$

V rovině eliptické měříme tedy vzdálenosti elipticky.

Konstantu $C$ stanovíme velmi snadno. Víme, že „tečny" z průsečíku „přímek" $X, Y$ k „absolutní kuželosečce" jsou vždy imaginárně sdružené, zcela tak, jak tomu bylo v rovině hyperbolické. Musíme proto konstantu $C$ voliti tak, jako v rovině hyperbolické, má-li úhel dvou různých přímek reálných býti vždy reálný. Žádáme-li kromě toho, aby úhrnná hodnota úhlu byla jako v rovině euklidovské a hyperbolické právě $\pi$, musíme zvoliti $C = i$, t. j.

$$\boxed{M\,(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}} \tag{6}$$

V rovině eliptické měříme úhly také elipticky.

Jest dobře si uvědomiti rozdíl měření v rovině hyperbolické a eliptické. Kdežto v rovině hyperbolické měříme vzdálenosti hyperbolicky a úhly elipticky, v rovině eliptické měříme vzdálenosti i úhly elipticky. Jest nasnadě očekávati, že v této rovině bude duálně si odpovídati vzdálenost dvou bodů a úhel dvou přímek. Později dokážeme, že tomu tak vskutku jest (VI, 5).

Z rovnic 5) a 6) odvodíme snadno vzorce:

$$m\,(xy) = k' \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} = k' \arcsin \sqrt{\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}}} \tag{7}$$

$$M\,(XY) = \arccos \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX} F_{YY}}} = \arcsin \sqrt{\frac{F_{XX} F_{YY} - F_{XY}^2}{F_{XX} F_{YY}}}, \tag{8}$$

které později budeme potřebovati.

2. Důsledky základních vzorců. Tak jako dříve, budeme i nyní nazývati úhlem, resp. vzdáleností jen hlavní

hodnoty výrazů 6) resp. 5). Pojednáme nejdříve o charakteristických vlastnostech vzdálenosti dvou bodů.

V předcházejícím odstavci jsme naznačili, že vzdálenosti měříme elipticky. Z toho plyne, že v rovině eliptické jsou přímky eliptické. Absolutní body těchto přímek jsou vždy imaginárně sdružené průsečíky jejich s absolutní kuželosečkou. O takových přímkách jsme již jednali v kapitole III. Nemusíme tedy znovu zde odvozovati výsledky tam získané. Připomeňme si jen hlavní jejich vlastnost: Na přímce eliptické není reálných bodů nevlastních; taková přímka nemá reálných bodů v nekonečnu a není tudíž nekonečná. (Její úhrnná délka jest $k'\pi$.) To platí o každé reálné přímce eliptické roviny a tedy i o této rovině samotné.

Eliptická rovina nemá reálných bodů nevlastních a není tudíž nekonečná.

Z této věty ovšem nenásleduje, že taková rovina není neomezená. Stačí připomenouti si plochu kulovou jako typický příklad plochy neomezené, nikoli však nekonečné, abychom připustili možnost existence takové plochy. Ostatně se k tomuto tématu vrátíme ještě v následujícím paragrafu.

Teorii eliptického svazku přímek jsme odvodili taktéž v kapitole III. Ježto podle vzorce 6) předcházejícího odstavce jest každý svazek přímek eliptické roviny eliptický, můžeme prostě výsledky na uvedeném místě odvozené přenésti do této kapitoly. Jako aplikaci nejdůležitějších ze známých vlastností eliptického svazku přímek uvedeme:

Úhrnná hodnota úhlu svazku přímek eliptické roviny jest $\pi$. V žádném svazku přímek této roviny nejsou reálné přímky, které by s jinými přímkami téhož svazku svíraly úhel nekonečně velký.

Podle toho, co jsme v kapitole III uvedli o svazku eliptickém a euklidovském, mohli bychom snad očekávati ještě nějaké analogie mezi rovinou euklidovskou a eliptickou, pokud se týče studia jejich přímek. Ale není tomu tak. Naopak eliptická rovina vyznačuje se jednou vlastností, týkající se přímek, která ji ostře odlišuje od roviny euklidovské. Snadno ji odvodíme, ptáme-li se po rovnoběžkách v eliptické rovině. Svírají-li dvě přímky v této rovině úhel rovný nule, pak podle 6) musí býti $F^2_{XY} - F_{XX}F_{YY} = 0$, to jest jejich průsečík musí se nalézati na absolutní kuželosečce.

Tato však jest imaginární a tudíž dvě reálné přímky se v jejím bodě nemohou protínati. Z toho plyne, že

v eliptické rovině neexistují rovnoběžky.

Ještě snad zbývá se zmíniti o tom, zda existují mimoběžky, podobně jako v rovině hyperbolické. Je však ihned patrno, že tomu tak není, neboť při studiu eliptické roviny neomezujeme se na určitou část jejího euklidovského modelu, nýbrž uvažujeme celý model. Musí se tedy každé dvě přímky protínati. Ostatně to plyne i ze vzorce 6). Ten nemůže dávati nikdy imaginární hodnoty pro $M$, jsou-li přímky $X$, $Y$ reálné.

Poznámka: Z definice kolmých přímek ve svazku eliptickém plyne, že i v rovině eliptické jsou dvě přímky kolmé, jsou-li polárně sdruženy k absolutní kuželosečce.

## § 3. Weierstrassovy souřadnice a jejich aplikace.

1. *Weierstrassovy* souřadnice. „Absolutní kuželosečka“ může býti vždy dána rovnicí ve tvaru kanonickém polárním (VIII, 6, 33″)

9) $$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0.$$

Souřadnice libovolného reálného „bodu“ vyhovují vždy podmínce $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ a můžeme tedy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti dosáhnouti, že pro ně platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Souřadnice, vázané touto podmínkou, nazývají se opět bodové souřadnice *Weierstrassovy*. Řešením vzorce 7) obdržíme velmi jednoduchý výraz pro *cos* vzdálenosti v těchto souřadnicích:

$$\cos \frac{m(xy)}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

O geometrickém významu těchto souřadnic zmíníme se v odstavci druhém tohoto paragrafu. — Přímkové souřadnice „přímky“ definujeme jako bodové souřadnice jejího „pólu“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“ 9). To však je právě definice souřadnic přímkových, jak jsme ji uvedli v (IV, 1). Vzhledem k svému významu splňují tyto souřadnice opět rovnici

9′) $$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

Pro úhel dvou přímek obdržíme v těchto souřadnicích podle 8)

$$\cos M(XY) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3.$$

2. Jejich prostorová interpretace. Vzdálenost dvou nekonečně blízkých bodů $x$ a $y$

$$y_j = x_j + d\,x_j + \frac{1}{2} d^2 x_j + \ldots\ldots \qquad (j = 1, 2, 3)$$

stanovíme metodou obdobnou jako v (V, 4, odst. 4). Získáme nejprve

$$1 - \frac{(m:k')^2}{2!} + \frac{(m:k')^4}{4!} - \ldots = x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1 = x^2_3 + x^2_2 + x^2_1 +$$
$$+ x_3\,dx_3 + x_2\,dx_2 + x_1\,dx_1 + \frac{1}{2}(x_3\,d^2 x_3 + x_2\,d^2 x_2 + x_1\,d^2 x_1) + \ldots$$

a poté

10) $$dm^2 = k'^2 (d\,x^2_1 + d\,x^2_2 + d\,x^2_3).$$

Transformací souřadnic

$$\bar{x}_j = x_j k', \quad (j = 1, 2, 3)$$

změní se podmínka pro *Weierstrassovy* souřadnice na

11) $$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = k'^2,$$

kdežto vzorec 10) přejde v

12) $$dm^2 = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2.$$

Rovnice 11) jest rovnicí koule v euklidovském prostoru, vztaženém ku pravoúhlým souřadnicím cartézským $\bar{x}_j$. Její poloměr jest $k'$. Rovnice druhá představuje čtverec vzdálenosti dvou jejích nekonečně blízkých bodů.

Můžeme tedy říci:

Geometrii eliptickou v rovině možno interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru $k'$ v euklidovském prostoru.

Z této věty odvodíme mnoho důsledků. Předně známe význam souřadnic $x_j$. Jsou to souřadnice bodů na kouli o poloměru rovném jedné (a souřadnice $\bar{x}_j$ jsou souřadnicemi bodů na kouli o poloměru $k'$). Dále vidíme, že trigonometrie eliptické roviny nalézá svoji interpretaci jako sférická trigonometrie. Proto nebudeme se jí blíže zabývati. Jako nejzajímavější důsledek z této trigonometrické interpretace uvedeme větu:

Součet úhlů trojúhelníka v rovině eliptické jest větší než dva pravé.

O kouli poloměru $k'$ víme, že je to plocha kladné konstantní míry křivosti. Možno ji tedy rozvinouti na plochu o téže kladné míře křivosti. Vzhledem k tomu, co jsme uvedli o interpretaci geometrie eliptické, můžeme uvésti:

Eliptická rovina jest rozvinutelná na plochy o kladné konstantní míře křivosti.

Říkáme též, že eliptická rovina má konstantní kladnou míru křivosti $\frac{1}{k'^2}$.

Z těchto vět neplyne ovšem, že geometrie eliptická jest v celém rozsahu identická s geometrií na plochách o kladné konstantní míře křivosti. Později uvidíme, v čem se obě tyto geometrie liší. *Beltrami*, který hořejší větu učinil základem svých úvah o geometrii eliptické, identifikoval obě geometrie v celém rozsahu a dospěl proto k některým větám, které nejsou správné. (Viz § 6, odst. 2.)

Z elementární geometrie je známo, že sférická trigonometrie na kouli o poloměru $k'$ přejde v prvém přiblížení (t. j. při zanedbání veličin nekonečně malých vyšších řádů) v trigonometrii rovinnou, jsou-li měřené míry $\mu$ vzhledem ke $k'$ tak malé, že $\frac{\mu}{k'} \rightarrow 0$.

Tento výsledek můžeme hned aplikovati na eliptickou rovinu větou:

V dostatečně malém oboru eliptické roviny vzhledem ke $k'$ platí v prvém přiblížení euklidovská geometrie.

## § 4. Kružnice. Pohyb.

1. Kružnice. Kružnici v rovině eliptické definujeme jako křivku, jejíž body jsou od daného bodu $s$ stejně vzdáleny. Této definice použijeme ke stanovení rovnice jejího obrazu. Podle vzorce 7) splňují „body“ „kružnice“ rovnici

$$\left(\cos^2 \frac{m}{k'}\right) f_{xx} f_{ss} = f_{xs}^2$$

a je to tedy kuželosečka. Bodu $s$ budeme opět říkati střed kružnice. Již z této rovnice je zřejmo, že existuje jen jeden druh kružnic o reálném středu. (V rovině hyperbolické byly tři takové druhy: Buď cykly o „středu“ uvnitř „absolutní kuželosečky“, nebo horocykly, jichž střed byl bodem nevlastním, nebo konečně aequidistanty o ideálním středu.)

Každá taková „kružnice“ je určena třemi údaji $s_1 : s_2 : s_3$, $\cos \frac{m}{k'}$. Je-li $x$ průsečný „bod“ „kružnice“ s „absolutní kuželosečkou“, jest $f_{xx} = 0$ a tedy $x$ leží na přímce

$$f_{xs}^2 = 0,$$

která jest dvojnásob počítanou polárou „bodu“ $s$ vzhledem k „absolutní kuželosečce“. Shrneme-li tyto výsledky, obdržíme věty:

V eliptické rovině jest $\infty^3$ kružnic. Každá „kružnice“ jest kuželosečkou, která se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky“ v průsečících poláry („středu“ $s$ vzhledem k „absolutní kuželosečce“) s touto kuželosečkou. Jest jen jeden druh kružnic o reálném středu.

Ježto ve *Weierstrassových* souřadnicích je rovnice „kružnice“

$$\cos \frac{m}{k'} = x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3,$$

odpovídá jí na kouli kružnice průsečná s touto rovinou.

2. Pohyb. Pohyb eliptické roviny definujeme týmž způsobem, jako pohyb roviny hyperbolické (V, 2, odst. 1), jenom že předpokládáme absolutní kuželosečku imaginární. Stejným způsobem jako na uvedeném místě můžeme dokázati tyto věty o pohybu:

Pohyb v eliptické rovině jest vyjádřen trojmocnou grupou projektivních transformací 1), které reprodukují absolutní kuželosečku. Každá taková transformace představuje pohyb v eliptické rovině. Transformace, vedoucí k podobnosti, neexistují.

Není tedy možno ani v rovině eliptické sestrojiti obrazce podobné.

Tyto věty mohli jsme též odvoditi z interpretace geometrie eliptické jako geometrie na kouli. O této geometrii je známo, že v ní jednomocná grupa projektivních transformací, které reprodukují kulovou kružnici koule, vede k otáčení po sféricky koncentrických kružnicích. Těmto kružnicím odpovídají v rovině obecně zase kružnice. Můžeme tedy říci:

Jednomocná projektivní grupa transformací, které reprodukují svazek koncentrických kružnic (a tudíž i absolutní kuželosečku), představuje pohyb eliptické roviny po těchto kružnicích.

V tomto svazku nalézá se i přímka, dříve zmíněná polára středu $s$ vzhledem k absolutní kuželosečce. Jí odpovídá na kouli hlavní kružnice, náležející do svazku kružnic svrchu zmíněného. Sférické poloměry svazku stojí kolmo na každé z kružnic a tudíž i na hlavní kružnici. Z toho odvozujeme pro eliptickou rovinu:

Geometrickým místem bodů vzdálených o $\frac{k'\pi}{2}$ od daného bodu je přímka.[1])

Podle vět získaných vidíme, že v eliptické rovině existuje jediný druh pohybu. Není tomu tak však v prostoru eliptickém trojrozměrném. Tam můžeme totiž stanoviti takový pohyb po přímkách, že body odpovídající jsou od sebe stejně vzdáleny. Právě tento druh pohybu dal vzniknouti pojmu t. zv. *Cliffordových* rovnoběžek.[2]) Naším úkolem jest však jen studium eliptické roviny a proto se omezujeme jen na tuto stručnou poznámku.

Tím pokládáme základní úvahy o eliptické rovině za skončeny. Jest jistě ještě mnoho zajímavých vět, kterých jsme neuvedli. Ale laskavý čtenář si je v případě potřeby odvodí pomocí geometrie na kouli, nebo metodami obdobnými jako v geometrii hyperbolické.[3])

Obrátíme se nyní k některým otázkám speciálním.

## § 5. **Metrická dualita.**

1. Projektivní dualita. Říkáme, že v nějaké rovině existuje duální vztah přímek $X$ a bodů $x$, když

---

[1]) Čtenář může tuto větu dokázati i přímo ze vzorců pro vzdálenost. K tomu stačí si uvědomiti, že bod $s$ a libovolný bod oné přímky jsou polárně sdruženy vzhledem k absolutní kuželosečce. — Obdobná věta měla též platnost pro model hyperbolické roviny, nikoliv však pro hyp. rovinu samu, neboť na příklad cykly nemají ve svém svazku přímky, aequidistanty nemají středu.

[2]) To jsou přímky, jichž body jsou od sebe stejně vzdáleny.

[3]) Takové věty jsou na příklad: „Dvě přímky mají vždy jednu a jen jednu společnou kolmici.“ „Mají-li tři neb více přímek společnou kolmici, musí tyto přímky procházeti nutně jedním bodem.“ „Každému svazku přímek bodem můžeme přiřaditi přímku, která jest ke všem přímkám tohoto svazku kolmá.“

souřadnice každých dvou elementů duálních $x$, $X$ jsou ve vztazích

$$
\begin{aligned}
\varrho X_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 & \sigma x_1 &= C_{11}X_1 + C_{21}X_2 + C_{31}X_3 \\
\varrho X_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & \sigma x_2 &= C_{12}X_1 + C_{22}X_2 + C_{32}X_3 \,. \\
\varrho X_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 & \sigma x_3 &= C_{13}X_1 + C_{23}X_2 + C_{33}X_3
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Při tom $C_{ij}$ jsou algebraické doplňky v determinantu

$$
\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

příslušné prvkům $c_{ij}$, dělené tímto determinantem, a $c_{ij}$ jsou konstanty reálné. Má-li tato definice duality míti smysl, musí býti nezávislá na projektivních transformacích, které jsou podkladem geometrie zkoumané roviny. To znamená: přiřadíme-li onou transformací duálním elementům $x$, $X$ elementy $'x$, $'X$, musí tyto elementy $'x$, $'X$ býti opět duální.

Z této podmínky snadno odvodíme rovnice

$$
\beta c_{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{k,e}\, a_{ki}\, a_{ej}\, c_{ke}\,, \qquad \gamma C_{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{k,e}\, A_{ki} A_{ej}\, C_{ke}
\tag{14}
$$

($\beta, \gamma$ koef. úměrnosti).

Charakteristickým znakem duality je, že dvojpoměr čtyř bodů a jim duálně přiřazených čtyř přímek je stejný. Tato věta jest ihned zřejmá z rovnic 13).

2. P o l a r i t a. Zvláštním případem duality je p o l a r i t a v z h l e d e m k n ě j a k é k u ž e l o s e č c e o rovnici

$$
g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2(g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3) = 0\,.
$$

Tato polarita je dualitou, v níž koeficienty $c_{ij}$, resp. $C_{ij}$ jsou dány rovnicemi (až na faktor úměrnosti)

$$
c_{ij} = g_{ij}\ (= g_{ji}) \qquad C_{ij} = G_{ij}\ (= G_{ji})\,.
\tag{13'}
$$

Pak každému bodu $x$ odpovídá duálně polára $X$ vzhledem k této kuželosečce a obráceně. (Čtenář se o tom snadno přesvědčí, když stanoví rovnice poláry k bodu, resp. pólu k přímce podle [VIII, 6.] Nalézá-li se bod $x$ právě na kuželosečce, přímka $X$, která je mu duálně přiřazena, je právě tečnou kuželosečky v bodě $x$.) Tohoto způsobu přiřazení jsme již ve speciálním případě užívali, totiž při souřadnicích *Weierstrassových* (v rovině hyperbolické i eliptické). Ovšem, že jsme předpokládali kuželosečku, která se reprodukuje.

To není v odporu s transformačními rovnicemi 14), které v tomto případě mají tvar

$$14') \qquad \beta g_{ij} = \sum_{1}^{3}{}^{k,e} a_{ki}\, a_{ej}\, g_{ke}\,, \qquad \gamma G_{ij} = \sum_{1}^{3}{}^{i,j} A_{ki}\, A_{ej}\, G_{ke}\,.$$

Násobíme-li tyto rovnice $x_i\, x_j$ resp. $X_i\, X_j$ a tak vzniklé rovnice sečteme, obdržíme

$$\beta \sum_{1}^{3}{}^{ij} g_{ij}\, x_i x_j = \sum_{1}^{3}{}^{k,e}_{i,j} (a_{ki}\, x_i)\,(a_{ej}\, x_j)\, g_{ke} = \sigma \sum_{1}^{3}{}^{k,e} g_{ke}\,'x_k\,'x_e\,,$$

$$\gamma \sum_{1}^{3}{}^{ij} G_{ij}\, X_i X_j = \sum_{1}^{3}{}^{k,e}_{i,j} (A_{ki} X_i)\,(A_{ej} X_j)\, G_{ke} = \sigma \sum_{1}^{3}{}^{k,e} G_{ke}\,'X_k\,'X_e\,,$$

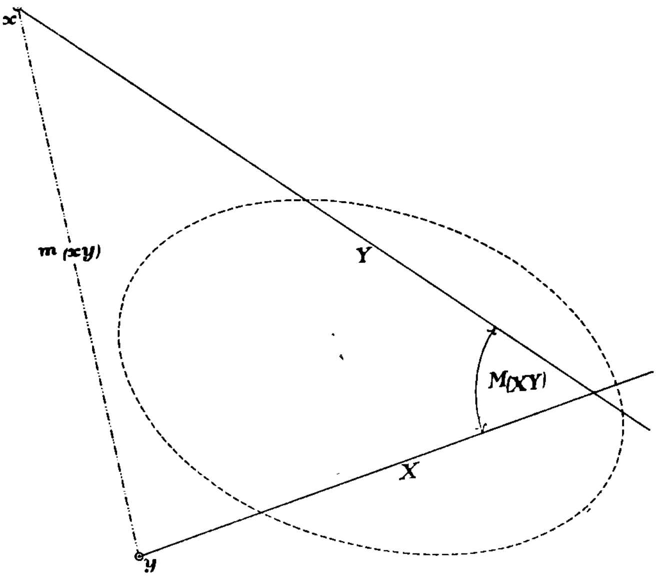
což je podmínkou reprodukce kuželosečky.

3. Metrická dualita. Buďtež $x$ a $y$ dva libovolné body, jimž rovnicemi 13) jsou přiřazeny duálně přímky $X$, $Y$. Vzdálenost bodů $x$, $y$ měříme pomocí čtyř bodů $x$, $y$, $\xi$, $\xi'$, úhel přímek $X$, $Y$ měříme pomocí čtyř přímek $X$, $Y$, $\Xi$, $\Xi'$. Význam bodů $\xi$, $\xi'$ resp. přímek $\Xi$, $\Xi'$ v rovině hyperbolické, eliptické i euklidovské je již znám a netřeba se o něm znova zmiňovati. — O nějaké rovině říkáme, že je metricky duální, když oněm čtyřem bodům $x$, $y$, $\xi$, $\xi'$ (z nichž dva jsou zcela libovolné) jsou duálně přiřazeny přímky $X$, $Y$, $\Xi$, $\Xi'$ (právě v témž pořádku). Ježto vzdálenosti $m\,(x\,y)$, resp. úhly $M\,(X\,Y)$ měříme pomocí logaritmů určitých dvojpoměrů $(\xi\,\xi'\,x\,y)$, resp. $(\Xi\,\Xi'\,X\,Y)$, je zřejmo, že v metrické dualitě poměr $\dfrac{m\,(x\,y)}{M\,(X\,Y)}$ musí býti konstantní (závislý jen na volbě konstant, jimiž ony logaritmy násobíme). — Může býti rovina hyperbolická, eliptická neb euklidovská metricky duální? V rovině hyperbolické je metrická dualita vyloučena, neboť vzdálenosti měříme hyperbolicky, úhly elipticky. Reálným bodům $\xi$, $\xi'$ nemůžeme přiřaditi duálně imaginární přímky $\Xi$, $\Xi'$. Rovina euklidovská rovněž není metricky duální. V ní měříme totiž vzdálenosti parabolicky a úhly elipticky. Reálným splývajícím bodům $\xi \equiv \xi'$ nemůžeme přiřaditi imaginární různé přímky $\Xi$, $\Xi'$. V rovině eliptické měříme vzdálenosti i úhly elipticky, proto lze očekávati, že tato rovina je metricky duální. Tomu skutečně tak je. Neboť v polaritě vzhledem k absolutní kuželosečce (což je zvláštní případ duality) jsou nejen dvojpoměry příslušných elementů stejné, ale bodům absolutním

$\xi, \xi'$ na přímce $xy$ odpovídají duálně tečny $\Xi, \Xi'$ z průsečíku přímek $XY$ k absolutní kuželosečce. (Body $\xi, \xi'$ a přímky $\Xi, \Xi'$ jsou ovšem imaginární, sdružené.) Odpovídá tedy vzdálenosti bodů $xy$ v polaritě úhel přímek, jim polárně sdružených. Proto říkáme, že

metrika eliptické roviny je sama k sobě polární.

Tato metrická polarita je jakési „estetické" plus, které rovina eliptická má před rovinami hyperbolickými a eukli-




Obr. 1.

dovskými. Právě tato vlastnost to byla, která eliptické geometrii získala hojně přívrženců (na příklad *Clifford* a j.). Ba byli mnozí, kteří právě jmenovanou vlastnost uváděli za důvod, proč máme se přikloniti k mínění, že naše geometrie není ani hyperbolická, ani euklidovská, ale eliptická (na příklad *Zöllner*). Na obr. 1 znázorněna je vzdálenost dvou bodů $x$, $y$, která za předpokladu $k' = 1$ je právě rovna úhlu kolmic $X$, $Y$, které jsou polární k bodům $x$, $y$. Absolutní kuželosečka jest ovšem imaginární. Na obr. 1 je její ideální obraz vyčárkován; poláry sdružené vzhledem k abs.

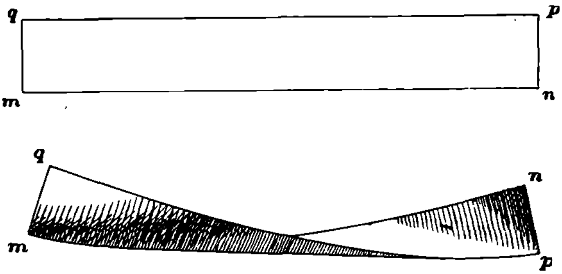
kuželosečce zobrazují se jako t. zv. antipoláry jejího ideálního obrazu.

Poznámka: Ač eliptická rovina je jen polárně metrická, říká se všeobecně, že je duálně metrická. Proto jsme tak též nadepsali tento paragraf, třebaže nadpis nevystihuje plně význam oné duality.

## § 6. Dvojitost eliptické roviny.

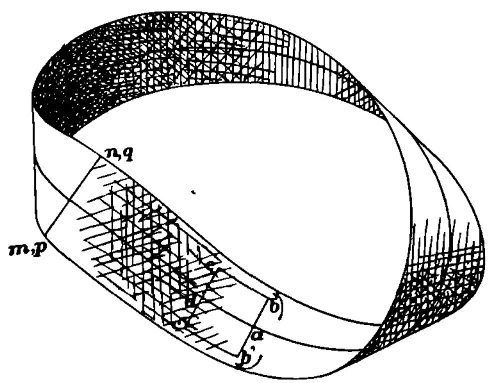
1. List *Möbiusův*. V třetím paragrafu této kapitoly jsme ukázali, že je možno geometrii eliptické roviny interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru $k'$. K tomuto výsledku jsme dospěli na základě ekvivalence fundamentálních forem obou útvarů. Zároveň jsme upozornili, že z této ekvivalence nesmíme usuzovati na ekvivalenci obou útvarů v celém jejich rozsahu. (Jinými slovy, nemůžeme tvrditi, že oba útvary při rozvinutí na sebe se v celém rozsahu pokryjí.) V tomto paragrafu upozorníme na rozdíly geometrie na kouli a eliptické geometrie. Uvažujme nejprve kouli. Stanovme na ní libovolnou kružnici a posunujme po ní nějaký čtyřúhelník *abcd* tak, aby strana *da* byla ve směru tečny kružnice a pohybu a bod *a* se pohyboval po kružnici. Oběhneme-li kružnici jednou, přijde čtyřúhelník *abcd* opět do své původní polohy. Můžeme označiti sled vrcholů *abcd* jako orientaci bodu *a*. Vidíme tedy, že po jednom oběhnutí po kružnici na kouli (obecně po jakékoliv uzavřené křivce na kouli) se orientace bodu *a* nezmění. Takovým plochám, na nichž orientace bodu po jednom oběhnutí uzavřené čáry se nemění, říkáme plochy jednoduché. (Je zajímavo si povšimnouti, že koule je každou svojí uzavřenou čarou *C*, která je bez singularit, rozdělena na dvě části. Z jedné části nelze přejíti do druhé bez překročení čáry *C*.)

Až do doby *Möbiusovy* se předpokládalo, že všechny plochy jsou jednoduché. *Möbius* (1790—1868) upozornil však na možnost ploch, které nejsou jednoduché a sám také takovou plochu sestrojil. Nazývá se po něm *Möbiusův* list. Vznikne z rovnoběžníka *mnpq*, (obr. 2*a*), který přehneme způsobem naznačeným v obr. 2*b* a poté jeho kratší strany spojíme tak, aby vrcholy na téže úhlopříčně splynuly (obr. 3). Narýsujme na této ploše čáru, která neprotíná okrajů (viz obr. 3) a pohybujme po ní rovnoběžník *abcd*. Po jednom oběhnutí této čáry přejde rovnoběžník *abcd* do polohy *ab'c'd*, aniž by body *b* nebo *c* překročily čáru, po které jsme pohybovali. Je-li opět sled *abcd* orientací bodu *a*, můžeme říci, že po jednom oběhu se orientace bodu *a* změnila. (Vyjadřujeme se zde vědomě poněkud nepřesně. Sled *abcd* se totiž po




Obr. 2*a*), 2*b*).

takovém oběhnutí nemění, to jest nepřejde třeba v *adcb*. Čtenář však jistě chápe, co rozumíme orientací *abcd*.) Oběhneme-li opět se čtyřúhelníkem *ab'c'd* jednou (to je vlastně podruhé se čtyřúhelníkem *abcd*) onu čáru, ob-

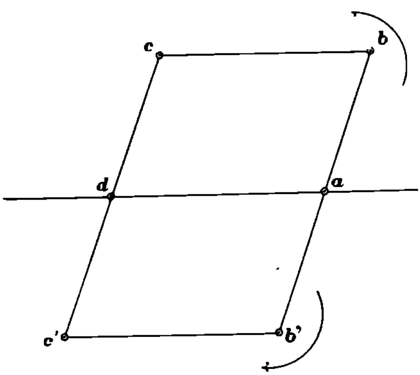



Obr. 3.

držíme původní polohu čtyřúhelníka *abcd* a tudíž po dvojnásobném oběhu se orientace bodu *a* zachová. Takovým plochám říkáme plochy dvojité. Na nich existují uzavřené čáry, které je nerozdělují na dvě části. (Není tím však řečeno, že každá plocha, na níž existují uzavřené čáry, které ji nerozdělují na dvě části, je nutně dvojitá. Na příklad anuloid není dvojitou plochou, ač na něm možno vésti uzavřené čáry, které jej nerozdělují na dvě části.) *Möbiusův* list má okrajové čáry, je však možno sestrojiti plochy dvojité bez okrajových čar.

Poznámka: Disciplina, která studuje uvedené vlastnosti ploch, nazývá se analysis situs. Pokud studuje plochy jakožto útvary, uložené v prostoru o větším počtu dimensí než dvě, jmenuje plochy dvojité plochami jednostrannými a plochy jednoduché plochami dvojstrannými. V tom případě může každému obecnému bodu jakékoli obecné plochy přisouditi jeden nebo druhý směr normály plochy v tomto bodě. Dva body, které takto vzniknou z jednoho, nazývá konjugované. Definuje plochy jednostranné jako plochy, u nichž možno z libovolného bodu po spojité čáře přejíti ke konjugovanému bez přechodu eventuelních okrajových čar, což u ploch dvojstranných je nemožné.

2. Eliptická rovina. Ukážeme nyní, že na rozdíl od koule eliptická rovina je dvojitá. Sestrojme v ní nějaký rovnoběžník *abcd* a pohybujme jím po prodloužené straně *da* v tomto směru (obr. 4). Sled vrcholů *abcd* označme opět




Obr. 4.

jako orientaci bodu *a*. V třetí kapitole § 9, odst. 3 jsme uvažovali o pohybu orientovaného bodu po eliptické přímce. Ačkoli jsme tam poněkud jiným způsobem definovali orientaci, plyne hned z oněch úvah, že v eliptické rovině bod *b* po jednom oběhnutí přímky přejde do takové polohy *b'*, že směr *ab* je protivný směru *ab'*. To má pro náš pevný čtyřúhelník za následek, že i bod *c* po jednom oběhnutí přejde do polohy *c'* takové, že směr *dc* je protivný směru *dc'*. Z toho plyne, že po jednom oběhnutí čtyřúhelníka *abcd* po přímce se orientace bodu *a*, t. j. *abcd* změní na orientaci protivnou *ab'c'd*. (Přímka v rovině eliptické nerozděluje tedy rovinu na dvě části. Můžeme z té části roviny, kde jsou body *bc*, přejíti pohybem do té části roviny, kde jsou body *b'c'*, aniž bychom onu přímku přestoupili.) Z toho plyne, že

eliptická rovina je dvojitá.

Rozvinutím eliptické roviny na kouli o poloměru $k'$ pokryjeme jen polovinu koule a proto obsah roviny eliptické je $2\pi k'^2$.

V tom spočívá právě rozdíl mezi geometrií na kouli a geometrií v eliptické rovině. Tento důležitý poznatek objevil nedávno zemřelý matematik *Klein*. Před ním nebyl znám a právě tato neznalost způsobila, že *Beltrami* interpretací geometrie eliptické jako geometrie na kouli dospěl k některým nesprávným tvrzením. Tak na příklad uvedl tyto věty:[4])

„Dvě geodetické křivky na dvojrozměrném útvaru konstantní kladné míry křivosti (to je přímky v naší rovině), které se protínají, musí se nutně protínati ve dvou bodech."

Nebo:

„Taková geodetická čára není nutně určena jen dvěma body."

(Obě věty získáme z geometrie na kouli, uvědomíme-li si, že tam geodetické čáry jsou hlavní kružnice.)

Tyto věty by byly platné i v rovině eliptické, jen kdybychom považovali týž bod s různými orientacemi za dva různé body. K tomu však není zvláštní příčiny. Ba dopustili bychom se jistě chyby, kdybychom tak důsledně činili. Vždyť „orientace" bodu jest jen pomocný pojem, který má smysl jen, když jej zavádíme u téhož bodu! Proto musíme říci, že uvedené dvě věty neplatí v rovině eliptické, čímž jejich obecný význam jest popřen.

Naskýtá se však otázka, zda neexistují jiné plochy konstantní míry křivosti, které by vykazovaly tutéž souvislost v celém svém rozsahu jako eliptická rovina. Bylo však dokázáno, že taková plocha by nutně musela býti uzavřená. O krok dále dospěl *Liebmann*, když dokázal, že jediná

---

[4]) *Beltrami* neomezil se na kouli, t. j. prostor dvojrozměrný, nýbrž studoval prostory „sférické" o libovolném počtu rozměrů. Zde však se z důvodů didaktických omezujeme jen na kouli.

regulární analytická plocha uzavřená, která je kladné konstantní míry křivosti, je koule. Na té však neplatí v plném rozsahu geometrie eliptické roviny. Z toho plyne, že

neexistuje v prostoru plocha, na níž by v plném rozsahu platila geometrie eliptické roviny.

Poznámka: Eliptické geometrii říká se někdy také *Riemannova* geometrie na rozdíl od geometrie na kouli, t. j. sférické geometrie. *Riemann* byl prvý, který upozornil na možnost eliptického prostoru. Prvý také vyslovil domněnku, že prostor, který není nekonečný, nemusí býti nutně omezený.

## § 7. Nevlastní rovina euklidovského prostoru.

Projektivní geometrie v prostoru (jinak geometrie projektivního prostoru) zabývá se studiem invariantů vzhledem k projektivní grupě transformací

$$\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
\varrho' x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\
\varrho' x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\
\varrho' x_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 .
\end{aligned}$$

Předepíšeme-li této grupě nějaké podmínky, získáme nějakou speciální geometrii v prostoru.

Význačné místo mezi těmito geometriemi zaujímají tak zvané geometrie lineárních svazků. Ty studují invarianty vzhledem k uvedené grupě transformací, při čemž předpokládají, že tato grupa reprodukuje nějaký pevný bod. Útvary, o něž v takové geometrii jde, jsou pevný bod, svazek přímek tím bodem a svazek rovin tím bodem procházející. Je-li tento pevný bod položen tak (jinými slovy, zvolíme-li systém souřadný tak), že jeho souřadnice jsou $0:0:0:1$, pak uvedená grupa transformací musí míti

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Předpokládejme, že tato grupa ještě reprodukuje nějakou rovinu, třeba $x_4 = 0$. Pak musí býti

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0.$$

Jsou tedy transformace příslušné grupy

$$\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\
\varrho' x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{44}x_4 .
\end{aligned}$$

Tuto grupu můžeme dále specialisovati, předepíšeme-li, že v pevné rovině $x_4 = 0$ má reprodukovati kuželosečku

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \qquad \xi_4 = 0.$$

U této grupy se již zastavíme. Předpokládejme nyní, že rovina $x_4 = 0$ je nevlastní rovinou euklidovského modelu tohoto prostoru. Pak pro cartézské souřadnice $x, y, z$ bodů můžeme při vhodné volbě jednotkového bodu psáti

$$\frac{x_1}{x_4} : \frac{x_2}{x_4} : \frac{x_3}{x_4} = x : y : z.$$

Geometrie lineárních svazků v bodě $0:0:0:1$, kterou jsme takto získali, jest ekvivalentní se studiem invariantů v rovině $x_4 = 0$ vzhledem k projektivní grupě transformací

$$\begin{aligned} \varrho' x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \varrho' y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \varrho' z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

která reprodukuje kuželosečku

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Tato geometrie je geometrií eliptické roviny. Příslušná geometrie lineárních svazků předpokládá tedy, že nevlastní rovina euklidovského modelu jest eliptická. Jsou-li $x, y, z$ pravoúhlé cartézské souřadnice, je tato geometrie obvyklou geometrií svazků v euklidovském prostoru.[5])

Z toho můžeme odvoditi důsledek:

Nevlastní rovina euklidovského prostoru jest eliptická.

Tím máme znovu dokázánu logickou nespornost eliptické geometrie. Tento výsledek mohli jsme ostatně očekávati, ježto víme, že úhly v prostoru euklidovském měříme elipticky. Ovšem existence eliptické roviny nevlastní není následek eliptického měření úhlů, neboť při odvození vzorce *Laguerreova* jsme již předpokládali (mlčky), že nevlastní přímka roviny úhlu jest eliptická!

Právě naopak:

úhly v prostoru euklidovském měříme proto elipticky, ježto nevlastní rovina tohoto prostoru jest eliptická.

---

[5]) Čtenáři doporučuji, aby k definici této geometrie dospěl postupem naznačeným v kap. II. Hoření větou jest definitoricky zaveden pojem euklidovského prostoru.

Existencí této roviny vysvětlí se mnoho fakt, která neodborníka jistě zarážejí. Uvedeme zde některá z nich:

O dvou přímkách (rovinách) v euklidovském prostoru říkáme, že jsou rovnoběžné, protínají-li se v nevlastní rovině. Odpovídá tedy přímce nevlastní roviny svazek rovnoběžných rovin, procházejících touto přímkou. Dvě roviny rovnoběžné obdržíme, promítneme-li ji ze dvou obecně položených bodů vlastních. Obráceně, dvě přímky v rovině nevlastní promítají se z téhož vlastního bodu dvěma rovinami různoběžnými, což znamená, že každé dvě přímky nevlastní se protínají. To právě souhlasí s tím, že tato rovina je eliptická.

Neexistují tudíž v rovině nevlastní rovnoběžky.

Přímce euklidovského prostoru odpovídá v nevlastní rovině bod bez orientace, kdežto paprsku (orientované přímce) odpovídá bod s orientací. Proto úhrnná hodnota úhlu ve svazku přímek je polovinou úhrnné hodnoty úhlu svazku paprsků. Ježto však úhrnná hodnota úhlu svazku přímek jest v euklidovském prostoru právě $\pi$ a odpovídá úhrnné délce přímky nevlastní roviny, musí pro tuto rovinu býti $k' = 1$.

Nevlastní eliptická rovina euklidovského prostoru má křivost $k' = 1$.

Podle toho, co jsme uvedli o přímce a paprsku, pochopíme snadno, proč v euklidovském prostoru je svazek přímek dvojitý, svazek paprsků jednoduchý. Skutečně rovina vrcholem svazku přímek tento nerozděluje na dvě části, kdežto rovina vrcholem svazku paprsků jej rozděluje. (Paprsek směřuje buď nad rovinu, nebo pod rovinu.) Kdyby si byl *Beltrami* uvědomil takto důsledky existence nevlastní roviny eliptické, nebyl by asi pronesl prvou z vět uvedených v § 6. Neboť platnost oné věty i pro eliptickou rovinu by měla za následek podivné věty: „V euklidovském prostoru dvě roviny se protínají ve dvou přímkách“, případně „dvě rovnoběžky mají v euklidovském prostoru dva body společné“.

Tím pokládáme úvahy o eliptické rovině za skončeny a obrátíme se k poslední možnosti geometrie v rovině, kdy totiž absolutní kuželosečka je složená. Geometrií, které mají za základ příslušnou grupu transformací, je více a náleží k nim i geometrie euklidovská. Všechny tyto geometrie zahrnujeme pod společný název geometrií parabolických.