Kapitola II.

FORMULACE PROBLÉMU.

§ 1. Pohyb euklidovský.

V odstavcích předcházejících jsme zhruba naznačili cestu, jakou se budeme bráti, abychom dospěli ke geometrii neeuklidovské. Jest zřejmo, že si musíme nejdříve ujasniti pojem geometrie euklidovské. K tomu účelu odvodíme nejdříve definici pohybu euklidovského v rovině, poté budeme formulovati problém, co jest geometrie euklidovská. To jest obsahem prvých dvou paragrafů této kapitoly. Zevšeobecněním problému právě naznačeného dospějeme k definici geometrie neeuklidovské.

Nejdříve tedy k definici pohybu euklidovského! Ve shodě s vývody odstavců předcházejících dospějeme k němu tak, že najdeme podgrupu projektivní grupy transformací (VIII, 5), která reprodukuje dvojici bodů isotropických. Uvažujme tedy projektivní grupu transformací v rovině

$$
1)\qquad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho' x_2 &= a_{21} x_2 + a_{22} x_1 + a_{23} x_3 \\ \varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(a_{ij} \text{ konst. reálné, } i, j = 1, 2, 3) \\ &(\varrho \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}) \end{aligned}
$$

o determinantu D různém od nuly

$$
2)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Při tom čísla x_1, x_2, x_3 určují svým poměrem jeden bod. (Souřadnice projektivní, trimetrické. Viz VIII, 3 a VIII, 5, konec.) Nechť tato grupa reprodukuje dvojici bodů z a t o souřadnicích

$$
z\,(1, i, 0) \text{ resp. } t\,(1, -i, 0) \qquad (i = \sqrt{-1})
$$

Při vhodné volbě souřadného trojúhelníka a jednotkového bodu můžeme vždy dosáhnouti, že $\dfrac{z_1}{z_3}$, $\dfrac{z_2}{z_3}$ resp. $\dfrac{t_1}{t_3}$,

$\frac{t_2}{t_3}$ jsou pravoúhlými cartézskými souřadnicemi bodů z resp. t. Pak jsou tedy body z, t body isotropickými. Zmíněná reprodukce je zřejmě možná dvěma způsoby. Buď

bod z přejde v z a bod t v bod t, nebo
bod z přejde v t a bod t v bod z.

Dle toho musíme uvažovati buď rovnice

$$3a)\qquad 'z_1 : 'z_2 : 'z_3 = z_1 : z_2 : z_3, \qquad 't_1 : 't_2 : 't_3 = t_1 : t_2 : t_3$$

nebo

$$3b)\qquad 'z_1 : 'z_2 : 'z_3 = t_1 : t_2 : t_3, \qquad 't_1 : 't_2 : 't_3 = z_1 : z_2 : z_3$$

Ukážeme však, že o obou případech možno uvažovati současně. Dosaďme do rovnic 3) souřadnice bodů z a t a současně uvažme, že souřadnice bodů $'z$ a $'t$ musí vyhovovati rovnicím 1). Získáme tímto způsobem rovnice

$$4a)\qquad \frac{1}{i} = \frac{a_{11} + a_{12}\, i}{a_{21} + a_{22}\, i}, \qquad -\frac{1}{i} = \frac{a_{11} - a_{12}\, i}{a_{21} - a_{22}\, i}$$

$$4b)\qquad -\frac{1}{i} = \frac{a_{11} + a_{12}\, i}{a_{21} + a_{22}\, i}, \qquad \frac{1}{i} = \frac{a_{11} - a_{12}\, i}{a_{21} - a_{22}\, i}$$

$$4c)\qquad a_{31} = a_{32} = 0$$

Rovnice 4*a*), *b*) můžeme psáti

$$5a)\qquad (a_{22} - a_{11})\, i + (a_{21} + a_{12}) = 0, \qquad (a_{22} - a_{11})\, i - (a_{21} + a_{12}) = 0$$

$$5b)\qquad -(a_{22} + a_{11})\, i + (a_{12} - a_{21}) = 0, \qquad -(a_{22} + a_{11})\, i - (a_{12} - a_{21}) = 0$$

Skýtají nám řešení

$$6a)\qquad a_{22} = a_{11}, \qquad -a_{21} = +a_{12}$$

$$6b)\qquad -a_{22} = +a_{11}, \qquad a_{21} = a_{12},$$

jež můžeme spojiti zavedením symbolu $\varepsilon = \pm 1$.

$$7)\qquad a_{11} = \varepsilon\, a_{22}, \qquad a_{12} = -\varepsilon\, a_{21}$$ [1]

Můžeme tak současně studovati obě možnosti. — Rovnice přímky body z a t jest (VIII, 3, 17)

$$8)\qquad x_3 = 0.$$

Ježto přímka jest určena právě dvěma body, třeba z a t, a tato dvojice se reprodukuje, musí se i přímka $x_3 = 0$ reprodukovati při transformaci 1).

---

[1]) V obou rovnicích platí současně táž hodnota ε. Buď tedy současně $\varepsilon = +1$ nebo současně $\varepsilon = -1$.

V rovnicích 1) vystupuje sice devět koeficientů a. Ježto však bod jest určen poměrem svých souřadnic, jest v těchto rovnicích podstatný též jen poměr oněch devíti koeficientů (VIII, 4, konec). Můžeme tedy vždy vhodnou volbou jednoho z nich dosáhnouti toho, že determinant D, který dle naší suposice jest rozdílný od nuly, bude roven právě ε:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon \tag{9}$$

Rovnice 4c), 7), 9), jichž je pět, určují pět podmínek pro devět koeficientů. To znamená, že se nám podaří vyjádřiti těchto devět koeficientů pomocí čtyř údajů. Výsledná grupa transformací, která jest podgrupou projektivních transformací (VIII, 5), bude tedy čtyřmocná G_4.[2]) Koeficienty a vyjádříme pomocí čtyř údajů takto:

Dosadíme hodnoty z rovnic 4c) a 7) do rovnice 9). Tak obdržíme

$$\varepsilon\,(a^2_{22} + a^2_{21})\,a_{33} = \varepsilon$$

Vzhledem k (VIII, 1, 3) můžeme tedy položiti

$$a_{11} = \varepsilon\, a_{22} = \frac{\varepsilon'}{c}\cos\varphi$$

$$a_{12} = -\varepsilon\, a_{21} = \frac{\varepsilon''}{c}\sin\varphi \qquad (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1)$$

$$a_{33} = c^2\ (> 0)$$

Smluvíme se na tom, že φ může probíhati hodnoty $0 \ldots 2\pi$. Pak dosáhneme všech možných kombinací znamének v předcházejících rovnicích, i když položíme $\varepsilon' = \varepsilon'' = +1$. Za tohoto předpokladu můžeme tedy psáti

$$a_{11} = \varepsilon\, a_{22} = \frac{\cos\varphi}{c}$$

$$a_{12} = -\varepsilon\, a_{21} = \frac{\sin\varphi}{c}$$

$$a_{33} = c^2\ (> 0)$$

Tak zavedli jsme dva nové údaje, jimiž jsme vyjádřili koeficienty $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{33}$. Zbývající koeficienty a_{13}, a_{23}

---

2) Že tato grupa musí býti čtyřmocná, plyne z následující úvahy: Projektivních transformací jest celkem ∞^8 (VIII, 4). Bodů v rovině jest ∞^2 a tudíž párů bodů ∞^4. Musí tedy býti právě ∞^4 transformací projektivních, které reprodukují libovolný pár bodů. Tím máme zaručeno, že podmínka reprodukce bodů z, t neskýtá již jiných relací pro koeficienty a, než takové, jež by bylo lze z rovnic 4c), 7) odvoditi.

můžeme pokládati za poslední dva ze čtyř zmíněných údajů. Dosazením těchto hodnot do rovnic 1) získáme rovnice transformací ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= \frac{1}{c}(\cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2) + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\, 'x_2 &= \frac{\varepsilon}{c}(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) + a_{23}\, x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= c^2 x_3 \end{aligned}} \tag{10}$$

Projektivní grupa G_4 transformací 10) je čtyřmocná a reprodukuje dvojici bodů

$$z(1:i:0) \qquad t(1:-i:0)$$

Tato grupa je podgrupou projektivní grupy osmimocné G_8.

Z grupy G_4 odvodíme dvě důležité podgrupy požadavky

$$c = 1, \text{ resp. } \varphi = 0$$

Obdržíme tak

$$\text{11)}\quad \begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\, 'x_2 &= \varepsilon(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) + a_{23}\, x_3\,, \\ \varrho\, 'x_3 &= x_3 \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \text{12)}\quad \begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= \frac{x_1}{c} + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\, 'x_2 &= \frac{\varepsilon x_2}{c} + a_{23}\, x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= c^2\, x_3 \end{aligned}$$

Víme, že nehomogenní souřadnice cartézské jsou zvláštním případem projektivních souřadnic (VIII, 5). Je-li přímka $x_3 = 0$ základního trojúhelníka souřadného v nekonečnu, můžeme přímo položiti při vhodné volbě jednotkového bodu

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{13}$$

kde x, y znamenají souřadnice cartézské. Dělením prvých dvou rovnic 11) resp. 12) třetí rovnicí z 11) resp. 12) získáme vzhledem k 13)

$$\begin{aligned} 'x &= \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + a_{13} \\ 'y &= \varepsilon(-\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y) + a_{23} \end{aligned}\,, \text{ resp.} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} 'x &= \frac{x}{c^3} + a \\ 'y &= \frac{\varepsilon y}{c^3} + b \end{aligned} \qquad (a,\ b, \text{ konst. reálné}) \tag{15}$$

Jsou-li x, y pravoúhlé souřadnice, pak rovnice 14) představují obecně pohyb v rovině euklidovské, krátce **pohyb** euklidovský. (Pro $\varepsilon = +1$ otáčení a posunutí, pro $\varepsilon = -1$ otáčení, posunutí a zrcadlení.) Rovnice 15) vedou k podobnosti a posunutí pro $\varepsilon = +1$. Pro $\varepsilon = -1$ vedou k zrcadlové podobnosti a posunutí. Jsou-li cartézské souřadnice pravoúhlé, body z a t stanou se body isotropickými v nekonečnu.

Získané výsledky můžeme shrnouti ve věty:

Euklidovský pohyb vyjádřen je trojmocnou projektivní grupou, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Každý pohyb euklidovský je takovou projektivní transformací, ale každá projektivní grupa transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických, není nutně pohybem, neboť i transformace vedoucí k podobnosti tuto dvojici bodů reprodukuje.

V grupě G_4 projektivních transformací je tedy pohyb euklidovský charakterisován transformacemi, které zachovávají délky, obsahy a úhly transformovaných tvarů. Podobnost je charakterisována transformacemi grupy G_4, které zachovávají sice úhly útvarů transformovaných, ale délky, neb obsahy mění ve stálém poměru. (To znamená: Je-li na příklad poměr libovolných dvou si odpovídajících délek útvaru původního a transformovaného $2:3$, je poměr každých dvou si odpovídajících délek v těchto útvarech $2:3$, kdežto obsahy obou těchto rovinných útvarů jsou v poměru $2^2:3^2$.)

Možnost podobných obrazců je, jak později uvidíme, jedním charakteristickým znakem geometrie euklidovské, nebo, jak též říkáme, roviny euklidovské. Poznáme sice později i jiné geometrie (VII), které dovolují obrazce podobné, ale ty se liší zásadně od geometrie euklidovské jinými znaky. (Rovina *Minkowskiho.*)

Poznámka. Vhodnou volbou souřadného systému podařilo se nám interpretovati rovnice 11), 12) jako rovnice euklidovského pohybu, resp. podobnosti. Ponecháme-li obecný systém souřadný (t. j. nejsou-li $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ pravoúhlé souřadnice cartézské), obdržíme obecně jinou interpretaci rovnic 11), 12). Body z, t nejsou více body isotropickými. Ale při jisté opatrnosti můžeme výsledky získané pro speciální souřadnice aplikovati na tento obecný případ, zaměníme-li slova „body isotropické“ slovy „imaginárně sdružené body z a t“ (VIII, 3).

§ 2. Úkol geometrie euklidovské.

Nyní jsme si vše připravili, abychom mohli formulovati úkol geometrie euklidovské. Již dříve jsme upozorňovali na úkoly elementární geometrie na střední škole. Tato elementární geometrie studuje vlastnosti obrazců, které se nemění pohybem, a vlastnosti útvarů podobných. Do první skupiny můžeme na příklad zařaditi obvody a obsahy trojúhelníků, čtverců, obdélníků, mnohoúhelníků, některých jednodušších křivek atp. Do skupiny druhé patří poučky o podobných trojúhelnících, kružnicích atd.

K tomu nyní nutno přičísti problémy diferenciální geometrie, která studuje křivosti křivek obecných, a dále některé úkoly algebraické geometrie (na příklad počet průsečíků libovolné přímky s danou křivkou, tvary křivek atd.). Rovněž sem patří některé úvahy počtu integrálního o obsahu křivek. Všechny zde naznačené problémy týkají se vlastností, které se nemění pohybem,[3]) případně vlastností, společných útvarům podobným. Pohyb a podobnost jsou však vyjádřeny rovnicemi 14), 15). Tudíž vlastnosti, které studuje geometrie euklidovská, nemění se při transformacích 14), 15). Takovým vlastnostem, které se nemění při určitých transformacích, říkáme vlastnosti invariantní vzhledem k těmto transformacím, a matematickému vyjádření těchto invariantních vlastností říkáme invarianty příslušných transformací (VIII, 5). Invarianty rovnic 14) jsou tak zvané invarianty pohybové, invarianty transformací 15) nazýváme invarianty podobnosti. Vzhledem k tomu, co jsme právě uvedli o úkolech geometrie euklidovské, můžeme říci, že tato geometrie hledá invarianty pohybové a invarianty podobnosti daných útvarů. Teorie, která se zabývá hledáním invariantů, nazývá se teorie invariantů. Můžeme podle toho říci, že geometrie euklidovská je teorií invariantů pohybu a invariantů podobnosti.[4]) Tento důležitý poznatek budeme výslovně formulovati. Vzhledem k tomu, že transformace pohybové a podobnosti jsou obsaženy v rovnicích transformací 10) grupy G_4, můžeme říci:

---

[3]) Tím nemá býti řečeno, že tyto vlastnosti se nemění jen pohybem! Může se státi, že některé z nich nemění se ani při transformaci projektivní.

[4]) Přeřazení geometrie do teorie invariantů není pouze slovní. Má svůj hluboký význam, neboť teorie invariantů a badání geometrická dála se dříve úplně nezávisle. Obě discipliny se rozvíjely, aniž by byly uvedeny v soustavnou souvislost. Metody obou disciplin byly zcela odlišné.

Euklidovská geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke grupě transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Tato grupa G_4 jest podgrupou projektivní grupy G_8. Podle toho jest možno definici hořejší nahraditi následující:

Euklidovská geometrie v rovině je teorií invariantů takové čtyřmocné podgrupy projektivní grupy, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Nyní jest poměrně již snadná cesta ke geometrii neeuklidovské zevšeobecněním definice předcházející. Dříve však, než se jí budeme obírati, je nutno odstraniti jednu důležitou zásadní námitku. To učiníme v paragrafu následujícím.

§ 3. Projektivní škála.

Poslední definicí euklidovské geometrie v paragrafu předcházejícím zařadili jsme tuto jako zvláštní odvětví do geometrie projektivní.[5] V této geometrii není měření v obvyklém smyslu slova, t. j. měření euklidovského. Přes to však čísla x_1, x_2, x_3 musí svým poměrem určovati bod, mají-li míti geometrický význam. Námitka, o které byla řeč v § předcházejícím, dá se tedy formulovati takto:

Má-li poslední definice euklidovské geometrie v paragrafu předcházejícím míti smysl, musíme věděti, jakým způsobem trojici čísel $x_1 : x_2 : x_3$ přiřadíme bod v rovině bez měření euklidovského.

Že tato námitka není zbytečná, přesvědčí se čtenář sám. Zdánlivě jest totiž odpověď na ni velmi jednoduchá: Čísla x_1, x_2, x_3 jsou vlastně násobky vzdáleností bodu od stran (VIII, 3, odst. 2) základního trojúhelníka. Jsou-li tyto veličiny dány, můžeme tedy elementární konstrukcí sestrojiti bod $x_1 : x_2 : x_3$!

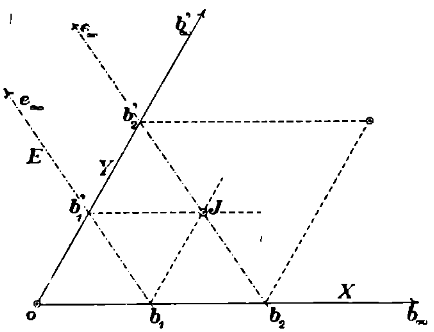
Chyba této odpovědi tkví v tom, že operuje s obvyklým pojmem vzdálenosti, která jest euklidovská.

---

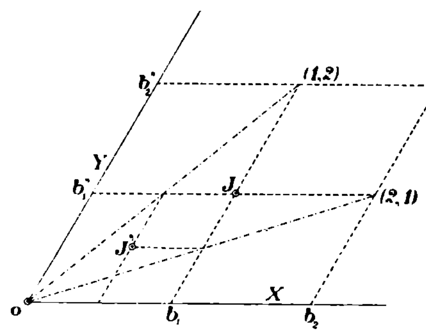
[5]) Geometrie projektivní zabývá se studiem invariantů vzhledem ke grupě projektivní G_8 transformací 1). Ostatně viz § následující.

V následujících řádcích odstraníme svrchu uvedenou námitku tak, že ukážeme, jak je možno k poměru $x_1 : x_2 : x_3$ sestrojiti bod bez použití pojmů metrických. Konstrukce ta v podstatě pochází od Möbiusa a nazývá se konstrukce síťová. Při této konstrukci omezíme se na poměr $x_1 : x_2 : x_3$ racionální.[6])

Nejdříve ukážeme, jak v euklidovské rovině souřadnicím $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ můžeme přiřaditi bod bez měření, jen když víme, kde jest bod jednotkový J.



Obr. 1a).



Obr. 1b).

Buďtež na obraze 1a) přímky X a Y souřadné osy cartézské, bod J bodem jednotkovým. Spojením bodu J s úběžným[6a]) bodem b'_∞ přímky Y získáme přímku, která protne X v bodě b_1 o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = 1$, $\frac{x_2}{x_3} = 0$. Podobně získáme bod b_1' o souřadnicích (0, 1). Spojíme-li úběžný bod e přímky E s bodem J, získáme přímku, která protne osy v bodech b_2 (2, 0), b_2' (0, 2). Pokračujeme-li tak dále, získáme na ose X body $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_m, \ldots$ o souřadnicích (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) . . . (m, 0) . . ., a na ose Y body $b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, \ldots b'_n, \ldots$ o souřadnicích (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4) . . . (0, n) . . . Máme-li nyní sestrojiti bod o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = m$,

---

[6]) Jest možno však dokázati, že uvedenou konstrukcí můžeme v našem případě i iracionálnímu poměru $x_1 : x_2 : x_3$ přiřaditi bod.

[6a]) Prozatím užíváme označení „úběžný" bod pro bod na přímce „v nekonečnu". Přesnou definici a název obvyklý v analytické geometrii („nevlastní bod") viz v (III, 4).

$\frac{x_2}{x_3} = n$ (m, n celá čísla), stanovíme průsečík přímek $b'_\infty b_m$ a $b_\infty b'_n$. Ten má udané souřadnice. Takovým způsobem můžeme sestrojiti bod v rovině, jehož souřadnice $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{y_1}{y_3}$ jsou celá čísla. Tuto zcela elementární konstrukci nemusíme dále prováděti. Obrátíme se hned k zobrazení bodů, jichž souřadnice jsou čísla lomená, na příklad $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{2}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{2}$, kde m a n jsou celá čísla. (Obr. 1b.) Sestrojíme nejdříve bod J' o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{2}$. Užitím tohoto pak můžeme sestrojiti bod $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ zcela obdobně, jako v případě předcházejícím jsme užitím bodu J stanovili bod (m, n). Bod J' sestrojíme snadno podle obrázku 1b). Nyní snad již je zřejmo, jak ke třem celým číslům m, n, p sestrojíme bod, jehož cartézské souřadnice jsou $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$.

Všimněme si ještě jedné věci. Budiž a nějaký libovolný bod o cartézských souřadnicích $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$. Tyto souřadnice můžeme interpretovati užitím dvojpoměrů. Tak na příklad je

$$\frac{x_1}{x_3} = (ob_\infty xb_1), \qquad \text{(VIII, 5, pozn.)}$$

kde x značí bod na ose X o souřadnicích $\left(\frac{x_1}{x_3}, 0\right)$, a podobně

$$\frac{x_2}{x_3} = (ob'_\infty yb'_1),$$

při čemž y značí bod na ose Y o souřadnicích $\left(0, \frac{x_2}{x_3}\right)$. Tyto dvojpoměry můžeme též vyjádřiti užitím dvojpoměrů přímek. Tak na příklad jest

$$\left(\frac{x_1}{x_3} =\right) (ob_\infty xb_1) = b'_\infty \mid (ob_\infty aJ).$$

To znamená: dvojpoměr $(ob_\infty xb_1)$ je roven dvojpoměru přímek, které z bodu b'_∞ promítají body o, b_∞, a, J. Podobně jest

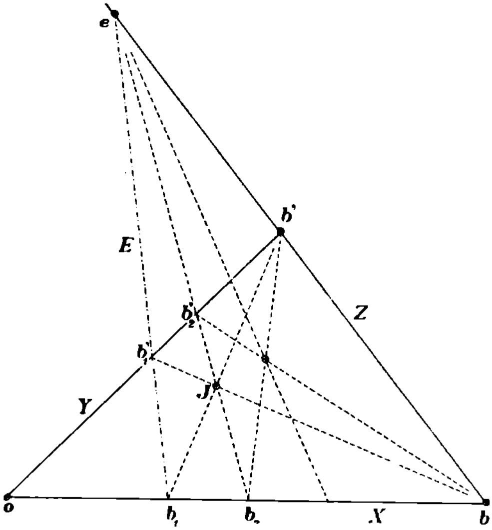
$$\left(\frac{x_2}{x_3}=\right)(ob'_\infty\, yb'_1)=b_\infty \mid (ob'_\infty\, aJ).$$

Analogickou konstrukci pro bod o racionálném poměru souřadnic $x_1 : x_2 : x_3$ provedeme nyní pro případ, že souřadný trojúhelník je XYZ (obr. 2a). Při tom předpokládáme, že jeho vrcholy mají souřadnice

$$\begin{aligned} o \ldots\ & x_1 : x_2 : x_3 = 0:0:1 \\ b \ldots\ & x_1 : x_2 : x_3 = 1:0:0 \\ b' \ldots\ & x_1 : x_2 : x_3 = 0:1:0 \end{aligned}$$

Užijeme k tomu těchto vět:

„Jsou-li dvě roviny Σ a Σ' projektivně příbuzné (VIII, 4), pak libovolnému bodu roviny Σ odpovídá jeden a jen jeden bod roviny Σ (a obráceně), libovolné přímce roviny Σ od-



Obr. 2a).

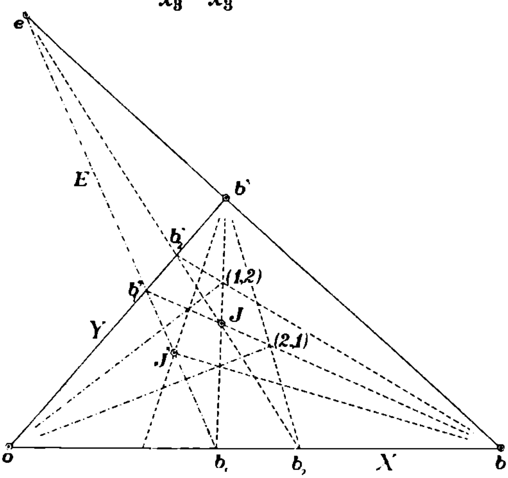
povídá jedna a jen jedna přímka roviny Σ' (a obráceně) a dvojpoměr libovolných čtyř bodů, neb přímek roviny Σ je roven dvojpoměru odpovídajících čtyř bodů, neb přímek roviny Σ'."

„Dvě roviny učiníme projektivně příbuzné, přiřadíme-li čtyřem libovolným bodům (z nichž žádné tři neleží na přímce) roviny Σ čtyři libovolné body (z nichž žádné tři neleží na přímce) roviny Σ'."

Pak totiž můžeme podle prvé věty sestrojiti vždy k libovolnému bodu roviny Σ odpovídající bod roviny Σ'. — K těmto dvěma větám připojíme ještě třetí.

„Projektivní souřadnice nějakého bodu můžeme vždy vyjádřiti užitím dvojpoměrů přímek, které jsou určeny bodem zkoumaným, vrcholy souřadného trojúhelníka a bodem jednotkovým“ (VIII, 5, konec).

V těchto třech větách je již skryt postup, kterým se budeme bráti. Nejdříve si myslíme rovinu obrazu 1*a*) (kterou nazveme Σ) projektivně přiřazenou rovině obrazu 2*a*) (kterou nazveme Σ'). Projektivní příbuznost obou rovin získáme tak, že bodům $o, b_\infty, b'_\infty, J$ roviny Σ přiřadíme body o, b, b', J roviny Σ'. Souřadnice $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ každého z těchto čtyř stejně



Obr. 2*b*).

označených bodů jsou v obou rovinách stejné. Máme-li nyní v rovině Σ' sestrojiti bod *a* o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p \qquad (m, n, p \text{ celá čísla})$$

sestrojíme způsobem dříve naznačeným v rovině Σ bod *a*, jehož souřadnice jsou $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$. Tomuto bodu přiřadíme bod *a* v rovině Σ'. Jeho projektivní souřadnice musí býti právě $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$. To snadno nahlédneme, uvážíme-li, že *a)* souřadnice $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ bodu v rovině Σ můžeme vyjádřiti dvojpoměry

$$\left(\frac{m}{p}=\right)\ \frac{x_1}{x_3}=b'_\infty \mid (ob_\infty aJ),\quad \left(\frac{n}{p}=\right)\ \frac{x_2}{x_3}=b_\infty \mid (ob'_\infty aJ),$$

b) přímky $b_\infty o, b'_\infty o, b'_\infty b_\infty, b'_\infty a, b_\infty a, b_\infty J, b'_\infty J$ roviny Σ odpovídají v projektivní příbuznosti obou rovin přímkám $X, Y, Z, b'a \equiv P', ba \equiv P, bJ \equiv I, b'J \equiv I'$ v rovině Σ' a tudíž

c) dvojpoměry

$$b'_\infty \mid (ob_\infty aJ) = (YZP'I'),\quad b_\infty \mid (ob'_\infty aJ) = (XZPI)$$

Ale dvojpoměry $(YZP'I')$, $(XZPI)$ vyjadřují právě projektivní souřadnice bodu a v rovině Σ'. Skutečně tedy souřadnice bodu a jsou právě

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$$

Sestrojíme tedy nejdříve v rovině Σ' body $b_1, b_2, \ldots$; $b'_1, b'_2 \ldots$ o souřadnicích projektivních $(\varrho : 0 : \varrho)$, $(2\varrho : 0 : \varrho), \ldots$; $(0 : \varrho : \varrho)$, $(0 : 2\varrho : \varrho), \ldots$ $(\varrho \neq 0)$. Body b'_1, b_1 obdržíme jako průsečíky přímek $bJ, b'J$ s osami Y, X.[7]) Body b'_2, b_2 obdržíme jako průsečíky přímky Je s osami Y, X. Při tom bod e je průsečíkem přímky $b_1 b'_1$ s osou Z a J bod jednotkový.

Sestrojivše tímto způsobem body $b_1, b_2 \ldots$; $b'_1, b'_2 \ldots$, můžeme jich užitím snadno sestrojiti body, které mají souřadnice

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : 1 \qquad (m, n \text{ celá čísla})$$

Tak na příklad body o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 1,\qquad x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 2 : 1$$

jsou průsečíky přímek

$$bb'_1 \text{ a } b'b_2,\qquad bb'_2 \text{ a } b'b_2$$

Abychom sestrojili bod o souřadnicích $m : n : 2$, stanovíme nejdříve bod J', o souřadnicích $1 : 1 : 2$ (obr. 2*b*). Čtenář jistě z analogie obr. 1*b* pochopí jeho konstrukci v obr. 2*b*. Užitím tohoto bodu stanovíme bod o souřadnicích $m : n : 2$ analogicky tak, jako jsme užitím bodu J v obr. 2*a* stano-

[7]) Doporučuji čtenáři, aby alespoň v tomto případě se početně přesvědčil, že body b_1, b'_1 takto získané mají skutečně souřadnice

$$b_1 (1 : 0 : 1),\quad b'_1 (0 : 1 : 1)$$

vili bod o souřadnicích $m:n:1$. Pokračujíce tak dále, získáme konečně konstrukci bodu o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p \qquad (m, n, p \text{ celá čísla})$$

Takto jsme tedy racionálnímu poměru $m:n:p$ přiřadili jistý bod v rovině Σ' bez obvyklého (euklidovského) měření a bez užití pojmu rovnoběžek a tedy i bez užití V. postulátu *Euklidova*. Zbývalo by ještě dokázati, že i v případě irracionálního poměru $m:n:p$ můžeme v rovině Σ' najíti odpovídající bod. To však přesahuje meze této — více méně populární — knížky a proto se tímto důkazem nebudeme zabývati, a námitku, na počátku tohoto paragrafu učiněnou, budeme považovati za odstraněnou.[8])

Poznámka: Tuto námitku učinil prvý Cayley. Ježto nevěděl, jak ji odstraniti, zdráhal se interpretovati svoje úvahy „Sixth memoir upon quantics" (1859) jako úvahy o neeuklidovské geometrii.

§ 4. Definice geometrie neeuklidovské.

Podobně, jako jsme ve druhém paragrafu definovali geometrii euklidovskou, můžeme nyní definovati geometrie, které jsou jiné než euklidovské.

Geometrie, která studuje invarianty vzhledem ke každé jiné grupě, než je grupa transformací, reprodukující dvojici bodů isotropických, je jiná než euklidovská (Toto jest v podstatě t. zv. princip *Kleinův.*) Z této definice je zřejmo, že existuje veliké množství geometrií podle toho, jaká grupa jest považována za základ pro příslušnou teorii invariantů. Zmíníme se zde alespoň jménem o některých nejdůležitějších. Tak v prvé řadě jest geometrie projektivní. Ta studuje vlastnosti útvarů, které se nemění při grupě G_8 projektivních transformací. Je tedy ekvivalentní s teorií projektivních invariantů (VIII, 5) a je to, s tohoto hlediska, geometrie nejobecnější. Méně obecná jest již geometrie affinní. Podkladem jejím jest grupa G_6 projektivních transformací, které reprodukují danou přímku (zpravidla to bývá přímka úběžná). Studium invariantů affinních jest jejím úkolem. Když předpokládáme, že body samodružné na této pevné přímce v nekonečnu jsou právě body isotropické, obdržíme grupu G_4, vedoucí

8) V tomto paragrafu jsme mlčky předpokládali splněnu větu *Desarguesovu,* která je při rovinných úvahách postulátem. Je možno ji dokázati jen užitím prostorových konstrukcí. Jako postulát pro rovinnou geometrii vyslovil ji *Klein.*

ke geometrii euklidovské.[9]) Jiná geometrie, která jest v podstatě geometrií *Laguerreovou*, studuje invarianty vzhledem ke grupě transformací 1) (při $\varrho = 1$), které reprodukují výraz $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. (Zmiňujeme se zde o ní proto, že její výsledky možno bez obtíží aplikovati na prostor *Minkovskiho* (VII), který je tak důležitý ve speciální teorii relativity.)

Takovým způsobem mohli bychom do nekonečna voliti určité grupy a příslušnou jim teorii invariantů prohlásiti za geometrii. My si z těchto grup vybereme ty, které v jistém smyslu stojí nejblíže grupě geometrie euklidovské. K tomu cíli uvědomíme si, že body isotropické jsou vlastně složenou (VIII, 6, odst. 4) kuželosečkou. Grupa, která jest podkladem geometrie euklidovské, reprodukuje tedy složenou kuželosečku. Jest nasnadě zevšeobecniti euklidovskou geometrii tak, že zvolíme za základ grupu, která reprodukuje obecnou kuželosečku (jež ve zvláštním případě může býti i kuželosečkou složenou). Taková grupa bude podkladem našich úvah:

Budeme se zabývati geometrií, jejímž úkolem je studium invariantů vzhledem k projektivní grupě, která reprodukuje danou kuželosečku. Takovou geometrii nazveme neeuklidovskou.

Při tom pod slovem „kuželosečka" budeme vždy rozuměti jen průsečnou křivku reálné roviny s reálnou plochou druhého stupně.

Na prvý pohled jest patrno, že jsou možné tři druhy takových geometrií podle toho, je-li příslušná kuželosečka

A) reálná jednoduchá,

B) imaginárná jednoduchá,

C) složená (reálná nebo imaginárná).

Geometrii sub *A)* nazýváme geometrií hyperbolickou, geometrii sub *B)* eliptickou a konečně geometrii sub *C)* parabolickou. V geometriích parabolických jest obsažena geometrie euklidovská jako zvláštní případ.

---

[9]) Projektivním invariantem jest na příklad rovnice, vyjadřující, že dva směry jsou sdruženy vzhledem k určité kuželosečce. Affinním invariantem je třeba rovnice, která vyjadřuje, že sdružené směry ke všem směrům libovolné paraboly jsou rovnoběžné. Euklidovský invariant jest rovnice, která určuje, kdy dva směry sdružené vzhledem k libovolné kuželosečce jsou kolmé. — Definice geometrií, udaných v textu, dají se ovšem rozšířiti bez obtíží na prostor (VII, 5).

Veškeré případy zde uvedené probereme. Při tom počneme geometrií v útvaru jednorozměrném (t. j. řada bodů na přímce nebo svazek přímek bodem). To má svoje důvody. Neboť v geometrii útvaru jednorozměrného budeme — ve shodě s hořejší definicí — žádati, aby dva jeho elementy (t. j. body na přímce, resp. paprsky ve svazku) se reprodukovaly. Totéž však žádali jsme při odvozování geometrie euklidovské v rovině. Jistě tedy budou některé výsledky těchto geometrií alespoň formálně upomínati na příslušné problémy geometrie euklidovské. Vzorec *Laguerreův* je toho nejlepším dokladem. Odvodíme jej v následující kapitole.