XII. O maximech a minimech funkcí o několika proměnných

In: Karel Petr (author): Počet differenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1923. pp. 390–429.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402700

Dále jsou invarianty obě resultanty lineárné a obou kvadratických forem, t. j. výrazy

$$J_0 = p^2 + q^2, \quad J_1 = rq^2 - 2spq + tp^2 \qquad \text{(váha 2)}.$$

Vedle invariantů vytčených jest již jen jediný, totiž

$$K = (r - t)pq - s(p^2 - q^2).$$

Všecky invarianty hledané jsou nutně racionálné funkce invariantů $I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, K$. Vyšetřme, jak se invarianty tyto mění substitucí (α). Označíme li hodnotu invariantů $I_0, I_1, \ldots, K$ po provedení substituce té $\overline{I}_0, \overline{I}_1, \ldots \overline{K}$; máme, používajíce formulí příkladu 1., po krátkém počtu

$$\overline{I}_0 = I_0, \quad \overline{I}_1 = \frac{-J_1 - r}{p^3}, \quad \overline{I}_2 = \frac{I_2}{p^4}$$

$$\overline{J}_0 = \frac{J_0 + I_0}{p^2} - I_0, \quad \overline{J}_1 = \frac{-t}{p^3}$$

$$\overline{K} = \frac{s(1+q^2) - tpq}{p^4}.$$

Z těchto rovnic vyplývá ihned

$$\overline{I}_0 + \overline{J}_0 = \frac{I_0 + J_0}{p^2}, \quad \overline{I}_1 + \overline{J}_1 = -\frac{I_1 + J_1}{p^3}, \quad \overline{I}_2 = \frac{I_2}{p^4}$$

a jsou tedy

$$\frac{I_2}{(I_0 + J_0)^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{I_1 + J_1}{(I_0 + J_0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r(q^2 + 1) - 2spq + t(p^2 + 1)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

invarianty differenciální vzhledem k orthogonální transformaci. Všecky invarianty, v nichž vyskytují se derivace nejvýše druhého řádu, dají se pomocí těchto dvou racionálně vyjádřit. Při tom jest konstanta k, kterou se prvý invariant násobí (viz horní rovnici pro definici invariantu), rovna 1. Invariant druhý násobí se, provedeme-li postupně obě transformace (r), (α), buď -1 (je-li p' kladné) aneb $+1$ (je-li p' záporné).

XII. O maximech a minimech funkcí o několika proměnných.

242. Definice absolutních maxim (resp. minim), jakož i relativních maxim (resp. minim), podané v odst. 170., 171. pro funkce o jedné proměnné, rozšiřují se bez jakékoliv potíže i pro funkce o několika proměnných.

Podám toliko definici relativních maxim resp. minim aneb kratčeji relativních extrémů, kterýžto pojem jest alespoň ze stanoviska theorie důležitější a bude tudíž předmětem úvah následujících; při tom omezím se ve výrocích obecných na funkce o dvou proměnných, jelikož výroky ty téměř beze změny — nehledíme-li ku symbolům mathematickým, které jsou ovšem při funkcích o n proměnných méně přehledné než při funkcích o dvou proměnných — převádějí se i pro funkce o n proměnných.

Říkáme pak, že *funkce $f(x, y)$ bodu $[x, y]$ má v bodě $[a, b]$, vnitřním to bodě oboru, v němž $f(x, y)$ jest definována, relativní extrém, lze-li udati kladné číslo η tak, aby rozdíl*

$$f(x, y) - f(a, b) \tag{1}$$

byl v okolí $O(a, b; \eta)$ číslem stále téhož znaménka. Je-li rozdíl ten stále kladný (>0), nastává v $[a, b]$ relativní minimum; je-li stále záporný (<0), relativní maximum.

Píšeme-li $x = a + h$, $y = b + k$, pak jest při relativním extrému rozdíl

$$f(a+h, \ b+k) - f(a, b) \tag{1'}$$

stále téhož znaménka pro všecka h, k, pro něž $|h| < \eta$, $|k| < \eta$ s vyloučením případu, kdy $[h, k] = [0, 0]$, ve kterémž rozdíl onen jest rovný nulle. Klademe-li v (1') $k = 0$, obdržíme rozdíl

$$f(a+h, b) - f(a, b),$$

který jest téhož znaménka pro všecka h, pro něž $0 < |h| < \eta$, a má tudíž $f(x, b)$, funkce jedné proměnné x, v bodě $x = a$ relativní extrém (odst. 171.). Rovněž $f(a, y)$, funkce proměnné y, má v bodě $y = b$ relativní extrém.

Má-li tedy $f(x, y)$ relativní extrém v bodě $[a, b]$ a má-li dále $f(x, b)$ derivaci dle x v bodě $x = a$ a $f(a, y)$ derivaci dle y v bodě $y = b$, jsou tyto derivace obě rovny nulle (dle odst. 102.). *Jestliže tudíž funkce $f(x, y)$, definovaná ve spojitém oboru Ω, má v tom oboru první derivace částečné dle x a dle y, pak v bodech (vnitřních) oboru Ω, v nichž nastává relativní extrém, jsou splněny rovnice*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Chceme-li vyhledati všecky relativní extrémy takové funkce, hledáme nejprve body $[a, b]$, které dosazeny byvše za $[x, y]$ do (3) splňují ty rovnice. Pro jiné body v Ω extrémních hodnot funkce $f(x, y)$ nabývati nemůže.*)

---

*) Kdyby funkce v Ω definovaná neměla ve všech bodech oboru Ω první částečné derivace, mohly by nastávati extrémy u oné funkce i v bodech, kde nemá prvé částečné derivace.

Poznámka. Vedle extrémů, jak svrchu byly definovány — *extrémů* t. zv. *vlastních* — uvažují se také *extrémy nevlastní.* Při těchto rozdíl (1) nabývá ve všech bodech okolí $O(a, b; \eta)$ hodnot jednak od nully různých avšak stále téhož znaménka, jednak hodnot rovných nulle a těchto posledních hodnot nabývá, ať kladné číslo η zvolíme jakkoliv malé. (Viz odst. 171. pozn.) *Pro extrémy nevlastní jsou rovněž splněny rovnice* (3).

243. Zbývá však ještě vyšetřiti, ve kterých z bodů $[a, b]$ splňujících (3) nastává vskutku relativní extrém a zda extrém ten jest relativní maximum či minimum. Vyšetřování toto jest obtížnější než obdobné vyšetřování při funkcích o jedné proměnné a provedeme je — aspoň z části — za *předpokladu, že $f(x, y)$ má druhý totální differenciál v Ω.* Dle věty Taylorovy (o jednom členu, odst. 208., pozn. 1.) jest

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=hf'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k)+ \\ +kf'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k),$$

kde Θ jest číslo (závislé na h, k) kladné a menší než 1. Avšak poněvadž budeme předpokládati, že $f'_x(a, b)=0$, $f'_y(a, b)=0$ a že $f(x, y)$ má druhý a tedy funkce f'_x, f'_y prvý totální differenciál, jest

$$f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k)=f'_x(a+\Theta h,\ b+\Theta k)-f'_x(a,\ b)= \\ =f''_{x^2}(a,\ b)\Theta h+f''_{xy}(a,\ b)\Theta k+\varepsilon'\Theta(|h|+|k|)$$

$$f'_y(a+\Theta h,\ b+\Theta k)=f''_{xy}(a,\ b)\Theta h+f''_{y^2}(a,\ b)\Theta k+\varepsilon''\Theta(|h|+|k|),$$

kde $\lim \varepsilon'=0$, $\lim \varepsilon''=0$, když $\lim h=0$, $\lim k=0$. A tedy, dosadíme-li do (4) a značíme-li hodnoty druhých derivací f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} v bodě $[a, b]$ stručně A, B, C,

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=\Theta_{h,\,k}[Ah^2+2Bhk+Ck^2+\varepsilon(|h|+|k|)^2], \tag{5}$$

při čem $\lim \varepsilon=0$ pro $\lim h=0$, $\lim k=0$, neboť

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon' h+\varepsilon'' k}{|h|+|k|}=\varepsilon'\frac{h}{|h|+|k|}+\varepsilon''\frac{k}{|h|+|k|},$$

a při čemž abychom vytkli závislost veličiny Θ na h, k, psali jsme $\Theta_{h,\,k}$ místo Θ.

Uvažujme bod $[h, k]$ v okolí bodu $[0, 0]$; stačí se tu omeziti na okolí, jež celá jsou obsažena ve čtverci $O(0, 0; 1)$. Body na obvodě tohoto čtverce nechť mají souřadnice h_0, k_0; jedno z obou čísel h_0, k_0 jest ± 1, druhé pak jest v intervalu $(-1, 1)$. Potom každý bod uvnitř čtverce $O(0, 0; 1)$ leží na úsečce spojující $[0, 0]$ s jedním $[h_0, k_0]$ a má tudíž souřadnice $h_0 t, k_0 t$, kde $0 \leqq t < 1$. Dosadíme-li do (5) $h=h_0 t$, $k=k_0 t$, obdržíme konečně

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=\Theta_{h,\,k}t^2[Ah_0^2+2Bh_0k_0+Ck_0^2+ \\ +\varepsilon(|h_0|+|k_0|)^2], \tag{5'}$$

kterážto rovnice bude východiskem dalších úvah; v ní číslo ε má $\lim \varepsilon = 0$, když $\lim t = 0$ (a konverguje k ní stejnoměrně vzhledem ku všem $[h_0, k_0]$).

Jsou pak tři možnosti:

1. Výraz $Ah_0^2 + 2Bh_0k_0 + Ck_0^2$ není rovný nulle v žádném $[h_0, k_0]$. Poněvadž však jest to funkce spojitá bodu $[h_0, k_0]$ — ve skutečnosti jest to na každé straně čtverce spojitá funkce jedné proměnné — má výraz ten stále stejné znaménko a absolutní hodnota výrazu nabývá v jednom bodě na obvodu čtverce dolní své hranice m, jež jest číslo kladné. V ostatních bodech na obvodě čtverce jest absolutní hodnota větší ($\geqq$) než m. Jelikož $\lim \varepsilon = 0$ pro $\lim t = 0$ (a konvergence tato k nulle jest stejnoměrná), lze udati číslo kladné η tak, aby $|\varepsilon| < \frac{1}{4} m$ pro všecka t, jichž $|t| < \eta$, a pro všecky $[h_0, k_0]$. V důsledku (5′) má pak rozdíl (1′) stále totéž znaménko pro všecky $[h, k]$, pro něž $|h| < \eta$, $|k| < \eta$ a jest tedy v tomto případě v bodě $[a, b]$ relativní extrém funkce $f(x, y)$.

K určení znaménka výrazu $Ah_0^2 + \ldots$ stačí zvoliti si zvláštní některé hodnoty pro h_0, k_0; stačí ku př. položiti $h_0 = 1$, $k_0 = 0$ a vidíme ihned, že v případě uvažovaném jest znaménko výrazu $Ah_0^2 + \ldots$ totéž jako znaménko čísla A. Je-li tedy $A > 0$, jest v bodě $[a, b]$ relativní minimum funkce $f(x, y)$; je-li $A < 0$, relativní maximum.

2. Výraz $Ah_0^2 + 2Bh_0k_0 + Ck_0^2$ nabývá hodnot kladných i záporných. Pak (na základě obdobné úvahy té, kterou jsme právě provedli, vyšetřujíce možnost 1.) jsou v každém okolí bodu [0, 0] body $[h, k]$, pro které (1′) má znaménko kladné, a body, pro které má znaménko záporné. V tomto případě nemá $f(x, y)$ extrém v $[a, b]$.

3. Výraz $Ah_0^2 + 2Bh_0k_0 + Ck_0^2$ má sice stále totéž znaménko pro všecky $[h_0, k_0]$ na obvodě čtverce s výjimkou však bodu $[h'_0, k'_0]$, pro který ten výraz jest rovný nulle. Pak jest, klademe-li $h' = h'_0 t$, $k' = k'_0 t$,

$$f(a + h', b + k') - f(a, b) = \Theta_{h',k'} t^2 \varepsilon (|h'_0| + |k'_0|)^2$$

a o znaménku výrazu (1′) — při $h = h'$, $k = k'$ — rozhoduje znaménko čísla ε, o němž pouze víme, že $\lim \varepsilon = 0$ pro $\lim h' = 0$, $\lim k' = 0$. V tomto případě nemůžeme na základě učiněných předpokladů činiti žádný závěrek.

244. Vyslovíme výsledek, který jsme dostali, obecně pro funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n proměnných $x_1, \ldots, x_n$. *Má-li funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ve spojitém oboru n-rozměrném Ω prvý i druhý totální differenciál, pak nutná podmínka, aby v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — vnitřním to bodě oboru Ω — nastal extrém funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jest*

I. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

II. *Forma druhého stupně (t. j. mnohočlen homogenní 2. stupně) v proměnných* $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$

$$A_{11} h_1^2 + 2 A_{12} h_1 h_2 + A_{22} h_2^2 + \ldots + A_{nn} h_n^2, \tag{A}$$

kde

$$A_{ik} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right]_{[a_1, \ldots, a_n]}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n,$$

má stále totéž znaménko pro všecky $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$, *pokud jest různa od nully.*

Jestliže forma (A) stává se nullou pouze v bodě $[0, 0, \ldots, 0]$, *pak vskutku v bodě* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *nastává extrém funkce* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a to při* $A_{11} > 0$ *rel. minimum, při* $A_{11} < 0$ *rel. maximum.*

Že věta právě vyslovená se shoduje v podstatě své s výsledkem svrchu odvozeným pro dvě proměnné, následuje ihned z okolnosti, že, je li výraz kvadratický (A) rovný nulle na hranici oboru $O(0, 0, \ldots, 0; 1)$ v bodě $[h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0]$, jest roven nulle vůbec pro všecky body $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$, pro něž $h_i = h_i^0 t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t > 0$ (t. j. pro všecky body „paprsku" procházejícího body $[0, 0, \ldots, 0]$, $[h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0]$). Je-li pak výraz (A) kladný (záporný) v bodě $[h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0]$, jest také kladný (záporný) ve všech bodech onoho „paprsku" s výjimkou ovšem bodu $[0, 0, \ldots, 0]$.

Podmínky I. a II. s jich doplňkem lze též upraviti ve tvar:

I'. Prvý totální differenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ jest roven nulle.

II'. Druhý totální differenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ jest jakožto kvadratická forma přírůstků $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ stále buď téhož znaménka anebo roven nulle, ať za přírůstky volíme jakákoliv čísla.

Jestliže tento druhý totální differenciál stává se nullou pouze, když $dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_n = 0$, pak $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest vskutku relativní extrém a jest ten extrém relativním maximem, je-li druhá částečná derivace dle některé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ záporna, minimem, je li kladna.

245. Ku doplnění věty odst. předch. podáme *vyšetření nutných a postačujících podmínek k tomu, aby forma kvadratická*

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2 + \ldots + a_{nn} y_n^2$$

měla stále totéž znaménko pro všecky $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, není li právě v bodě tom rovna nulle. Předpokládejme, abychom určitý případ měli na mysli, že $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq 0$ ve všech bodech $[y]$; t. j. že forma g jest t. zv. **formou kladnou**. Pak, závisí-li g vůbec od y_1, jest $a_{11} > 0$.

Neboť kdyby $a_{11}=0$, byl by aspoň jeden z koeficientů $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ různý od nully (jelikož jinak by g bylo od y_1 nezávislo); budiž tedy ku př. $a_{11}=0$ a $a_{12} \neq 0$ a klaďme v g za $y_3, y_4, \ldots, y_n$ vesměs nully. Tím se žmění g ve výraz

$$2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2 = y_2 (2 a_{12} y_1 + a_{22} y_2), \quad a_{12} \neq 0,$$

který nabývá hodnot záporných i kladných (jak čtenář snadno potvrdí). Nabývala by i $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ v bodech $[y_1, y_2, 0, 0, \ldots, 0]$ hodnot záporných (i kladných), což však odporuje předpokladu. Závisí-li tedy g od y_1, jest $a_{11} \neq 0$ a tedy $a_{11} > 0$ i lze danou formu psáti ve tvaru

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_{11} (y_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} y_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n)^2 + \\ + h(y_2, y_3, \ldots, y_n); \quad (\alpha_1)$$

neboť v prvém členu pravé strany jsou všecky členy formy g závislé od y_1 již obsaženy a není tudíž h závislo od y_1, jakož bylo označením vytknuto. Následkem toho má h tento tvar

$$h(y_2, y_3, \ldots, y_n) = b_{22} y_2^2 + 2 b_{23} y_2 y_3 + \ldots + b_{nn} y_n^2.$$

Pro h pak pak jest nutně $h(y_2, y_3, \ldots, y_n) \geq 0$ ve všech $[y_2, y_3, \ldots y_n]$; neboť kdyby h bylo záporné v $[y_2^0, y_3^0, \ldots, y_n^0]$, bylo by i g záporné v $[y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0]$, kde $y_1^0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} y_2^0 - \frac{a_{13}}{a_{11}} y_3^0 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n^0$. Jest tedy pro h platný stejný předpoklad jako pro g a můžeme tudíž, je-li h vůbec závislo od y_2, psáti

$$h(y_2, y_3, \ldots, y_n) = b_{22} (y_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}} y_3 + \ldots)^2 + k(y_3, y_4, \ldots, y_n) \qquad (\alpha_2)$$

atd. Jsou pak při postupném provádění těchto přeměn, z nichž dvě jsme naznačili, možny *dva případy*:

1. Případ obecný, ve kterém g jest závislo na všech proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_n$; h na všech $y_2, y_3, \ldots, y_n$; k na všech $y_3, y_4, \ldots, y_n$; atd. V tomto případě po $n-1$ přeměnách dospějeme (sčítáme-li rovnice $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{n-1})$ tak vznikající) ku vztahu

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathbf{a}_1 Y_1^2 + \mathbf{a}_2 Y_2^2 + \ldots + \mathbf{a}_n Y_n^2, \qquad (\beta)$$

kde

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{13} y_3 + \ldots + \lambda_{1n} y_n \\ Y_2 &= \phantom{y_1 + \lambda_{12}} y_2 + \lambda_{23} y_3 + \ldots + \lambda_{2n} y_n \\ Y_3 &= \phantom{y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{23}} y_3 + \ldots + \lambda_{3n} y_n \qquad (\gamma) \\ &\ldots\ldots \\ Y_n &= \phantom{y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{23} y_3 + \ldots + \lambda_{3n}} y_n \end{aligned}$$

a kde čísla $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_n$ jsou čísla kladná (Při tom jsme kladli zároveň k vůli přehlednosti místo $a_{11}, b_{22}, ..$ čísla $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..$ a podobně místo $\frac{a_{12}}{a_{11}}, \frac{b_{23}}{b_{22}}, ..$ čísla $\lambda_{12}, \lambda_{23}, ..$). Jest snadno ustanoviti čísla $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .$ Nejprve lze rovnost (β) pokládati jako rovnost dvou kvadratických forem, z nichž forma na levé straně vzniká z formy na pravé straně lineární substitucí (γ). Mezi diskriminanty obou forem bude tudíž vztah odvozený v odst. 234.; diskriminant formy g jest rovný diskriminantu formy na pravé straně násobenému čtvercem determinantu lineární subst. (γ); tento determinant však jest 1. Rovnost pro diskriminanty nám pak dává

$$\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2 ... \mathbf{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & ..., & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & ..., & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & ..., & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (\delta)$$

Klademe-li však v (β), kterýžto vztah jest v důsledku (γ) identitou, $y_{m+1} = y_{m+2} = .. = y_n = 0$, jest i $Y_{m+1} = Y_{m+2} = .. = Y_n = 0$; $Y_1, Y_2 .., Y_m$ pak změní se v $Y'_1, Y'_2, .., Y'_m$ (kde ku př. $Y'_1 = y_1 + \lambda_{12} y_2 + .. + \lambda_{1m} y_m$). Z ($\beta$) pak vzniká obdobná rovnost dvou kvadratických forem přecházejících v sebe lineární substitucí. Označíme li

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & ..., & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & ..., & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{m1}, & a_{m2}, & ..., & a_{mm} \end{vmatrix},$$

odvodíme z oné rovnosti (stejně jako z (β) odvozeno (δ))

$$\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2 ... \mathbf{a}_m = \Delta_m, \quad m = 1, 2, .., n. \qquad (\delta')$$

Z okolnosti, že všecka $\mathbf{a}$ jsou čísla kladná, následuje, že i Δ_m jsou kladná (> 0) a lze v důsledku (δ') — v něž jsme zároveň zahrnuli i (δ) — psáti

$$\mathbf{a}_1 = \Delta_1 = a_{11}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, ... \mathbf{a}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \quad (\varepsilon)$$

2. Další jedině ještě možný případ jest ten, že některá z forem $g, h, k, ...$ (a po ní všecky následující) nezávisí na některých z těch proměnných, jak byly udány pro případ prvý (obecný).

Můžeme však v tomto případě vhodnou volbou indexů při y docíliti, aby, pokud při příslušných formách vůbec *všecky* koefficienty nejsou rovny nulle, forma g závisela na y_1, forma h na y_2, forma k na $y_3, ..$, a přeměny svrchu činěné jsou rovněž možny, pokud nedospíváme ku formám, *jež identicky vymizí* (jichž součinitelé jsou vesměs rovny nulle). Tu dostaneme

$$g(y_1, y_2, .., y_n) = \mathbf{a}_1 Y_1^2 + \mathbf{a}_2 Y_2^2 + \ldots + \mathbf{a}_p Y_p^2, \quad p < n, \qquad (\beta_1)$$

kde mezi $Y_1, Y_2, .., Y_p$ a $y_1, y_2, .., y_n$ jest platno p vztahů shodných s p prvými vztahy v (γ). Rovněž jako v případu 1. jest i nyní $\mathbf{a}_1 > 0$, $\mathbf{a}_2 > 0, \ldots, \mathbf{a}_p > 0$.

Vyjádření formy g v (β_1) zahrnuto jest však ve vyjádření jejím v (β) za předpokladu, že koefficienty $\mathbf{a}_{p+1}, \mathbf{a}_{p+2}, .., \mathbf{a}_n$ jsou hodnoty rovné nulle, při čemž mezi $[Y]$ a $[y]$ pak jsou vztahy (γ) (ve kterých ovšem součinitelé λ, jež se nacházejí ve vyjádřeních $Y_{p+1}, Y_{p+2}, .., Y_n$ pomocí $y_{p+1}, y_{p+2}, .., y_n$ mohou býti čísla úplně libovolná). Jelikož pak vztahy (δ') jsou beze změny platny v tomto případě, jsou $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_p$ čísla kladná (>0), a $\Delta_{p+1} = \Delta_{p+2} = .. = \Delta_n = 0$.

Kdybychom byli předpokládali, že $g(y_1, y_2, .., y_n)$ jest pro všecka $[y_1, y_2, .., y_n]$ číslem záporným nebo nullou, anebo kratčeji vyjádřeno, že g jest **formou zápornou**, byla by čísla $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_n$ vesměs záporna, po případě (ve 2. případě) od jistého indexu počínajíc rovna nulle a řada čísel

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, .., \Delta_n$$

by dle (ε) měla v 1. případě n změn znaménkových (prvé číslo by bylo kladné, druhé záporné, třetí kladné, čtvrté záporné,...) V 2. případě by bylo p změn znaménkových a čísla od Δ_{p+1} počínajíc by byla rovna nulle.

Na základě vyjádření v (β) můžeme rozhodnouti, zda kladná forma (g) stává se nullou také pro jiné body $[y_1, y_2, .., y_n]$ než pro bod $[0, 0, .., 0]$. V případě 1., kde $\mathbf{a}_1 > 0$, $\mathbf{a}_2 > 0, .., \mathbf{a}_n > 0$, jest nutně $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0, ..,$ $Y_n = 0$, je-li $g = 0$. Z (γ) však následuje, že i $y_1 = 0$, $y_2 = 0, .., y_n = 0$. V případě 1. nestává se tedy, nehledíme-li ku $[0, 0, .., 0]$, forma g nullou v žádném bodě.

V případě 2, kdy $\mathbf{a}_{p+1} = \mathbf{a}_{p+2} = .. = \mathbf{a}_n = 0$ a ostatní $\mathbf{a}$ jsou kladna, nutně jest $Y_1 = Y_2 = .. = Y_p = 0$, avšak $Y_{p+1}, Y_{p+2}, .., Y_n$ můžeme zvoliti libovolně a z (γ) následuje, že jest nekonečné množství (∞^{n-p}) bodů $[y_1, y_2, .., y_n]$, ve kterých g jest rovno nulle. Obdobně tomu jest i při formě záporné.

V případě prvém (ať jest g forma kladná anebo záp.) jest matice z elementů diskriminantu Δ_n utvořená hodnosti n-té a to v důsledku relace (δ), dle které diskriminant jest $\neq 0$. V případě druhém, ve kterém $\Delta_p \neq 0$, jest matice ona aspoň hodnosti p-té. Vyšší hodnosti však býti nemůže, neboť dle (β_1) jsou částečné derivace formy g dle $y_1, y_2, .., y_n$

lineární formy proměnných $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$; odtud plyne, že z oněch n derivací jest jich nejvýše p na sobě lineárně nezávislo a ostatní (v počtu aspoň $n-p$) dají se pomocí jich lineárně vyjádřit (viz odst. 225., př. 2.), akož čtenář ještě zevrubněji může prokázat.

246. Užijeme li výsledků odst. předch. na úkol, jímž se zabýváme, t. j. k vyšetřování, zda u dané funkce n proměnných nastává extrém, můžeme vysloviti větu: *Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definovaná ve spojitém n-rozměrném oboru Ω a mající v Ω prvý i druhý totální differenciál, má ve vnitřním bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ toho oboru relativní extrém, jestliže prvý totální differenciál funkce f v bodě $[a]$ jest roven nulle a jestliže druhý totální diff. funkce f v tom bodě $\Sigma A_{ik} h_i h_k$ — kvadratická forma přírůstků $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — jest formou buď kladnou aneb zápornou s diskriminantem $|A_{ik}|$ různým od nully. A jest ten extrém maximem, je-li druhý totální diff. formou zápornou; je-li kladnou, jest extrém funkce f v $[a]$ minimem.*

Jestliže druhý totální differenciál v bodě $[a]$ jest formou sice kladnou (resp. zápornou), avšak diskriminant $|A_{ik}|$ jest rovný nulle, může sice v bodě $[a]$ míti funkce f minimum (resp. max.), avšak jest třeba ku zjištění toho — zda vskutku v $[a]$ nastává extrém — dalšího vyšetřování.

V jiných vnitřních bodech oboru Ω než v bodech vytčených nemůže nastati při funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ relativní extrém.

Jak se rozhodne, zda kvadratická forma jest kladnou či zápornou, vyloženo zevrubně v odst. předch.

Specielně pro funkci $f(x_1, x_2)$ o dvou proměnných máme tento výsledek: Funkce má extrém v bodě $[a_1, a_2]$, jestliže prvý differenciál df v $[a_1, a_2]$ jest rovný nulle a jestliže pro druhý differenciál d^2f v bodě $[a_1, a_2]$, který jest rovný výrazu $A_{11}\, dx_1^2 + 2 A_{12}\, dx_1\, dx_2 + A_{22}\, dx_2^2$, jest splněna podmínka

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 > 0.$$

Extrém ten jest maximem, je-li $A_{11} < 0$, minimem, je-li $A_{11} > 0$.

Jestliže $A_{11} A_{22} - A_{12}^2 = 0$, může nastati sice extrém v $[a_1, a_2]$, avšak nemusí a jest třeba ku rozhodnutí dalšího vyšetřování (**semidefinitní případ.**)

Čtenář snadno odvodí tyto specielní výsledky buď na základě obecných v odst. předch. dokázaných aneb přímo úvahou na snadě ležící. Jak tu (v případě dvou neodv. proměnných) lze postupovati, abychom rozhodli i v případě semidefinitním, zda nastává extrém, bude předmětem úvah pozdějších (kap. XIII.).

Příklad 1. Vyhledati jest extrémy funkce

$$u = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} |1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n|^{\alpha_{n+1}},$$

pro něž $x_k \neq 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \neq 1$. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ nechť jsou čísla reálná různá od nully.

K vůli stručnosti pišme $1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = x_{n+1}$. Pak jest nejprve

$$\frac{du}{u} = \frac{\alpha_1\, dx_1}{x_1} + \frac{\alpha_2\, dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}\, dx_{n+1}}{x_{n+1}} \tag{α}$$

$$= \left(\frac{\alpha_1}{x_1} - \frac{\alpha_{n+1}}{x_{n+1}}\right) dx_1 + \left(\frac{\alpha_2}{x_2} - \frac{\alpha_{n+1}}{x_{n+1}}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{x_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{x_{n+1}}\right) dx_n.$$

Z rovnic

$$\frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{\alpha_{n+1}}{x_{n+1}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

vyplývá

$$x_1 = \lambda\alpha_1,\ x_2 = \lambda\alpha_2, \ldots, x_n = \lambda\alpha_n,\ x_{n+1} = \lambda\alpha_{n+1}; \tag{β}$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1}};$$

i jest třeba předpokládati, že součet $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1}$ jest od nully různý, neboť je-li rovný nulle, nenastává hledaný extrém (rovnice k extrému nutné nemají společné řešení).

Pro druhý differenciál následuje v bodě $[\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n]$ z (α) výraz

$$\lambda^2 \left[\frac{d^2u}{u}\right]_{x_k = \lambda\alpha_k} = -\frac{dx_1^2}{\alpha_1} - \frac{dx_2^2}{\alpha_2} - \ldots - \frac{dx_n^2}{\alpha_n} - \frac{dx_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}}, \tag{γ}$$

ve kterém jest jenom ještě klásti $dx_{n+1} = -dx_1 - dx_2 - \ldots\ldots - dx_n$. V případě však, že $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ jsou čísla stejného znaménka, netřeba tuto substituci prováděti, neboť bezprostředně jest patrno, že druhý differenciál jest záporný (< 0) v bodě $[\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n]$, jsou-li α_k čísla kladná kladný (> 0), jsou-li záporná.

Máme tedy nejprve výsledek: Funkce u má v bodě $[\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n]$ maximum relativní, jsou-li čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ čísla kladná; jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ záporna, jest v onom bodě relativní minimum.

Nejsou-li však čísla α_k stejného znaménka, jest třeba nahraditi dx_{n+1} pomocí $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ na základě svrchu uvedené rovnice. Mohli bychom však každé jiné dx_k pomocí ostatních nahraditi, neboť jest ku př. také $dx_1 = -dx_2 - dx_3 - \ldots - dx_{n+1}$, takže jest možno za neodvisle proměnné pokládati n kterýchkoliv z $n+1$ proměnných $x_1, x_2, .., x_{n+1}$. Čísla α_1, $\alpha_2, .., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ jsou tudíž rovnocenna (a lze je ve výsledných podmínkách libovolně permutovat).

Eliminujme tedy v (γ) dx_{n+1}^2 tak, aby výraz differenciální stal se kvadratickou formou proměnných $dx_1, dx_2, .., dx_n$. Změňme také znaménko k vůli zjednodušení; i dostaneme výraz

$$\Sigma dx_k^2 \left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \Sigma \frac{2}{\alpha_{n+1}} dx_i dx_k, \quad i, k = 1, 2, .. n; \quad i < k.$$

Diskriminant této kvadratické formy jest (jak snadným počtem čtenář odůvodní)

$$\Delta_n = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_{n+1}} (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n+1}).$$

Stejně se vypočtou i čísla $\Delta_1, \Delta_2, .. \Delta_{n+1}$. Dostaneme ku př.

$$\Delta_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_{n+1}} (\alpha_1 + \alpha_{n+1}), \quad \Delta_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{n+1}} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{n+1}), .. \qquad (\delta)$$

Ježto $\Delta_n \neq 0$, pak, má-li nastati v bodě $[\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..]$ maximum, všecka tato čísla $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$ musí býti kladna. Nemohou tedy obě čísla α_1, α_{n+1} býti záporna a vůbec (se zřetelem rovnocennosti čísel α_n) nemohou dvě kterákoliv z čísel $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n+1}$ býti záporna. Může tudíž nastati maximum (vedle případu svrchu uvedeného) ještě jenom tenkráte, když jen jedno z čísel α_k jest záporno a ostatní kladna. Postačitelná (a nutná) podmínka v tomto případě jest $\Delta_n > 0$; neboť pak také všecka čísla Δ_k jsou kladna a maximum vskutku nastává. Důkaz tohoto tvrzení jest zcela snadný na základě řady (δ). Obdobně se vyšetří nutná a postačující podmínka pro minimum.

Příklad 2. Do daného trojúhelníku ABC jest vepsán trojúhelník $A'B'C'$ takže vrcholy A', B', C' leží po řadě na stranách BC, CA, AB. Vypočítati jest relativní extrémy pro plochu $A'B'C'$. Dělí-li bod A' stranu BC tak, že dělící poměr $BA' : BC$ jest roven α a mají-li β, γ obdobný význam pro vrchole B', C', jest plocha trojúhelníka $A'B'C'$, již označíme T', dána výrazem

$$T' = T - (\alpha(1-\gamma) + (1-\alpha)\beta + (1-\beta)\gamma) T,$$

při čemž T jest plocha trojúhelníka daného. T' závisí na proměnných α, β, γ; jest pak

$$d^2 T' = (d\alpha\, d\gamma + d\alpha\, d\beta + d\beta\, d\gamma) T.$$

Kvadratická forma v $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ neobsahuje žádný ze čtverců $d\alpha^2$, $d\beta^2$, $d\gamma^2$ a nemůže tedy býti ani formou kladnou, ani zápornou (a nabývá hodnot kladných i záporných). Neexistuje tudíž relativní extrém pro plochu T'.

Příklad 3. Vyhledati jest v rovině trojúhelníka ABC bod P takový, že součet vzdáleností toho bodu od vrcholů trojúhelníka jest co nejmenší.

Označíme-li souřadnice pravoúhlé bodů A, B, C, P po řadě dvojicemi $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, $[x, y]$, jest součet, který má nabývati hodnoty minimální, dán výrazem

$$u = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} + \\ + \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}.$$

Součet u jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$ a jest stále kladný, má tedy jistou dolní hranici m, kteráž jest zároveň jeho (absolutním i relativním — možná ovšem nevlastním minimem*). Úloha daná má tudíž vždy řešení (a to aspoň jedno). Funkce u má derivace ve všech bodech roviny vyjma v bodech $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$. Tyto tři body později zvlášť bude nutno vyšetřovati; v každém jiném bodě $[x, y]$, v němž funkce u nabývá extrému, jsou nutně splněny rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{aneb}$$

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} + \frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} + \\ + \frac{x-x_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}} = 0.$$

$$\frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} + \frac{y-y_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} + \\ + \frac{y-y_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}} = 0. \qquad (q)$$

Z těchto dvou rovnic následuje snadno (poslední člen dáme v obou rovnicích na pravou stranu, obě povýšíme na čtverec a sečteme)

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Levá strana poslední rovnice jest cos β_3, je-li β_3 úhel, jejž tvoří paprsek PB s PA. I jest tedy β_3 rovno buď 120^0 aneb 240^0. Stejně následuje $\beta_1 = 120^0$, 240^0, $\beta_2 = 120^0$, 240^0, při čemž β_1, β_2 mají obdobný význam. Mezi β_1, β_2, β_3 však jest očividný vztah

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 360^0 \quad \text{aneb} = 720^0,$$

*) Při tom jest třeba jenom míti ještě na mysli, že $\lim u = \infty$, když $\lim x = \pm\infty$, $\lim y = \pm\infty$.

odkudž jest patrno, že jedině možné hodnoty pro β_1, β_2, β_3, jsou buď $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 120^0$ aneb $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 240^0$ — což však obojí v podstatě jest jedno, neboť lze druhý výsledek vhodným označením vrcholů převésti na prvý. Jest tedy hledaný bod P takový, že polopaprsky z bodu P ku vrcholům trojúhelníka vedené dělí celý úhel kolem P na 3 stejné díly. Takový bod však může u trojúhelníka ABC existovati jenom tenkráte, je-li každý úhel jeho menší než 120^0; u takového trojúhelníka bod P vskutku existuje a dostaneme jej jako průsek tří oblouků kruhových nad jednotlivými stranami trojúhelníka sestrojených tak, že každý jednotlivý oblouk jest geometrickým místem pro vrchol obvodového úhlu rovného 120^0 (240^0) a sestrojeného nad příslušnou stranou trojúhelníka jakožto tetivou.

Že pro tento bod nastává vskutku minimum, vyplývá z výrazu pro druhý differenciál funkce u; ten jest

$$d^2u = \frac{[(y-y_1)\,dx - (x-x_1)\,dy]^2}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \ldots > 0.$$

Jelikož jinde extrémy než v bodě P právě vyšetřeném a než v bodech dosud vyloučených A, B, C nastávati nemohou a jelikož nalezený bod P v případě, že jeden úhel trojúhelníka jest větší než 120^0, neexistuje, máme jistotu, že aspoň v případě, když jeden úhel trojúhelníka větší jest než 120^0, extrém funkce u (a to vlastní extrém) nastane, když $[x, y]$ splyne s jedním z bodů A, B, C. Vyšetřujme ku př., zda nastane extrém, když $[x, y] = A$. K tomu cíli vyjádříme si u pomocí jiných proměnných. Označíme úsečku $\overline{PA} = r$; $r \geqq 0$. Úhel, který tvoří PA s BA, vyznačíme znakem φ. Pak jest dle věty Carnotovy funkce u dána výrazem

$$u = r + \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\varphi} + \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos(A-\varphi)}.$$

Jestliže P splývá s A, jest $r = 0$ a u stane se rovným $b + c$; nastane pak pro $P = A$ extrém (minimum), má-li výraz $u - (b + c)$ v okolí bodu A — t. j. pro dosti malé r — stále totéž znaménko (kladné). Výraz však $u - (b + c)$ lze snadno rozvinouti v potenční řadu postupující dle mocností r. Dostaneme snadným počtem — předpokládejme v následujícím, že r jest číslo kladné, dosti malé —

$$u - (b + c) = r\left(1 - 2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\left(\tfrac{1}{2}A - \varphi\right)\right) + \frac{r^2}{2bc}\left(b\sin^2\varphi + \right.$$

$$\left. + c\sin^2(A-\varphi)\right) + \ldots$$

Druhý člen pravé strany, jež jest potenční řada proměnné r, jest tvaru $\mathfrak{a}_2 r^2$, kdež $\mathfrak{a}_2$ jest číslo kladné, ať jest φ jakékoliv. Mohli bychom snadno udati číslo kladné η takové, že $\mathfrak{a}_2 > \eta$ při všech φ. V důsledku toho lze stanoviti jiné číslo kladné ε tak, že součet řady potenční na pravé straně — počínajíc však teprve druhým členem — jest kladný pro všecka $r < \varepsilon$ a všecka φ (jakož čtenář zevrubněji odvodí). Zbývá tudíž zabývati se jenom prvým členem. Tu jsou dva případy možné.

a) $120^0 \leqq A < 180^0$: $\cos\frac{1}{2}A$ jest v intervalu ($\frac{1}{2}$, 0) a prvý člen jest kladný po případě rovný nulle (rovnost nulle nastane pouze pro $A = 120^0$ a vhodné φ). V tomto případě jest tedy pravá strana stále kladna pro všecka $r < \varepsilon$ a všecka φ. Má tudíž funkce u v případě tomto, když $[x, y] = [x_1, y_1]$, relativní extrém.

b) $0 < A < 120^0$: tu jest $\cos\frac{1}{2}A$ kladný a větší než $\frac{1}{2}$. Prvý člen pravé strany nabývá, dle toho, jak volíme φ, hodnot kladných i záporných; totéž pak nastává i pro celou pravou stranu, zvolíme-li r dosti malé. V tomto případě nenabývá funkce u v bodě A relativního extrému.

Shrneme-li výsledky docílené, vidíme, že úkol daný má vždy jedno a jen jedno řešení. Součet vzdáleností nabývá relativního (a absolutního) minima v bodě položeném uvnitř trojúhelníka (stanoveném rovnicemi (q), jichž geometrický význam byl svrchu vyložen), jestliže žádný úhel jeho nepřevyšuje 120^0. Jestliže však jeden úhel trojúhelníka jest $\geqq 120^0$, pak relativní a absolutní minimum nastává v příslušném vrcholu trojúhelníka.

Příklad 4. V rovině XY jsou dány dva trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$. Trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jest dáti pošinutím v rovině XY takovou polohu $A'_1B'_1C'_1$, aby součet $\overline{AA'}_1^2 + \overline{BB'}_1^2 + \overline{CC'}_1^2$ nabyl hodnoty minimální.

Souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC buďtež po řadě $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$; obdobné vrcholy trojúhelníka $A_1B_1C_1$ nechť jsou body $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]$, $[u_3, v_3]$. Pošinutím nechť bod $[u, v]$ se změní v bod $[u', v']$, kdež jest

$$u' = a + u\cos\varphi + v\sin\varphi, \quad v' = b - u\sin\varphi + v\cos\varphi, \qquad (m)$$

při čemž a, b, φ jsou parametry určující pošinutí. Pak výraz, který má nabývati hodnoty extremní, jest

$$V(a, b, \varphi) = \sum_{i=1}^{3} [(a - x_i + u_i\cos\varphi + v_i\sin\varphi)^2 + \\ + (b - y_i - u_i\sin\varphi + v_i\cos\varphi)^2].$$

Prvé dvě podmínky k extrému nutné jsou

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial a} = 3a - (x_1 + x_2 + x_3) + (u_1 + u_2 + u_3)\cos\varphi + (v_1 + v_2 + v_3)\sin\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial b} = 3b - (y_1 + y_2 + y_3) - (u_1 + u_2 + u_3)\sin\varphi + (v_1 + v_2 + v_3)\cos\varphi = 0.$$

Má-li již trojúhelník původní $A_1B_1C_1$ takovou polohu, aby součet $\overline{AA'}^2_1+\overline{BB'}^2_1+\overline{CC'}^2_1$, nabýval hodnoty extremní pro $A'_1=A_1$, $B'_1=B_1$, $C'_1=C_1$, pak tyto dvě rovnice jsou splněny, když $a=0$, $b=0$, $\varphi=0$ (pro kteréžto hodnoty pošinutí (m) se redukuje na identitu $u'=u$, $v'=v$). Kladu li však v oněch dvou rovnicích $a=0$, $b=0$, $\varphi=0$, dostanu

$$x_1+x_2+x_3=u_1+u_2+u_3,\quad y_1+y_2+y_3=v_1+v_2+v_3,$$

t. j., že trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$ mají společné těžiště. To možno však hned od počátku předpokládati a nechť spadá těžiště to do počátku souřadnic (t. j. nechť $x_1+x_2+x_3=0$, $u_1+\ldots=0,\ldots$). V důsledku tohoto předpokladu, kterým se obecnosti řešení žádná újma nečiní, mění se však výraz $V(a,\,b,\,\varphi)$ ve

$$V(a,\,b,\,\varphi)=3a^2+3b^2+\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+y_i^2+u_i^2+v_i^2)-$$
$$-\cos\varphi\sum_i(u_ix_i+v_iy_i)-\sin\varphi\sum_i(v_ix_i-u_iy_i).$$

Derivace tohoto výrazu dle a, b, φ položeny byvše rovny nulle, dávají tyto tři rovnice

$$a=0,\quad b=0,\quad tg\varphi=\frac{v_1x_1-u_1y_1+v_2x_2-u_2y_2+v_3x_3-u_3y_3}{u_1x_1+v_1y_1+u_2x_2+v_2y_2+u_3x_3+v_3y_3}.$$

Pro druhý differenciál funkce $V(a,\,b,\,\varphi)$ v bodě $a=0$, $b=0$, $\varphi=\varphi_0$, kde φ_0 jest jeden ze dvou úhlů hovících poslední rovnici, dostáváme

$$6\,da^2+6\,db^2+\frac{1}{\cos\varphi_0}\cdot(u_1x_1+v_1y_1+u_2x_2+v_2y_2+u_3x_3+v_3y_3)\,d\varphi^2.$$

Tento differenciál podržuje stále totéž znaménko (kladné), je-li $\cos\varphi_0$ téhož znaménka jako $u_1x_1+v_1y_1+\ldots+v_3y_3$, kteroužto další podmínkou a svrchu napsanou rovnicí jest úhel φ jednoznačně určen.

Úloha připouští tedy v obecném případě jediné řešení, trojúhelník příslušný tomuto řešení má společné těžiště s trojúhelníkem ABC.

Je-li však $u_1x_1+v_1y_1+u_2x_2+v_2y_2+u_3x_3+v_3y_3=0$, což mlčky dosud bylo vyloučeno (výrazem napsaným svrchu pro $\operatorname{tg}\varphi$), jest φ_0 rovno buď $\frac{1}{2}\pi$ aneb $\frac{3}{2}\pi$; v tomto případě jest voliti tu z obou hodnot, pro kterou $\sin\varphi_0$ a $v_1x_1-u_1y_1+\ldots-u_3y_3$ má totéž znaménko.

Jestliže také $v_1x_1-u_1y_1+v_2x_2-u_2y_2+v_3x_3-u_3y_3=0$, potom jest φ vůbec neurčito; pro každý trojúhelník shodný s $A_1B_1C_1$ a mající společné těžiště s ABC nabývá výraz $\overline{AA'}^2_1+\ldots$ hodnoty minimální (minimum jest ovšem nevlastní).

Zevrubné odůvodnění posledních dvou tvrzení jest na snadě.

Úloha tato s obdobnými výsledky stejně snadno dá se řešiti při dvou n- úhelnících rovinných. Také rozšíření na prostory vícerozměrné jest snadné.

Příklad 5. Vyšetřiti jest extrémy funkce $F(u)$, kde u jest funkce několika neodvisle proměnných, ku př. proměnných x, y, z.

Úkol tento jest zevšeobecněním příkladu 5. odst. 172. Při řešení příkladu toho použito bylo vět udávajících podmínky pro extrémy. I v právě daném obecnějším příkladě bychom vět těch mohli používati, avšak nedospěli bychom s jich pomocí k výsledkům tak obecným jako prostým použitím definice, jež jest zcela na snadě.

Za tím účelem stačí předpokládati, že F i u jsou spojité funkce proměnných, na nichž závisí. Tu pak lze tvrditi:

1. Funkce $F(u)$ jakožto funkce proměnných x, y, z má relativní extrém ve všech bodech $[x_0, y_0, z_0]$, ve kterých $u = u_0$, má-li $F(u)$ jakožto funkce jedné proměnné u rel. extrém v bodě $u = u_0$. (Extrémy tyto však mohou býti nevlastní).

2. Funkce $F(u)$ má relativní extrém v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, má-li u relativní extrém v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ a funkce $F(u)$ jakožto funkce jedné proměnné u jest v bodě $u = u_0$ funkcí buď rostoucí aneb klesající. Stačí pak, aby takovou byla buď v levo aneb na pravo od bodu $u = u_0$ a to dle toho, běží-li u funkce u v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ o relativní maximum aneb minimum.

3. V jiných bodech než právě uvedených funkce $F(u)$ (jakožto funkce proměnných x, y, z) extrém vlastní míti nemůže.

Zevrubný důkaz těchto tvrzení — jež jsou takřka pouhými důsledky definice extrému — ponechávám čtenáři.

247. *Příklad* 6. **Důkaz fundamentální věty algebry.** K důkazu tomuto lze s prospěchem použiti některých obecných pojmů z nauky o extrémech. Specielních vět ku vyšetřování, zda nastává extrém, které v předcházejícím jsme odvodili a na příkladech použili, tu však netřeba.

Budu předpokládati při tomto příkladě věty o počítání s komplexními čísly, známé z elementární arithmetiky. Čísla komplexní budeme pak značiti řeckými písmeny, čísla reálná latinkou.

Věta, již máme dokázati, jest tato: Existuje vždy číslo ξ_0, které dosazeno byvši do výrazu

$$\alpha_n \xi^n + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \xi + \alpha_0, \qquad |\alpha_n| \neq 0 \tag{A}$$

za ξ činí tento výraz rovným nulle.

Nejprve dosadíme do (A) $\xi = x + iy$, $\alpha_k = a_k + b_k i$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tím výraz (A), provedeme-li příslušná umocnění a uspořádání, rozpadne se v část reálnou a ryze imaginárnou; t. j. ve tvar

$$P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

kde P, Q jsou polynomy v x, y n-tého stupně s reálnými součiniteli.

Budeme se pak zabývati relativními extrémy funkce

$$[P(x, y)]^2 + [Q(x, y)]^2 \tag{B}$$

a dokážeme si nejprve, že extrém takový (ať je to již extrém vlastní či nevlastní) nastati může toliko v bodech $[x_0, y_0]$, ve kterých $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$. K tomu postačí dokázati, že v bodech $[x_0, y_0]$, ve kterých není současně $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$, extrém nastati nemůže.

K tomu cíli dosaďme do (A) $\xi = \xi_0 + \xi'$, kde $\xi_0 = x_0 + iy_0$; dostaneme po jednoduché úpravě výraz

$$\alpha'_n \xi'^n + \alpha'_{n-1} \xi'^{n-1} + \ldots + \alpha'_0,$$

ve kterém $|\alpha'_n| = |\alpha_n| \neq 0$ a též $\alpha'_0 = P(x_0, y_0) + i\,Q(x_0, y_0)$ budiž různo od nully. Tento výraz lze upraviti opět na tvar (za předpokladu, že $\xi' = x' + iy'$)

$$\overline{P}(x', y') + i\,\overline{Q}(x', y')$$

a jde o to dokázati, že funkce $[\overline{P}(x', y')]^2 + [\overline{Q}(x', y')]^2$ nemá extrém v bodě $[x', y'] = [0, 0]$, je-li, jakož předpokládáme, α'_0, které se též rovná číslu $\overline{P}(0, 0) + i\,\overline{Q}(0, 0)$, různo od nully. Dokážeme totéž, dokážeme-li, že výraz (B) nemá extrém v $[0, 0]$, je-li $\alpha_0 (= P(0, 0) + i\,Q(0, 0) = a_0 + b_0 i)$ různo od nully (a tím se vyhneme čárkovaným značkám).

Místo proměnných $[x, y]$ zavedeme nové proměnné $[R, u]$ rovnicemi $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, abychom výrazy P a Q dostali ve tvaru co nejjednodušším; o R můžeme a budeme předpokládati, že $R > 0$. Jest pak totiž

$\xi = x + iy = R(\cos u + i\sin u)$ a dle Moivreovy věty

$$\xi^k = R^k(\cos ku + i\sin ku).$$

a tedy, dosadíme-li do (A) a rozložíme v část reálnou a ryze imaginárnou,

$$P(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} R^k(a_k \cos ku - b_k \sin ku),$$

$$Q(x, y) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} R^k(b_k \cos ku + a_k \sin ku);$$

výraz (B) stává se funkcí proměnných $[R, u]$, již označíme $f(R, u)$. Hodnota $f(0, u) = a_0^2 + b_0^2$ jest kladna a nezávisla na u a jest právě naším úkolem dokázati, že $f(0, u)$ není ani větší než všecky hodnoty $f(R, u)$, kde R jest v intervalu $(0 + 0, \varepsilon)$ a u libovolné, ani menší než všecky ty hodnoty a to ať si kladné číslo ε zvolíme jakkoliv malé. Dokážeme-li to, dokážeme, že výraz (B) nemůže míti v $[0, 0]$ relativní extrém.

Avšak

$$f(R, u)-f(0, u)=Rf'_R(\Theta R, u), \quad 0<\Theta<1$$

a postačí tudíž dokázati, že $f'_R(\Theta R, u)$ nemá pro všecka u a všecka R v $(0+0, \varepsilon)$ totéž znaménko. Při tom jest $\alpha_0 \neq 0$, α_1 však může býti rovno nulle; předpokládejme, abychom všecky možnosti současně měli na mysli, že první z čísel α_k o $k>0$, které jest různo od nully, jest $\alpha_q = a_q + ib_q$ (a všecka α_k o indexu menším než q, avšak větším než 0 nechť jsou rovna nulle). Pak jest

$$f'_R(R, u)=2(\Theta R)^{q-1}[qa_0(a_q \cos qu - b_q \sin qu) + qb_0(b_q \cos qu + \\ + a_q \sin qu) + \Theta R(\ldots) + \ldots + (\Theta R)^{2n-q}(\ldots)].$$

Má-li výraz na pravé straně této rovnice míti stále totéž znaménko pro všecka u a pro všecka R intervalu $(0+0, \varepsilon)$, musí první člen hranaté závorky (která jest mnohočlen v R, jak naznačeno) míti stále, t. j. pro všecka u, totéž znaménko anebo aspoň býti rovný nulle. Avšak první člen jest (nehledíme-li k činiteli q)

$$(a_0 a_q + b_0 b_q)\cos qu + (-a_0 b_q + b_0 a_q)\sin qu = S\cos(qu+s),$$

kde jsme kladli $a_0 a_q + b_0 b_q = S\cos s$, $+a_0 b_q - b_0 a_q = S\sin s$, tedy $S^2=(a_0^2+b_0^2)\cdot(a_q^2+b_q^2)>0$; není tedy prvý člen rovný nulle pro každé u a mění své znaménko, mění-li se u.

Nemůže tedy výraz (B) míti relativní extrém v bodě $[x_0, y_0]$, ve kterém není současně $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$.

Stanovme nyní v rovině proměnných $[x, y]$ kruh se středem $[0, 0]$ a poloměrem dosti velikým tak, aby na obvodě kruhu byl výraz (B) stále větší než $a_0^2+b_0^2$. To jest možno, neboť (B) stává se ∞ pro $\lim \xi = \infty$. Pak obor obsahující body uvnitř a na obvodě onoho kruhu jest oborem spojitým a uzavřeným; funkce pak daná výrazem (B), jež jest funkcí spojitou a konečnou v onom oboru, nabývá své horní i dolní hranice v tom oboru. Dolní hranice jest číslo menší $(\leqq)$ než $a_0^2+b_0^2$ a té nemůže nabývati na obvodě kruhu, nabývá jí tedy v bodě $[x_0, y_0]$ uvnitř kruhu, ve kterémžto bodě následkem toho má výraz (B) relativní minimum (po př. nevlastní). Avšak to jest možno jenom tentokráte — dle předcházejících vývodů — je-li současně $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$. Existuje tedy bod $[x_0, y_0]$, ve kterém obě ty rovnice jsou splněny, a jest tudíž i hodnota $\xi_0 = x_0 + iy_0$, která dosazena byvši za ξ činí výraz (A) rovným nulle. Fundamentální věta algebry pak jest úplně dokázána.

248. Relativní extrémy implicitních funkcí. Podmínky pro relativní extrémy implicitních funkcí vyplývají jakožto jednoduché důsledky vět o podmínkách pro relativní extrémy funkcí vůbec. Jest jenom třeba na některá početní zjednodušení tu poukázati.

1. *Implicitní funkce jedné neodvisle proměnné* budiž dána rovnicí $F(x, y)=0$, kde y jest právě funkce neodvisle proměnné x. Mějž dále funkce $F(x, y)$ v oboru přicházejícím v úvahu částečné derivace všech řádů, jež jsou spojité funkce obou proměnných. Pak, značí-li y_0 hodnotu implicitní funkce v bodě x_0 a je-li $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$, má implicitní funkce v bodě x_0 derivace všech řádů. Označme je po řadě $y'_0, y''_0, y'''_0, \ldots$ Potom nutná a postačující podmínka, aby funkce y měla v bodě x_0 relativní extrém, jest, aby $y'_0=0$ a aby první z derivací $y'_0, y''_0, y'''_0, \ldots$, jež jest od nully různá, byla řádu sudého (odst. 172, věta 2.). Uvážíme-li však, že derivace ty postupně jsou určeny rovnicemi

$$F'_x+F'_y.y'=0, \quad F''_{x^2}+2F''_{xy}.y'+F''_{y^2}y'^2+F'_y y''=0, \ldots,$$

v nichž klademe $[x, y]=[x_0, y_0]$, $y'=y'_0$, $y''=y''_0, \ldots$, vidíme ihned, že $y'_0=0$, je-li $F'_x(x_0, y_0)=0$ (a jenom tenkrát jest $y'_0=0$ za předpokladu učiněného, že $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$). Je-li však $y'_0=0$, jest dle druhé z rovnic $F''_{x^2}(x_0, y_0)+F'_y(x_0, y_0)y''=0$ a tedy $y''_0=0$ tenkráte (a jenom tenkráte), když $F''_{x^2}(x_0, y_0)=0$. Obdobně, je-li $y'_0=y''_0=0$, jest tenkráte a jenom tenkráte $y'''_0=0$, když $F'''_{x^3}(x_0, y_0)=0$, atd. Můžeme vysloviti tudíž větu:

Nabývá-li implicitní funkce y proměnné x v bodě $x=x_0$ hodnoty y_0, má-li levá strana rovnice $F(x, y)=0$ definující tu implicitní funkci v bodě $[x_0, y_0]$ a jeho okolí spojité derivace částečné dle x, y všech řádů a je-li $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$, pak nutná a postačující podmínka, aby y jakožto funkce proměnné x měla v bodě $x=x_0$ relativní extrém, jest, že první z řady derivací

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \ldots, \tag{A}$$

která v bodě $[x_0, y_0]$ není rovna nulle, jest řádu sudého. Je-li tato derivace v $[x_0, y_0]$ znaménka stejného s derivací $F'_y(x_0, y_0)$, jest extrém maximem; je-li znaménka protivného, minimem.

Ku vyhledání extrémů v jiných bodech (pro které předpoklady učiněné nejsou splněny), zejmena pak v bodech, ve kterých $F'_y(x_0, y_0)=0$, — pokud ovšem implicitní funkce v těch bodech danou rovnicí a po případě dalšími podmínkami jest definována — jest nutno další šetření.

Příklad. Vyhledati jest všecky možné extrémy funkce y proměnné x hovící rovnici

$$-2y^3+3yx+x^3=0.$$

Podmínky o existenci derivací věty svrchu vyslovené jsou splněny. Řada derivací (A) jest

$$3y + 3x^2,\ 6x,\ 6,\ 0,\ 0, \ldots$$

Je-li $x = 0$, jest dle dané rovnice i $y = 0$; v bodě [0, 0] však $F'_y(0, 0) = 0$ a nelze užiti řady derivací právě napsané. Ve všech ostatních bodech $x \neq 0$ jest F'_y různo od nully, je-li pro $[x, y]$ splněna daná rovnice a zároveň rovnice $F'_x(x, y) = 0$; i možno pro $x \neq 0$ užívati bez dalšího vyšetřování té řady derivací. Je-li $x \neq 0$, jest druhá derivace různa od nully, ať jest y jakékoliv; všecky body $[x, y]$ s x různým od nully, pro které daná rovnice jest splněna a $3y + 3x^2 = 0$, dávají nám tedy jednak x, při kterých nastává extrém impl. funkce, jednak příslušné hodnoty extremní impl. funkce. Dosadíme-li do dané rovnice $y = -x^2$, máme rovnici $2x^6 - 2x^3 = 0$, která vedle řešení $x = 0$ má kořen $x = 1$, kterému při implicitní funkci odpovídá extrémní hodnota -1 (relativní minimum).

Vedle bodu $x = 1$ může nastati extrém ještě v bodě $x = 0$, pro kterýž pak jest $y = 0$. Předpokládejme, že existuje implicitní funkce (stávající se nullou pro $x = 0$), jež má v bodě 0 a okolí derivace až do třetího řádu spojité v bodě $x = 0$. Pak derivujeme-li rovnici danou po sobě třikráte dle x, pokládajíce y za funkci proměnné x, a ve výsledku klademe $[x, y] = [0, 0]$, obdržíme rovnice, z nichž prvá jest identita $0 = 0$, druhé pak dvě dávají

$$6y' = 0, \quad -12y'^3 + 9y'' + 6 = 0; \quad \text{t. j.: } y' = 0, \quad y'' = -\tfrac{2}{3},$$

odkudž plyne, že při takové funkci (existuje-li vůbec) nastává v bodě $x = 0$ extrém (relativní maximum) rovný 0.

Čtenář nechť doplní vývody předcházející ještě vyšetřením bodů $[x_0, y_0]$, ve kterých vedle $F(x, y) = 0$ ještě $F'_y(x, y) = 0$ a $F'_x(x, y) \neq 0$. V takovém případě mohl by nastati v implicitní funkci příslušné extrém v bodě $x = x_0$ tenkráte, kdyby existovala derivace z prava a derivace z leva v širším smyslu; jedna pak by byla $+\infty$, druhá $-\infty$. Tak jest tomu ku př. při funkci implicitní hovící rovnici $y^{\frac{3}{2}} - x = 0$, jež pro $x = 0$ stává se rovnou nulle, v bodě $x = 0$. Funkce definované rovnicí tu vyšetřovanou však obdobné vlastnosti nemají.

2. *Implicitní funkce několika neodvisle proměnných* připouští při vyšetřování extrémů stejné zjednodušení jako implicitní funkce jedné proměnné. Uvažujme ku př. implicitní funkci z dvou neodvisle proměnných x, y, jež dána jest rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a uvažujme ji v okolí bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém nabývá hodnoty z_0, takže jest $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Najdeme podmínky postačitelné k extrému za předpokladu, že $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, a že funkce $F(x, y, z)$ má v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ a jeho okolí prvý a druhý totální differenciál. Pak z vět o extrémech funkcí o několika proměnných a z vět o implicitní funkci o několika neodvisle proměnných následuje (stejně jako při implicitní funkci o jedné proměnné), že postačující podmínky, aby v bodě $[x_0, y_0]$ měla funkce z extrém, jsou

1. $\dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$.

2. Kvadratická forma v dx, dy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 \tag{B}$$

jest v bodě $[x_0, y_0]$ formou, jež nestává se nullou pro žádné $[dx, dy]$ různé od $[0, 0]$. Je-li formou téhož znaménka jako číslo $F'_z(x_0, y_0, z_0)$, má z v $[x_0, y_0]$ relat. maximum; je-li znaménka protivného, r. minimum.

Příklad. Uvažujme ku př. rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + \\ + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \tag{r}$$

mezi z jakožto odvisle proměnnou a x, y jakožto neodvisle proměnnými. Veličina t jest zavedena do rovnice za tím účelem, aby se levá její strana stala formou kvadratickou (homogenním polynomem), čímž se docilují některá zjednodušení ve výrazech a příslušných počtech; během počtu jest to veličina libovolná vyznačená právě symbolem obecným jako ostatní proměnné, ve výsledku však možno jí přisouditi numerickou hodnotu libovolnou různou však od nully; ku př. lze klásti $t = 1$.

Tu se kvadratická forma (B) redukuje na výraz

$$a_{11}dx^2 + 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dy^2$$

(násobený dvěma), tento výraz jest vůbec nezávislý na $[x, y, z]$ a jest různý od nully pro všecka $[dx, dy]$ různá od $[0, 0]$, je-li $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. V tomto případě existuje relativní extrém, má-li ještě daná rovnice (r) společné řešení s rovnicemi

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = 0,$$

$(a_{ik} = a_{ki})$, pro kteréžto řešení však

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \neq 0.$$

Označme derivace levé strany rovnice (r) dle x, y, z, t krátce symboly X, Y, Z, T. Pak dvě rovnice poslední lze psáti ve tvaru $X = 0$, $Y = 0$, podmínka pak právě napsaná má tvar $Z \neq 0$. Rovnici (r) lze nahraditi rovnicí (odst. 225, př. 3.)

$$A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2 + 2A_{13}XZ + \ldots + A_{44}T^2 = 0, \tag{r'}$$

je-li ovšem diskriminant kvadratické formy v (r), t. j. výraz

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

různý od nully, což budeme předpokládati. Číslo A_{ik} jest minor příslušný v determinantu právě napsaném ku elementu a_{ik}. Dosadíme-li do (r') $X = 0$, $Y = 0$, obdržíme rovnici

$$A_{33} Z^2 + 2 A_{34} ZT + A_{44} T^2 = 0.$$

Rovnice tato má pro poměr $Z : T$ jenom tenkráte reálné kořeny, je-li její diskriminant $A_{34}^2 - A_{33}A_{44} \geqq 0$. Avšak $A_{34}^2 - A_{33}A_{44} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\varDelta$. Jelikož však požadujeme, aby $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, jest nutně $\varDelta < 0$. Máme tak tento první výsledek: Je-li $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ a $\varDelta \neq 0$, existují extrémy funkce z toliko, je-li $\varDelta < 0$. Je-li $A_{44} \neq 0$ a $A_{33} \neq 0$, má rovnice $A_{33}\lambda^2 + 2A_{34}\lambda + A_{44} = 0$ dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2 různé od nully a funkce z dva různé extrémy. Ze tří rovnic $X = 0$, $Y = 0$, $Z - \lambda_i T = 0$ lze vypočísti jim příslušné $[x, y, z]$; $i = 1, 2$. Stanovíme také hodnotu Z pro ty dva různé body $[x, y, z]$; obdržíme snadným počtem výrazy

$$\frac{2t\varDelta}{(\lambda_2 - \lambda_1)A_{33}}, \quad \frac{-2t\varDelta}{(\lambda_2 - \lambda_1)A_{33}},$$

jež se liší znaménkem. Jest tedy jeden z extrémů vždy maximem, druhý minimem

Vyšetření zvláštních případů, ve kterých jedno nebo několik ze čtyř čísel $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $\varDelta$, A_{33}, A_{44} jest rovno nulle, ponechávám čtenáři.

249. Extrémy vázané. (*Maxima a minima s vedlejšími podmínkami*). Úkol nalézti extrémy vázané nejprve osvětlím na nejjednodušším obecném případě. Budiž dána funkce $u = f(x, y)$ proměnných x, y. Jest vyšetřiti, ve kterých bodech $[a, b]$ nabývá u hodnot extrémních, je-li mezi x, y vztah $F(x, y) = 0$. Nejsou tedy x, y dvě neodvislé proměnné a hledaný extrém v bodě $[a, b]$ jest sice charakterisován podmínkou, že rozdíl

$$f(x, y) - f(a, b)$$

má míti stále totéž znaménko, nikoliv však pro všecky body $[x, y]$ jistého okolí bodu $[a, b]$, nýbrž pro všecky body jistého okolí bodu $[a, b]$, pokud pro ty body jest splněna podmínka $F(x, y) = 0$. Při tom jest též $F(a, b) = 0$.

Extrémům takovým u funkce $f(x, y)$ říká se právě extrémy vázané aneb též extrémy funkce $f(x, y)$ s vedlejší podmínkou $F(x, y)=0$.

Jest patrno, že, je-li rovnice $F(x, y)=0$ taková, aby bylo možno pokládati na jejím základě y jakožto funkci proměnné x (a to v okolí bodu $x=a$, při čemž y pro $x=a$ nabývá hodnoty $y=b$), můžeme u pokládati za funkci jediné proměnné x definovanou v okolí bodu $x=a$ a že rozhodnutí, zda $f(x, y)$ má v $[a, b]$ extrém vázaný podmínkou $F(x, y)=0$, převésti lze na rozhodnutí, zda ona funkce jedné proměnné x má v a extrém. Můžeme užíti method již známých, jakož v následujícím učiníme. Při tom budeme předpokládati, že funkce f, F mají jakožto funkce dvou proměnných spojité derivace prvých dvou řádů a tedy i prvé dva totální differenciály).

Jestliže funkce u jakožto funkce jedné proměnné x má extrém v bodě $[a, b]$, pak derivace té funkce dle x (při čemž pokládáme y za funkci prom. x, jež jest rovna b pro $x=a$) pro $x=a$ (a $y=b$) jest rovna nulle; t. j.:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0 \quad \text{pro } [x, y]=[a, b]. \qquad (\alpha)$$

Jestliže $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ pro $[x, y]=[a, b]$, jest y' v bodě $[a, b]$ dáno dle pravidla o derivování implicitních funkcí rovnicí

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'. \qquad (\beta)$$

Z (α), (β) pak následuje, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

a to ve všech bodech $[a, b]$, ve kterých jest extrém funkce $f(x, y)$ vázaný podmínkou $F(x, y)=0$ a ve kterých současně $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Avšak v předcházejících vývodech bychom mohli zaměniti roli proměnných x, y, z čehož následuje, že podmínka (I) jest nutna ku existenci extrému vázaného i v bodech, ve kterých $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$.

Abychom tedy nalezli všecky body $[a, b]$, ve kterých nastávati může extrém funkce $f(x, y)$ vázaný podmínkou $F(x, y)=0$, vyhledáme body $[a, b]$, které hoví zároveň rovnici (I) a rovnici $F(x, y)=0$; při tom však body, ve kterých současně $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ vylučujeme ze svých úvah. K rozhodnutí, zda v bodech tak nalezených vskutku nastává extrém, postačí znáti znaménko buď druhé derivace funkce u dle x, při čemž y se v důsledku rovnice $F(x, y) = 0$ pokládá za funkci proměnné x, aneb druhé derivace funkce u dle y (při čemž zase x jest považovati za funkci y) a to v obojím případě pro ten případ, že $[x, y] = [a, b]$, a za předpokladu, že derivace druhá právě v úvahu braná jest od nully různa. Znaménko to (v obou případech) shoduje se se znaménkem výrazu (jak čtenář snadným počtem odvodí)

$$\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{v bodě } [a, b]; \tag{II}$$

D jest levá strana rovnice (I).

Vedle extrémů tak nalezených jest ještě zvláštním vyšetřováním dosíci rozhodnutí, zda vázaný extrém nastává v bodech, ve kterých současně $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; dále v případech, kdy (II) jest v $[a, b]$ rovno nulle, a konečně i v bodech, ve kterých předpoklady pro funkce f, F činěné nejsou splněny.

Příklad. Nalézti extrémy pro vzdálenost daného bodu od daného kruhu. Pravoúhlý systém souřadnicový volíme tak, aby počátek splynul se středem daného kruhu a osa X procházela daným bodem. Má tedy kruh daný rovnici $x^2 + y^2 = R^2$ a daný bod jest $[l, 0]$; l budiž kladné. Místo extrémů vzdálenosti můžeme pak vyhledávati extrémy čtverce vzdálenosti Jest tedy nalézti extrémy funkce

$$u = (x - l)^2 + y^2, \quad \text{kde mezi } x, y \text{ jest rovnice} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Užijeme výsledků dosažených obecně, kladouce $f(x, y) = (x - l)^2 + y^2$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$. Dostaneme, dosadíme-li do (I), podmínku

$$4(x - l).y - 4y.x = 0, \quad \text{aneb} \quad -4ly = 0.$$

T. j. extrémy nastávati mohou nejprve v bodech, ve kterých $y = 0$ a tedy $x = \pm R$. Výraz (II), který jest v našem příkladě $8lx$, jest v bodě $[R, 0]$ kladný a v bodě $[-R, 0]$ záporný; má tudíž úkol předložený dvě řešení a vzdálenost uvažovaná nabývá v bodě $[-R, 0]$ hodnoty maximální (rovné $l + R$), v bodě $[R, 0]$ pak hodnoty minimální (rovné $|l - R|$). V jiných bodech než právě uvedených extrém nastati nemůže, neboť derivace F'_x, F'_y a funkce F nejsou současně rovny nulle pro jeden a týž bod ($R > 0$!).

Nalezené extrémy jsou zároveň extrémy absolutní.

Poznámka. Způsob, kterým jsme daný úkol řešili, odpovídá podanému obecnému výkladu. Ve skutečnosti lze jej prostě a krátce řešiti přímou úvahou. Dosadíme-li totiž do výrazu pro u za $x^2 + y^2 = R$, změní se u ve výraz

$$u = R^2 + l^2 - 2lx, \quad R > 0, \quad l > 0, \tag{m}$$

a výraz ten ubývá s rostoucím x ($u' = -2l < 0$). Dosáhne tedy u největší hodnoty, nabude-li x hodnoty co možná nejmenší; x však jest prvá souřadnice bodů na kruhu o rovnici $x^2 + y^2 = R^2$ a nejmenší hodnota pro x jest $-R$. Nastane tudíž v $[-R, 0]$ absolutní maximum a obdobně v $[R, 0]$ absolutní minimum. Extrémy tyto jsou však zároveň relativní extrémy s vedlejší podmínkou. Že pro jiné body extrémy výrazu (m) nastávati nemohou, jest rovněž přímo patrno.

250. Methoda multiplikatorů (Lagrangeova). Methody právě vyložené mohli bychom užívati i v případech obecnějších. Jednodušší však z pravidla jest použití jiné cesty, již v následujícím vyložím a jež liší se od předcházející v podstatě pouze pozměněným způsobem eliminace.

Nechť jest dána funkce $w = f(x, y, z, u, v)$ proměnných x, y, z, u, v, mezi nimiž jsou vztahy

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad F_2(x, y, z, u, v) = 0. \tag{γ}$$

Jest pak naším úkolem nalézti extrémy funkce w, vázané těmito dvěma vztahy a to za předpokladů:

1. Funkce f, F_1, F_2 mají prvý i druhý totální differenciál v jistém spojitém oboru Ω.

2. Rovnice (γ) jsou takové, že je-li $[x, y, z, u, v]$ v okolí bodu $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$, vnitřního to bodu oboru Ω, dvě z proměnných ku př. u, v dají se vyjádřiti jako funkce zbývajících proměnných x, y, z a to tak, že, je-li $[x, y, z] = [a_1, a_2, a_3]$, pak $[u, v] = [a_4, a_5]$. Funkce ty nechť mají rovněž dva totální differenciály v bodě $[a_1, a_2, a_3]$ a jeho okolí; postačitelnou podmínkou k tomu, jak nám známo, jest, aby $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} \neq 0$ v. bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$; podmínkou touto doplníme svůj druhý předpoklad.

Nutná podmínka, aby nastal extrém funkce w v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$ jest, aby

$$dw = 0 \quad \text{aneb} \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0 \tag{1}$$

v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$. Při tom však nejsou dx, dy, dz, du, dv na sobě nezávislé, nýbrž jsou mezi nimi dvě relace

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz + \frac{\partial F_1}{\partial u} du + \frac{\partial F_1}{\partial v} dv = 0, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz + \frac{\partial F_2}{\partial u} du + \frac{\partial F_2}{\partial v} dv = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

splněné v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$.

Pomocí posledních dvou rovnic eliminujeme z (1) du, dv, při čemž postupujeme takto. Rovnice (2) násobené činiteli λ_1, λ_2 přičteme ku rovnici (1) a λ_1, λ_2 volíme tak, aby součinitelé differenciálů du, dv byli ve výsledné rovnici rovni nulle v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$, t. j. aby

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial v}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial v}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial v}=0 \tag{3}$$

v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$. Ta volba čísel λ_1, λ_2 jest vždy možna, je-li $\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} \neq 0$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$, jakož předpokládáme. Rovnice tak vzniklá má pak tvar

$$A_1\,dx+A_2\,dy+A_3\,dz=0$$

a v ní můžeme differenciály dx, dy, dz pokládati již za veličiny na sobě nezávislé; nutně tedy $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$; t. j.

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}=0\end{gathered} \tag{4}$$

v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]=0$. Rovnice (3) a (4) dávají celkem 5 rovnic; označíme-li $\Phi=f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2$, můžeme rovnice ty psáti takto

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}=0, \tag{γ'}$$

jež splněny býti mají v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$ za předpokladu, že funkcionální determinant funkcí F_1, F_2 vzhledem k proměnným u, v jest v tom bodě různý od nully. Avšak rovnice úplně stejné bychom patrně dostali, kdybychom byli předpokládali, že determinant funkcionální funkcí F_1, F_2 vzhledem ke kterékoliv dvojici proměnných vybrané z proměnných x, y, z, u, v jest v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_5]$ různý od nully.

Máme tak pravidlo: Abychom našli body spadající do oboru Ω, ve kterých funkce $w=f(x, y, z, u, v)$ může míti extrém vázaný podmínkami $F_1(x, \ldots, v)=0$, $F_2(x, \ldots, v)=0$, řešíme 7 rovnic (γ), (γ') dle 7 neznámých x, y, z, u, v, λ_1, λ_2. Systémy hodnot tak získané pro $[x, y, z, u, v]$ udávají pak nám body v Ω, v nichž může w nabývati extrému vázaného, jestliže ovšem ty body $[x, y, z, u, v]$ spadají do Ω a jestliže aspoň jeden z deseti funkcionálních determinantů

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)},\quad \frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)},\ \ldots,\ \frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} \tag{δ}$$

jest v těch bodech různý od nully. Extrémy hledané pak mohou v Ω nastati jenom v bodech tak nalezených a po případě ještě také v bodech, ve kterých výrazy (δ) vesměs jsou rovny nulle (neboť na tyto body se nevztahuje předcházející úvaha).

Body $[x, y, z, u, v]$ hovící rovnicím (γ) a pro něž (δ) vesměs jsou rovny nulle, existují a vedou k extrémům funkce w jenom výjimečně; ty z dalších úvah vyloučíme a následkem toho můžeme zase předpokládati, že jeden z funkcionálních determinantů (δ) v bodě, o nějž jde, – budiž to ku př. poslední z nich — jest od nully různý. V okolí toho bodu lze pak pokládati u, v v důsledku (γ) opět (jako svrchu) za funkce proměnných x, y, z. Budiž pak dále pro ten bod (vedle rovnic (γ)) splněno 5 rovnic (γ') a máme vyšetřiti, zda vskutku v bodě onom nastává vázaný extrém. Ve velké většině případů stačí k tomu vyšetřování zabývati se podrobněji s druhým differenciálem funkce f anebo, což jest se zřetelem k rovnicím (γ) totéž, s druhým differenciálem funkce $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$. Jest však ($u$, v pokládáme za funkce proměnných x, y, z):

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} d^2 v.$$

Avšak tento výraz jest vyšetřovati v bodech, ve kterých jsou splněny (γ') a lze tedy poslední dva členy potlačiti a bráti v úvahu výraz

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 \Phi, \qquad (\varepsilon)$$

v němž dosazujeme za $[x, y, z, u, v, \lambda_1, \lambda_2]$ soustavu hodnot hovících rovnicím (γ), (γ'). Ve výraze tak vzniklém dvě z pěti veličin dx, dy, dz, du. dv (ku př. za předpokladu právě činěného du, dv) lze na základě lineárních rovnic (2), ve kterých za $x, y, \ldots, v$ jsme dosadili vyšetřované hodnoty, nahraditi lineárními výrazy ostatních, čímž dostaneme kvadratickou formu tří z oněch pěti veličin; běží pak o to, rozhodnouti, zda kvadratická forma těchto tří proměnných jest formou stávající se nullou pouze v $[0, 0, 0]$ a ve kterémž případě jistě nastává vázaný extrém, či také v jiných bodech různých od $[0, 0, 0]$. Příslušné úvahy provedeny již v odst. 246. a netřeba je tady opakovati.

Poznámka 1. Methodou v tomto odst. vyloženou lze vyhledávati extrémy implicitních funkcí, pro něž jsme svrchu (v odst. 248.) odvodili methodu zvláštní.

Tak ku př. úkol vyhledati extrémy funkce z proměnných x, y, definované rovnicí $F(x, y, z) = 0$, shoduje se s úkolem, při němž hledáme extrémy funkce w, funkce to tří proměnných x, y, z, kde však $w = z$ (a nezávisí vskutku vůbec na proměnných x, y) a kde mezi proměnnými x, y, z jest vztah $F(x, y, z) = 0$. Dle předcházejících úvah jest tu klásti

$$\Phi(x, y, z) = z + \lambda F(x, y, z)$$

a řešiti soustavu čtyř rovnic

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad 1+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0,\quad F(x,\,y,\,z)=0$$

pro čtyři neznámé x, y, z, λ, při čemž podržujeme jenom to řešení, pro které aspoň jedna z derivací $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ není rovna nulle. A. t. d.

Poznámka 2. Čísla λ_1, λ_2 svrchu zavedená jsou konstanty; ovšem různé konstanty pro různé body $[a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5]$, jež přicházejí v úvahu. Můžeme je tudíž pokládati také za funkce bodu $[x,\,y,\,z,\,u,\,v]$, což však na věci samé pranic nemění. Specielně nemá toto zdánlivě rozdílné nazírání na čísla λ_1, λ_2 vliv na tvar výrazu $d^2\Phi$ v bodech, ve kterých jsou splněny (γ').

Poznámka 3. To, že aspoň jeden z determinantů (δ) jest různý od nully v bodě $[a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5]$, který právě uvažujeme, má ještě jinde význam než v okolnosti, že pro podmínku nutnou k existenci extrému v bodě $[a_1,\,a_2,\,.\,.\,,\,a_5]$ dostáváme rovnice (γ'), jež jsou symmetrické vzhledem ku všem proměnným x, y, z, u, v. Význam ten byl v předcházejícím jenom zběžně vytčen a jest třeba tu výslovně na něj poukázati a zevrubněji objasniti.

Je-li ku př. poslední z determinantů (δ) různý od nully v $[a_1,\,.\,.\,,\,a_5]$, můžeme u, v v důsledku (γ) pokládati za funkce bodu $[x,\,y,\,z]$ definované v celém jistém okolí bodu $[a_1,\,a_2,\,a_3]$ a následkem toho můžeme v důsledku rovnic (γ) pokládati $f(x,\,y,\,z,\,u,\,v)$ za funkci bodu $[x,\,y,\,z]$ definovanou v $O(a_1,\,a_2,\,a_3;\,\varepsilon)$, kde ε jest jisté kladné číslo. Má-li tedy $f(x,\,y,\,z,\,u,\,v)$ v bodě $[a_1,\,a_2,\,.\,.\,,\,a_5]$ extrém vázaný rovnicemi (γ), má tato funkce $f(x,\,y,\,z,\,u,\,v)$, pokládáme-li ji naznačeným způsobem za funkci tří proměnných x, y, z, extrém v bodě $[a_1,\,a_2,\,a_3]$, bodě to *vnitřním* oboru, ve kterém jest definována (má tedy v bodě $[a_1,\,a_2,\,a_3]$ dle definice odst. 242. relativní extrém) a můžeme tudíž teprve na základě této okolnosti užívati rovnic nutných pro relativní extrém, odvozených v odst. 242.

Poznámka 4. Výklad podaný rozšiřuje se beze změny na libovolný počet proměnných. Jde-li o extrém funkce $w=f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m)$, kde m proměnných jest vázáno n podmínkami $F_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0$, $i=1,2,\ldots,n$, (při čemž ovšem $n<m$), sestrojíme funkci

$$\Phi=f(x_1,\ldots)+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\ldots+\lambda_nF_n$$

a řešíme $m+n$ rovnic

$$F_i(x_1,\,x_2,\,\ldots)=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}=0;\quad i=1,\,2,\,.\,.\,,\,n;\quad j=1,\,2,\,.\,.\,,\,m$$

dle neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (o celkovém počtu rovněž $m+n$). Jenom v bodech $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ tak nalezených může nastávati relativní extrém s danými vedlejšími podmínkami. K úplnému rozhodnutí, zda extrém nastává, jest třeba vyšetřovati kvadratickou formu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \Phi,$$

kterou jest ještě zpravidla převésti na kvadratickou formu $m-n$ z m čísel $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$. Při tom se předpokládá (jako v případě zvláštním)

1. Funkce f, F_i mají prvý i druhý totální differenciál ve spojitém oboru Ω.

2. Berou se v úvahu pouze ty body oboru Ω, pro něž současně nevymizí všecky funkcionální determinanty

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}, \quad j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

jichž jest $\binom{m}{n}$ od sebe různých.

Příklad 1. Jest vyšetřiti, zda funkce $x^2+y^2+z^2-u^2-v^2$ má extrém vázaný podmínkami

$$x^3+2yz+u^2v+ux+v=0, \quad y^3+2xz-uv^2-vy+u=0$$

a to v bodě $[x, y, z, u, v]=[0, 0, 0, 0, 0]$ (splňujícím ovšem obě dané rovnice). Značíme-li danou funkci f, levé strany obou daných rovnic F_1, F_2, máme nejprve rovnice (3), jež splněny býti mají v daném bodě a jež nám dají λ_1, λ_2. Dostaneme snadným počtem $\lambda_1=0, \quad \lambda_2=0$. Jest tedy $\Phi=f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2=f$ a jak téměř bezprostředně patrno, jsou splněny i rovnice (4) — tedy všecky rovnice (γ') i (γ). Nutná podmínka pro existenci vázaného extrému funkce f v bodě $[0, \ldots, 0]$ jest splněna a zbývá jenom vyšetřovati druhý differenciál (ε). Ten jest

$$2\,dx^2+2\,dy^2+2\,dz^2-2\,du^2-2\,dv^2.$$

Avšak dle daných rovnic v daném bodě $du=0$, $dv=0$; následkem toho pro daný bod se druhý differenciál redukuje na výraz $2(dx^2+dy^2+dz^2)$, což jest kvadratickou formou nestávající se nullou než pro $[dx, dy, dz]=$ $=[0, 0, 0]$ a to formou positivnou. Daná funkce má tedy v bodě $[0, 0, 0, 0, 0]$ relativní minimum, vázané danými dvěma podmínkami.

Příklad 2. Jest vyhledati extrémní hodnotu determinantu

$$D=\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}, \qquad (l)$$

funkce to 9 proměnných $x_1, x_2, \ldots, z_3$ za předpokladu, že mezi těmito proměnnými jsou tři vztahy

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0,\; y_1^2+y_2^2+y_3^2-1=0,\; z_1^2+z_2^2+z_3^2-1=0. \quad (m)$$

Levé strany těchto vztahů značiti budeme pro krátkost F_1, F_2, F_3. V *každém* bodě, v němž nastává relativní extrém funkce D vázaný těmito vztahy, lze užíti rovnic tohoto odstavce. Neboť případ vyloučený z úvah, ve kterém *všecky* determinanty

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x_i, y_j, z_k)}=8x_iy_jz_k,\; i, j, k \text{ mohou nabývati hodnot } 1, 2, 3 \quad (n)$$

jsou rovny nulle, nemůže nastati, jelikož aspoň jedno z čísel x_i (v důsledku relace $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$) jest různo od nully, rovněž tak jedno z čísel y_j a jedno ze z_k.

V případě tu uvažovaném jest patrno předem, že relativní vázaný extrém vskutku nastává (může to však býti — a také, jak poznáme, jest — extrém nevlastní). Neboť body hovící rovnicím $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ leží všecky v „krychli“ O (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 1); pro body této krychle jest však D shora i zdola ohraničeno (neboť jest $|D|\leqq 6$); tím spíše jest D shora i zdola ohraničeno pro všecky body hovící rovnicím $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$. Jelikož pak D jest funkce spojitá bodu $[x_1, \ldots, z_3]$ vázaného podmínkami (m), nabývá D této horní i dolní hranice, kteréž pak jsou v důsledku toho, že všecky determinanty (n) nemohou současně v tom bodě býti rovny nulle, relativní extrémy vázané (po případě nevlastní). Rovnice (γ') tu dávají (minory příslušné v D ku prvkům x_i, y_j, z_k označíme po řadě X_i, Y_j, Z_k; za Φ volíme výraz $2D+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\lambda_3F_3$) devět rovnic

$$X_i+\lambda_1x_i=0,\quad Y_j+\lambda_2y_j=0,\quad Z_k+\lambda_3z_k=0;\quad i, j, k=1, 2, 3.$$

Z vztahu $X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=D$, z rovnice $F_1=0$ a z prvých tří rovnic následuje snadno $D+\lambda_1=0$. Obdobně $\lambda_2=-D$, $\lambda_3=-D$ Máme tak relace

$$x_i=\frac{1}{D}X_i,\quad y_j=\frac{1}{D}Y_j,\quad z_k=\frac{1}{D}Z_k; \quad (q)$$

Dosadíme-li na jich základě do (l), máme ihned $D^2=1$, t. j. $D=\pm 1$. Relativní extrémy vázané (o kterých víme, že existují aspoň dva, jedno maximum a jedno minimum) jsou tedy při funkci D tyto: relativní maximum rovné $+1$ a relativní minimum vázané rovněž -1. Extrémy ty nastávají v bodech splňujících jednak (m), jednak (q), ze kterých však následuje

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0,\; x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0,\; y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=0, \quad (r)$$

(a naopak z (r) a (m) následuje snad (q)). Jsou tudíž proměnné $(x_1, \ldots, z_3)$ koefficienty orthogonální transformace (odst. 229.). Rovnicemi (m), (r) nejsou však čísla $x_1, \ldots, z_3$ úplně stanovena, nýbrž jsou v důsledku těch rovnic funkce tří parametrů libovolně proměnných (Eulerovo vyjádření orth. transformace). Odtud pak jest patrno, že extrémy, o něž tu jde, jsou extrémy nevlastní.

Vývody předcházející rozšiřují se na determinanty kteréhokoliv stupně. Dospíváme tak k *větě Hadamardcvě*: Hoví-li v determinantu

$$D = | a_{ik} |, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

reálná čísla a_{ik} rovnicím

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = 1,$$

jest $| D | \leq 1$. Hodnoty $D = \pm 1$ nabývá pak D tenkráte a jenom tenkráte, jsou-li a_{ik} koeficienty orthogonální substituce.

Příklad 3. Jsou dány v prostoru trojrozměrném tři mimoběžky P_1, P_2, P_3. Jest na přímce P_k zvoliti bod m_k, $k = 1, 2, 3$ tak, aby délka lomené čáry $m_1\, m_2\, m_3\, m_1$ byla minimum. Jedná se tedy o minimum výrazu

$$\overline{m_1 m_2} + \overline{m_2 m_3} + \overline{m_3 m_1}. \qquad (r)$$

Nejprve jest patrno, že aspoň jedno takové minimum nutně existuje. Neboť výraz (r) jest kladný a má tedy (r) jistou dolní hranici, jež jest číslo kladné (přímky P_k jsou přímky se neprotínající) a jíž nabývá pro určitou trojici bodovou (resp. trojice bodové) v důsledku známé nám věty o funkcích spojitých, dle níž funkce spojitá v oboru spojitém uzavřeném*) nabývá své dolní hranice. Buďtež tedy m_1^0, m_2^0, m_3^0 tři body takové, že (r) nabývá relativního extrému pro $m_1 = m_1^0$, $m_2 = m_2^0$, $m_3 = m_3^0$ (a jichž existenci jsme prokázali).

Abychom ustanovili polohu hledané trojice $m_1^0 m_2^0 m_3^0$ vzhledem k mimoběžkám P_k, můžeme voliti systém os souřadných tak, aby vyše-

*) Každý z bodů m_1, m_2, m_3 lze totiž jednoznačně charakterisovati číslem (parametrem), které se mění spojitě od $-\infty$ do $+\infty$, když příslušný bod mění spojitě svou polohu na přímce. Jest tedy výraz (r) v podstatě spojitou funkcí tří proměnných (tří parametrů) t_1, t_2, t_3, t. j. bodu $[t_1, t_2, t_3]$ a to v celém oboru trojrozměrném. Při tom zároveň vzdálenost bodu m_1 od pevného bodu m roste nadevšecky meze, jestliže $\lim | t_1 | = \infty$ a rovněž výraz (r) roste nade všecky meze, když současně $\lim | t_1 | = \infty$, $\lim | t_2 | = \infty$, $\lim | t_3 | = \infty$, neboť přímky P_1, P_2, P_3 jsou mimoběžky. Lze tedy z oboru bodu $[t_1, t_2, t_3]$ odděliti konečný, spojitý a uzavřený obor Ω tak, že vně oboru Ω výraz (r) jest stále větší než číslo $\mathfrak{M}$, uvnitř oboru Ω pak nabývá (r) též hodnot menších než $\mathfrak{M}$. Odtud tvrzení činěné v textu snadno plyne.

třování příslušné bylo co nejjednodušší. Jsou pak celkem tři případy možny, jež nutno zvlášť vyšetřovati.

a) Případ prvý nechť nastává tenkráte, když body m_1^0, m_2^0, m_3^0 neleží na jedné přímce a zároveň žádná z přímek P_1, P_2, P_3 v rovině trojúhelníka $m_1^0 m_2^0 m_3^0$. Tu zvolíme počátek soustavy souřadné v bodě m_1^0, kterýžto bod nechť jest zároveň vrcholem největšího úhlu v trojúhelníku $m_1^0 m_2^0 m_3^0$; rovina XY nechť splývá s rovinou trojúhelníka $m_1^0 m_2^0 m_3^0$ a osa X nechť jest kolma ku straně $m_2^0 m_3^0$. Pak rovnice stran trojúhelníka $m_1^0 m_2^0 m_3^0$, přímek to položených v rovině XY, jsou

$$
\begin{aligned}
&\text{přímky } \overline{m_2^0 m_3^0}: \quad x - m = 0,\\
&\text{přímky } \overline{m_3^0 m_1^0}: \quad a_2 x - b_2 y = 0,\\
&\text{přímky } \overline{m_1^0 m_2^0}: \quad a_3 x + b_3 y = 0
\end{aligned}
$$

a budeme předpokládati, že čísla m, a_2, b_2, a_3, b_3 jsou vesměs čísla kladná a $a_2^2 + b_2^2 = 1$, $a_3^2 + b_3^2 = 1$ (kterýž předpoklad není na újmu všeobecnosti). Rovnicím mimoběžek P_1, P_2, P_3 lze pak patrně dáti tvar

$$
\begin{aligned}
&\text{při mimoběžce } P_1: \quad a_2 x - b_2 y + M_{12} z = 0, \quad a_3 x + b_3 y + M_{13} z = 0\\
&\text{při mimoběžce } P_2: \quad a_3 x + b_3 y + M_{23} z = 0, \quad x - m + M_{21} z = 0\\
&\text{při mimoběžce } P_3: \quad x - m + M_{31} z = 0, \quad a_2 x - b_2 y + M_{32} z = 0
\end{aligned}
\tag{s}
$$

(neboť mimoběžku P_1 ku př. lze pokládati za průsek roviny procházející přímkami P_1 a $\overline{m_3^0 m_1^0}$ s rovinou procházející přímkami P_1 a $\overline{m_1^0 m_2^0}$).

Výraz (r) jest rovný výrazu (m_1 nechť jest bod $[x_1, y_1, z_1]$ a obdobně m_2, m_3)

$$
\begin{aligned}
V = &\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} +\\
&+ \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} +\\
&+ \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}
\end{aligned}
$$

a výraz tento stává se extrémem za předpokladu, že $[x_k, y_k, z_k]$ jest na P_k, když $m_1 = m_1^0$, $m_2 = m_2^0$, $m_3 = m_3^0$; t. j. když

$$
[x_1, y_1, z_1] = [0, 0, 0], \quad [x_2, y_2, z_2] = \left[m, -\frac{a_3}{b_3} m, 0\right], \quad [x_3, y_3, z_3] = \\
= \left[m, \frac{a_2}{b_2} m, 0\right]. \tag{t}
$$

Jsou tedy derivace funkce 9 proměnných $x_1, y_1 \ldots, z_3$

$$
\begin{aligned}
V + \lambda_{12}(a_2 x_1 - b_2 y_1 + M_{12} z_1) + \lambda_{13}(a_3 x_1 + b_3 y_1 + M_{13} z_1) + \ldots\\
+ \lambda_{32}(a_2 x_3 - b_2 y_3 + M_{32} z_3)
\end{aligned}
\tag{t'}
$$

dle těchto proměnných rovny nulle, jestliže do oněch derivací dosadíme dle rovnic (t).

Těmito devíti rovnicemi jsou dány [podmínky mezi 6 čísly M_{12}, M_{13}, .., M_{32} a šesti pomocnými konstantami λ_{12}, λ_{13}, .., λ_{32}. Tak ku př. vypočteme-li derivace té funkce dle proměnných x_1, y_1, z_1, máme po dosazení dle (t) ihned tyto vztahy (čtenář k vůli přehledu může si nakresliti v rovině XY trojúhelník $m_1^0 m_2^0 m_3^0$; zároveň jest si vzpomenouti na předpoklady o číslech a_2, a_3, b_2, b_3)

$$-b_3 - b_2 + \lambda_{12} a_2 + \lambda_{13} a_3 = 0, \quad a_3 - a_2 - \lambda_{12} b_2 + \lambda_{13} b_3 = 0,$$
$$\lambda_{12} M_{12} + \lambda_{13} M_{13} = 0.$$

Z nich následuje řešením

$$\lambda_{13}(a_3 b_2 + a_2 b_3) = 1 - (a_3 a_2 - b_3 b_2), \; \lambda_{12}(a_3 b_2 + a_2 b_3) = 1 - (a_3 a_2 - b_3 b_2);$$

tedy $\lambda_{13} = \lambda_{12}$ a $M_{12} = -M_{13}$. Stejně následuje $M_{23} = M_{21}$ a $M_{31} = M_{32}$.

Je-li tedy, jakož předpokládáme, trojúhelník $m_1^0 m_2^0 m_3^0$ takový, že pro jeho obvod nastává relativní extrém výrazu (r), mají mimoběžky P_1, P_2, P_3 rovnice tvaru

$$\begin{aligned}
&\text{mimoběžka } P_1: \quad a_2 x - b_2 y + M_1 z = 0, \quad a_3 x + b_3 y - M_1 z = 0,\\
&\text{mimoběžka } P_2: \quad a_3 x + b_3 y + M_2 z = 0, \quad x - m + M_2 z = 0,\\
&\text{mimoběžka } P_3: \quad x - m + M_3 z = 0, \quad a_2 x - b_2 y + M_3 z = 0,
\end{aligned}$$

kde M_1, M_2, M_3 jsou konstanty omezené toliko podmínkou, že žádné dvě z přímek P_1, P_2, P_3 vzájemně se neprotínají.

Má tedy průmět přímky P_1 na rovinu XY — t. j. na rovinu trojúhelníka $m_1^0 m_2^0 m_3^0$ — rovnici

$$(a_3 + a_2) x + (b_3 - b_2) y = 0 \qquad (u)$$

a obdobně mají průměty přímek P_2, P_3 na touž rovinu rovnice

$$(a_3 - 1) x + b_3 y + m = 0, \quad (a_2 - 1) x - b_2 y + m = 0. \qquad (v)$$

Průměty tyto tvoří trojúhelník položený v XY, jehož strany procházejí body m_1^0, m_2^0, m_3^0 a v němž paty výšek jsou právě body m_1^0, m_2^0, m_3^0, jak snadným počtem čtenář dokáže).*

$b)$ V případě druhém nechť rovněž body m_1^0, m_2^0, m_3^0 neleží v jedné přímce, jedna však z přímek P_1, P_2, P_3 — nechť jest to ku př. P_1 — budiž položena v rovině trojúhelníka m_1^0, m_2^0, m_3^0. Soustavu souřadnou volíme stejně jako v případě předcházejícím; též rovnice přímek $\overline{m_2^0 m_1^0}$, ..

*) Tak ku př. rozdíl levých stran rovnic (v), položen byv roven nulle, dává rovnici $(a_3 - a_2) x + (b_3 + b_2) y = 0$, rovnici to přímky procházející průsekem průmětů přímek P_2, P_3. Avšak tato přímka prochází též bodem $[x, y] = [0, 0] = m_1^0$ a jest kolma ku přímce o rovnici (u), t. j. kolma ku průmětu přímky P_1. Stejně se dokáže tvrzení nahoře uvedené pro ostatní výšky.

Rovnice přímky P_1 předpokládati budeme ve tvaru $cx+dy=0$, $z=0$, rovnice přímek P_2, P_3 ve tvaru (s). Výraz (t') změní se jenom potud, že dva členy $\lambda_{12}(a_{21}x_1\ldots)+\lambda_{13}(\ldots)$ nahradí se členem jedním $\lambda_1(cx_1+dy_1)$ tak, že klademe-li derivace výrazu tak vzniklého dle x_1, y_1 rovny nulle, obdržíme rovnice

$$-b_3-b_2+\lambda_1 c=0,\quad a_3-a_2+\lambda_1 d=0.$$

I jest tedy v tomto případě rovnice přímky P_1 dána ve tvaru $(b_2+b_3)x+(a_2-a_3)y=0$, $z=0$, což jest v podstatě táž rovnice jako v případě a) pro průmět přímky P_1 na rovinu trojúhelníka $m_1^0\ m_2^0\ m_3^0$. Pro rovnice přímek P_2, P_3 a jich průmětů dostáváme tytéž výrazy jako v případě předcházejícím.

Jest tedy v případě b) konečný závěr tentýž jako v případě a).

Kdybychom byli předpokládali, že z přímek P_1, P_2, P_3 leží buď přímka P_2 aneb přímka P_3 v rovině trojúhelníka $m_1^0\ m_2^0\ m_3^0$, byli bychom získali stejným způsobem rovněž tentýž konečný závěr.

c) V případě třetím buďtež body m_1^0, m_2^0, m_3^0 položeny v jedné přímce, již zvolíme za osu Y; počátek souřadnic dáme do bodu m_1^0, který předpokládáme položený mezi body m_2^0, m_3^0. Tím dostáváme pro body m_1^0, m_2^0, m_3^0 souřadnice $[0, 0, 0]$, $[0, n_2, 0]$, $[0, -n_3, 0]$, kdež pokládati budeme čísla n_2, n_3 za kladná. Rovnice přímek P_1, P_2, P_3 můžeme zároveň předpokládati vždy ve tvaru (neboť soustavu souřadnicovou můžeme ještě otáčeti kolem osy Y)

$$y=g_1x,\quad z=h_1x;\quad y=g_2x+n_2,\quad z=h_2x;\quad y=g_3x-n_3,\quad z=h_3x$$

a v důsledku toho můžeme výraz V pokládati za funkci tří proměnných x_1, x_2, x_3 a řešiti v tomto případě náš úkol dle pravidel odst. 242 Derivace výrazu V dle x_1, resp. x_2, x_3 v bodě $[x_1, x_2, x_3]=[0, 0, 0]$ jsou

$$-g_1+g_1,\quad g_2+g_2,\quad -g_3-g_3.$$

Položíme-li ty derivace rovny nulle, dostaneme jakožto nutné podmínky pro existenci extrému v tomto případě rovnice $g_2=0$, $g_3=0$; t. j. přímky P_2, P_3 musí býti kolmy ku přímce bodů m_1^0, m_2^0, m_3^0. Anebo jinak: *Společná kolmice ku přímkám P_2 P_3 protíná přímku P_1 a to tak, že bod přímky P_1 položený na společné kolmici jest uvnitř úsečky vymezené na společné kolmici body přímek P_2, P_3.*

Nalezli jsme v předcházejícím nutné podmínky k existenci extrému pro $m_1=m_1^0$, $m_2=m_2^0$, $m_3=m_3^0$ ve všech jedině možných případech a zbývá jenom vyšetřiti ještě podmínky postačující. K tomu dospějeme vyšetřením druhého differenciálu výrazu (t') aneb což jest totéž výrazu V.

Druhý differenciál výrazu V skládá se ze tří sčítanců, z nichž první jest zlomek o čitateli

$$
\begin{aligned}
&[(x_1 - x_2)(dy_1 - dy_2) - (y_1 - y_2)(dx_1 - dx_2)]^2 + \\
&+ [(y_1 - y_2)(dz_1 - dz_2) - (z_1 - z_2)(dy_1 - dy_2)]^2 + \\
&+ [(z_1 - z_2)(dx_1 - dx_2) - (x_1 - x_2)(dz_1 - dz_2)]^2
\end{aligned}
$$

a jmenovateli $[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}$. Ostatní sčítanci vznikají cyklickou záměnou indexů 1, 2, 3. Čitatel svrchu vypsaný jest, jak známo, součin čtverce vzdálenosti bodů $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$ a čtverce vzdálenosti bodů $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1]$, $[x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2]$ násobený čtvercem sinusu úhlu spojnic dvou dvojic bodových právě vytknutých. Spojnice ty však nemohou býti rovnoběžny, neboť body $[x_k, y_k, z_k]$, $[x_k + dx_k, \ldots]$ leží na přímce P_k a přímky P_1, P_2, P_3 jsou mimoběžky, i neleží tudíž dvě z nich v jedné rovině (jak by tomu bylo u přímek P_1, P_2, kdyby P_1 i P_2 protínaly dvě rovnoběžné přímky). Jest tedy čtverec sinusu úhlu svrchu uvažovaný číslo jistě kladné a tedy i čitatel nahoře vypsaný a druhý differenciál výrazu V stále kladný (pro všechny body a přírůstky $dx_1, \ldots, dz_3$ přicházející v úvahu).

Z toho však následuje, že ve všech případech svrchu probraných *a*), *b*), *c*) nastává extrém a ten jest minimum. Jelikož pak jest druhý differenciál v celém oboru stále kladný, nastává v našem problému nejvýše jedno minimum a že aspoň jedno nastává, víme již od počátku. Následkem toho můžeme tvrditi :

Protíná-li jedna ze tří mimoběžek P_1, P_2, P_3 kolmici společnou ke druhým dvěma mimoběžkám a to v bodě, který leží uvnitř úsečky omezené na společné kolmici patami té kolmice, jsou tři body tak vyznačené na mimoběžkách P_1, P_2, P_3 takové, že pro ně výraz (r) stává se relativním (a absolutním) minimem. Jiného relativního extrému v tomto případě výraz (r) nemá.

Nenastává-li případ právě vytčený (a jenom tenkráte, když nenastává), pak existuje jedna jediná rovina, jež protíná mimoběžky P_1, P_2, P_3 v bodech m_1^0, m_2^0, m_3^0, jež jsou patami výšek v trojúhelníku, který vznikne průmětem přímek P_1, P_2, P_3 na rovinu trojúhelníka $m_1^0\, m_2^0\, m_3^0$. V případě tomto existuje rovněž jediný relativní extrém výrazu (r) a to v případě že trojice bodů m_1, m_2, m_3 splyne s trojicí m_1^0, m_2^0, m_3^0; extrém tento jest opět relativní (i absolutní) minimum.

Poznámka 1. Vyšetřování tu podané lze bez potíže rozšířiti pro libovolnou polohu tří přímek P_1, P_2, P_3 v prostoru nevázanou k podmínce, že přímky ty mají býti mimoběžné. Jest třeba v tomto obecnějším pojetí úkolu vedle případů *a*), *b*), *c*) svrchu projednávaných uvažovati ještě další možnosti, což však v podstatě neposkytne nových obtíží. Doporučuji provedení úvah příslušných čtenáři; k vůli jednoduchosti lze při tom případ, že by se všecky tři přímky protínaly v jednom bodě i případ, že by tři ty přímky byly spolu rovnoběžny (ve kterýchžto případech jest vždy evidentní řešení) z úvah vyloučiti.

Poznámka 2. Při řešení příkladu 3. jsme použili věty, již ve znění poněkud rozšířeném lze vysloviti takto: Existuje-li druhý totální differenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots)$ ve spojitém a souvislém oboru Ω a je-li tento differenciál v Ω buď stále kladný (>0) aneb stále záporný (<0), pak funkce $f(x_1, x_2, \ldots)$ má ve vnitřních bodech oboru Ω nejvýše jeden relativní extrém. Při tom jest však třeba o oboru Ω předpokládati, že jest to obor konvexní; t. j. že úsečka spojující dva libovolné vnitřní body toho oboru probíhá cele uvnitř toho oboru. Předpoklad tento jest zejména splněn, je-li Ω obor celý jako v našem případě (viz pozn. pod čarou na str. 420.).

Větu tuto dokáže čtenář nejprve snadno pro funkce o jedné proměnné. Kdyby věta nebyla platna pro funkce o několika proměnných, pak by existovala funkce o vlastnostech větou vytčených, jež by měla v oboru Ω relativní extrémy aspoň ve dvou bodech vnitřních $[x_1^1, x_2^1, \ldots]$, $[x_1^2, x_2^2, \ldots]$. Funkce o jedné proměnné t

$$F(t) = f\,[x_1^1 + (x_1^2 - x_1^1)t,\ x_2^1 + (x_2^2 - x_2^1)t, \ldots]$$

by pak měla relativní extrémy dva a to v bodech $t = 0$, $t = 1$. Avšak $F(t)$ má dle t druhý differenciál, jenž jest v jistém intervalu (a, b), kde $a < 0$, $b > 1$, buď stále > 0 aneb stále < 0, jakož následuje z předpokladu o $f(x_1, x_2, \ldots)$. Nemůže tedy $F(t)$ v (a, b) míti dva relativní extrémy uvnitř (a, b) a tudíž ani $f(x_1, x_2, \ldots)$ dva relativní extrémy uvnitř Ω.

251. Základní věta o dvou formách kvadratických. Jako další příklad pro užití obecných vět o extrémech vázaných budeme řešiti jeden úkol týkající se dvou forem kvadratických, ze kteréhož řešení jako důsledek vyplyne velice důležitá věta o dvou kvadratických formách. Vývody následující platny jsou pro libovolný počet proměnných; abychom však docílili jednodušší označení a tím zvýšili přístupnost a přehlednost výkladu, provedeme úvahy následující pro kvadratické formy o třech proměnných.

Buďtež dány dvě formy kvadratické bodu $[x, y, z]$

$$F = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz + 2\,Exz + 2\,Gxy,$$
$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,dyz + 2\,exz + 2\,gxy.$$

O druhé z nich — o f — učiníme předpoklad, že nestává se nullou nikde vyjma ovšem v bodě [0, 0, 0]; nemění tedy f své znaménko, mění-li se $[x, y, z]$, a nechť jest stále kladna. Úkol, od kterého budeme vycházeti, jest pak tento: Najděte bod $[x, y, z]$, pro který F nabývá hodnoty maximální za předpokladu, že pro $[x, y, z]$ jest splněna rovnice $f=1$.

Jest snadno předem ukázati, že úkol daný má řešení. Neboť nejprve jest jasno, že na ohraničení oboru $O\ (\overline{0,\ 0,\ 0;1})$ nabývá f hodnot vesměs kladných, jež mají určitou dolní hranici $m>0$ (neboť f jest spojitou funkcí bodu na tom ohraničení a nabývá jako taková své dolní hranice*). Vně oboru $O\ (\overline{0,\ 0,\ 0;1})$ nabývá f hodnot vesměs větších než m; neboť v bodech paprsku $[\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0]$, kde proměnná $\lambda>0$ jest rovna hodnotě $\lambda^2 f(x_0, y_0, z_0)$, což jest číslo rostoucí s λ^2. Z téže příčiny jest f vně oboru $O\left(\overline{0,\ 0,\ 0;\frac{1}{\sqrt{m}}}\right)$ stále větší než 1 a může tedy rovnice $f=1$ býti splněna pouze v bodech, které přináleží oboru $O(\overline{0,\ 0,\ 0;\ m^{-\frac{1}{2}}}$.) Pro ty body však jest $|x|\leqq m^{-\frac{1}{2}}$, $|y|\leqq m^{-\frac{1}{2}}$, $|z|\leqq m^{-\frac{1}{2}}$ a tedy

$$|F(x,\ y,\ z)|\leqq|A|\frac{1}{m}+|B|\frac{1}{m}+\ldots+2|G|\frac{1}{m},$$

v důsledku čehož jest F v oboru $O(\overline{0,\ 0,\ 0;\ m^{-\frac{1}{2}}})$ konečna a má jistou horní hranici. Tím spíše jest F konečna pro obor obsahující pouze body, pro něž $f=1$ a má v tomto oboru jistou horní hranici, jíž nabývá v bodě $[x_1, y_1, z_1]$ a jež právě jest hledaným maximem (relativním i absolutním) s vedlejší podmínkou $f=1$. Mimo to jest patrno, že aspoň jedna z derivací $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, (na kteréžto derivace se v tomto případě redukují funkc. determ. (δ) v odst. 250.) jest v každém bodě, ve kterém $f=1$, různá od nully; neboť kdyby všecky byly rovny nulle, pak v tom bodě dle Eulerovy věty o homogenních funkcích by bylo $f=0$ a nikoliv $f=1$. Tím jest dokázáno, že úkol svrchu uvedený má vskutku řešení, na něž lze užíti methody odst. 250.

Budiž $[x_1, y_1, z_1]$ bod, pro který dosahuje F maxima M (maxima relat. i absol.) s vedlejší podmínkou $f(x_1, y_1, z_1)=1$. Zaveďme pak místo proměnných x, y, z nové poměrné x', y', z' rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_1x'+r_1y'+s_1z',\\ y &= y_1x'+r_2y'+s_2z', \qquad (1)\\ z &= z_1x'+r_3y'+s_3z', \end{aligned}$$

*) Můžeme ji pokládati na jednotlivých „stěnách krychle" $O\ (\overline{0,\ 0,\ 0;1})$ za spojitou funkci dvou proměnných.

jejíž součinitelé v prvním sloupci jsou právě souřadnice bodu $[x_1, y_1, z_1]$, součinitelé v ostatních sloupcích jsou libovolny až na podmínku, že determinant té substituce jest různý od nully.

Substitucí (1) každému bodu $[x, y, z]$ jest přiřazen jeden bod $[x', y', z']$ a naopak. Bodu $[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1]$ jest přiřazen bod $[x', y', z'] = [1, 0, 0]$, jak z rovnic jest bezprostředně patrno. Substitucí se změní forma F na formu $F' = A'x'^2 + \ldots$ a forma f na $f' = a'x'^2 + \ldots$ Forma F' nabývá pak v $[1, 0, 0]$ hodnoty M; která jest maximem vázaným podmínkou $f' = 1$; forma f' jest tedy v $[1, 0, 0]$ rovna 1. Dosadíme-li do F' resp. f' za $[x', y', z']$ bod $[1, 0, 0]$, dostaneme tak rovnice

$$A' = M, \qquad a' = 1. \tag{2}$$

Poněvadž pak v $[1, 0, 0]$ nastává maximum vázané, existuje číslo λ takové, že částečné derivace funkce $F' + \lambda f'$ v $[1, 0, 0]$ jsou rovny nulle. To dává však rovnice (se zřetelem ku (2)

$$M - \lambda = 0, \quad G' - \lambda g' = 0, \quad E' - \lambda e' = 0,$$

ze kterých $\lambda = M$, $G' = Mg'$, $E' = Me'$, takže pro F', f' obdržíme výrazy

$$\begin{aligned} F' &= M(x'^2 + 2g'x'y' + 2e'x'z') + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'y'z', \\ f' &= (x'^2 + 2g'x'y' + 2e'x'z') + b'y'^2 + c'z'^2 + 2d'y'z', \end{aligned}$$

aneb

$$\begin{aligned} F' &= M(x' + g'y' + e'z')^2 + B_1y'^2 + C_1z'^2 + 2D_1y'z', \\ f' &= (x' + g'y' + e'z')^2 + b_1y'^2 + c_1z'^2 + 2d_1y'z', \end{aligned}$$

kde $B_1 = B' - Mg'^2, \ldots, d_1 = d' - e'g'$. Výraz $x' + g'y' + e'z'$, který se vyskytuje v obou výrazech (pro F' i pro f'), lze též psáti jak lineárný homogenní výraz v x, y, z (dle (1)). Forma $b_1y'^2 + c_1z'^2 + 2d_1y'z'$ jest forma kvadratická proměnných y', z', jež nestává se nullou v žádném bodě $[y', z']$ různém od $[0, 0]$ a jest to zároveň forma kladná. Diskriminant kvadratické formy F' (formy to proměnných x', y', z') jest součin M a diskriminantu formy kvadratické $B_1y'^2 + C_1z'^2 + 2D_1y'z'$ a rovná se zároveň diskriminantu formy F násobenému čtvercem lineárné substituce (1). Je-li tedy diskriminant formy F různý od nully, jest i diskriminant formy $B_1y'^2 + C_1z'^2 + 2D_1y'z'$ různý od nully.

Můžeme tak na základě předcházejícího vysloviti větu (podám znění hned pro n proměnných): Dvě formy kvadratické $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z nichž forma f jest formou stávající se nullou jenom v bodě $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [0, 0, \ldots, 0]$ a zároveň kladnou, forma pak F má diskriminant různý od nully, dají se psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= M_1 X_1^2 + F_1(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= X_1^2 + f_1(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n), \end{aligned} \tag{3}$$

kdež $X_1 = x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \ldots + \lambda_n x'_n$, $x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ jsou lineárné homogenní výrazy (*lineární formy*) v $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o determinantu různém od nully a kde F_1, f_1 jsou kvadratické formy proměnných $x'_2, \ldots, x'_n$ mající tytéž vlastnosti jako F, f (F_1 má diskr. různý od nully, f_1 pak jest forma kladná, stávající se nullou jenom v bodě $[x'_2, \ldots, x'_n] = [0, 0, \ldots, 0]$).

Použijeme-li věty právě dokázané na formy F_1, f_1, můžeme opětně psáti

$$\begin{aligned} F_1(x'_2, \ldots, x'_n) &= M_2 X_2^2 + F_2(x''_3, \ldots, x''_n), \\ f_1(x'_2, \ldots, x'_n) &= X_2 + f_2(x''_3, \ldots, x''_n), \end{aligned} \tag{4}$$

kdež $X_2, x''_3, \ldots, x''_n$ jsou opět lineárné homogenní výrazy v $x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ o determinantu různém od nully a tudíž také $X_1, X_2, x''_3, x''_4, \ldots, x''_n$ lineární homogenní výrazy v $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o determinantu různém od nully. O vlastnostech forem F_2, f_2 netřeba příslušné výroky znovu opakovati. Z (3) a (4) pak následuje

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= M_1 X_1^2 + M_2 X_2^2 + F_2(x''_3, \ldots, x''_n), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= X_1^2 + X_2^2 + f_2(x''_3, \ldots, x''_n), \end{aligned}$$

Takovýmto způsobem pokračujíce, dospějeme po $n-1$ krocích ku těmto výrazům pro dané formy:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= M_1 X_1^2 + M_2 X_2^2 + \ldots + M_n X_n^2, \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2. \end{aligned} \tag{5}$$

V těchto výrazech jsou $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lineárné formy proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o determinantu různém od nully; možno tudíž také naopak $x_1, \ldots, x_n$ vyjádřiti jako lineárné formy proměnných $X_1, \ldots, X_n$ a psáti

$$x_i = c_{i1} X_1 + c_{i2} X_2 + \ldots + c_{in} X_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Rovnice právě napsané lze pojímati jakožto lineárnou substituci, jíž místo proměnných x_i zavádí se proměnné X_k (neboť $|c_{ik}| \neq 0$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$).

Postup svrchu naznačený lze prováděti stejně i tenkráte, je-li diskriminant formy F rovný nulle a to až potud, pokud nepřijdeme v řadě forem $F_1, F_2, \ldots$ ku formě F_l identicky rovné nulle. V tomto případě zůstane, jak snadno patrno*), výsledek (5) v platnosti toliko s tou změnou, že čísla M_i nejsou různa od nully, nýbrž že $M_{l+1} = M_{l+2} = \ldots = M_n = 0$.

Připamatujeme-li si dále, že v důsledku odst. 245. následuje, že forma kladná stávající se nullou toliko v bodě $[0, 0, \ldots, 0]$ má diskri-

---

*) Postačí si jenom uvědomiti, že z vývodů podaných již následuje, že forma kladná o m proměnných, stávající se nullou pouze v bodě $[0, 0, \ldots 0]$, dá se psáti vždy jako součet čtverců m lineárných forem o determinantu různém od nully.

minant různý od nully a naopak, můžeme výsledek docílený shrnouti ve větě: *Dvě formy kvadratické $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z nichž druhá jest forma kladná resp. záporná o determinantu různém od nully, lze současně — jednou a touž lineární substitucí — transformovati ve kvadratické formy, v nichž se vyskytují toliko čtverce nových proměnných. Při tom lze u druhé z těchto forem pro koefficienty při těch čtvercích proměnných docíliti hodnoty rovné vesměs* $+1$ (resp. -1).

Odvození podané — věta sama ovšem také — předpokládá, že součinitelé daných kvadratických forem jsou čísla reálná.

Důsledek 1. Každou formu kvadratickou $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lze psáti ve tvaru

$$M_1 X_1^2 + M_2 X_2^2 + \ldots + M_n X_n^2, \tag{7}$$

kde čísla $M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou čísla reálná a to čísla od nully různá, je-li diskriminant formy F od nully různý, a kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou lineárné formy prom. $x_1, \ldots, x_n$ s determinantem různým od nully. Takovýmto způsobem lze transformovati formu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nekonečně mnohým způsobem, neboť čísla $M_1, M_2, \ldots, {}_n$ a formy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou závisly (jednak na koefficientech formy F, jednak) na koefficientech formy f, pomocí jejíž transformaci formy F ve tvar (7) provádíme.

Důsledek 2. Každou formu kvadratickou F lze transformovati ve tvar (7) jednou orthogonální substitucí (odst. 229.). Neboť formy

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

lze současně lineární substitucí převésti ve tvary pravých stran rovnic (5).

Vypočteme-li diskriminant formy $F - \lambda f$, který jest dán determinantem

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda, & A_{12}, \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \lambda, \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, \ldots, & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix}, \quad A_{ik} = A_{ki}$$

a diskriminant formy transformované $(M_1 X_1^2 + M_2 X_2^2 + \ldots + M_n X_n^2) - \lambda (X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)$, který jest

$$(M_1 - \lambda)(M_2 - \lambda) \ldots (M_n - \lambda)$$

a uvážíme-li, že oba diskriminanty ty jsou si rovny (odst. 234., determinant orthogonální substituce jest ± 1), vidíme, že rovnice v λ $D(\lambda) = 0$ má n kořenů reálných: $M_1, M_2, \ldots, M_n$, čímž získáme:

***Důsledek* 3. Rovnice $D(\lambda) = 0$ má kořeny vesměs reálné.**