při čemž R, S, T jsou čísla kladná a taková, že $[R, S, T]$ jest bodem vnitřním oboru konvergenčního. M pak jest číslo vhodně volené. Kdyby v dané řadě mocninné součinitel a_{000} byl rovný nulle, mohli bychom od každého ze tří právě uvedených výrazů pro majorantní funkce odčítati M a výrazy by zůstaly i po odečtení majorantními funkcemi. A obdobně tomu jest i při n proměnných.

X. Funkce implicitní. Funkcionální determinanty.

218. Hodnoty funkce neodvisle proměnné mohou býti stanoveny pomocí rovnice dávající nám vztah mezi funkcí a neodvisle proměnnou, při čemž ovšem k úplné definici funkce zpravidla jest třeba ještě vedlejších podmínek. Tak ku př. rovnice

$$y^2 + x^2 = 1 \quad \text{s podmínkou } y \geqq 0$$

nám stanoví úplně y jakožto funkci proměnné x v intervalu $(-1, 1)$. Funkcím takovým říká se obyčejně **implicitní funkce.** V následujícím si odvodíme základní věty, které nám dávají ve velmi obecných případech možnost rozhodovati o existenci implicitních funkcí.

219. Implicitní funkce o jedné neodvisle proměnné. *Budiž $F(x, y)$ funkcí dvou proměnných x, y definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Předpokládejme dále*

1. *že* $F(x_0, y_0) = 0$.

2. *že funkce $F(x, y)$ má derivace v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a v tomto bodě dle proměných x, y a že derivace ty jsou funkce spojité (v bodě a okolí). Označíme je $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$.*

3. *že* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje jedna jediná spojitá funkce $\varphi(x)$ proměnné x, jež pro $x = x_0$ stává se rovnou y_0 a jež jest definována také pro všecky body jistého okolí bodu x_0, taková, že pro body tohoto okolí jest

$$F(x, \varphi(x)) = 0.$$

Funkce tato má derivaci (stále ve zmíněném okolí bodu x_0 a v bodě x_0) danou rovnicí

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))},$$

kteráž jest spojitou funkcí proměnné x.

Přirozeně můžeme tuto funkci $\varphi(x)$ pokládati za řešení rovnice $F(x, y) = 0$ dle y a sice to řešení, které dává y, když x jest v x_0 a jeho okolí, jakožto funkci spojitou a které se redukuje na y_0 pro $x = x_0$, a za těchto omezujících podmínek pokládati dále rovnici $F(x, y) = 0$ za ekvivalentní s rovnicí $y = \varphi(x)$.

Abychom uvedenou větu dokázali, najdeme nejprve číslo ε tak, aby v okolí $O(x_0, y_0; \varepsilon)$ byl splněn větou daný předpoklad 2. a aby v tom okolí funkce $F'_y(x, y)$ byla stále různa od nully a tudíž stále téhož znaménka jako hodnota $F'_y(x_0, y_0)$ (odst. 191.). Pak lze udati dvě kladná čísla A, B, takže

$$|F'_x(x, y)| < A, \quad |F'_y(x, y)| > B \text{ pro všecka } [x, y] \text{ v } O(x_0, y_0; \varepsilon) \quad (\alpha)$$

(v důsledku známých vlastností funkcí spojitých, odst. 191.). Budiž dále δ menší z obou čísel ε, $\frac{B\varepsilon}{A}$. Tu si nejprve dokážeme tvrzení, že ke každé hodnotě proměnné x intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rovnicí $F(x, y) = 0$ jest přiřazena (jakožto řešení té rovnice dle y) jedna hodnota proměnné y nacházející se v intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Budiž tedy x v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a y v intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ a kladme k vůli stručnosti

$$x = x_0 + \xi, \; y = y_0 + \eta \quad \text{takže jest } \xi = x - x_0, \; \eta = y - y_0.$$

Pak jest dle formule Taylorovy $(0 < \Theta < 1$; užito předpokladu 1.)

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = F(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - F(x_0, y_0) = \\ = \xi F'_x(x_0 + \Theta\xi, y_0 + \Theta\eta) + \eta F'_y(x_0 + \Theta\xi, y_0 + \Theta\eta). \quad (\beta) \end{aligned}$$

Jelikož x jest v $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, jest $|x - x_0| = |\xi| \leqq \delta$ a tedy prvý člen ve výraze (β) se zřetelem ku prvé nerovnině v (α) menší v abs. hodn. než $A\delta$. Klademe-li $y_0 \pm \varepsilon$ za y, t. j. $\pm\varepsilon$ za η, jest druhý člen v (β) větší v abs. hodn. v důsledku druhé nerovniny z (α) než $B\varepsilon$. Avšak $A\delta \leqq B\varepsilon$; má tudíž (β) totéž znaménko jako druhý člen v (β) a klademe-li jednou $y - y_0 = \eta = +\varepsilon$, po druhé $\eta = -\varepsilon$, dostáváme při témž x z (β) čísla znamének protivných. Tedy čísla $F(x, y_0 - \varepsilon)$, $F(x, y_0 + \varepsilon)$ mají, pokud x jest v $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, znaménka protivná a jest následkem toho, že $F(x, y)$ při pevném x jest spojitou funkcí proměnné y, aspoň *jedna* hodnota $y = \varphi(x)$ ležící uvnitř intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, pro kterou

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \text{ v } (x_0 - \delta, x_0 + \delta);$$

jest však jenom jedna taková hodnota, neboť $F'_y(x, y)$ má stále stejné znaménko a tedy $F(x, y)$ při pevném x s rostoucím y stále roste aneb stále klesá.

Rovnice $F(x, y) = 0$ definuje tudíž y jakožto funkci $\varphi(x)$ proměnné x v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, požadujeme-li, aby y bylo v $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Zároveň jest $\varphi(x_0) = y_0$.

Funkce takto definovaná jest jest *spojitá* v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nechť jsou x_1, x dvě libovolné hodnoty toho intervalu a klaďme $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x) = y$ a zároveň k vůli stručnosti $x - x_1 = h$, $\varphi(x) - \varphi(x_1) = k$. Pak jest

$$F(x_1, y_1) = 0, \quad F(x, y) = 0, \quad F(x, y) - F(x_1, y_1) = 0,$$

$$F(x, y) - F(x_1\, y_1) = (x - x_1)\, F'_x(x_1 + \Theta' h, \; y_1 + \Theta' k) +$$
$$+ (\varphi(x) - \varphi(x_1))\, F'_y(x_1 + \Theta' h, \; y_1 + \Theta' k) = 0 \quad (\gamma)$$

a tedy

$$|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \frac{A}{B} |x - x_1| < \varepsilon'$$

$$\text{pro všecka } x, \text{ pro něž } |x - x_1| < \frac{B}{A} \varepsilon',$$

čímž spojitost funkce $\varphi(x)$ v bodě x_1 dokázána.

Funkce ta má *derivaci* v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Neboť dle (γ) jest

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} = \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = - \frac{F'_x(x_1 + \Theta' h, \; y_1 + \Theta' k)}{F'_y(x_1 + \Theta' h, \; y_1 + \Theta' k)}$$

a jelikož $\lim k = 0$ pro $\lim h = 0$ (jak právě dokázáno) a jelikož F'_x, F'_y jsou funkce spojité (v oboru přicházejícím v úvahu), existuje derivace

$$\varphi'(x_1) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = - \frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)},$$

jež, jak z výsledku patrno, jest spojitou funkcí bodu x_1. Tím věta fundamentální o implicitních funkcích jedné proměnné dokázána ve všech částech.

Poznámka. Z důkazu podaného vyplývá také důsledek, že všecka řešení $[x, y]$ rovnice $F(x, y) = 0$, pokud se nacházejí uvnitř pravoúhelníkového oboru $(x_0 - \delta, x_0 + \delta; \; y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ — tvořícího jisté okolí bodu $[x_0, y_0]$ —, splňují také rovnici $y = \varphi(x)$. Neexistují tudíž žádné jiné funkce y (i nespojité) proměnné x vedle funkce $y = \varphi(x)$, jež by 1) splňovaly rovnici $F(x, y) = 0$, 2) byly definovány uvnitř intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 3) v bodě x_0 nabývaly hodnoty y_0 a ve vytčeném okolí bodu x_0 pak hodnot intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Nalezená funkce jest tudíž *jediná i tenkráte, máme-li na mysli obor všech funkcí hovících třem právě vytčeným podmínkám.*

220. Jiný důkaz a rozšíření věty o implicitních funkcích. Větu o implicitních funkcích v odst. předch. dokázanou lze v různých směrech zevšeobecniti. Jednak lze uvažovati funkce F o více než dvou neodvisle proměnných, jednak lze učiniti obecnější předpoklady o funkci F. Funkce implicitní pak v důsledku toho vyplývající z předpokladů jsou ovšem též obecnější než funkce vyplývající z předpokladů činěných v odst. předch.

Zvláště však poučné při zobecnění tom jest, že důkaz na podkladě obecnějších předpokladů vedený jest daleko jednodušší a zároveň pochopení přístupnější. Provedu důkaz ten formou, jež se bezprostředně dá rozšířiti na libovolný počet proměnných; jenom z důvodů stručnějšího vyznačování zavedu v následujícím tři neodvisle proměnné při funkci F.

Budiž dána funkce $F(x, y, z)$ mající tyto vlastnosti:

a) $F(x_0, y_0, z_0) = 0.$

b) V oboru $O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$ jest $F(x, y, z)$ při pevném z spojitou funkcí bodu $[x, y]$.

c) V témž oboru jest při pevném $[x, y]$ funkce $F(x, y, z)$ spojitou a ryze monotonní funkcí proměnné z.

Abychom měli určitý případ před sebou, předpokládejme ku př., že při pevném $[x, y]$ jest $F(x, y, z)$ stále rostoucí funkcí proměnné z v $O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$. Pak následuje z $a)$ a z této okolnosti, že $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ jest číslem záporným, $F(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$ kladným. Z předpokladu $b)$ pak vyplývá, že lze stanoviti číslo $\delta \leqq \varepsilon$ tak, aby v okolí $O(x_0, y_0; \delta)$ obě funkce $F(x, y, z_0 - \varepsilon)$, $F(x, y, z_0 + \varepsilon)$ — funkce to bodu $[x, y]$ — byly téhož znaménka (a od nully různy) a to prvá záporná, druhá kladná. Je-li tedy $[x, y]$ libovolný bod v $O(x_0, y_0; \delta)$, lze v intervalu $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ vždy nalézti hodnotu z a to jedinou hodnotu (neboť běží při pevném $[x, y]$ dle $c)$ o funkci spojitou a monotonní) takovou, aby $F(x, y, z) = 0$, při čemž, je-li $[x, y] = [x_0, y_0]$, jest $z = z_0$.

Následuje tudíž z předpokladů nejprve, že *existuje jedna a zároveň jediná funkce $z = \varphi(x, y)$ bodu $[x, y]$, definovaná v $O(x_0, y_0; \delta)$, pro kterouž jest*

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \text{ v } O(x_0, y_0; \delta); \quad \varphi(x_0, y_0) = z_0.$$

a pro niž zároveň $z_0 - \varepsilon < \varphi(x, y) < z_0 + \varepsilon$ (aneb $|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon$).

Funkce $\varphi(x, y)$ jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$ v $O(x_0, y_0; \delta)$. Dokažme zprvu, že funkce $\varphi(x, y)$ jest spojitou v bodě $[x_0, y_0]$. K tomu jest nutno a postačitelno, aby ke každému kladnému číslu ε' bylo možno stanoviti kladné číslo δ' tak, že

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon' \text{ pro všecka } x, y \text{ v } O(x_0, y_0; \delta') \qquad (\lambda)$$

(o ε' můžeme hned požadovati, že jest menší ($\leqq$) než ε).

Avšak možnost taková jest tu bezprostředně patrna z předpokladů; neboť úvahu svrchu provedenou pro okolí $O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$ můžeme provésti s okolím $O(x_0, y_0, z_0; \varepsilon')$ a tak, jako svrchu jsme dospěli k číslu δ a nerovnině $|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon$ pro všecky $[x, y]$ v $O(x_0, y_0; \delta)$, dospějeme nyní k číslu δ' tak, že jest splněna (λ). Stejně se dokáže spojitost v každém jiném bodě $[x_1, y_1]$ uvnitř $\overline{O(x_0, y_0; \delta)}$. Neboť, klademe-li $\varphi(x_1, y_1) = z_1$, jest $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ a jsou splněny předpoklady pro $F(x, y, z)$ obdobné ku předpokladům $a)$, $b)$, $c)$, avšak týkající se bodu $[x_1, y_1, z_1]$ místo $[x_0, y_0, z_0]$. S nepatrnou úpravou úvahy podané podati pak lze důkaz spojitosti i v bodech $[x_1, y_1]$ hraničních oboru $\overline{O(x_0, y_0; \delta)}$, což ponechávám čtenáři.

Má-li dále funkce $F(x, y, z)$ *v bodě* $[x, y, z]$ *pravoúhelníkového oboru* $(x_0 - \delta, y_0 - \delta, z_0 - \varepsilon; x_0 + \delta, y_0 + \delta, z_0 + \varepsilon)$ *totální differenciál a je-li zároveň v tom bodě* $\frac{\partial F}{\partial z}$ *různa od nully, má i funkce* $\varphi(x, y)$ *v bodě* $[x, y]$ *oboru* $\overline{O(x_0, y_0; \delta)}$ *totální differenciál.*

Nejprve jest pro přírůstek ΔF funkce $F(x, y, z)$ platna rovnice

$$\Delta F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + (\varrho \Delta x + \sigma \Delta y + \tau \Delta z) \quad (\mu)$$

kde $\lim \varrho = \lim \sigma = \lim \tau = 0$, když $\lim \Delta x = \lim \Delta y = \lim \Delta z = 0$. Je-li však $z = \varphi(x, y)$, $z + \Delta z = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$, jest — v důsledku toho, jak funkce $\varphi(x, y)$ byla definována — $\Delta F(x, y, z) = 0$ a jelikož ze spojitosti funkce z proměnných x, y plyne $\lim \Delta z = 0$, když $\lim \Delta x = \lim \Delta y = 0$, můžeme rovnici (μ) dáti tento tvar

$$\Delta z = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + (\varrho \Delta x + \sigma \Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial z} + \tau}$$

aneb

$$\Delta z = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \Delta x - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \Delta y + (\varrho' \Delta x + \sigma' \Delta y),$$

kde $\lim \varrho' = \lim \sigma' = 0$, když $\lim \Delta x = \lim \Delta y = 0$, čímž tvrzení učiněné dokázáno. Zároveň pak podáno jest *vyjádření částečných derivací funkce* $z = \varphi(x, y)$ dle proměnných x, y pomocí derivací funkce $F(x, y, z)$.

Kdybychom dále ještě předpokládali, že částečné derivace funkce $F(x, y, z)$ v bodě $[x, y, z]$ svrchu vytčeného pravoúhelníkového oboru jsou spojité funkce proměnných x, y, z, dostali bychom z poslední rovnice pro Δz obdobný výsledek i pro částečné derivace funkce $z = \varphi(x, y)$ v bodě $[x, y]$ a tak bychom získali veškerá tvrzení dokázaná v předcházejícím odstavci pro funkci implicitní jedné neodvisle proměnné i pro obecnější případ funkce implicitní o několika proměnných a to za předpokladů značně rozšířených.

Příklad. Uvažujme ku př. rovnici kvadratickou mezi třemi proměnnými

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

za předpokladu $a_{33} > 0$. Vyšetřujme, zda touto rovnicí jest dáno z jako funkce bodu $[x, y]$ a to na základě odvozené věty. Levá strana dané rovnice má spojité první derivace dle všech proměnných v celém prostoru trojrozměrném. Mohou tudíž derivace měniti svá znaménka jenom když procházejí hodnotou nullovou. Derivace podle z (dělená dvěma) jest $a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{43}$. Rovina s rovnicí

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{43} = 0 \tag{2}$$

dělí tudíž celý prostor trojr. na dvě polovice, v níž každé derivace dle z jest téhož znaménka ve všech bodech. A poněvadž levá strana rovnice jest $+\infty$ pro $\lim z = \pm\infty$ a na rovině vytknuté jest derivace dle z rovna nulle, jest v té polovici prostoru, jež obsahuje bod $[0, 0, +\infty]$, levá strana dané rovnice rostoucí s rostoucím z (a při pevných x, y) a derivace dle z kladná; v druhé polovici jest levá strana klesající s rost. z a derivace dle z záporná.

Vypočteme-li z z (2) a dosadíme-li výsledek do (1), obdržíme rovnici (násobíme zároveň součinitelem a_{33})

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x^2 + 2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{23})xy + \ldots + (a_{44}a_{33} - a_{43}^2) = 0. \tag{3}$$

Rovnice tato nám udává body $[x, y]$ na rovině XY, jež jsou průměty bodů na rovině (2), v nichž jest splněna rovnice (1). Body ležící na rovině (2) a v nichž levá strana rovnice (1) jest záporná, tvoří obor, jehož průmět na rovinu XY jest ohraničen čarou o rovnici (3); označme průmět tento Ω. Pak dle předcházejícího každému $[x, y]$ na Ω odpovídá jedno z takové, že $[x, y, z]$ jest v jedné polovině trojrozměrného prostoru vzniklé rovinou (2) a rovněž jedno z, které jest v druhé polovině. Bodům $[x, y]$, jež jsou vně Ω, není rovnicí (1) přiřazeno žádné z.

Podrobnějším rozborem bychom průběh funkce z ještě zevrubněji mohli stanoviti a zejmena bychom mohli rozhodnout, k jaké ploše druhého stupně rovnice (1) přísluší.

Z příkladu podaného jest patrno, jak věty o implicitních funkcích v předcházejících odst. dokázané mohou býti užitečny při vyšetřování průběhů ploch a křivek.

221. Další zobecnění věty o implicitních funkcích. Budiž dáno n funkcí

$$F_i(x_1, x_2, .., x_m; y_1, y_2, .., y_n) \quad i = 1, 2, 3, .., n \tag{a}$$

$m + n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, .., y_n$ definovaných v okolí bodu $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, .., x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)} .., y_n^{(0)}]$. Předpokládejme dále

1. že $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, .., x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, .., y_n^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

2. že všecky funkce F_i mají derivace v bodě $[x_1^{(0)}, .., y_n^{(0)}]$ a jeho okolí dle všech $m + n$ proměnných a že derivace ty jsou tam funkce spojité těch proměnných. Označíme je

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = F'_{ix_j}(x_1, \ldots, y_n), \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_k} = F'_{iy_k}(x_1, \ldots, y_n), \tag{\varrho}$$

vynechávajíce ještě z pravidla v následujícím k vůli stručnosti za znaménkem funkčním značky proměnných.

3. Determinant
$$\begin{vmatrix} F'_{1y_1}, & F'_{1y_2}, & \ldots, & F'_{1y_n} \\ F'_{2y_1}, & F'_{2y_2}, & \ldots, & F'_{2y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F'_{ny_1}, & F'_{ny_2}, & \ldots, & F'_{ny_n} \end{vmatrix} \tag{b}$$

jest v bodě $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ různý od nully.

Pak existuje jen jediný systém n spojitých funkcí $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; $k = 1, 2, \ldots\ldots n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$, jež v bodě $A^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}]$ jsou rovny číslům $y_k^{(0)}$ a jež jsou definovány také pro všecky body jistého okolí bodu $A^{(0)}$, a takových, že pro body toho okolí jest

$$F_i(x_1, x_2, .., x_m; \varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n) = 0, \quad i = 1, 2, .., n.$$

Funkce tyto mají derivace v $A^{(0)}$ a v jeho právě zmíněném okolí dle všech m proměnných a jsou derivace ty spojité funkce bodu $[x_1, x_2, .., x_m]$.

Přirozeně můžeme systém funkcí $\varphi_k(x_1, \ldots, x_m)$ pokládati za řešení n rovnic

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, .., y_n) = 0$$

dle n neznámých y_k, takže $y_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_m)$, při čemž jde o řešení stanovené v oboru $O(A^{(0)}, \delta)$ a určené jednoznačně podmínkami, že $\varphi_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = y_k^{(0)}$; δ jest jisté kladné číslo.

Důkaz této věty podán byl, když $n = 1$, v odstavci předcházejícím. Abychom tuto větu dokázali obecně, užijeme úplné indukce a předpokládajíce, že věta jest správna, když počet daných rovnic (jakož i počet neznámých funkcí y) jest $n - 1$, dokážeme, že jest správna, když počet daných rovnic (jakož i neznámých funkcí) jest n.

Jelikož determinant (b) v bodě $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ jest různý od nully, jest jistě aspoň jeden prvek posledního řádku různý od nully v tom bodě. Nechť jest to ku př. prvek

$$F'_{ny_n} = \frac{\partial F_n}{\partial y_n}.$$

Potom však dle věty odstavce předch. můžeme rovnici

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

řešiti dle y_n a dostaneme pro y_n funkci spojitou jednoznačně stanovenou

$$y_n = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

která v bodě $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}]$ se redukuje na $y_n^{(0)}$, která jest definována v jistém okolí posléze uvedeného bodu a která má v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}]$ a každém bodě jeho okolí spojité derivace částečné se zřetelem ku všem proměnným v počtu $m + n - 1$. (Viz odst. 220, kde podáno jich vyjádření). Dosadíme-li za y_n do funkcí (a) získaný takto výraz, pak poslední funkce (t. j. F_n) jest identicky v onom okolí rovna nulle a odpadá; zůstane pak nám $n - 1$ funkcí

$$F_{i'}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Phi(x_1, \ldots, y_{n-1})), \quad i' = 1, 2 \ldots n-1 \quad (c)$$

obsahujících vedle proměnných x toliko $n - 1$ proměnných $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ a běží o to, zda tyto poslední veličiny lze jednoznačně stanoviti jakožto spojité funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$ v bodě $A^{(0)}$ a jeho určitém okolí definované, mající tam derivace částečné spojité, dále takové, že v $A^{(0)}$ se redukují na $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}$ a že, dosadíme li za $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ty funkce do (c), výrazy vzniklé jsou rovny nulle v $A^{(0)}$ a onom určitém okolí.

K tomu postačitelné podmínky (dle učiněného předpokladu, že věta, jež se má dokázati, jest platna pro $n - 1$ rovnic) jsou tyto tři:

1. Výrazy (c) jsou rovny nulle v $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_{n-1}^{(0)}]$; avšak pro výrazy ty jest splněna rovnost

$$F_{i'}(x_1^{0}, x_2^{(0)} \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}, \Phi(x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)})) =$$
$$= F_{i'}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}, y_n^{(0)}),$$

což vskutku se rovná nulle dle předpokladu větou daného.

2. Výrazy (c) mají dle jednotlivých proměnných derivace spojité v $[x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}]$ a jeho okolí. Podmínka tato jest rovněž splněna v důsledku předpokladu větou daného. Neboť, označíme-li částečné derivace výrazů (c) dle proměnných x_j, $y_{k'}$ zřetelně tím, že příslušné symboly píšeme v závorce a naproti tomu derivace výrazů (a) dle jednotlivých

proměnných píšeme bez závorky, jest ku př. (dle pravidla o derivování funkce funkcí)

$$\left(\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{k}'}\right)=\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{k}'}+\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{n}}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y_{k}'}=\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{k}'}-\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{n}}\cdot\left(\frac{\partial F_{n}}{\partial y_{k}'}:\frac{\partial F_{n}}{\partial y_{n}}\right), \tag{d}$$

při čemž do derivací na pravé straně jest dosazovati $y_n = \Phi(x_1, \ldots y_{n-1})$, což, abychom čtenáři v následujícím připomínali, nebudeme užívati pro derivace ty symbolů zavedených na pravé straně rovnice (ϱ).

3. Determinant

$$\left|\left(\frac{\partial F_{i}'}{\partial y_{k}'}\right)\right| \quad i'=1,\,2,\ldots\, n-1,\; k'=1,\,2,\ldots\, n-1 \tag{b'}$$

jest různý od nully v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}]$. Vlastnost tato však následuje z okolnosti, že hodnota determinantu (b') v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}]$ jest rovna hodnotě determinantu (b) v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ dělené $F'_{ny_n}(x_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, což jest jednoduchým důsledkem rovnic (d) a prvo počátečných vět o determinantech. Připojme — abychom to dokázali — v determinantu (b') n-tý řádek o prvcích

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_1}:\frac{\partial F_n}{\partial y_n},\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_2}:\frac{\partial F_n}{\partial y_n},\ldots,\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}:\frac{\partial F_n}{\partial y_n},\quad 1$$

a n-tý sloupec o prvcích 0, 0, ... 0, 1. Tím se determinant ve své hodnotě nezmění. Pak přičtěmež ku každému i'-tému řádku řádek n-tý násobený $\frac{\partial F_{i'}}{\partial y_n}$ i dostaneme se zřetelem ku (d) determinant, který vznikne z (b), dělíme-li poslední řádek F'_{ny_n} a pak dosadíme $\Phi(x_1, \ldots, y_{n-1})$ za y_n. Avšak $y_n^{(0)} = \Phi(x_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)})$ — dle předpokladu — a jest tudíž determinant (b') v bodě $[x_1^0, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots y_{n-1}^{(0)}]$ rovný determinantu (b) v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ dělenému $F'_{ny_n}(x_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, což se mělo dokázati.

Jest tedy $n-1$ funkcí

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,$$
$$y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

jež v bodě $A^{(0)}$ redukují se po řadě na $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_{n-1}^{(0)}$, jež v jistém okolí bodu $A^{(0)}$ pak jsou definovány jakožto funkce tam spojité a mající prvé derivace a jež, dosadíme-li je do výrazů (c), činí výrazy v tomto okolí identicky (t. j. pro všecky body toho okolí) rovny nulle. Klademe-li ještě (vynechávajíce k vůli stručnosti za φ_k znaky proměnných x_i)

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

máme systém n funkcí $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a to takový, jaký byl větou požadován.

Tento systém jest jediný za daných podmínek. Neboť kdyby by ještě jiný takový systém $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_n$ funkcí spojitých atd., pak by nejprve musilo býti

$$\overline{\varphi}_n = \Phi(c_1, x_2, \ldots, x_m, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}),$$

jak snadno nahlédnouti v důsledku věty základní odst. 220; avšak jelikož předpokládáme větu za dokázanou pro $n-1$ rovnic, jest jediný systém funkcí φ_i, činících výrazy (c) rovny nulle a jest tedy identicky v jistém okolí bodu $A^{(0)}$

$\varphi_1 = \overline{\varphi}_1, \varphi_2 = \overline{\varphi}_2, \ldots, \varphi_{n-1} = \overline{\varphi}_{n-1}$ tudíž i dle předch. rovn. $\varphi_n = \overline{\varphi}_n$.

Tím věta ve všech svých částech dokázána.

Poznámka. Stejně jako ve specielním případě (odst. 219., pozn. viz též odst. 220.) lze dokázati, že systém n rovnic

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{e}$$

dávající nám za předpokladů svrchu pod čísly 1., 2., 3. uvedených řešení n rovnic v (a) dle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, jest jediný takový systém, požadujeme-li, aby měl tyto vlastnosti:

a) Systém nám dává hodnoty pro $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, je-li $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ v okolí $O(A^{(0)}, \delta)$.

b) Když $[x_1, x_2, \ldots, x_m] = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}]$ — kterýžto bod jsme právě označili $A^{(0)}$ — pak v důsledku (e) jest $[y_1, y_2, \ldots, y_n] = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$; bod tento označíme $B^{(0)}$.

c) Je-li bod $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ v okolí $O(A^{(0)}, \delta')$, jest dle (e) jemu příslušné $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ v okolí $O(B^{(0)}, \varepsilon')$.

Čísla δ', ε' jsou kladná, vhodně volená. Mezi vlastnostmi požadovanými nevyskytuje se požadavek spojitosti funkcí φ_k anebo dokonce požadavek existence derivací u těchto funkcí.

Dává nám tedy (e) vždy jedno řešení rovnice (a) dle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, jestliže $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ jest v $O(A^{(0)}, \delta')$ a jest jenom jedno řešení takové, aby $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ zároveň bylo v $O(B^{(0)}, \varepsilon')$.

Abychom tvrzení v poznámce této uvedená dokázali, bylo by třeba úvahy předcházející poněkud rozšířiti. Rozšíření to neposkytuje sice obtíží, avšak učinilo by postup užitý méně přehledným; přenechávám provedení příslušných úvah (rovněž se opírajících o úplnou indukci a odst. 219.) čtenáři.

222. Výpočet derivací vyšších řádů u funkcí implicitních. Hoví-li y, funkce proměnné x, rovnici

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

jejíž levá strana jest funkce bodu $[x, y]$ mající totální differenciál a víme-li, že funkce y jakožto funkce proměnné x má derivaci, pak můžeme derivaci tu stanoviti, utvoříme-li derivaci obou stran rovnice (1) dle x, při čemž ovšem nutno pokládati y za funkci proměnné x. Do staneme ihned rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0, \tag{2}$$

jež nám dává pro derivaci hodnotu již známou (a ve skutečnosti již v odst. 220. odvozenou způsobem málo odchylným od způsobu právě vyloženého) a to ve všech bodech, v nichž F'_y jest různo od nully Stejné methody můžeme však užiti i pro výpočet druhých derivací. Mají-li dále $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jakožto funkce proměnných x, y totální differenciál — anebo, což jest totéž, $F(x, y)$ totální differenciál druhého řádu – má y druhou derivaci dle x ve všech bodech x, pro které $F'_y \neq 0$.
Neboť pak v rovnici

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y},$$

plynoucí z (2) má pravá strana derivaci dle x (při cemž y se pokládá za funkci proměnné x) a tedy i levá strana. Derivace levé strany dle x jest však druhá derivace funkce y dle x, která tudíž existuje za předpokladu ovšem, že prvá derivace existuje a jest stanovena rovnicí (2). Můžeme — když jsme existenci její dokázali — vypočísti ji přímo z rovnice (2), derivujeme-li ji na obou stranách dle x (a pokládajíce y, jakož i y', za funkci proměnné x). Tak dostaneme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}=0, \tag{3}$$

kterážto rovnice nám dává druhou derivaci snadným počtem.

Stejně následuje za předpokladů na snadě ležících derivováním rovnice (3) vztah

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y''+$$
$$+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0$$

usnadňující výpočet třetí derivace y''' funkce y dle x. Atd.

223. Poznámky odstavce přecházejícího dají se rozšířiti snadno i na obecný případ. Nechť jest dáno n rovnic

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

jichž levé strany jsou funkce $m+n$ proměnných mající totální differenciál vzhledem k těmto proměnným, a předpokládejme, že rovnice ty splňuje n funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots x_m$ a to funkcí majících derivace dle těchto proměnných.*) Pak levé strany rovnic daných mají derivace dle proměnných x_j; i dostaneme, derivujeme-li dané rovnice ku př. dle x_1, těchto n rovnic (viz odst. 207.)

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}+\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Rovnice tyto lze řešiti jakožto lineárné rovnice o n neznámých $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}$ dle Kramerova pravidla, je-li determinant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{6}$$

různý od nully. S determinantem tímto shledali jsme se již ve výroku věty odst. 221. pod (*b*); determinant ten má velikou důležitost v analysi i analytické geometrii a sluje **funkcionální determinant funkcí** $F_1, F_2, \ldots, F_n$ **vzhledem k proměnným** $y_1, y_2, \ldots y_n$; také nazývá se *Jacobiovým determinantem* a označuje se stručně symbolem

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)}. \tag{7}$$

Řešení rovnic (5) svrchu zmíněné, jest, jak známo, podíl dvou determinantů lišících se v jediném sloupci a lze je psáti pomocí označení právě zavedeného jako podíl dvou determinantů funkcionálních ve tvaru

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_1}=-\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_n)}:\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \tag{8}$$

Obecně dostáváme $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ jakožto záporně braný zlomek, jehožto jmenovatel

---

*) Ze stejné příčiny jako v odst. předch. nevytčen obor, ve kterém splněna předpokládaná vlastnost funkcí F_i, a obor, ve kterém jsou danými rovnicemi veličiny y_k definovány jako funkce proměnných x_j mající derivace částečné dle těchto proměnných.

jest (7), symbol pak udávající čitatele obdržíme, nahradíme-li v (7) veličinu y_k číslem x_i.

Tak získali jsme derivace částečné funkcí y_k dle x_i. Jsou-li derivace $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ spojité funkce proměnných (jichž počet jest $m+n$), potom jsou i derivace funkcí y_k dle proměnných x_i spojitými funkcemi proměnných $x_1, \ldots, x_m$ a funkce y_k mají totální differenciály.

Mají-li za předpokladů právě vytčených funkce F_i druhé derivace dle proměnných $x_1, \ldots, y_n$, jež jsou spojité funkce těch proměnných, mají i y_k druhé derivace dle proměnných x_i a ty jsou spojité funkce proměnných $x_1, \ldots, x_m$ a tudíž mají y_k i druhé differenciály totální dle těchto proměnných; atd. Druhou derivaci $\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_1^2}$ vypočteme ku př. z (8), derivujeme-li obě strany rovnice dle x_1 (a potom na pravé straně dosadíme za $\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$ výrazy v (8)). Takovýmto způsobem pak lze vypočítati všecky derivace všech řádů, pokud existují.

Poznámka. Obecněji bychom mohli snadno dokázati, že, jsou-li funkce y_k proměnných $x_1, \ldots, x_m$ splňující rovnice (4) spojité funkce těch proměnných, mají-li F_i totální differenciály prvého řádu se zřetelem ku $m+n$ proměnným $x_1, \ldots, y_n$ a je-li konečně determinant (6) od nully různý, i funkce y_n jakožto funkce proměnných $x_1, \ldots, x_m$ mají totální differenciály prvého řádu. Důkaz spočívá v podstatě na řešení n rovnic z předpokladů plynoucích

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_m}\Delta x_m + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\Delta y_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\Delta y_n + \tau\Sigma = 0, \quad i = 1, \; 2 \ldots n$$

$$\text{a kde } \Sigma = |\Delta x_1| + \ldots + |\Delta x_m| + |\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_n|$$

a to řešení dle $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n$; význam symbolu τ jest na snadě. Viz odst. 220, kde projednán podrobněji případ $n = 1$.

Obdobné věty pro existenci druhého, třetího, ... differenciálu funkcí y_k odvodí snadno čtenář.

224. Věty o funkcionálních determinantech. Se zřetelem k veliké důležitosti funkcionálních (Jacobi-ových) determinantů, pro něž zavedli jsme v odst. 223. zvláštní označení a jež ještě poněkud stručněji vyznačujeme symbolem

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \qquad (\alpha)$$

ve kterém bezprostředně zavádíme veličiny závislé $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vedle nezávisle proměnných, odvodíme si o těch determinantech některé důležité a často užívané věty. Při odvozování vět těch budeme trvale předpokládati, že funkce, jichž derivace v úvahách se budou vyskytovati, jsou funkce mající totální differenciály pro souhrn proměnných přicházející v úvahu a pro obor příslušný (v důsledku čehož jest dovoleno užívati vět o derivacích funkce z funkcí odst. 207.).

1. *Jsou-li* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *funkce n proměnných* $u_1, u_2, \ldots u_n$, *tyto pak proměnné jsou funkcemi proměnných* $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ (takže $y_1, y_2, \ldots y_n$ jsou v celku sice funkcemi proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$, ale *pouze prostřednictvím proměnných* $u_1, u_2, \ldots u_n$), *jest*

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad \text{(I)}$$

Neboť jest dle věty o derivování funkce funkcí

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial y_i}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_k}.$$

Dosadíme-li dle této rovnice do determinantu (α) a užijeme-li známého pravidla pro násobení determinantů, máme ihned rovnici danou.

2. Je-li determinant funkcionální (α) funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definovaných rovnicemi

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\beta)$$

různý od nully a jsou-li částečné derivace v (α) se vyskytující spojité funkce proměnných [x], lze na základě těch rovnic $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyjádřiti jako funkce proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a psáti

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, x_n = \psi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (\gamma)$$

tak že jest identicky $\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = y_1$ atd. (veškerá tvrzení jsou vesměs omezena na jistý obor sestávající z okolí jistého základního bodu $[x^{(0)}]$, resp. $[y^{(0)}]$, viz odst. 221.). Funkce ψ_k mají rovněž částečné derivace spojité. Můžeme tak pokládati y_k za funkce veličin x_k, kteréžto veličiny jsou zase dle (γ) funkce proměnných y_k; v rovnici (I) pak lze místo proměnných y_k, u_k, x_k zavésti po řadě proměnné y_k, x_k, y_k. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Avšak levá strana jest v této rovnici očividně rovna 1; jest tedy

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1, \tag{II}$$

kteroužto rovnici pomocí funkcí φ_k, ψ_k bychom mohli vypsati také takto

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)} = 1 \tag{II'}$$

a kterážto rovnice jest platna identicky, nahradíme-li y_k v druhém faktoru proměnnými x_k (pomocí rovnic $y_k = \varphi_k$), anebo naopak.

3. Je-li dáno n rovnic mezi proměnnými $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ldots, F_n(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_m) = 0$$

takových, že levé strany jich mají totální diferenciály a že determinant funkcionální funkcí F_k dle proměnných y_k jest od nully různý, lze (za jistých dalších předpokladů, viz odst. 221.) pokládati $y_1, \ldots y_n$ za funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots x_m$ mající prvé derivace spojité — což učiníme. Jest pak (odst. 223.)

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = 0; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots n; \\ k = 1, 2, \ldots m. \end{array}$$

Vypočteme-li z této rovnice $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}$ a dosadíme do determinantu

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_\lambda, F_{\lambda+1}, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_\lambda, y_{\lambda+1}, \ldots, y_n)},$$

máme po jednoduché úpravě (jejíž provedení zevrubné doporučuji čtenáři) na základě základních vlastností a definice determinantu tento vztah

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)} = (-1)^\lambda \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_\lambda, F_{\lambda+1}, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, y_{\lambda+1}, \ldots y_n)} \cdot \frac{1}{\Delta}, \tag{III}$$

kdež
$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Číslo λ jest číslo celé kladné, jež nejvýše se rovná menšímu z čísel m, n. Pro $\lambda = 1$ dostáváme z této rovnice $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a rovnici již dříve (odst. 223.) odvozenou.

Obecněji pro determinant

$$\frac{D(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i\lambda})}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j\lambda})}$$

získáváme týmž postupem zlomek násobený $(-1)^\lambda$, jehož jmenovatel jest opět Δ a kde symbol čitatele obdržíme ze symbolu pro Δ, nahradíme-li v tomto symbolu $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i\lambda}$ po řadě znaky $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j\lambda}$.

Poznámka. Rovnici (I) bychom mohli psáti ve tvaru poněkud obecnějším, kdybychom totiž vycházeli od předpokladu, že $y_1, y_2, \ldots y_n$ jsou funkce proměnných $u_1, u_2, \ldots, u_m$, tyto pak proměnné funkcemi konečných neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak jest vztah

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})} \cdot \frac{D(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad \text{(I')}$$

při čemž součet vztahuje se na všechny různé kombinace n-té třídy $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ z čísel $1, 2, \ldots, m$; kombinací těch různých jest, jak známo $\binom{m}{n}$; je-li pak $m < n$, jest klásti na pravé straně rovnice (I') nullu. Důkaz rovnice (I') provede se stejně jako rovnice (I) na základě věty o derivování funkce funkcí a vět o determinantech.

225. Funkce závislé. Jestliže v jistém oboru jest dáno m funkcí $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a lze-li aspoň jednu z těch funkcí, ku př. $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, vyjádřiti pomocí ostatních vztahem (za znaménky funkčními φ_k vynechávám v následujícím znaky neodvisle proměnných):

$$\varphi_1 = F(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m) \qquad (\alpha)$$

tak, že jest F funkcí proměnných veličin $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ a na neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ závisí toliko prostřednictvím těchto veličin $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$, říkáme, že *funkce dané* (v počtu m) *jsou na sobě v daném oboru závislé.* Zvláště pak v důsledku (α) říkáme o funkci φ_1, že jest závisla na funkcích $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ (vzhledem k neodvisle proměnným $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Není-li žádná z funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ na ostatních závisla — způsobem vytčeným v (α) pro φ_1 —, pravíme, že *funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ jsou na sobě nezávisly v daném oboru.*

Abychom si odvodili některé důležité věty o funkcích na sobě závislých, učiníme předpoklad, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ mají v oborech, jež budou předmětem úvah, částečné derivace dle neodvisle proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a že ony derivace jsou spojitými funkcemi těchto proměnných.

Uspořádejme nejprve derivace částečné funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ dle neodvisle proměnných v tabulku obsahující m řádků a n sloupců tak, že v každém řádku budou částečné derivace jedné a téže funkce φ_k, v každém pak sloupci derivace částečné funkcí φ_k dle jedné a téže proměnné x_i. Tabulka bude míti tento tvar

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}, & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_3}, \ldots, & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}
\end{array} \qquad (A)$$

Soustavě veličin uspořádané dle určitého předpisu v m řádků a n sloupců, takže každá ta veličina jest v jednom určitém sloupci a v jednom určitém řádku, říkává se **matice** (*obdélníková*, je-li $m \lessgtr n$; *čtvercová*, je-li $m = n$). Jednotlivé veličiny pak slují *elementy* matice. Z elementů matice můžeme tvořiti determinanty, při čemž postupujeme tak, že v každém sloupci determinantu umísťují se elementy matice z jednoho sloupce matice a obdobně jest tomu i při řádcích. Determinanty nejvyššího stupně, jež lze z matice (A) tak vytvořiti, jsou determinanty, jichž stupeň jest rovný menšímu z čísel m, n.

Obecně sluje matice (A) hodnosti p-té v bodě $[x_1, x_2, \ldots x_n]$, jestliže všechny determinanty stupně vyššího než p-tého z její elementů vytvořené jsou rovny nulle v bodě $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (aneb vůbec neexistují, je-li totiž p rovno menšímu z čísel m, n) a jestliže zároveň aspoň jeden její determinant stupně p jest v bodě $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ různý od nully. Podobně říkáme, že matice (A) jest v oboru jistém hodnosti p-té, je-li v každém bodě oboru toho hodnosti p-té.

Pomocí tohoto pojmu můžeme vysloviti větu: *Jestliže matice* (A) *jest v bodě* $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ *a jeho okolí hodnosti p-té a je-li v důsledku toho ku př. determinant*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p)}{D(x_1, x_2, \ldots x_p)} \qquad (\beta)$$

v bodě $[\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n]$*) *různý od nully, pak*

*) a tudíž také v jistém okolí toho bodu, se zřetelem k tomu, že derivace funkcí φ_i dle proměnných x_k jsou dle předpokladů svrchu učiněných funkce spojité.

1. *Funkce* $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ *jsou na sobě nezávislý v jistém okolí bodu* $[\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n]$.

2. *Funkce* $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots \varphi_m$ *dají se v tom okolí vyjádřiti jako funkce závislé pouze na funkcích* $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$. Tato část věty má význam toliko pro případ, že $p < m$, což v následujícím budeme předpokládati. Zároveň učiníme k vůli zjednodušení v označování předpoklad $p < n$.

Zaveďme si, abychom tuto větu dokázali, pomocné proměnné $y_1, y_2, \dots y_m$ dané rovnicemi

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \quad y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n); \tag{γ}$$

proměnné tyto nechť nabývají pro $x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$ hodnot $y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$. Uvažujme pak rovnice

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) - y_1 = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - y_2 = 0, \dots \\ \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) - y_m = 0.\end{gathered} \tag{δ}$$

Levé strany těchto rovnic k vůli stručnosti označíme $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_m$ (kladouce $\Phi_k = \varphi_k - y_k$); pak jest ihned snadným počtem

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, .., \Phi_p, \Phi_{p+1}, .., \Phi_m)}{D(x_1, x_2, .., x_p, y_{p+1}, .., y_m)} = (-1)^{m-p} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}. \tag{ε}$$

Jest tudíž funkcionální determinant levých stran rovnic (δ) (závislých na proměn $x_1, x_2, \dots x_n, y_1 .., y_m$) dle proměnných $x_1, x_2, \dots x_p, y_{p+1}, \dots y_m$ rovný — až na znaménko — determinantu (β) a jest tedy onen funkcionální determinant v bodě $[\xi_1, \xi_2, .., \xi_n, \eta_1, .., \eta_m]$ od nully různý. Následkem toho dle věty o implic. funkcích, odst 221., můžeme v důsledku rovnic (δ) $x_1, x_2, .. x_p, y_{p+1}, \dots y_m$ vyjádřiti jakožto funkce proměnných $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n, y_1, y_2, .. y_p$ a psáti

$$x_i = \psi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p), \quad i = 1, 2, \dots p, \tag{ι}$$
$$y_{p+k} = \psi_{p+k}(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p), \quad k = 1, 2, \dots m-p, \tag{$\varkappa$}$$

kde funkce ψ jsou funkce definované v bodě $[\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, .., \xi_n, \eta_1, .., \eta_p]$ a jeho okolí, nabývají v tom bodě hodnoty ξ_i resp. η_{p+k} a mají tam derivace částečné spojité dle všech n proměnných.

Z toho výsledku jest nejprve patrno, že hodnoty pro $y_1, y_2, .., y_p$ (kteréžto hodnoty jsou rovny dle (δ) hodnotám funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$) můžeme si zvoliti zcela libovolně v jistém okolí bodu $[\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p]$. Rovnice ($\iota$) nám právě udávají ten bod $[x_1, x_2, \dots x_n]$, pro který $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ nabývají oněch libovolně zvolených hodnot pro $y_1, y_2, \dots, y_p$; a to $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$ můžeme zvoliti libovolně v určitém okolí bodu

$[\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_n]$, z (ι) pak následují hodnoty pro $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Nemohou tudíž býti veličiny $y_1, y_2, \ldots y_p$ a tudíž ani jim rovné funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ na sobě nějak závislé v okolí bodu $[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ a jsou tedy funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ funkce na sobě nezávislé v okolí bodu $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, čímž prvá část věty dokázána.

Na druhém místě vypočteme si derivace funkce ψ_{p+k} dle proměnných $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Počítejme derivaci ku př. funkce $y_{p+1} = \psi_{p+1}$ dle x_{p+1}; určiti ji můžeme bezprostředně ze vztahu (8) odst. 223. Jest

$$\frac{\partial y_{p+1}}{\partial x_{p+1}} \cdot \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_{p+1}, \ldots, y_m)} =$$

$$= -\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p, \Phi_{p+1}, \Phi_{p+2}, \ldots, \Phi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_m)}.$$

Druhý faktor levé strany jest výraz (ε) různý od nully v okolí bodu $[\xi_1, \ldots \xi_p, \eta_1, \ldots \eta_m]$, pravá strana jest rovna výrazu

$$(-1)^{m-p} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p+1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})},$$

což jest dle předpokladu o matici (A) učiněného (že jest v okolí $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ hodnosti p) rovno nulle v bodě $[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots \eta_m]$ a jeho okolí. Tedy jest derivace funkce ψ_{p+1} dle x_{p+1} rovna nulle, což ihned se rozšiřuje na každou funkci ψ_{p+k} vzhledem ke každé proměnné x_{p+l}, následkem čehož jsou funkce ψ_{p+k} vůbec nezávisly na $x_{p+1}, \ldots, x_n$ v okolí bodu $[\xi_{p+1}, \ldots \xi_n, \eta_1, \ldots \eta_p]$, takže relace $(\varkappa)$ lze psáti ve tvaru

$$y_{p+k} = \Psi_{p+k}(y_1, y_2, \ldots y_p) = \Psi_{p+k}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p),$$

čímž i druhá část věty dokázána.

Příklady. 1. *Odvozování funkcionálních rovnic pro elem. funkce.* Vezměme v úvahu funkci proměnné x, jejíž derivace jest $\frac{a}{x}$, kde a jest konstanta. Označme ji $f(x)$; pak jsou funkce proměnných x, y

$$\varphi_1(x, y) = f(x) + f(y), \quad \varphi_2(x, y) = xy$$

na sobě závislé, neboť jich funkcionální determinant jest

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{x}, & \frac{a}{y} \\ y, & x \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy jest nutně

$$f(x) + f(y) = \Phi(x \cdot y).$$

Klademe-li $y=1$, $f(1)=b$, jest $\Phi(x)=f(x)+b$ a tedy

$$f(x)+f(y)=f(x.y)+b,$$

což jest funkcionální rovnice pro všechny funkce $f(x)$ mající za derivaci $a.x^{-1}$, existují-li ovšem takové funkce. Že takové funkce vskutku existují, jest nám známo; jsou dány výrazem $a \log |x|+b$, který definuje funkci o spojité derivaci pro všecka x různá od nully.

2. *Lineární formy o n proměnných.* Budiž dáno m lineárních homogenních funkcí — t. zv. **forem prvního řádu** — o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y_k=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n; \quad k=1, 2, \ldots, m.$$

Z těchto forem jest p nezávislo a ostatní pomocí těchto p vyjádřitelno, jestliže matice z koefficientů a_{kj}

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{matrix}$$

jest hodnosti p-té (dle obecné věty předch. odst.). Jestliže ku př. determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2p} \\ . & . & . & . \\ a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots, & a_{pp} \end{vmatrix}$$

jest různý od nully (a všecky determinanty stupňů vyšších než p rovny nulle) jest p forem $y_1, y_2, \ldots, y_p$ na sobě nezávislo; ostatní pak pomocí těchto dají se vyjádřit. Vyjádření toto jest ku př. dáno pro y_r $(r>p)$ rovnicí

$$\begin{vmatrix} y_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p} \\ y_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ y_p, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots, & a_{pp} \\ y_r, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots, & a_{rp} \end{vmatrix}=0.$$

Odtud následují snadno známé věty pro **řešení m lineárních rovnic o n neznámých.**

3. **Forma kvadratická** o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest dána výrazem (volme k vůli přehlednosti $n=3$)

$$y=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2 \quad (\gamma)$$
$$=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \text{ při čemž } i, k=1, 2, 3 \text{ a } a_{ik}=a_{ki}.$$

Je-li čtverečná matice z prvků a_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ o n^2 prvcích (ve specielním případě $n = 3$ o 9 prvcích:

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix} \qquad a_{ik} = a_{ki}) \qquad (s)$$

hodnosti p-té, pak utvoříme-li derivace kvadratické formy dle jednotlivých proměnných v počtu n, tvoří tyto derivace, jež děleny dvěma označíme $y_1, y_2, \ldots y_n$, s formou u celkem $n+1$ funkcí, z nichž toliko p jest na sobě nezávislo a ostatní — mezi nimi i forma sama — pomocí těch p dá se vyjádřiti. Tak ku př. je-li $n = 3$ a při tom

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ avšak } \delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \lessgtr 0,\text{*)} \qquad (t)$$

jest matice (s) hodnosti druhé a jsou

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \end{aligned}$$

na sobě nezávisly a y_3 jakož i y dají se vyjádřiti jakožto funkce veličin y_1, y_2; neboť matice utvořená z derivací funkcí y_1, y_2, y_3, y dle jednotlivých proměnných jest

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \\ a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3, & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3, & a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 \end{matrix}$$

a jest téže hodnosti jako matice (s), totiž druhé, a odtud všecka tvrzen následují jako důsledek věty obecné odst. předcházejícího. I jest tedy

$$y = \Phi(y_1, y_2);$$

derivujeme-li tuto rovnici jednou podle x_1, podruhé dle x_2, dostaneme

$$2y_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} a_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} a_{21}; \; 2y_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} a_{12} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} a_{22}.$$

Z rovnic těchto však následuje

$$\delta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 2a_{22} y_1 - 2a_{21} y_2, \; \delta \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = -2a_{12} y_1 + 2a_{11} y_2$$

*) Označíme-li minor, který patří v determinantu Δ ku a_{ik}, krátce A_{ik}, pak, je-li $\Delta = 0$, jsou platny vztahy $A_{ik}^2 = A_{ii} A_{kk}$. Je-li tedy Δ hodnosti druhé, jest jisté aspoň jeden ze subdeterminantů hlavních (druhého stupně, t. j. jeden ze subdeterminantů A_{11}, A_{22}, A_{33}) od nully různý. Ve výkladu pak předpokládáno, že A_{33} — značené δ — jest různo od nully.

a tedy

$$\delta \,.\, \Phi(y_1, y_2) = a_{22}\, y_1^2 - 2\, a_{12}\, y_1\, y_2 + a_{11}\, y_2^2.$$

Obecné výsledky jsou obdobné; uvedu je, aniž bych podával zevrubná jich odvození, jež v důsledku obecné věty odst. 225. jest snadné a jež mohu tudíž přenechati čtenáři.

Jest pak platna věta: Jestliže elementy diskriminantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ . & . & & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

tvoří matici hodnosti p-té, tu lze vybrati nejprve z matice jeden subdeterminant hlavní (t. j. takový, že hlavní diagonala má prvky vesměs z hlavní diagonaly v Δ, totiž prvky a_{ii}) stupně p-tého od nully různý. Budiž to determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1p} \\ . & & . \\ a_{p1}, & \ldots, & a_{pp} \end{vmatrix} \lessgtr 0.$$

Pak jsou derivace dané kvadratické formy $y = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ dle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, jež označíme dělivše je dvěma $y_1, y_2, \ldots y_p$, na sobě nezávislé a lze y pomocí jich vyjádřiti ve tvaru

$$\delta y = - \begin{vmatrix} 0, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_p \\ y_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p} \\ y_2, & a_{21} & a_{22}, & \ldots, & a_{2p} \\ . & & . & & . \\ . & & & & . \\ y_p, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots, & a_{pp} \end{vmatrix};$$

t. j. lze *danou kvadratickou formu vyjádřiti jako kvadratickou formu o p proměnných* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *s diskriminantem od nully různým; proměnné* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *jsou pak lineárné formy proměnných* $x_1, \ldots, x_n$. Zvláště pak jest $y_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n$.

XI. Záměna proměnných.

Často jest užitečno a účelno ve výrazech a vztazích, ve kterých se vyskytují proměnné, nahraditi tyto novými proměnnými. Proměnné nové jsou pak s původními vázány rovnicemi, kterými jsou jedny pomocí druhých (a to i nové pomocí původních, i původní pomocí nových) stanoveny. Náhrada taková nazývá se *záměna proměnných* aneb *substituce proměnných* a také *zavedení nových proměnných.*