# Počet differenciální

## VII. Derivace vyšších řádů; řada Taylorova a řady mocninné vůbec, příslušná použití

In: Karel Petr (author): Počet differenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1923. pp. 189–279.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402695

# VII. Derivace vyšších řádů; řada Taylorova a řady mocninné vůbec, příslušná použití.

## 1. Definice derivací vyšších řádů.

**125.** Má-li funkce $f(x)$ v intervalu $(a, b)$ ve všech bodech derivaci, jest tato derivace novou funkcí proměnné $x$, již jsme označili $f'(x)$. (Viz odst. 101.) Má-li $f'(x)$ opět derivaci ve všech bodech intervalu $(a, b)$, sluje tato derivace **druhou derivací funkce** $f(x)$ anebo **derivací druhého řádu** funkce $f(x)$ v $(a, b)$. Značiti ji budeme $f''(x)$, t. j. bude pro nás

$$(f'(x))' = f''(x).$$

Obdobně se definují a značí *derivace třetí, čtvrtá,... n-tá* (*n*-tého řádu) a to rovnicemi

$$(f''(x))' = f'''(x),\ (f'''(x))' = f^{(IV)}(x), \ldots, (f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x).$$

Podobně se značí postupné derivace funkce $y$ proměnné $x$ znaky $y'$, $y''$, $y'''$, $y^{(IV)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ Jiná označení pro derivace vyšších řádů udáme později.

1\. *Příklad 1.* Funkce $y = e^x$ má za první, druhou, třetí, ..., $n$-tou derivaci funkce

$$y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x, \ldots, y^{(n)} = e^x.$$

Jest patrno, že všecky derivace funkce $e^x$ shodují se s funkcí samou. Pro derivaci funkce $y = e^{\alpha x}$ plyne $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}, \ldots, y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$.

*Příklad 2.* Pro funkci $y = \sin x$ jest obdobně

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(IV)} = \sin x$$

a obecně

$$y^{(4k+1)} = \cos x,\ y^{(4k+2)} = -\sin x,\ y^{(4k+3)} = -\cos x,\ y^{(4k)} = \sin x.$$

Můžeme všechny tyto rovnice shrnouti v jednu a to v následující:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Stejně odvodí se formule

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

*Příklad 3.* Derivace funkce $y = x^a$ jsou

$$y' = a x^{a-1},\ y'' = a(a-1)x^{a-2},\ y''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$$

a obecně

$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$

*Příklad 4.* Je-li $y = \log x$, jest

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1!}{x^2},\ y''' = +\frac{2!}{x^3}, \dots\ y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

*Příklad 5.* Budiž $y = \operatorname{arctg} x$; v tomto případě jest

$$y' = \frac{1}{1+x^2},\ y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ y''' = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Výrazy pro derivace vyšší stávají se s řádem derivace složitější a jest obtížno přímým postupem odvoditi si tvar $n$-té derivace. Můžeme však tu toho dosíci umělým obratem. Zavedeme si funkce $\varrho$ a $\varphi$ proměnné $x$ těmito rovnicemi

$$\varrho = (1+x^2)^{\frac{1}{2}},\ \varphi = \operatorname{arc\ cot} x.$$

Pak jest

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

a můžeme nejprve očividně psáti, vyznačujeme-li čárkou derivaci dle $x$,

$$y' = \frac{1}{\varrho}\,.\sin\varphi\,.$$

jest však dále $\varrho' = \cos\varphi$, $\varphi' = -\varrho^{-1}\sin\varphi$; derivujeme-li tedy poslední výraz jako součin, máme ihned

$$y'' = -\frac{1}{\varrho^2}(\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) = -\frac{1!}{\varrho^2}\sin 2\varphi\,.$$

Stejně plyne

$$y''' = +\frac{2!}{\varrho^3}\sin 3\varphi,\ y^{(IV)} = -\frac{3!}{\varrho^4}\sin 4\varphi$$

a úplnou indukcí

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\varrho^n}\sin n\varphi = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arc\ cot} x),$$

čímž obecně výraz pro $n$-tou derivaci funkce $\operatorname{arctg} x$ nalezen.

**126. Leibnicova formule** vztahuje se ku výpočtu $n$-té derivace součinu dvou funkcí. Klademe-li $y = u.v$, kde $u, v$ jsou funkce proměnné $x$, jest

$$y' = u'v + uv',\ y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \dots$$

Obecně lze patrně psáti

$$y^{(n)} = A_0 u^{(n)} v + A_1 u^{(n-1)} v' + A_2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + A_n u v^{(n)}$$

a zbývá jenom určiti koefficienty. K tomu cíli klademe $u = e^x$, $v = e^{\alpha x}$ a tedy $y = e^{(1+\alpha)x}$, při čemž $\alpha$ jest konstanta. Dosazením dostaneme

$$(1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x} = A_0 e^{(1+\alpha)x} + A_1 \alpha e^{(1+\alpha)x} + A_2 \alpha^2 e^{(1+\alpha)x} + \ldots + \\ + A_n \alpha^n e^{(1+\alpha)x},$$

t. j.

$$(1+\alpha)^n = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_n \alpha^n.$$

Tato rovnice jest platna pro každé $\alpha$ (t. j. identicky) a jsou tudíž $A_k$ binomické koefficienty, takže lze psáti

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \ldots + \binom{n}{n} u v^{(n)},$$

což jest hledaná formule. Bylo by snadno i pomocí úplné indukce ji dokázati.

**127. Funkce liché a funkce sudé.** Jestliže funkce jest definována v intervalu $(-a, a)$ a hoví rovnici

$$f(-x) = -f(x), \tag{$\alpha$}$$

sluje *funkcí lichou*. Hoví-li naproti tomu rovnici

$$f(-x) = f(x), \tag{$\beta$}$$

nazývá se *funkcí sudou*. Připouští-li $f(x)$ derivace vyšších řádů, dostaneme derivujíce ($\alpha$) $n$-kráte

$$f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x),$$

odkudž následuje věta: *Derivace lichého řádu funkce liché jest funkce sudá: derivace sudého řádu funkce liché jest funkce lichá.*

Podobně plyne z ($\beta$): Derivace lichého řádu funkce sudé jest funkce lichá; derivace sudého řádu z funkce sudé jest funkce sudá.

Dosadíme-li v ($\alpha$) 0 za $x$, dostaneme ihned $f(0) = 0$. Jest tedy funkce lichá v bodě 0 rovna nulle a rovněž derivace sudé funkcí lichých a derivace liché funkcí sudých jsou rovny v bodě $x = 0$ nulle.

**128. Derivace vyšších řádů jakožto limity.** Jelikož (za předpokladu, že derivace v úvahu vzaté existují)

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f''(x) = \lim_{k=0} \frac{f'(x+k) - f'(x)}{k},$$

jest (dosadíme-li do druhé z rovnic za $f'(x)$ na základě rovnice první)

$$f''(x) = \lim_{k=0}\left[\lim_{h=0}\frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{hk}\right]. \qquad (a)$$

Při tom jest počítati napřed limitu dle $h$ a potom dle $k$ (anebo — což jest tu totéž — naopak.) Existuje-li však druhá derivace v bodě $x$ a jeho okolí a je-li spojitá v bodě $x$, můžeme také psáti

$$f''(x) = \lim_{h=0,\,k=0}\frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{hk}, \qquad (a')$$

*ať $h, k$ jakkoliv konvergují k nulle*; neboť nejprve jest, klademe-li $f(x+k)-f(x)=F(x)$, dle věty o střední hodnotě ($\vartheta_1$ a později $\vartheta_2$ jsou čísla kladná, menší než 1)

$$f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x) = F(x+h)-F(x) = \\ = hF'(x+\vartheta_1 h)$$

a dále rovněž dle věty o střední hodnotě

$$F'(x+\vartheta_1 h) = f'(x+\vartheta_1 h+k)-f'(x+\vartheta_1 h) = kf''(x+\vartheta_1 h+\vartheta_2 k).$$

Dosadíme-li dle posledních dvou rovnic do $(a')$, dostane tato tvar

$$f''(x) = \lim_{h=0,\,k=0} f''(x+\vartheta_1 h+\vartheta_2 k),\quad 0<\vartheta_1<1,\ 0<\vartheta_2<1,$$

ze kterého správnost učiněného tvrzení bezprostředně plyne. Specielně můžeme v rovnici $(a')$ klásti $h=k$, čímž obdržíme (stále za předpokladu existence druhé derivace v bodě $x$ a jeho okolí a spojitosti její v bodě $x$)

$$f''(x) = \lim_{h=0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}. \qquad (b)$$

Zavádí se pak často toto označení: Přírůstek funkce v bodě $x$ odpovídající přírůstku neodvisle proměnné rovnému $\Delta x$ a kterýž přírůstek jsme značili $\Delta f(x)$, kladouce $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$, sluje též **první difference** aneb **první rozdíl funkce $f(x)$ v bodě $x$ při přírůstku $\Delta x$.** *Utvoříme-li, podržujíce tentýž přírůstek $\Delta x$, první differenci první difference, dostaneme druhou differenci funkce* $f(x)$, již značíme

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x),$$

takže rovnici $(b)$ lze psáti (místo $h$ zavedeme $\Delta x$).

$$f''(x) = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}. \qquad (c)$$

Podobnou úvahu mohli bychom provésti i pro derivace vyšších řádů a dostali bychom *za předpokladu, že derivace tyto existují a jsou spojity, tyto výrazy limitní*

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^3 f}{\Delta x^3} \text{ a obecně } f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}.$$

Při tom jsou $\Delta^3 f$, $\Delta^n f$ třetí resp. $n$-tá difference funkce $f(x)$ v bodě $x$ při přírůstku $\Delta x$ a jest (jak buď úplnou indukcí aneb pomocí funkce $e^{\alpha x}$ (viz obd. úvahu v odst. 126.) lze obecně dokázati)

$$\Delta^3 f = f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x),$$

$$\Delta^n f = f(x+n\Delta x) - \binom{n}{1} f(x+\overline{n-1}\Delta x) + \binom{n}{2} f(x+\overline{n-2}\Delta x) - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \binom{n}{n} f(x).$$

Limitní výrazy pro druhou, třetí a $n$-tou derivaci právě odvozené tvoří podklad pro nové označení derivací vyšších řádů; značí se pak

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{aneb též obšírněji} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}; \qquad (d)$$

avšak budeme užívati také označení daného rovnicemi

$$f''(x) = \overset{2}{D_x} f(x), \quad f'''(x) = \overset{3}{D_x} f(x), \quad f^{(n)}(x) = \overset{n}{D_x} f(x),$$

při čemž index $x$ při $D$, není-li třeba obávati se nedorozumění, možno vynechati.

*Poznámka.* Místo ($b$) lze psáti výrazy obecnější, jichž správnost (na základě předpokladů svrchu učiněných) stejně můžeme dokázati jako správnost rovnice ($a'$), t. j. dvojím postupným použitím věty o střední hodnotě. Tak jest ku př.

$$f''(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+(a+2)h) - 2f(x+(a+1)h) + f(x+ah)}{h^2}, \qquad (b')$$

kde $a$ jest reálné číslo libovolně zvolené. Zvláště pak pro $a = -1$ máme vztah

$$f''(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

vedle ($b$) hojně používaný. Stejné rozšíření jest platno — jak patrno — i pro derivace vyšších řádů.

*Příklad* 1. Abychom uvedli aspoň jeden příklad užití vzorců tohoto odstavce, uvažujme funkci $y = x^n \varphi(x)$, o níž budeme předpokládati, že má v bodě 0 a jeho okolí spojité derivace až do řádu $n$-tého a jest naším úkolem ty derivace vypočítati. Při tom jest ještě $\varphi(x)$ definována v okolí bodu 0 a konečná v tom okolí. Jest při $k \leqq n$

$$\overset{(k)}{y}_{x=0} = \lim_{h=0} \frac{(kh)^n \varphi(kh) - \binom{k}{1}(k-1)^n h^n \varphi((k-1)h) + \binom{k}{2}(k-2)^n h^n \varphi((k-2)h) - \ldots}{h^k}$$

$$= \lim_{h=0} h^{n-k}[k^n \varphi(kh) - \binom{k}{1}(k-1)^n \varphi(\overline{k-1}h) + \ldots]$$

I jest

$$y^{(k)}_{x=0}=0 \text{ pro } k<n,$$

$$y^{(n)}_{x=0}=\lim_{h=0}\left(n^n\varphi(nh)-\binom{n}{1}(n-1)^n\varphi(\overline{n-1}h)+\ldots\right),$$

čímž úkol daný jest řešen.

Je-li ku př. $y=x^n$ (tedy $\varphi(x)=1$), existují všecky derivace v bodě $x=0$ ($n$ jest celé kladné); $y_0^{(n)}=n!$ a máme tak vztah — porovnáme-li tento výsledek s výsledkem právě dosaženým —

$$n^n-\binom{n}{1}(n-1)^n+\binom{n}{2}(n-2)^n-\ldots=n!;$$

a dále máme snadno

$$k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\ldots=0 \text{ při } k>n.$$

neboť v tomto zvláštním případě jest při $k>n$ $y_0^{(k)}=0$). Tyto arithmetické vztahy lze psáti, užíváme-li známého označení pro difference,

$$\Delta^n 0^n=n!,\quad \Delta^k 0^n=0,\quad k>n.$$

Kdybychom používali rovnic obecnějších obdobných ku ($b'$), mohli bychom psáti místo posledních rovnic vztahy

$$\Delta^n a^n=n!,\quad \Delta^k a^n=0,\quad k>n,$$

při čemž (pro každé $k$) jest

$$\Delta^k a^n=(a+k)^n-\binom{k}{1}(a+k-1)^n+\binom{k}{2}(a+k-2)^n-\ldots$$

*Příklad* 2. Že rovnice ($b$) jest správna toliko za předpokladu, že druhá derivace funkce $f(x)$ existuje v bodě $x$ (t. j. určitěji řečeno, že může existovati limita na pravé straně té rovnice a nemusí existovat druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě $x$), jest patrno ku př. na funkci definované rovnicemi

$$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x} \quad \text{pro } x\neq 0,\quad f(0)=0.$$

Funkce tato má první derivaci v bodě $x=0$, druhou derivaci však v tomto bodě nemá. Limita však na pravé straně rovnice ($b$) tu existuje, neboť

$$\lim_{h=0}\frac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{h^2}=\lim_{h=0}\left(8h\sin\frac{1}{2h}-2h\sin\frac{1}{h}\right)=0.$$

**129. Označení differenciální.** Velmi zhusta se zejména při použitích počtu differenciálního užívá t. zv. differenciálů.

**Differenciál** (prvý) **funkce** $f(x)$ *v bodě* $x$ *jest součin derivace funkce* $f(x)$ *a přírůstku neodvisle proměnné; značí se výrazem* $df(x)$ (aneb krátce též $df$). Jest tedy

$$df(x) = f'(x)\,h, \qquad df(x) = f'(x)\,\Delta x,$$

při čemž jsme v prvé rovnici označili přírůstek neodv. proměnné písmenou $h$, v druhé $\Delta x$. Klademe-li v těchto rovnicích $f(x) = x$ a tedy $f'(x) = 1$, obdržíme

$$dx = h, \quad dx = \Delta x$$

v důsledku kterýchžto rovnic značí se přírůstek neodvisle proměnné též znakem $dx$ a nazývá se často též *differenciálem neodvisle proměnné.* Píše se tedy z pravidla

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

t. j. *differenciál* (prvý) funkce $f(x)$ *jest součin derivace* (prvé) a *differenciálu neodvisle proměnné.* Odtud zase následuje, že derivace funkce $f(x)$ jest podílem differenciálu té funkce a differenciálu neodvisle proměnné a tak lze v označení pro prvou derivaci funkce $f(x)$ dříve zavedeném $\left(\text{t. j. v } \dfrac{df(x)}{dx}\right)$ viděti vskutku zlomek, v němž čitatel i jmenovatel má uvedený právě význam.

Platí pak věta: *V bodech, ve kterých derivace dané funkce není rovna nulle, má podíl přírůstku funkce a příslušného differenciálu* (obojí při témž přírůstku neodvisle proměnné) *za limitu 1, když přírůstek neodvisle proměnné konverguje k nulle.* Jest totiž

$$\frac{\Delta f(x)}{df(x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f'(x)\,\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f'(x)},$$

odkudž věta uvedená vyplývá. Větě té můžeme dáti též analytický výraz rovnicí

$$\frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1 + \varepsilon, \quad \Delta f(x) = df(x) + \varepsilon' dx = (f'(x) + \varepsilon')\,dx, \qquad (e)$$

kdež $\varepsilon$, $\varepsilon'$ jsou funkce proměnné $x$ a přírůstku $dx$ a konvergující k nulle pro lim $dx = 0$.

Obdobně jako derivace vyšších řádů definují se i differenciály vyšších řádů. Tak pod **druhým differenciálem** vyrozumíváme differenciál (prvého) differenciálu (při čemž po obakrát jest tvořiti differenciál pomocí téhož přírůstku neodvisle proměnné). Značíme-li druhý differenciál $d^2f(x)$, jest tedy

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\,.\,h) = h\,.\,df'(x) = f''(x)h^2$$

anebo též, píšeme-li $dx$ místo $h$,

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2.$$

Stejně jest pro *třetí, ... n-tý differenciál*

$$d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3, \ldots d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Jest patrno, že v označení derivací uvedeném v ($d$) odst. předch. jest možno příslušné symboly pokládati za skutečné zlomky (stejné jak tomu jest při první derivaci). I rovnice ($e$) lze rozšířiti a ku př. psáti

$$\Delta^2 f(x) = d^2f(x) + \varepsilon\,dx^2, \quad \lim_{dx=0} \varepsilon = 0.$$

*Poznámka.* Označení differenciální poskytuje často tu výhodu, že dovoluje nám stručněji vypisovati formule, umožňuje někdy v jedné rovnici shrnouti několik rovnic ovšem až při funkcích o několika neodvisle proměnných. Z té příčiny a vzhledem k tomu, že v starších pracích označení tohoto hojně jest používáno, jest tu o něm pojednáváno.

## 2. Formule Taylorova.

**130. Úkolem formule Taylorovy** jest podati rozvoj funkce $f(a+h)$ ve tvaru

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{n-1} h^{n-1} + \mathfrak{A}_n h^n \tag{I}$$

platný, když se proměnná $h$ nachází v jistém okolí bodu 0 (tedy platný pro dosti malé $|h|$). Při tom jsou $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ čísla nezávislá na $h$ konstanty vzhledem ku $\quad_n$ pak jest funkce proměnné $h$ definovaná a konečná v tom okolí bodu 0 doplněném bodem 0, ve kterém jest svrchu uvedený rozvoj platný.

*Jestliže takový rozvoj jest při určitém n možný, jest jenom jediný.* Neboť kdyby byly dva takové rozvoje pro $f(a+h)$, měli bychom v tom jistém okolí bodu 0 platnou rovnost tvaru

$$A_0 + A_1 h + \ldots + A_{n-1} h^{n-1} + \mathfrak{A}_n h^n = B_0 + B_1 h + \ldots + B_{n-1} h^{n-1} + \\ + \mathfrak{B}_n h^n,$$

kde $A_k$ jsou koefficienty prvého, $B_k$ koefficienty druhého rozvoje; funkce proměnné $h$ $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ jsou konečny v tom okolí a tedy jest konečný i jich rozdíl. Z rovnice poslední však plyne

$$\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n = \frac{B_0 - A_0}{h^n} + \frac{B_1 - A_1}{h^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1} - A_{n-1}}{h}.$$

Má-li však výraz na pravé straně poslední rovnice býti konečnou funkcí proměnné $h$ v okolí bodu 0 (ať jest to jakékoliv okolí toho bodu), musí patrně

$$B_0-A_0=0,\ B_1-A_1=0, \ldots\ B_{n-1}-A_{n-1}=0 \quad \text{(viz odst. 67., př. 3.)}$$

a tedy i $\mathfrak{A}_n-\mathfrak{B}_n=0$, t. j. rozvoje prvý i druhý jsou totožny (majíce tytéž koefficienty při všech mocninách $h$).

*Je-li takový rozvoj při určitém $n$ možný a má-li funkce $f(a+h)$ spojité derivace dle $h$ až do řádu $n$-tého v bodě 0 a v okolí bodu 0, pak jest*

$$A_0=f(a),\ A_k=\frac{1}{k!}.f^{(k)}(a).$$

Neboť derivace dle $h$ členu $\mathfrak{A}_n h^n$ v bodě 0 existují v důsledku předpokladu o $f(a+h)$ a to až do řádu $n$-tého a jsou rovny nulle až do řádu $n-1$. (Viz odst. 128., příkl.) Utvoříme-li tedy derivaci $k$-tou rovnice (I) v bodě 0, dostaneme ihned $A_k$ ve tvaru udaném. $A_0$ vyplývá z rovnice (I) přímo pro $h=0$.

**131.** Abychom vyšetřili, zda rozvoj (I) jest možný, a vyšetřili hodnotu členu $\mathfrak{A}_n h^n$, budeme předpokládati, že funkce $f(a+x)$ má spojité derivace dle $x$ v intervalu $(-\delta', \delta)$ a to až do řádu $n-1$, nad to pak ještě $n$-tou derivaci ve všech bodech uvnitř toho intervalu. Aspoň jedno z kladných čísel $\delta$, $\delta'$ jest při tom různo od nully.

Budiž $h$ veličina intervalu $(-\delta', \delta)$; kladme pak v souhlase s předcházejícím odstavcem

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n;$$

pokusíme se hledati hodnotu členu $R_n$. K tomu jest účelno zavésti funkci proměnné $x$

$$\varphi(x)=f(a+x)+\frac{h-x}{1!}f'(a+x)+\frac{(h-x)^2}{2!}f''(a+x)+\ldots+$$
$$+\frac{(h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a+x).$$

Jest $\varphi(h)=f(a+h)$ a dále

$$\varphi(0)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

a tedy

$$R_n=\varphi(h)-\varphi(0). \qquad (p)$$

Avšak $\varphi(x)$ jest v $(0, h)$ spojitou a má derivaci pro všecky body uvnitř $(0, h)$ a můžeme tedy užiti obecnější věty o střední hodnotě pro interval $(0, h)$, (odst. 106.) Je-li $\psi(x)$ funkce spojitá v $(0, h)$ a má-li derivaci ve všech bodech uvnitř $(0, h)$, kterážto derivace se nestává tam nullou, jest v důsledku cit. věty

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{\psi(h)-\psi(0)}=\frac{\varphi'(\Theta h)}{\psi'(\Theta h)};\quad 0<\Theta<1. \tag{q}$$

Můžeme ku př. klásti $\psi(x)=(h-x)^p$, $p>0$; jelikož dále, jak derivováním výrazu dávajícího $\varphi(x)$ snadno plyne,

$$\varphi'(x)=\frac{(h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+x), \tag{r}$$

jest, dosadíme-li do $(q)$ dle $(p)$, $(r)$ a za $\psi(x)$ ihned

$$R_n=\frac{h^n(1-\Theta)^{n-p}}{p\,(n-1)!}f^{(n)}(a+\Theta h),\quad 0<\Theta<1. \tag{II}$$

Tak vyplývá základní věta:

**Formule Taylorova.** *Je-li $f(x)$ funkce mající v intervalu $(a-\delta', a+\delta)$ derivace spojité až do řádu $n-1$ a derivaci $n$-tou pro všecky body uvnitř toho intervalu, pak lze rozvinouti $f(a+h)$ dle mocností čísla $h$ na základě formule*

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{h^n(1-\Theta)^{n-p}}{p\,.\,(n-1)!}f^{(n)}(a+\Theta h).$$

*pro všecka $h$ intervalu $(-\delta', \delta)$. Při tom jest $\Theta$ jisté číslo kladné mezi 0 a 1; $p$ jest libovolné číslo kladné.*

**132. Zbytek (člen doplňující).** Člen $R_n$ daný ve (II), jehož hodnotu známe jenom přibližně, neboť závisí zpravidla na čísle $\Theta$, o kterémž pouze víme, že jest mezi 0 a 1, nám dává míru přesnosti, s jakou se přibližuje součet prvých $n$ členů pravé strany formule Taylorovy hodnotě $f(a+h)$. Člen tento sluje *zbytek po členu n-tém* anebo též *člen doplňující $(n+1)$-tý.* Zbytek závisí při dané funkci toliko na $n$ a $h$; forma toho zbytku jest však ještě závisla na volbě čísla $p$. Číslo $\Theta$ závisí na $n$, $p$ a na $h$.

Volíme-li $p=n$, dostaneme tvar zbytku nejvíce obvyklý

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\Theta' h),\quad 0<\Theta'<1,$$

t. zv. **zbytek Lagrangeův**. Klademe-li $p=1$, máme

$$R_n = \frac{h^n (1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\Theta'' h), \quad 0 < \Theta'' < 1,$$

**zbytek Cauchyův**. Obecný tvar uvedený ve (II) jest **zbytek Schlömilchův**.

**133**. Předpokládejme, že $f(x)$ má v intervalu $(a, a+h)$ derivace všech řádů. Pak ve formuli (II) můžeme si zvoliti $n$ tak veliké, jak chceme. Jestliže nad to

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0, \tag{III}$$

jest patrně i

$$f(a+h) = \lim_{n \to \infty} \left( f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right),$$

t. j. jinými slovy lze $f(a+h)$ vyjádřiti nekonečnou řadou konvergentní a psáti

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \ldots, \tag{IV}$$

jež se nazývá **řadou Taylorovou**. Podmínka (III) jest nutná a postačující podmínka, aby řada Taylorova byla konvergentní a aby její součet byl $f(a+h)$.

Řadě Taylorově můžeme dáti různý tvar; jedním z nejčastějších jest ten, který dostaneme, klademe-li $a+h=x$, $a=x_0$ (tedy $h=x-x_0$), čímž dostáváme

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \ldots \tag{V}$$

Zbytek po $n$-tém členu jest v tomto označení

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n}{p\,(n-1)!} (1-\Theta)^{n-p} f^{(n)}(x_0 + \Theta(x-x_0)). \tag{V$_1$}$$

Rozvoj poslední jest rozvoj funkce $f(x)$ dle mocnin rozdílu $x-x_0$ (**mocninná řada argumentu** $x-x_0$). Položíme-li $x_0=0$, dostaneme funkci $f(x)$ vyjádřenu *mocninnou řadou argumentu* $x$ (je-li ovšem příslušný rozvoj konvergentní), t. zv. **řadu Maclaurinovu**, jejíž tvar jest

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \ldots \tag{VI}$$

a různé tvary zbytku po $n$-tém členu jsou při této řadě

$$\frac{x^n(1-\Theta)^{n-p}}{p\,.\,(n-1)!}f^{(n)}(\Theta x) \quad \text{(zbytek Schlömilchův)}, \qquad (\mathrm{VI}_1)$$

$$\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\Theta x)\ \text{(zbytek Lagrangeův)},\ \frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\Theta x)\ \text{(zbytek Cauchyův)}.$$

Řady Maclaurinovy a Taylorovy se zhusta používá ku vyjadřování funkcí pomocí nekonečných mocninových řad, jež pak tvoří pohodlný prostředek ku numerickému počítání těchto funkcí. Odvodíme si takové řady pro elementární funkce. Rozvoje, které tu dostaneme, jsou nám však známy po většině již z dřívějších vyšetřování, jež byly různého druhu; význam formule Taylorovy nespočívá tudíž v možnosti odvoditi tyto rozvoje s její pomocí, jako spíše v možnosti odvoditi je na základě jednoho způsobu a v možnosti udati zbytek jednoduchého tvaru. Nad to lze užiti Taylorův rozvoj pro jiné funkce než funkce elementární. Pro theorii funkcí pak má Taylorův rozvoj fundamentální význam.

*Poznámka 1.* Píšeme-li ve (IV) $x$ místo $a$, $dx$ místo $h$ a vzpomeneme-li si na definici differenciálu funkce $f(x)$, dostaneme rozvoj (IV) ve tvaru ($f(x)$ z pravé strany dáme na lèvou)

$$f(x+dx)-f(x)=\Delta f(x)=\frac{df(x)}{1!}+\frac{d^2f(x)}{2!}+\frac{d^3f(x)}{3!}+\dots+$$
$$+\frac{d^kf(x)}{k!}+\dots$$

*Poznámka 2.* Rozvoj funkce $f(x)$ v řadu mocninnou argumentu $(x-x_0)$, jako jest ku př. rozvoj (V), budeme nazývati **rozvojem funkce $f(x)$ v okolí bodu $x_0$**. Rozvoj (VI.), t. j. řada Maclaurinova, jest v důsledku tohoto pojmenování **rozvojem funkce $f(x)$ v okolí bodu** 0.

V důsledku prvé věty odst. 130. můžeme vysloviti větu: *Existuje-li rozvoj funkce $f(x)$ v okolí bodu $x_0$, existuje jen jediný takový rozvoj.* Anebo jinak řečeno: Je-li rovnost

$$\begin{aligned} &a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots\\ =\;&b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

platna pro všecka $x$ v okolí bodu $x_0$, jest nutně $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\dots$ $\dots a_k=b_k\dots$ Věta tato sluje **větou o neurčitých součinitelích.**

K rovnostem $a_0=b_0$, $a_1=b_1,\dots a_k=b_k,\dots$, ostatně postačí, aby rovnice ($\alpha$) byla splněna pro všecka $x$ obsažená ve množství číselném, jehož bodem zhuštění jest $x_0$, jakož snadno lze přímo z ($\alpha$) dokázati a jakož ostatně později, pojednávajíce elementárně o řadách mocninných, zevrubně dokážeme.

### 3. Použití řady Taylorovy (Maclaurinovy) na elementární funkce a o numerickém výpočtu těchto funkcí vůbec.

Funkce exponenciální, mocninná, logarithmická, funkce trigonometrické a cyklometrické (nazývané souhrnně elementární funkce transcendentní) dají se rozvinouti v konvergentní řady mocninné různými prostředky, jak jsme opětovně na různých místech ukázali. Dle poznámky svrchu učiněné lze pomocí řady Taylorovy (Maclaurinovy) téměř všecky tyto rozvoje snadno odvoditi. Odvození to bude předmětem následujících odstavců, při čemž podáme zároveň některé pokyny pro numerický výpočet jednotlivých funkcí.

**134. Rozvoj exponenciální funkce.** Abychom rozvinuli funkci $e^x$ dle rozvoje (VI), stačí si uvědomit, že je-li $f(x)=e^x$,

$$f'(x)=e^x=f''(x)=f'''(x)\ldots \text{ a tedy } f^{(k)}(0)=1.$$

Jest tedy ihned

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\Theta x},\quad 0<\Theta<1,\quad (1)$$

při čemž jsme psali zbytek hned ve tvaru Lagrangeově. Zbytek konverguje k nulle pro každé $x$ (odst. 32., př. 2.), i jest tedy řada Maclaurinova sestrojená pro funkci $f(x)$ konvergentní pro každé $x$ a má za součet $e^x$. Vedle rovnice (1) lze ovšem užívati pro výpočet $e^x$ nerovnin ($t$) odst. 35. platných pro $x>0$, kteréž dávají výsledek shodný s (1) až na zbytek; tento však jeví se tam ve tvaru značně jednodušším. Pro $x$ záporné má zbytek dle (1) znaménko jako $x^n$ a absolutní hodnota jeho jest menší než $\frac{|x|^n}{n!}$. Máme tak pro $x$ kladné i záporné jednoduché prostředky výpočet funkce $e^x$ provésti; řady pak tím rychleji konvergují, čím menší $|x|$.

Pro numerický výpočet by postačilo vypočísti čísla $e$, $e^{-1}$ (viz odst. 34.), jakož i jeho mocniny s mocnitelem celistvým, kladným i záporným a to prostým násobením, mimo to pak funkci exponenciální $e^x$ pomocí (1) pro interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ostatní hodnoty funkce bychom získali vždy jedním násobením.

Z rozvoje (1) následuje ihned rozvoj vždy konvergentní pro funkci $a^x$; jest

$$a^x=e^{x\log a}=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{x^2\log^2 a}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}\log^{n-1} a}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{x^n\log^n a}{n!}\cdot a^{\Theta x}.$$

**135. Rozvoj pro cos x a sin x.** Derivace postupné funkce cos $x$ pro $x = 0$ nabývají periodicky hodnoty

$$1, 0, -1, 0 \text{ a to } f^{(4k)}(0) = 1,\ f^{(4k+1)}(0) = 0,\ f^{(4k+2)}(0) = -1,\ f^{(4k+3)}(0) = 0.$$

Jest tedy mocninná řada pro cos $x$ se zbytkem ve formě Lagrangeově

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \Theta x. \quad (2)$$

Obdobně jest pro sin $x$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \Theta x. \quad (3)$$

I v řadách těchto konverguje zbytek pro každé $x$ k nulle s rostoucím $k$ (ze stejného důvodu jako při řadě pro $e^x$) a řady nekonečné jsou konvergentní a mají za součet cos $x$ resp. sin $x$.

Výpočet funkcí sin $x$, cos $x$ stačí prováděti dle známých vlastností funkcí těch za předpokladu, že $0 < x < \frac{1}{4}\pi$; než i pro interval $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ lze výpočet jich převésti snadno na výpočet oněch funkcí daných pro interval $(0, \frac{1}{6}\pi)$, jak patrno z rovnic

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Že by při tabellárním počítání hodnot funkčních pro sin $x$, cos $x$ veliký užitek přinesla addiční věta pro tyto funkce platná — obdobně jako při funkci $e^x$ — jest na snadě a známo ostatně čtenáři z elementů goniometrie.

**136. Věta binomická.** Klademe-li $(1 + x)^m = f(x)$, jest

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

a

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \binom{m}{k},$$

čímž jsme obdrželi koefficienty rozvoje, t. zv. *binomické koefficienty*. Máme tak

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n-1} x^{n-1} + R_n, \quad (6)$$

při čemž pro zbytek použijeme nejprve tvar Lagrangeův

$$R_n = \binom{m}{n} x^n (1+\Theta x)^{m-n}$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\dots n}\cdot\left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^n.(1+\Theta x)^m. \qquad (7)$$

Jest

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{m-n}{n+1}\,\frac{x}{1+\Theta x}.$$

Když $n$ roste nade všecky meze, jest limita prvního činitele pravé strany $-1$, druhý činitel jest, *je-li $x$ kladné*, menší než $x$. Je-li tedy $x$ kladné a menší než 1, lze udati k číslu $q$ ležícímu mezi $x$ a 1 číslo $N$ tak, že

$$\left|\frac{R_{n+1}}{R_n}\right| < q < 1 \text{ pro všecka } n > N\text{*)},$$

t. j. je-li $x$ kladné a menší než 1, jest $\lim R_n = 0$ pro $\lim n = \infty$. (Odst. 32., 3. př.)

Můžeme však ještě k širšímu výsledku dospěti, než jest právě vytčený, za předpokladu $m > -1$. Lze totiž psáti výraz (7) ve tvaru

$$R_n = (-1)^n.\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^n\cdot(1+\Theta x)^m.$$

Druhý činitel pravé strany, obsahující prvých $n$ činitelů nekonečného součinu

$$\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\left(1-\frac{m+1}{3}\right)\dots \qquad (8)$$

konverguje k nulle, je-li $m+1>0$. Neboť právě napsaný součin jest divergentní a poněvadž činitelé nekonečného součinu aspoň od jistého indexu počínajíc jsou menší než 1, jest součin ten rovný nulle. Třetí činitel pravé strany jest menší než 1 pro kladné $x \leqq 1$ a tak můžeme tvrditi, že $\lim R_n = 0$ pro $m > -1$ a $0 \leqq x \leqq 1$.

*) Je-li $m \geqq -1$, jest nerovnina tato splněna pro každé $n > \frac{1}{2}m$ a každé $q$ v $(x, 1)$: můžeme dokonce klásti $q = x$, $N = \frac{1}{2}m$; je-li $m < -1$, jest postačitelno ku splnění nerovniny, aby

$$\frac{n-m}{n+1}x < q, \text{ či jinak } n > \frac{-mx-q}{q-x}.$$

Lze tedy v tomto případě klásti $N = \dfrac{-mx-q}{q-x}$, při čemž $q$ jest ovšem číslo mezi $x$ a 1.

Je-li $x < 0$, užijeme pro zbytek tvaru Cauchyova a píšeme

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} \cdot x^n \cdot \left(\frac{1-\Theta'}{1+\Theta' x}\right)^{n-1} \cdot (1+\Theta' x)^{m-1}.$$

Zbytek lze rozložiti ve tři činitele

$$mx(1+\Theta' x)^{m-1}, \quad \binom{m-1}{n-1} x^{n-1}, \quad \left(\frac{1-\Theta'}{1+\Theta' x}\right)^{n-1}.$$

Když $0 > x > -1$, jest první menší než $mx$, třetí pak menší než 1 pro každé $n$; druhý činitel (jak snadno vyplývá z předcházejícího, neboť dospějeme k němu z výrazu (7), klademe-li tam místo $m$, $n$, $\Theta$ čísla $m-1$, $n-1$, 0) konverguje k nulle pro $\lim n = \infty$ a pro $|x| < 1$. Tedy i $\lim R_n = 0$, je-li $0 > x > -1$. Pro $x = -1$ jest zbytek (po snadné úpravě)

$$R_n = -m(1-\Theta')^{m-1}\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)$$

a tento výraz konverguje pro $\lim n = \infty$ k nulle, když $m \geqq 1$ (neboť nekonečný součin, z něho pro $\lim n = \infty$ vznikající, jest divergentní, viz svrchu).

Jestliže $m$ jest uvnitř intervalu (0, 1), pak sice z výrazu pro $R_n$ nenásleduje, že limita jeho jest pro $\lim n = \infty$ (a $x = -1$) rovna nulle, avšak řada nekonečná příslušná dle kriteria Raabeova jest konvergentní a součet její jest roven nulle (dle věty Abelovy o řadách mocninných, kterou však teprve později, totiž v odst. 149., dokážeme). Věta binomická i tu jest tedy platna.

Můžeme tudíž psáti rozvoj pro $(1+x)^m$ t. zv. **řadou binomickou**

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots$$

platný pro $-1 < x < 1$ a pro každé $m$. Jestliže $x = 1$, má rovnice tato význam pro $m > -1$, je li $x = -1$, pak nutno a postačí, aby $m \geqq 0$.

Ve všech ostatních případech rovnice poslední není platna, neboť řada na pravé straně jest divergentní. Jest totiž poměr dvou po sobě jdoucích členů řady binomické

$$\frac{m-n+1}{n} \cdot x$$

a jest tudíž řada binomická

*a*) divergentní pro $|x| > 1$ (dle kriteria d'Alembertova),

*b*) pro $|x| = 1$, $m < 0$ není absolutně konvergentní (dle kriteria 4. odst. 44.) a tudíž diverguje pro $x = -1$, neboť členové mají stejné znaménko. Je-li nad to $m \leqq -1$, diverguje i pro $x = 1$, neboť pro $m < -1$ členové řady rostou nade všecky meze, jelikož součin (8) jest divergentní (o členech větších než 1).

Některé důležité zvláštní případy binomické řady jest třeba míti na paměti, jelikož často se jich používá. Jsou to řady

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (k+1)x^k + \ldots$$

$$\frac{1.2}{(1-x)^3} = 1.2 + 2.3x + 3.4.x^2 + \ldots + (k+1)(k+2)x^k + \ldots$$

. . . . . . . . . . . .

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}\cdot x^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}\cdot x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot x^4 + \ldots$$

**137. Řada logarithmická** nám poskytuje rozvoj funkce $\log(1+x)$. Jest, klademe-li $f(x) = \log(1+x)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ldots, f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

a tedy jest platný vztah

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} +$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\Theta x)^n},$$

kde psali jsme hned zbytek ve tvaru Lagrangeově. Z tohoto tvaru zbytku ihned následuje, že pro $0 < x \leqq 1$ jest $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Abychom vyšetřili chování zbytku pro $x < 0$, píšeme jej (jako při větě binomické) ve tvaru Cauchyově, kladouce

$$R_n = (-1)^{n-1} x^n \frac{(1-\Theta')^{n-1}}{(1+\Theta' x)^n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{1+\Theta' x}\cdot\left(\frac{1-\Theta'}{1+\Theta' x}\right)^{n-1}.$$

Poslední činitel pravé strany jest pro $0 > x > -1$ menší než 1, prostřední pro $|x| < 1$ konverguje k nulle a tedy i pro $0 > x > -1$ jest $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$.

Můžeme tudíž psáti pro $\log(1+x)$ rozvoj

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \ldots \tag{1}$$

platný, když $-1 < x \leqq 1$. Pro jiná $x$ tato rovnost nemá významu, neboť řada na pravé straně diverguje.

Řada odvozená má fundamentální význam pro výpočet logarithmů. Nás nejprve zajímá výpočet logarithmů prvočísel 2, 5 a pak ostatních prvočísel. K tomu cíli odvodíme si z (1) řadu pro tento výpočet účelnější. Změníme-li $x$ v $-x$, obdržíme nejdříve

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^k}{k} - \ldots \quad |x| < 1 \tag{1'}$$

a odečteme-li oba rozvoje poslední (1) a (1′)

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right] \quad \text{pro } |x| < 1. \tag{2}$$

Klademe-li tu $x = \frac{1}{z}$, máme dále

$$\log\frac{z+1}{z-1} = 2\left[\frac{1}{1\,.\,z} + \frac{1}{3\,.\,z^3} + \frac{1}{5\,.\,z^5} + \ldots\right] \quad \text{pro } z > 1, \tag{3}$$

kterážto řada se dá s výhodou již použíti pro výpočet logarithmů prvočísel. Tak klademe-li ku př. $z = 3$, máme ihned

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \ldots\right].$$

Pro $z = 9$ pak následuje snadno

$$\log 5 = 2\log 2 + 2\left[\frac{1}{1\,.\,9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \ldots\right],$$

kteréžto dvě řady nám poskytují pohodlný prostředek pro výpočet $\log 2$ a $\log 5$. Dostaneme snadno

$$\log 2 = 0{\cdot}693\,147\,180\,6\ldots \qquad \log 5 = 1{\cdot}609\,437\,912\,4\ldots$$

Řadu (3) můžeme použiti ještě rozmanitým jiným způsobem. Zavedeme k vůli stručnosti pro okamžik označení

$$[z] = 2\left[\frac{1}{1\,.\,z} + \frac{1}{3\,.\,z^3} + \frac{1}{5\,.\,z^5} + \ldots\right] \tag{$\alpha$}$$

a máme nejprve, klademe-li ve (3) místo $z$ výraz $2z-1$,

$$\log z = \log(z-1) + [2z-1], \tag{4}$$

formuli to poněkud vhodnější pro výpočet logarithmů prvočísel než (3) je-li totiž $z$ prvočíslo (liché), jest $z-1$ jistě číslo složené a to z prvočísel menších než $z$, takže možnost vypočísti postupně logarithmy všech prvočísel pomocí (4) jest bezprostředně patrna. Pro logarithmy 3 a 7 měli bychom (kladouce ve (4) jednak $z=81$, jednak $z=49$)

$$4\log 3 = \log 5 + 4\log 2 + [161], \quad 2\log 7 = \log 3 + 4\log 2 + [97].$$

Ještě vhodnější formuli pro postupný výpočet logarithmů všech prvočísel, dostaneme ze (4), píšeme-li tam $z^2$ místo $z$. Obdržíme tak

$$\log z = \frac{1}{2}\log(z+1) + \frac{1}{2}\log(z-1) + \frac{1}{2}[2z^2-1]. \tag{5}$$

Formule (4) a (5) můžeme psáti také ve tvaru

$$\log z - \log(z-1) = [2z-1], \quad \log z - 2\log(z-1) + \log(z-2) = \\ = -[2z^2 - 4z + 1], \tag{6}$$

čímž vyjádřeny jsou první a druhá difference logarithmů čísel celých v přirozené řadě čísel celých po sobě následujících, řadami rychle konvergentními.

*Poznámka 1.* Zbytek řady pro $[z]$ po $n$-tém členu (viz ($\alpha$)) jest; jak snadno stanovíme

$$r_n = \frac{2}{(2n+1)z^{2n-1}} \cdot \frac{\Theta}{z^2-1}; \quad 0 < \Theta < 1, \ z > 1.$$

*Poznámka 2.* Řady obdobné ku (5), obsahující jenom více logarithmů, lze na základě (3) v neomezeném počtu sestrojiti. Uvedu aspoň tři nejjednodušší jako předmět pro cvičení, ponechávaje jich důkaz čtenáři a rovněž jich zevšeobecnění. Jsou to řady (používám k vůli jednoduchosti označení zavedeného v ($\alpha$)):

$$\log(x+2) - 2\log(x+1) + 2\log(x-1) - \log(x-2) = \left[\frac{x^3-3x}{2}\right]$$

(řada Bordova),

$$\log(x+5) - \log(x+4) - \log(x+3) + 2\log x - \log(x-3) - \log(x-4) + \\ + \log(x-5) = \left[\frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}\right] \quad \text{(řada Harosova),}$$

$$\log(x+10) - \log(x+9) - \log(x+7) + \log(x+4) + \log(x+2) - \\ - \log(x-2) - g\log(x-4) + \log(x-7) + \log(x-9) - \log(x-10) = \\ = \left[\frac{x^5 - 125x^3 + 3004x}{5040}\right] \quad \text{(řada Lavernedova).}$$

**138.** Při počítání tabulek logarithmických, udávajících po řadě logarithmy všech čísel celých o určitém počtu cifer, největší užitek by poskytly řady v (6); neboť řady ty udávají, jak již bylo poznamenáno, prvou a druhou differenci v řadě logarithmů po sobě jdoucích. Tak ku př. kdybychom měli stanoviti logarithmy s příslušnými differencemi v tabulce

$$\begin{array}{lll} \log 10000 & & \\ & \Delta \log 10001 & \\ \log 10001 & & \Delta^2 \log 10002 \\ & \Delta \log 10002 & \\ \log 10002 & & \Delta^2 \log 10003 \\ & \Delta \log 10003 & \\ \log 10003 & & \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & & \end{array}$$

stanovili bychom nejprve log 10000, což jest snadno, známe-li log 2 a log 5, potom $\Delta \log 10001 = \log 10001 - \log 10000$, kterýž výraz vyplyne z $(6_1)$ při $z = 10001$, tedy $2z - 1 = 20001$ a řada příslušná bude rychleji konvergentní než řada geometrická s kvocientem $1 : 20001^2 < \frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$ a konečně $\Delta^2 \log 10002$, kteréž číslo získáme z $(6_2)$, klademe-li tam $z = 10002$, takže řada tam se vyskytující bude míti prvý člen v absolutní hodnotě menší než $10^{-8}$ a další ubývati budou rychleji než členy řady geometrické o kvocientu $\frac{1}{4} \cdot 10^{-16}$. V následujícím pak nutno bude počítati jenom tuto druhou differenci, jež stále v absolutní hodnotě se umenšuje a při čemž při počítání na 20 desetinných míst bychom úplně vystačili s prvým členem v řadě na pravé straně rovnice $(6_2)$.

Tabulky logarithmické zpravidla jsou konstruovány v logarithmech t. zv. briggických, t. j. v logarithmech, jichž základ jest 10. Kdybychom v tabulce svrchu uvedené chtěli od logarithmů přirozených resp. jich differencí přejíti ku logarithmům briggickým, postačilo by všecky prvky tabulky (všech tří sloupců) násobiti číslem

$$M = \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2{\cdot}30258\,50929\,94045\,6\ldots} = 0{\cdot}434\,29\,44819\,03251\,8\ldots$$

*Poznámka.* Obdobně lze při výpočtu tabulek pro logarithmy sinusu a kosinusu používati vztahů

$$\log \sin (x + 2\delta) - 2 \log \sin (x + \delta) + \log \sin x = -\left[\frac{2 \sin^2 (x + \delta)}{\sin^2 \delta} - 1\right],$$

$$\log \cos (x + 2\delta) - 2 \log \cos (x + \delta) + \log \cos x = -\left[\frac{2 \cos^2 (x + \delta)}{\sin^2 \delta} - 1\right].$$

**139. Funkce arc tg x.** Kdybychom chtěli počítati řadu pro $\operatorname{arc tg} x$ dle formule Maclaurinovy, mohli bychom používati vzorců př. 5. odst. 125. Jest tu

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\left\{\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin(n \operatorname{arc cotg} x)\right\}_{x=0}$$

a tedy

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (2k)! \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k (2k)!\,;$$

máme tak rozvoj

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} +$$

$$+ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{\sin(\overline{2k+1} \operatorname{arc cotg} \Theta x)}{(1+\Theta x^2)^{\frac{2k+1}{2}}} \qquad (1)$$

Zbytek konverguje k nulle pro $\lim k = \infty$ a při $|x| \leqq 1$; lze tudíž pro $x$ v intervalu $(-1, 1)$ psáti rozvoj v řadu nekonečnou

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \qquad (2)$$

ve kteréž zbytek (dle pravidel o řadách se střídavými znaménky) můžeme psáti ve tvaru

$$(-1)^k \frac{\Theta'}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Že rozvoj (2) vyplyne snadněji (a bez umělých obratů, jako jich bylo použito při výpočtu vyšších derivací funkce $\operatorname{arctg} x$) pomocí vět o primitivních funkcích ku součtu řad stejnoměrně konvergentních, bylo již poznamenáno v odst. 121. (viz též odst. 116.)

Specielně pro $x = 1$ máme známou řadu (Leibnicovu)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (3)$$

Řada (2) jest dobře způsobilá pro výpočet čísla Ludolfského $\pi$. Formule (3), vznikající z ní pro $x = 1$, se sice k bezprostřednímu výpočtu nehodí, avšak již řada plynoucí ze (2) pro $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dává

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right).$$

Řady pro $\pi$, které ještě rychleji konvergují, docílíme pomocí vztahů, jež snadným počtem (odst. 94. (13.)) se dají dokázati:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$= 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}, \quad \text{(formule Machinova)}$$

$$= 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$= 12\operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239} \quad \text{(formule Gaussova)}$$

a obdobných.

Dle rovnice ($c$) odst. 58. však jest též (viz také odst. 141.)

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \dots\right],$$

což jest řada, jíž rovněž lze používati pro výpočet $\operatorname{arctg} x$ a specielně pro výpočet čísla $\pi$. Na základě této řady lze pomocí formule Huttonovy

$$\pi = 20\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 8\operatorname{arctg}\frac{3}{79}$$

dosti pohodlně číslo $\pi$ stanoviti. Jest

$$\pi = \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100} + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \dots\right] + \frac{30336}{10^5}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{144}{10^5}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}\cdot\left(\frac{144}{10^5}\right)^2 + \dots\right].$$

Zbytek řad v závorce lze rovněž snadno vyčísliti (viz odst. 58.)

**140. Funkce arc sin x.** Při této funkci jest vyšetření zbytku v řadě Maclaurinově nesnadné a vyjdeme tudíž ihned z rozvoje pro arc sin $x$ již dříve (odst. 121., př. 2.) odvozeného na základě řady pro $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Tam jsme dokázali rovnost

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots \qquad (m)$$

pro $|\,x\,| < 1$. Výsledek tento lze nejprve rozšířiti i pro $x = \pm 1$. Provedu však úvahu příslušnou ihned na řadě obecnější. Nechť jest dána funkce $f(x)$ v intervalu $(0,\ 1-0)$ řadou mocninnou

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

ve kteréž všechny koefficienty jsou kladné ($\geqq 0$); nechť jest dále $f(x)$ v $(0, 1-0)$ funkcí konečnou. Pak lze tvrditi, že existuje limita $f(1-0)$ a že

$$f(1-0) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots, \qquad (n)$$

čímž zároveň vysloveno, že řada na pravé straně jest konvergentní. Existence limity vyplývá z okolnosti, že $f(x)$ jest v $(0, 1-0)$ rostoucí (neboť $c_k \geqq 0$) a konečná. Na druhé straně jest

$$\lim_{x=1-0} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m) < f(1-0)$$

t. j.

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_m < f(1-0),$$

tedy řada na pravé straně rovnice $(n)$ konvergentní a řada pro $f(x)$ stejnoměrně konvergentní v $(0, 1)$, odst. 120. Odtud následuje ihned $(n)$ (odst. 122.)

Ostatně ve zvláštním případě řady pro $\arcsin x$ zde projednávaném vyplývá konvergence řady

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1\ 3.5 \ldots (2n-3)}{2.4.6 \ldots (2n-2)} \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

ihned z kriteria Raabeova (odst. 43., 3.), neboť jest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = 1 - \frac{2-\varepsilon_n}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

a tudíž i stejnoměrná konvergence řady pro $\arcsin x$ v interv. $(-1, 1)$ a platnost rovnice $(m)$ v $(-1, 1)$.

Zbytek po $n$-tém členu v řadě $(m)$ jest dán součtem nekonečné řady

$$R_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1.3. \ldots (2n-1)}{2.4. \ldots 2n} \cdot \left[1 + \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} x^2 + \ldots\right]$$

a, je-li $x$ dosti malé, lze snadno jej odhadnout. Můžeme ku př. psáti při $|x| < 1$

$$R_n = \Theta \frac{1.3. \ldots 2n-1}{2.4. \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Je-li však $x = 1$ aneb blízko 1, jest tento výraz bez užitku. Můžeme pak ku odhadnutí zbytku užiti methody Kummerovy (odst. 59.) a psáti pro $x = 1$ aneb $x$ blízké ku 1 $(0 < x < 1)$

$$R_n = \Theta' \frac{1.3 \ldots 2n-1}{2.4 \ldots 2n} \cdot x^{2n+1} \left(\frac{2n(6n-5)}{3(2n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)(2n+1)}\right),$$

kde opět $0 < \Theta' < 1$.

**141.** Již v případě funkce tak jednoduché jako $\arcsin x$ naskytly se při rozvinutí jejím v řadu Maclaurinovu potíže, jež přiměly nás odvoditi řadu tu ne jako důsledek obecné formule Maclaurinovy, nýbrž jako důsledek obecných vět o řadách. Ve větší míře tomu jest při funkcích, jichž definice jest složitější. Uvedu aspoň jeden příklad takové funkce a odvodím řadu Maclaurinovu pro funkci

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

abych naznačil jednu methodu, jež v takových případech může býti užitečnou.

Jelikož $\arcsin x$ jest dáno řadou konvergentní pro každé $x$ intervalu $(-1, 1)$ tvaru

$$\arcsin x = a_0 x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + a_3 x^7 + \ldots$$

a rovněž funkci $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ lze rozvinouti v řadu konvergentní pro každé $x$ intervalu $(-1+0, 1-0)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots$$

a obě řady jsou současně absolutně konvergentní — je-li $x$ jenom v $(-1+0, 1-0)$ —, lze součin obou řad psáti ve tvaru

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = c_0 x + c_1 x^3 + c_2 x^5 + c_3 x^7 + \ldots \qquad (\alpha)$$

kde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0$$

a kde řada nově vzniklá jistě jest konvergentní v intervalu $(-1+0, 1-0)$, viz odst. 56., 1. Koeficienty $a_k$, $b_k$ a dle poslední rovnice i $c_k$ jsou však čísla kladná a je-li tedy řada $(\alpha)$ konvergentní pro kladnou hodnotu $x_0$, jest dle věty odst. 120. konvergentní stejnoměrně v intervalu $(-x_0, x_0)$. Tudíž jest řada $(\alpha)$ konvergentní stejnoměrně v intervalu $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, kde $\varepsilon$ jest libovolné číslo kladné, menší než 1. Abychom stanovili koefficienty $c_k$ ve tvaru co nejjednodušším, násobíme rovnici $(\alpha)$ výrazem $\sqrt{1-x^2}$ a budeme derivovati obě strany rovnice dle $x$, při čemž na pravé straně v důsledku právě dokázané stejnoměrné konvergence budeme derivovati člen za členem. Dostaneme tak

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(c_0 x + c_1 x^3 + c_2 x^5 + \ldots) + \sqrt{1-x^2}(c_0 + 3c_1 x^2 + 5c_2 x^4 + \ldots) \qquad (\beta)$$

aneb, násobíme-li opětně odmocninou $\sqrt{1-x^2}$ a na pravé straně náležitě srovnáme,

$$1 = c_0 + (3c_1 - 2c_0)x^2 + (5c_2 - 4c_1)x^4 + \ldots + [(2k+1)c_k - \\ - 2kc_{k-1}]x^{2k} + \ldots$$

Porovnáme-li obě strany této rovnice, máme *dle věty o neurčitých součinitelích* (odst. 133., pozn. 2.)

$$c_0 = 1,\ 3c_1 - 2c_0 = 0,\ 5c_2 - 4c_1 = 0, \ldots (2k+1)c_k - 2kc_{k-1} = 0, \ldots$$

aneb

$$c_k = \frac{2k}{2k+1}c_{k-1} = \frac{2k \,.\, 2(k-1)}{(2k+1)(2k-1)}c_{k-2} = \ldots =$$

$$= \frac{2k \,.\, (2k-2)(2k-4) \ldots 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3) \ldots 3}. \qquad (\gamma)$$

čímž $c_k$ vypočtěno.

Můžeme tedy psáti pro $x$ v $(-1+0,\ 1-0)$

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}x^5 + \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6}{3 \,.\, 5 \,.\, 7}x^7 + \ldots \qquad (\delta)$$

a řada Maclaurinova pro danou funkci úplně odvozena.

Levá strana poslední rovnice jest derivací funkce $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$. Následuje tudíž z ($\delta$) tento rozvoj (dle odst. 121.)

$$[\arcsin x]^2 = \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}x^6 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6}{3 \,.\, 5 \,.\, 7}x^8 + \ldots.$$

platný v intervalu $(-1,\ 1)$.

Z rovnice ($\delta$) následuje, dosadíme-li

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{a tedy } \arcsin x = \arcsin \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arc\,tg} z,$$

rovnost

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right],$$

již dříve jiným způsobem odvozená (odst. 58., e, odst. 139.)

## 4. Základní věty o řadách mocninných (potenčních).

Příklady obou odstavců předcházejících nás poučují o obtížích, jaké se naskytují při rozhodování o tom, zda funkce daná jest rozvinutelna v konvergentní řadu Taylorovu. Řada Taylorova (Macl.) jest řadou mocninnou a obtíže zmíněné dají se ve veliké většině případů odstraniti, známe-li základní věty o řadách mocninných. Již v obou odst. předcházejících opírali jsme se o některé takové věty (zvláště o věty vyplývající ze stejnoměrné konvergence těch řad). Se zřetelem však k veliké důležitosti řad mocninných pro analysu a pro numerické výpočty jeví se účelným veškeré věty o řadách mocninných nezávisle od vět platných obecně pro řady z funkcí podati a odvoditi je — jakožto věty základní — prostředky pokud možno elementárními a tak si zjednati pomůcky účelné, platné výhradně pro vyšetřování funkcí rozvinutelných v řady Taylorovy. To bude cílem odstavců následujících.

Při tom však jest ještě poznamenati, že nauka o řadách potenčních dosáhne plného zjednodušení teprve zavedením komplexních proměnných; teprve potom se objasní náležitě příčiny jistých vlastností těch řad a zjevů při nich se vyskytujících. Avšak tato okolnost nemůže a nesmí býti příčinou nauku o řadách mocninných odsunovati až do theorie funkcí komplexní proměnné. Jednak lze důkazů základních vět platných v oboru proměnné reálné použiti téměř beze změny při důkazech obdobných vět v oboru komplexní proměnné, takže námaha v prvém směru vykonaná není ztracena pro vyšetřování řad na základě komplexních proměnných, jednak není přípustno, aby vyšetřování další ku př. o řadách mocninných s několika proměnnými (kde význam komplexních proměnných ustupuje do pozadí) byla uváděna nějak v souvislost s čísly komplexními, zejména, když pro některé otázky analyse, jako ku př. pro úkoly o maximech a minimech funkcí, jest vůbec nutno míti zřetel pouze k proměnným reálným, a konečně, projednávají-li se řady mocninné toliko se stanoviska funkcí komplexní proměnné, nevystihne se ani náležitě užitek který zavedení proměnných komplexních s sebou přináší.

**142. Poloměr konvergence mocninné řady.** Věta Abelova: *Je-li řada potenční argumentu $x$*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots \tag{1}$$

*konvergentní, když za $x$ dosadíme hodnotu $X$, jest také konvergentní pro všecka $x$, jichž absolutní hodnota jest menší než $|X|$ a to absolutně konvergentní.* Neboť poněvadž jest řada

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots$$

dle supposice konvergentní, jest nutně

$$\lim_{n=\infty} a_n X^n = 0 \quad \text{(odst. 41., 6.)}$$

a tudíž množství čísel obsažené v řadě

$$|a_0|, |a_1||X|, |a_2||X|^2, \ldots, |a_k||X|^k, \ldots \tag{$\alpha$}$$

má jistou horní hranici, již označíme $\mathfrak{M}$. I jest tedy

$$|a_k||X|^k \leqq \mathfrak{M}, \quad |a_k| \leqq \frac{\mathfrak{M}}{|X|^k} \tag{2}$$

a dále jest patrno, že členové řady (1) jsou v absolutní hodnotě menší, než stejnolehlí členové řady

$$\mathfrak{M} + x\frac{\mathfrak{M}}{X} + x^2\frac{\mathfrak{M}}{X^2} + \ldots,$$

jež jest konvergentní (absolutně) pro $|x| < |X|$, čímž důkaz Abelovy věty podán.

Rozdělme si nyní všecka čísla reálná ve dvě skupiny. Do jedné dáme všecka čísla kladná $b$ taková, že řada (1) diverguje, ať za $x$ dosadíme $+b$ anebo $-b$. Do druhé skupiny dáme čísla ostatní, značme je $a$. Dle věty Abelovy jest patrno, že žádné z čísel $b$ nemůže býti menší než některé číslo $a$. Jest tedy každé z čísel $a$ menší než každé číslo $b$ a obě skupiny mají základní vlastnosti skupin odst. 5. (viz odst. 6.); stanoví následkem toho jisté číslo reálné $R$, jež jest rozhraním mezi čísly $a$ a čísly $b$ a jemuž říkati budeme **poloměr konvergence** řady (1). Poloměr konvergence $R$ jest úplně charakterisován těmito dvěma vlastnostmi:

1. Řada (1) jest konvergentní pro všecka $x$, pro něž $|x| < R$ a to absolutně.

2. Řada (1) jest divergentní pro všecka $x$, pro něž $|x| > R$.

Pro $x = +R$ aneb $x = -R$ řada může konvergovati (a to buď absolutně anebo jen relativně), může však také divergovati.

Interval $(-R, R)$, pro jehož vnitřní body řada potenční (1) konverguje, sluje **intervalem konvergenčním**.

*Příklady.* 1. Řada

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

jest konvergentní dle d'Alembertova kriteria, je-li $|x| < 1$, divergentní, pro $|x| > 1$. Poloměr konvergence jest tedy 1. Pro $x = 1$ jest řada divergentní, pro $x = -1$ jest konvergentní (relativně).

2. Řada

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

jest dle d'Alembertova kriteria konvergentní pro každé $x$, *v takovémto případě říkáme, že poloměr konvergence je* $\infty$.

3. Řada

$$1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \ldots$$

diverguje pro každé $x$ různé od nully, neboť členové s rostoucím indexem od jistého indexu počínajíc, rostou v absolutní hodnotě (a nekonvergují tudíž k nulle). *V tomto případě pravíme, že poloměr konvergence jest nulla*, a řada potenční nemá vůbec jako taková významu. *V následujících úvahách budeme míti výhradně na zřeteli řady potenční s poloměrem konvergence $R > 0$.*

*Poznámka* 1. Důkaz věty Abelovy opíral se pouze o okolnost, že množství číselné v $(\alpha)$ má horní hranici $\mathfrak{M}$. Můžeme tedy větu Abelovu poněkud zevšeobecniti pravíce: *Je-li množství čísel obsažené v řadě $(\alpha)$ shora ohraničeno, jest řada mocninná* (1) *absolutně konvergentní pro všecka $x$, jichž absolutní hodnota jest menší než $|X|$.* Z toho však následuje dále výrok: *Je-li $X > R$, kde $R$ jest poloměr konvergence řady* (1), *není množství číselné v $(\alpha)$ obsažené shora ohraničeno.* Jest tedy číslo $R$ také rozhraním mezi čísly kladnými $X$, pro něž jest $(\alpha)$ shora ohraničeno, a mezi čísly kladnými $X$, pro něž $(\alpha)$ není shora ohraničeno. Číslo $R$ patří ovšem ku jedné z obou skupin.

*Poznámka* 2. Řada (1) a řada

$$|a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \ldots + |a_k|x^k + \ldots$$

mají, jak z předcházející poznámky ihned následuje, stejný poloměr konvergence. Rovněž zůstane u řady (1) poloměr konvergence nezměněn, vynecháme-li v té řadě konečný počet členů té řady. V tom případě však, že bychom potlačili nekonečný počet členů řady (1), mohli bychom dostati řadu potenční, jejíž poloměr konvergence $R'$ jest jiný než $R$; tu však jest vždy $R' > R$.

*Poznámka* 3. Poloměr konvergence můžeme určiti dle kriteria Cauchyova (často však také a snadněji dle kriteria d'Alembertova, jak jsme na příkladech svrchu uvedených ukázali). Jest dle poznámky odst. 44. řada (1) konvergentní, jestliže

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1, \quad \text{t. j. jestliže} \quad |x| < 1 : \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

a divergentní, jestliže

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1, \quad \text{t. j. jestliže} \quad |x| > 1 : \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Odtud jest patrno, že *poloměr konvergence řady* (1) *jest převratnou hodnotou čísla* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

**143.** Potenční řada (1) definuje pro všecka $x$ uvnitř intervalu konvergenčního funkci, již označíme $P(x)$, kladouce

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Funkce tato nabývá pro $x = 0$ hodnoty $a_0$ a jest v bodě $x = 0$ funkcí spojitou. Neboť, je-li $X$ jistá kladná hodnota uvnitř intervalu konvergenčního položená, můžeme dle předcházejícího odst. stanoviti číslo $\mathfrak{M}$ tak, že jest splněna (2), a jest potom ihned

$$|P(x) - P(0)| = |P(x) - a_0| < |x|(|a_1| + |a_2||x| + |a_3||x|^2 + \dots)$$
$$< \frac{|x|}{X} \frac{\mathfrak{M}}{1 - \frac{|x|}{X}}.$$

Požadujeme-li v poslední nerovnině, aby $|x|$ byla menší než menší z obou čísel $\frac{1}{2}X$, $\frac{\varepsilon X}{2\mathfrak{M}}$, bude patrně $|P(x) - P(0)| < \varepsilon$ pro všecka ta $x$, čímž jest spojitost funkce $P(x)$ v bodě $x = 0$ dokázána. Můžeme tudíž též psáti

$$\lim_{x=0} P(x) = P(0). \tag{3}$$

**144.** Buďiž $\xi$ libovolná hodnota položená uvnitř intervalu konvergenčního řady (1) (t. j. buďiž $|\xi| < R$); pak lze stanovit číslo $h$ tak, aby též $|\xi| + |h| < R$, a řada (1) bude konvergovati absolutně i pro $x = |\xi| + |h|$. T. j. řada

$$|a_0| + |a_1|(|\xi| + |h|) + \dots + |a_k|(|\xi| + |h|)^k + \dots \tag{$\beta$}$$

jest za podmínky $|\xi| + |h| < R$ konvergentní. Řada tato má členy vesměs kladné a rovněž i řada, která z ní vznikne, provedeme-li naznačené umocňování a pak roznásobíme-li koefficienty $|a_k|$, má členy vesměs kladné; i jest tedy řada umocněním a roznásobením vzniklá (takže z $k$-tého členu řady ($\beta$) vznikne $k$ členů nové řady) rovněž konvergentní (absolutně) (viz odst. 42. základní větu). Můžeme tedy i v řadě

$$a_0 + a_1(\xi + h) + a_2(\xi + h)^2 + \dots + a_k(\xi + h)^k + \dots,$$

jejíž součet jest $P(\xi + h)$, provésti naznačené umocňování a násobení, jednotlivé členy řady rozštěpiti ve členy při umocňování a násobení vzniklé a řadu tak docílenou libovolně uspořádati; konvergence a celkový součet řady pak se těmito operacemi nezmění (viz odst. 52.). Tak dostaneme, uspořádáme-li členy dle stoupajících mocnin veličiny $h$,

$$P(\xi + h) = P(\xi) + \frac{h}{1!} P_1(\xi) + \frac{h^2}{2!} P_2(\xi) + \frac{h^3}{3!} P_3(\xi) + \dots \tag{4}$$

Při tom jest

$$P_1(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots,$$
$$P_2(x) = 2 . 1 a_2 + 3 . 2 a_3 x + 4 . 3 a_4 x^2 + 5 . 4 a_5 x^3 + \dots$$
$$P_3(x) = 3 . 2 . 1 a_3 + 4 . 3 . 2 a_4 x + 5 . 4 . 3 a_5 x^2 + 6 . 5 . 4 a_6 x^3 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Pravá strana rovnice (4) jest potenční řadou veličiny $h$, již můžeme pokládati za proměnnou veličinu omezenou toliko podmínkou $|\xi| + |h| < R$; pro všecka $h$ hovící této podmínce jest řada ta konvergentní; jest tudíž poloměr kovergence řady (4) jakožto potenční řady v $h$ buď rovný číslu $R - |\xi|$ aneb jest větší než toto číslo. Užijeme-li na (4) věty (3), máme ihned

$$\lim_{h=0} P(\xi + h) = P(\xi); \tag{5}$$

t. j. *řada potenční* (1) *jest spojitou funkcí v každém bodě* $\xi$, *který jest položen uvnitř intervalu konvergenčního.*

Ze (4) však také vyplývá

$$\frac{P(\xi+h) - P(\xi)}{h} = \frac{1}{1!} P_1(\xi) + \frac{h}{2!} P_2(\xi) + \frac{h^2}{3!} P_3(\xi) + \ldots$$

Avšak na pravé straně této rovnice jest potenční řada proměnné $h$ (se stejným poloměrem konvergence jako řada na pravé straně v (4)). Užijeme-li tedy téže věty jako právě, máme

$$\lim_{h=0} \frac{P(\xi+h) - P(\xi)}{h} = P_1(\xi); \tag{6}$$

t. j. *řada potenční* (1) *má v každém bodě* $\xi$ *uvnitř intervalu konvergenčního derivaci rovnou* $P_1(\xi)$. Jest tedy, užíváme-li obvyklého symbolu pro derivaci funkce $P(x)$,

$$P'(x) = P_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

Poněvadž pak řada potenční $P_2(x)$ vzniká z $P_1(x)$ týmž postupem jako $P_1(x)$ z řady $P(x)$ a obdobně $P_3(x)$ z $P_2(x)$ a t. d., jest

$$P_2(x) = P'_1(x) = P''(x),\ P_3(x) = P'_2(x) = P'''(x), \ldots,$$
$$P_k(x) = P'_{k-1}(x) = P^{(k)}(x), \ldots$$

V důsledku těchto vztahů můžeme rovnici (4) psáti ve tvaru

$$P(\xi+h) = P(\xi) + \frac{h}{1} P'(\xi) + \frac{h^2}{2!} P''(\xi) + \ldots + \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(\xi) + \ldots \tag{7}$$

Vývody tyto jsou platny za předpokladů $|\xi| < R$, $|\xi| + |h| < R$ a jsou tudíž nutně řady $P'(\xi)$, $P''(\xi)$, ... konvergentní pro $|\xi| < R$. Jelikož snadno jest patrno, že řady ty divergují pro $|\xi| > R$ (neboť koefficienty těchto řad jsou větší v abs. hodn. než u řady $P(\xi)$ — při vhodném vzájemném přiřazení — a nejsou tedy jich členové při $|\xi| > R$ množstvím číselným shora ohraničeným, jest $R$ poloměrem konvergence všech těchto řad $P'(x)$, $P''(x)$, ..., t. j. poloměrem konvergence všech řad vzniklých derivováním postupným z řady $P(x)$.

Shrneme výsledky dosažené ve větu: *Funkce $P(x)$, daná řadou potenční s poloměrem konvergence $R$, jest funkcí mající v každém bodě uvnitř intervalu $(-R, R)$ derivace všech řádů, které dostáváme jako řady potenční, jichž členové jsou derivace příslušného řádu členů řady $P(x)$. Řady tyto jsou rovněž o poloměru konvergence $R$. Funkci $P(x)$ lze pak rozvinouti v každém bodě $\xi$ uvnitř intervalu konvergenčního v* **řadu Taylorovu** (7) *za předpokladu $|\xi| + |h| < R$. Řada* (7) *však — mocninná to řada proměnné $h$ — má za poloměr konvergence číslo $R_1$, o kterém víme, že $R_1 \geqq R - |\xi|$.*

**145.** Užijeme v následujícím označení poněkud obecnějšího, kladouce do řady (1) $x - x_0$ místo $x$ a $P(x - x_0) = Q(x)$. Pak jest

$$Q(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_k(c - x_0)^k + \ldots \quad (8)$$

a máme tak **řadu mocninnou argumentu** $x - x_0$. O řadě této, která jest pro $|x - x_0| < R$ konvergentní a pro $|x - x_0| > R$ divergentní, říkáme rovněž, že poloměr konvergence její jest $R$. Jelikož konverguje pro všecka $x$ uvnitř intervalu $(-R + x_0, R + x_0)$, sluje tento interval jejím intervalem konvergenčním; střed intervalu konvergenčního jest bod $x_0$. Klademe-li do řady (7) za $h$ resp. $\xi$ výrazy $x - x_1$ resp. $x_1 - x_0$ a užíváme-li označení zavedeného ve (8), máme ihned místo (7)

$$Q(x) = Q(x_1) + \frac{x - x_1}{1!} Q'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2!} Q''(x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - x_1)^k}{k!} Q^{(k)}(x_1) + \ldots \quad (8')$$

za předpokladu $|x - x_1| + |x_1 - x_0| < R$. Specielně pro $x_1 = x_0$, dostáváme z této řady

$$Q(x) = Q(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} Q'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} Q''(x_0) + \ldots, \quad (8)$$

což však jest rozvoj totožný s (8), neboť jest $Q(x_0) = P(0) = a_0$ $Q'(x_0) = P'(0) = 1 \,.\, a_1, \ldots$. Rozvoj (8) nám definuje funkci $Q(x)$ v okolí bodu $x_0$ daném nerovninou $|x - x_0| < R$; rozvoj (8′) nám dává za součet touž funkci v okolí bodu $x_1$ stanoveném nerovninou $|x - x_1| < < R - |x_1 - x_0|$. Pro poloměr konvergence $R_1$ řady (8′) však jest platna obecně nerovnina

$$R_1 \geqq R - |x_1 - x_0|\,. \quad (9)$$

V tomto novém označení jeví se rozvoj Taylorův (8′) funkce dané v (8) jako přeměna řady potenční argumentu $x - x_0$ v řadu potenční argumentu $x - x_1$ a o stejném součtu, pokud jest splněna podmínka $|x - x_1| + |x_1 - x_0| < R$.

Jestliže $R_1 > R - |x_1 - x_0|$, pak řada mocninná argumentu $(x - x_1)$

$$Q(x_1) + \frac{x - x_1}{1!} Q'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2!} Q''(x_1) + \ldots, \tag{8''}$$

která pro $x$ uvnitř intervalu daného nerovninou $|x - x_1| < R - |x_1 - x_0|$ má dle (8′) za součet funkci $Q(x)$, stanoví svým součtem určitou funkci též pro všechna $x$ vně tohoto intervalu, avšak zároveň uvnitř intervalu definovaného podmínkou $|x - x_1| < R_1$. Interval tento (t. j. interval $(+x_1 + R_1,\ x_1 \mp R_1)$, konvergenční interval řady (8′)) se pak rozpadá na intervaly tři a to:

1. na interval, pro nějž $|x - x_1| < R - |x_1 - x_0|$, označme jej $I_0$.

2. na interval $I_1$, pro nějž zároveň $|x - x_1| < R_1$, $|x - x_0| < R$, $|x - x_1| \geqq R - |x_1 - x_0|$.

3. na interval $I_2$, pro nějž zároveň $|x - x_1| < R_1$, $|x - x_0| \geqq R$, $|x - x_1| \geqq R - |x_1 - x_0|$.

Intervaly $I_0$, $I_1$ dohromady dávají interval obsahující všechny body společné intervalům konvergenčním řady (8) a řady (8″). Interval $I_2$ (který, což předem sice nutno připustit, vskutku však nikdy nenastane — jakož ovšem teprve později seznáme — skládati se může ze dvou nesouvislých intervalů) obsahuje všechny body, které jsou uvnitř intervalu konvergenčního řady (8″) a zároveň vně intervalu konv. řady (8).

Jakož svrchu v rovnici (8′) bylo vytčeno, jest součet řady (8″) pro $x$ intervalu $I_0$ roven součtu řady (8); t. j. $Q(x)$. A tu nejprve se naskytá otázka: Jaký jest vztah mezi součtem řady (8) (rovným $Q(x)$) a součtem řady (8″), když $x$ jest v $I_1$? Abychom tuto otázku rozhodli, odvodíme si nejprve větu o nullových bodech řady mocninné a t. zv. větu o neurčitých součinitelích (jež nám v jednom svém tvaru jest již známa).

**146.** Je-li $x_1$ bod uvnitř intervalu konvergenčního řady $Q(x)$ a je-li $Q(x_1) = 0$, sluje $x_1$ **nullovým bodem** funkce $Q(x)$ (resp. příslušné řady mocninné). Jestliže obecně

$$Q(x_1) = Q'(x_1) = Q''(x_1) = \ldots = Q^{(k-1)}(x_1) = 0,\quad Q^{(k)}(x_1) \neq 0. \tag{$\varrho$}$$

sluje bod $x_1$ **nullovým bodem řádu $k$-tého** funkce $Q(x)$ (a příslušné řady mocninné). Je-li $x_1$ nullovým bodem řádu $k$-tého funkce $Q(x)$, pak vztahu (8′) můžeme dáti tvar

$$Q(x) = (x - x_1)^k (b_k + b_{k+1}(x - x_1) + b_{k+2}(x - x_1)^2 + \ldots),\quad b_k \neq 0.$$

Řadu v závorce označme $Q_1(x)$; jest pak $Q_1(x_1) = b_k$; poloměr konvergence řady $Q_1(x)$ vzniknuvší z řady (8″) tím, že vytkli jsme z ní $(x-x_1)^k$, jest týž jako u řady (8″) a tedy rovný $R_1 \geq R - |x_1 - x_0|$. Jelikož pak dle dokázaných vět jest $Q_1(x)$ v bodě $x_1$ funkcí spojitou a nabývá tam hodnoty $b_k$ od nully různé, lze udati kladné číslo $\varepsilon$ tak, že $Q_1(x)$ v intervalu $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ má stále znaménko čísla $b_k$, jsouc od nully různo. Má tedy $Q(x)$ v intervalu $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ pouze jediný bod nullový a to v bodě $x_1$. Jestliže tudíž funkce (resp. řada) $Q(x)$ má nekonečný počet nullových bodů uvnitř intervalu konvergenčního, není $x_1$ — nullový to bod řádu $k$-tého položený uvnitř intervalu konvergenčního — bodem zhuštění těch nullových bodů. Říkáme, že bod $x_1$ jest **isolovaný nullový bod.**

Můžeme však dokázati, že pro každý nullový bod $x_1$ funkce (a řady) $Q(x)$, číslo celé $k$ podmínkami ($\varrho$) stanovené vskutku existuje, není-li $Q(x)$ — daná řadou (8) — taková, že $a_0 = a_1 = \ldots = a_i = \ldots = 0$, ve kterémžto případě říkáme, že jest $Q(x)$ *identicky rovno nulle* a kterýžto triviální případ hned předem z úvah svých vylučujeme. Neboť kdyby $k$ neexistovalo u určitého nullového bodu $x'_1$ položeného uvnitř intervalu konvergenčního, bylo by jednak $Q(x'_1) = 0$, jednak hodnoty *všech* derivací, t. j. čísla $Q'(x'_1)$, $Q''(x'_1)$, ... byla by rovna nulle. Dejme tomu tudíž, že takové body $x'_1$ uvnitř interv. konv jsou, pro něž vskutku $Q(x'_1) = Q'(x'_1) = Q''(x'_1) = \ldots = 0$ a uvažujme nejprve ty z těch bodů, jež jsou na pravo od bodu $x_0$ (t. j. pro něž $x'_1 > x_0$). Body ty mají jistou dolní hranici, již označíme $\xi$ a pro niž $\xi \geq x_0$. Jelikož $\xi$ jest položeno uvnitř intervalu konvergenčního, můžeme psáti

$$Q(x) = Q(\xi) + (x-\xi)\,Q'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2!}\,Q''(\xi) + \ldots \text{ pro všechna } x \text{, pro něž}$$

$$|x - \xi| < R - |\xi - x_0|.$$

Jest dvojí případ možný:

a) $\xi$ jest zároveň jedním z bodů $x'_1$. Pak $Q(\xi) = Q'(\xi) = Q''(\xi) = \ldots = 0$ a tedy $Q(x) = 0$ pro všecka $x$, pro něž $|x - \xi| < R - |\xi - x_0|$. Není-li $\xi$ již bodem $x_0$, jsou tedy všechny body na levo od $\xi$ hovící nerovnině $|x - \xi| < R - |\xi - x_0|$ nullovými body funkce $Q(x)$, což jest nemožno; neboť dle definice čísla $\xi$ a v důsledku toho, co jsme svrchu dokázali, nemůže nullový bod funkce $Q(x)$, uvnitř intervalu $(x_0, \xi)$ položený, býti bodem zhuštění nullových bodů. Avšak také nemůže býti $\xi = x_0$; neboť potom $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$, což jsme vyloučili. Případ tedy, že $\xi$ jest jedním z bodů $x'_1$, nenastane nikdy.

b) $\xi$ není jedním z bodů $x'_1$. Pak jest $\xi$ bodem zhuštění bodů $x'_1$, (nullových to bodů funkce $Q(x)$) a, jelikož $Q(x)$ ve všech bodech uvnitř intervalu konvergenčního jest funkcí spojitou, jest i $Q(\xi)=0$ a $\xi$ jest nullovým bodem funkce $Q(x)$, který jest zároveň bodem zhuštění nullových bodů $x'_1$; t. j. $\xi$ jest v důsledku úvahy svrchu provedené nutně jedním z bodů $x'_1$, jichž existenci jsme připustili. Výsledek tento odporuje však supposici právě učiněné, že $\xi$ není jedním z bodů $x'_1$, kteráž jest tudíž také nepřípustná.

Stejné úvahy bychom mohli prováděti i pro body $x'_1$ položené na levo od bodu $x_0$. Nemohou tedy existovati nullové body funkce a řady $Q(x)$ položené uvnitř intervalu konvergenčního, pro něž by funkce $Q(x)$ a její derivace všech řádů byly zároveň rovny nulle. Nemohou dále, má-li řada mocninná nekonečné množství nullových bodů uvnitř intervalu konvergenčního, jich body zhuštění nacházeti se uvnitř toho intervalu a jsou tedy nutně na hranicích (resp. je-li jenom jeden bod zhuštění, na hranici) intervalu konvergenčního.

Krátce vyslovujeme větu právě dokázanou, říkajíce, že *nullové body řady mocninné, jsou-li položeny uvnitř jejího intervalu konvergenčního, jsou body isolované a nemají bodů zhuštění uvnitř intervalu konvergenčního.*

Důsledek věty dokázané jest následující věta (**věta o neurčitých součinitelích** pro řady mocninné).

*Jestliže dvě řady mocninné*

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$$
$$b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots$$

*jsou si rovny pro nekonečné množství bodů položených v intervalu, který jest celý* **uvnitř** *intervalu konvergenčního i řady prvé i řady druhé, pak jsou obě řady identicky si rovny*; t. j. $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2, \ldots$

Neboť rozdíl obou řad lze psáti jako řadu potenční, jež jest rovna nulle v nekonečném množství bodů položených v intervalu, který jest uvnitř intervalu konvergenčního. Mají tedy nullové body bod (resp. body) zhuštění uvnitř intervalu konvergenčního, což jest, jak jsme ukázali, nemožno, leda že rozdíl ten jest identicky rovný nulle.

*Příklad.* Funkce $f(x)$ daná v $(-1,\ 1-0)$ rovnicí

$$f(x)=\sin\frac{1}{1-x}$$

dá se rozvinouti v řadu potenční v okolí bodu 0 (postupující tedy dle mocnin proměnné $x$) s poloměrem konvergence 1, jak čtenář snadno dokáže, vycházeje z rovnice

$$\sin\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(1-x)^5}-\ldots$$

a používaje ku pomoci funkce

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{1-x}}-e^{-\frac{1}{1-x}}\right)=\mathrm{Sh}\,\frac{1}{1-x}.$$

Rovněž v takovou řadu lze rozvinouti funkci $g(x)$, kde v $(-1,\ 1-0)$ jest

$$g(x)=\sin^2\frac{1}{1-x};$$

to plyne z věty o násobení nek. řad (v tomto případě řady samy sebou). V intervalu konvergenčním $(-1,\ 1)$ jest pro nekonečné množství bodů položených uvnitř intervalu toho $f(x)=g(x)$, totiž pro všechny body

$$1-\frac{1}{k\pi};\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Řady pro $f(x)$ a $g(x)$ nejsou si očividně identicky rovny, (majíce různé nám známé součty), ačkoliv bodů těchto jest nekonečný počet, avšak v každém intervalu ležícím *uvnitř* intervalu $(-1,\ 1)$, t. j. intervalu, jehož koncové body nesplývají ani s $-1$, ani s $1$, jest jich konečný počet.

*Poznámka.* Jelikož derivace řady potenční má tentýž interval konvergenční jako původní řada, nemá derivace řady potenční v intervalu $(-R+x_0+\varepsilon,\ R+x_0-\varepsilon)$, kde $\varepsilon$ jest kladné menší než $R$, nekonečný počet nullových bodů. Poněvadž jest nad to ta derivace funkcí spojitou, lze interval vytknutý rozděliti na konečný počet intervalů, ve kterých jest derivace stále téhož znaménka. Jest tedy funkce daná řadou potenční o intervalu konvergenčním $(-R,\ R)$ takovou, že interval $(-R+x_0+\varepsilon,\ R+x_0-\varepsilon)$ lze rozděliti v konečný počet intervalů, v němž každém jest funkce ta ryze monotonní.

Funkce ku př., jež v okolí bodu 0 jest rovna výrazu $2x+x\sin\frac{1}{x}$ nemůže býti tudíž rozvinutelna v řadu potenční v okolí bodu 0.

**147.** Vraťme se nyní k úvahám odst. 145, kde dospěli jsme k rozvojům

$$Q(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}Q'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}Q''(x_0)+\ldots,\quad \frac{1}{k!}Q^{(k)}(x_0)=a_k, \qquad (\alpha)$$

$$Q(x_1)+\frac{x-x_1}{1}Q'(x_1)+\frac{(x-x_1)^2}{2!}Q''(x_1)+\ldots \qquad (\beta)$$

Součet prvé z těchto řad dává nám jistou funkci $Q(x)$ pro všechna $x$, pro něž $|x-x_0|<R$, součet druhé z těchto řad jest rovněž rovný $Q(x)$ a to pro $x$, pro něž $|x-x_1|+|x_1-x_0|<R$, jak svrchu bylo

dokázáno; označíme-li tedy součet druhé řady $Q_1(x)$, kterýžto součet jest dán pro všecka $x$, pro něž $|x-x_1|<R_1$ ($R_1$ poloměr konvergence řady druhé), jest

$$Q_1(x)=Q(x) \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } |x-x_1|+|x_1-x_0|<R. \quad (\gamma)$$

Jestliže $R_1=R-|x_1-x_0|$, známe tudíž vůbec součet řady druhé, pokud jest konvergentní; případ tento nepotřebuje dalšího šetření a my se obrátíme ku možnosti $R_1>R-|x_1-x_0|$. Tu nejprve si můžeme dokázati, že $R_1 \leqq R+|x_1-x_0|$. Neboť připustíme-li, že $R_1>R+$ $+|x_1-x_0|$, pak jest patrno, že bod $x_0$ bude v intervalu konvergenčním řady ($\beta$) a můžeme týmž postupem, jako jsme odvodili ($\beta$) z ($\alpha$), odvoditi si z ($\beta$) (tím, že její součet, t. j. $Q_1(x)$ rozvineme v řadu Taylorovu v okolí bodu $x_0$) řadu

$$Q_1(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}Q'_1(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}Q''_1(x_0)+\dots \quad (\delta)$$

Řada tato dle vývodů odst. 145. konverguje aspoň pro všecka $x$, pro něž $|x-x_0|<R_1-|x_1-x_0|$, a má pro tato $x$ součet $Q_1(x)$. T. j. řada ($\delta$) konverguje a má součet $Q_1(x)$ pro všecka $x$, pro něž $|x-x_0|<$ $<R+\varDelta$, kdež $\varDelta=R_1-R-|x_1-x_0|$ jest v důsledku toho, co jsme připustili (totiž, že $R_1>R+|x_1-x_0|$), číslem kladným. Avšak dle ($\gamma$) jest součet řady ($\delta$) v intervalu $I_0$ (daném nerovninou $|x-x_1|<$ $<R-|x_1-x_0|$) též dán výrazem $Q(x)$. Mají tedy ($\alpha$) a ($\delta$), mocninné to řady argumentu $(x-x_0)$, týž součet ve všech bodech intervalu $I_0$ a jsou tedy dle věty o neurčitých součinitelích identické. Řada ($\alpha$) má poloměr konvergence $R$; řada ($\delta$) však s ní identická v důsledku připuštěného předpokladu, že $R_1>R+|x_1-x_0|$ má poloměr konvergence aspoň $R+\varDelta$, kdež $\varDelta>0$. To ovšem jest nemožno a není tudíž i možno, aby $R_1>R+|x_1-x_0|$. Lze tedy k nerovnině (9) připojiti nerovninu

$$R_1 \leqq R+|x_1-x_0|. \quad (9')$$

V důsledku této nerovniny skládá se interval $I_2$ v odst. 145. ke konci definovaný toliko z jediné části.

Intervaly konvergenční řad ($\alpha$) a ($\beta$) jsou $(-R+x_0,\ R+x_0)$ a $(-R_1+x_1,\ R_1+x_1)$; jestliže ku př. $x_1>x_0$, jdou koncové body těchto intervalů v důsledku (9), (9′) za sebou v tomto pořadí: $-R+x_0$, $-R_1+x_1$, $R+x_0$, $R_1+x_1$, při čemž, je-li v (9′) resp. (9) splněno znaménko rovnosti, splývá bod první s druhým resp. třetí s čtvrtým. Obdobně jest tomu, když $x_1<x_0$, avšak k vůli zjednodušení podržíme v následujícím předpoklad $x_1>x_0$. Společná část oběma intervalům konvergenčním (t. j. dle označení odst. 145. souhrn intervalů $I_0$, $I_1$)

jest dána intervalem $(-R_1+x_1,\ R+x_0)$; střed tohoto intervalu označíme $x_3=\frac{1}{2}(R-R_1)+\frac{1}{2}(x_0+x_1)$. Rozvineme nyní i funkci $Q(x)$ i funkci $Q_1(x)$ (prvá dána řadou ($\alpha$), druhá řadou ($\beta$)) v řady Taylorovy v okolí bodu $x_3$, pro který, jak snadno čtenář dokáže, jest $x_0 < x_3 < x_1$. Dostaneme rozvoje

$$Q(x_3)+\frac{x-x_3}{1!}Q'(x_3)+\frac{(x-x_3)^2}{2!}Q''(x_3)+\ldots,$$

$$Q_1(x_3)+\frac{x-x_3}{1!}Q'_1(x_3)+\frac{(x-x_3)^2}{2!}Q''_1(x_3)+\ldots,$$

z nichž prvý i druhý budou konvergentní, když $x$ jest aspoň v intervalu $(-R_1+x_1, R+x_0)$, t. j. aspoň v $I_0+I_1$, a prvý má tu za součet $Q(x)$, druhý $Q_1(x)$. Avšak jelikož $Q(x)=Q_1(x)$ pro $x$ v $I_0$, jsou oba tyto rozvoje sobě rovny, když $x$ jest v $I_0$, a tudíž se rovnají identicky a jest $Q(x)=Q_1(x)$ i když $x$ jest v $I_1$.

Máme tak celkem větu: *Rozvineme-li řadu potenční $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$, o poloměru konvergence $R$ a definující svým součtem funkci $Q(x)$ pro všecka $x$ uvnitř intervalu konvergenčního, v řadu Taylorovu v okolí bodu $x_1$*

$$Q(x_1)+\frac{x-x_1}{1!}Q'(x_1)+\frac{(x-x_1)^2}{2!}Q''(x_1)+\ldots,$$

*při čemž $x_1$ jest uvnitř intervalu konvergenčního řady dané, dostáváme novou řadu potenční argumentu $x-x_1$ a o poloměru konvergence $R_1$.* Součet její bude ve všech bodech společných intervalům konvergenčním řady dané a řady nové roven součtu řady dané *t. j. roven $Q(x)$. Pro $R_1$ pak jsou nerovniny*

$$R+|x_1-x_0| \geqq R_1 \geqq R-|x_1-x_0|.$$

Používáme-li tedy k označení součtu řady ($\beta$) (jako svrchu již používáno) označení $Q_1(x)$, pak můžeme definovati funkci $f(x)$ těmito dvěma vztahy

$$f(x)=Q(x) \text{ pro } x, \text{ pro něž } |x-x_0|<R;$$
$$f(x)=Q_1(x) \text{ pro } x, \text{ pro něž } |x-x_1|<R_1,$$

jež nejsou v odporu, jelikož pro ta $x$, jež hoví oběma nerovninám $|x-x_0|<R$, $|x-x_1|<R_1$, dle věty právě vyslovené $Q(x)=Q_1(x)$. Vztah druhý definuje $f(x)$ v intervalu přesahujícím interval, ve kterém byla definována původně daná funkce $Q(x)$, je-li ovšem $R_1>R-|x_1-x_0|$. V tomto případě říkáme také, že funkcí $Q_1(x)$ bylo sestrojeno **analy-**

**tické pokračování funkce** $Q(x)$. Funkce $Q(x)$ i se svým pokračováním $Q_1(x)$ tvoří funkci $f(x)$, která jest definována uvnitř intervalu $(-R+x_0, R_1+x_1)$, má ve všech bodech uvnitř toho interv. derivace všech řádů a jest v nich rozvinutelna v řadu Taylorovu. Má ovšem tato funkce tam i jiné vlastnosti svrchu odvozené pro součet řady potenční v intervalu konvergenčním.

Vycházejíce od řady $Q_1(x)$ a volíce si bod $x_2 > x_1$, můžeme rozvojem v řadu Taylorovu sestrojiti funkci $Q_2(x)$ jako řadu mocninou argumentu $(x-x_2)$, jež v případu příznivém nám definuje tuto funkci ještě pro body na pravo od $R_1+x_1$ (je-li totiž $R_2+x_2 > R_1+x_1$). Přiberme i tuto funkci k definici funkce $f(x)$. Takovýmto způsobem postupujíce a to nejenom směrem na pravo od $x_0$, nýbrž také směrem na levo (volíce řadu bodů $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ tak, že $x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \ldots$ a konstruujíce příslušné rozvoje Taylorovy $Q_{-1}(x), \ldots$ jak svrchu bylo vylíčeno), rozšíříme definici funkce $f(x)$, původně dané uvnitř intervalu $(-R+x_0, R+x_0)$ potenční řadou $Q(x)$, na jistý interval $(a+0, b-0)$. Funkce $f(x)$ nazývá se pak *analytickou funkcí* definovanou uvnitř intervalu $(a, b)$. Jednotlivým rozvojům potenčním v okolí bodů $x_0, x_1, \ldots$, jimiž tato funkce jest právě definována, říká se *prvky* (elementy) *analytické funkce* $f(x)$. Tyto rozvoje samy pro sebe jsou ovšem též analytické funkce, definované však toliko v příslušném intervalu konvergenčním.

**148. Potenční řady na hranici intervalu konvergenčního.** Potenční řada

$$Q(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots, \qquad (\alpha)$$

jejíž poloměr konvergence jest $R$, může býti v bodech daných rovnicí $x-x_0 = \pm R$ (v bodech to udávajících hranice intervalu konv) i konvergentní i divergentní. Jest zajímavo a pro četné úvahy v analysi důležito vyšetřiti v různých případech, které nastati mohou, chování funkce $Q(x)$ v okolí těch bodů (pokud ovšem to okolí spadá do intervalu konvergenčního). K vůli zjednodušení zavedeme do řady dané novou proměnnou $x'$ rovnicí

$$x-x_0 = Rx', \text{ resp. } x-x_0 = -Rx',$$

čímž dostaneme řadu potenční argumentu $x'$ a o intervalu konvergenčním $(-1, 1)$, při čemž zároveň jeden z obou bodů $x-x_0 = \pm R$ (dle toho, které z obou substitucí užíváme) se transformuje v bod 1. *Tak postačí nám vyšetřovati řadu a funkci* (při $x'$ vynechávám v následujícím čárku, koefficienty $a'_k = a_k R^k$ značím rovněž krátce $a_k$ a místo $Q(x_0 \pm Rx)$ kladu $P(x)$):

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

*o poloměru konvergence 1 a to v okolí bodu 1 v levo.* Věty, které tak dostaneme, přenášejí se bezprostředně na případ funkce $Q(x)$.

**149.** Označme

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{2}$$

a předpokládejme, že

$$A \leqq s_n \leqq B \text{ pro všecka } n > N. \tag{3}$$

Nejprve jest, roznásobíme-li příslušné nekonečné řady,

$$\frac{P(x)}{1-x} = P(x)(1 + x + x^2 + \ldots) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$$

a tedy

$$\frac{P(x)}{1-x} - \left(s_0 + s_1 x + \ldots + s_N x^N\right) = s_{N+1} x^{N+1} + s_{N+2} x^{N+2} + \ldots \tag{4}$$

Budiž $x$ kladné, pak pravá strana poslední rovnice v důsledku (3) jest větší ($\geqq$) než

$$A(x^{N+1} + x^{N+2} + \ldots) = \frac{A x^{N+1}}{1-x} \text{ a jest menší než } \frac{B x^{N+1}}{1-x}.$$

Značíme-li ještě pro krátkost $\sigma_n(x) = s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n$, jest tedy

$$A x^{N+1} \leqq P(x) - (1-x)\sigma_N(x) \leqq B x^{N+1}, \tag{5}$$

odkudž ihned, přejdeme-li k limitám pro $\lim x = 1 - 0$,

$$A \leqq \underline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leqq \overline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leqq B$$

Na základě těchto výsledků a pojmů největší a nejmenší z limit můžeme vysloviti tuto větu:

*Jsou-li pro čísla $s_n$ splněny nerovniny* (3), *jest*

$$\underline{\lim}_{n=\infty} s_n \leqq \underline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leqq \overline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leqq \overline{\lim}_{n=\infty} s_n \qquad x < 1.$$

Jestliže existuje $\lim s_n$ pro $n = \infty$, t. j. jestliže řada $P(x)$ pro $x = 1$ jest konvergentní, následuje jako specielní případ právě vyslovené věty (anebo též přímo snadnou úvahou ze (5)) **věta Abelova**:

*Jestliže nekonečná řada $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ jest konvergentní a má za součet číslo $s$, pak jest*

$$\lim_{x=1-0} P(x) = s.$$

*Poznámka 1.* Funkce $Q(x)$ daná řadou potenční ($a$) o poloměru konvergence $R$ jest funkcí spojitou, jak jsme dokázali, v každém bodě uvnitř intervalu konvergence. V důsledku věty Abelovy právě dokázané tato vlastnost se rozšiřuje i na tu hranici intervalu konvergenčního, pro kterou jest daná řada potenční konvergentní. Je-li konvergentní pro obě hranice, jest $Q(x)$ definována v celém intervalu konv. tou řadou a tam ve všech bodech spojitou (tedy v celém intervalu stejnoměrně spojitou).

*Poznámka 2.* Řada potenční pro $Q(x)$ v důsledku okolnosti, že poloměr konvergence jest $R$, jest stejnoměrně konvergentní pro všecka $(x-x_0)$ intervalu $(-R+\varepsilon, R-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Jestliže však ta řada potenční jest konvergentní pro $x-x_0=R$, resp. pro $x-x_0=-R$, lze prokázati stejnoměrnou konvergenci její v intervalu $(-R+\varepsilon, R)$, resp. $(-R, R-\varepsilon)$, je-li pak konvergentní i pro $x-x_0=R$, i pro $x-x_0=-R$, jest stejnoměrně konvergentní v $(-R, R)$. Důkazy těchto tvrzení (stačí dokázati toliko první tvrzení), z nichž věta Abelova ihned následuje jako důsledek vět o řadách stejnoměrně konvergentních, lze snadno podati na podkladě rovnice (4), užité ovšem místo na $P(x)$ na zbytek $r_n(x)$.*)

**150.** Jakožto doplněk věty Abelovy plyne ihned z (5) věta: *Jestliže* $\lim\limits_{n=\infty} s_n=\infty$, *pak jest*

$$\lim_{x=1-0} P(x)=\infty.$$

Obdobný výrok lze učiniti i pro případ, že $\lim\limits_{n=\infty} s_n=-\infty$.

Užijeme-li větu Abelovu, jakož i její doplněk na řadu vzniklou z $P(x)$ násobením $1-x$, t. j. na řadu

$$(1-x)P(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+\ldots,$$

při níž

$$s_n=a_0+(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1})=a_n,$$

dostaneme ihned tyto výroky:

$$\textit{Jestliže}\ \lim a_n=a,\ \textit{jest}\ \lim_{x=1-0}(1-x)P(x)=a.$$

$$\textit{Jestliže}\ \lim a_n=\infty,\ \textit{jest}\ \lim_{x=1-0}(1-x)P(x)=\infty.$$

*Příklad 1.* Rozvoj

$$P(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

má pro $|x|<1$ součet $-\log(1-x)$; jelikož při něm $\lim a_n=0$, jest $\lim\limits_{x=1-0}(1-x)\log(1-x)=0$.

*) Viz poznámku pod čarou v „Počtu integrálním," str. 462.

*Příklad 2.* Jelikož koefficienty v řadě

$$P(x) = x \log 1 + x^2 \log 2 + x^3 \log 3 + \ldots$$

rostou (jsouce kladnými) nade všecky meze, jest $\lim\limits_{x=1-0} (1-x) P(x) = \infty$. Utvoříme-li však rozdíl řady

$$-\frac{\log(1-x)}{1-x} = \frac{x}{1} + x^2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) + x^3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

a řady $P(x)$, dostaneme rozvoj pro funkci

$$-\frac{\log(1-x)}{1-x} - P(x),$$

jehož součinitelé jsou dány rovnicí

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Poněvadž tu $\lim a_n = C$, kde $C$ tak zv. Eulerova konstanta, jest nejprve

$$\lim_{x=1-0} \left[-\frac{\log(1-x)}{1-x} - P(x)\right](1-x) = C,$$

tudíž

$$\lim_{x=1-0} (1-x)\left[-\frac{C}{1-x} - \frac{\log(1-x)}{1-x} - P(x)\right] = 0.$$

Dle výrazu pro Eulerovu konstantu z odst. 119. lze dokonce psáti

$$P(x) = -\frac{\log(1-x)}{1-x} - \frac{C}{1-x} - \frac{1}{2}\log(1-x) + P_1(x),$$

kdež $P_1(x)$ jest dána řadou v bodě $x=1$ (a též v bodě $x=-1$) konvergující a kde tudíž $P_1(x)$ jest v intervalu $(-1, 1)$ funkcí spojitou a konečnou.

**151. Cesàrovy arithmetické středy.** Větu Abelovu lze však ještě v jiném směru rozšířiti a to jenom malou změnou postupu užitého. Utvoříme-li součin řady pro $P(x)$ a řady

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k+1)x^k + \ldots$$

(rovněž o poloměru konvergence rovném 1), obdržíme řadu

$$\frac{P(x)}{(1-x)^2} = s_0^{(1)} + s_1^{(1)} x + s_2^{(1)} x^2 + \ldots + s_k^{(1)} x^k + \ldots,$$

kdež

$$\begin{aligned} s_k^{(1)} &= (k+1)a_0 + k a_1 + (k-1)a_2 + \ldots + a_k \\ &= s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k. \end{aligned}$$

Učiníme li předpoklad, že

$$A < \frac{s_n^{(1)}}{(n+1)} < B \text{ pro všecka } n > N,$$

dostáváme ihned tuto nerovninu při $x > 0$

$$A\Big((N+1)x^{N+1} + (N+2)x^{N+2} + \ldots\Big) < \frac{P(x)}{(1-x)^2} - \Big(s_0^{(1)} + s_1^{(1)}x + \ldots$$
$$\ldots + s_N^{(1)}x^N\Big) < B\Big((N+1)x^{N+1} + (N+2)x^{N+2} + \ldots\Big),$$

z níž následuje stejně jako svrchu

$$A \leq \underline{\lim}_{x=1-0} P(x) < \overline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leq B, \qquad (6)$$

neboť součin

$$(1-x)^2\Big((N+1)x^{N+1} + (N+2)x^{N+2} + (N+3)x^{N+3} + \ldots\Big) =$$
$$= x^{N+1}(N+1-Nx)$$

má za limitu 1 (což ostatně také z toho jest patrno, že závorka v součinu jest rovna výrazu $(1-x)^{-2}$ zmenšenému o jistý polynom stupně $N$).

Z nerovniny (6) plyne ihned *rozšíření Abelovy věty*:

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{s_n^{(1)}}{n+1} < \underline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leq \overline{\lim}_{x=1-0} P(x) \leq \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{s_n^{(1)}}{n+1};$$

ve specielním případě pak máme výrok: *Existuje-li limita*

$$\lim \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = s^{(1)}, \quad s_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \ldots + s_n,$$

*pak jest*

$$\lim_{x=-0} P(x) = s^{(1)}$$

Tímto způsobem můžeme pokračovati a zavésti čísla $s_k^{(\lambda)}$ rovnicí

$$\frac{P(x)}{(1-x)^\lambda} = s_0^{(\lambda)} + s_1^{(\lambda)}x + s_2^{(\lambda)}x^2 + \ldots$$

Jelikož

$$\frac{P(x)}{(1-x)^\lambda} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{P(x)}{(1-x)^{\lambda-1}},$$

jest

$$s_k^{(\lambda)} = s_0^{(\lambda-1)} + s_1^{(\lambda-1)} + \ldots + s_k^{(\lambda-1)}$$

a máme ihned větu: *Existuje-li limita*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(\lambda)}}{\binom{n+\lambda}{\lambda}} = s^{(\lambda)},$$

*pak jest*

$$\lim_{x=1-0} P(x) = s^{(\lambda)}$$

Říkáme pak, že daná řada potenční jest v bodě $x=1$ *sčítatelna dle středů Cesàrových řádu* $\lambda$ (anebo stručně jest sčítatelna $(C, \lambda)$).

*Poznámka.* Z odst. 31. rovnice IV. následuje snadno, že existuje li $s^{(\lambda)}$, že také existují $s^{(\lambda+1)}$, $s^{(\lambda+2)}, \ldots$ a že všecka tato čísla jsou si rovna.

**152. Majorantní funkce (řada).** Abychom pokud možná jednoduše odvodili si důležité věty o funkcích analytických a o řadách potenčních zvlášť, zavádí se pojem t. zv. majorantní funkce (řady). Je-li dána analytická funkce $f(x)$ v okolí bodu $x_0$ řadou

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots.$$

sluje funkce (řada) $\varphi(x)$ majorantní ku $f(x)$ v okolí bodu $x_0$, jestliže

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \ldots,$$

dále

$$\alpha_0 \geqq |a_0|, \ \alpha_1 \geqq |a_1|, \ldots, \alpha_k \geqq |a_k|, \ldots$$

a při tom jest řada pro $\varphi(x)$ konvergentní v jistém okolí bodu $x_0$. Pro tento pojem zavádí se označení

$$\varphi(x) \gg f(x), \quad f(x) \ll \varphi(x).$$

Jest dle definice patrno, že současně jest

$$\varphi'(x) \gg f'(x), \quad \varphi''(x) \gg f''(x), \ldots$$

Jest snadno sestrojiti ku každé $f(x)$ *jednoduché* — a o takové hlavně jde — majorantní funkce. Tak ku př., je-li $R$ poloměr konvergence řady pro $f(x)$ a $R'$ číslo kladné menší než $R$ (po případě rovno $R$, je-li řada pro $f(x)$ konvergentní pro $x-x_0 = \pm R$), pak jest číslo $M'$ takové, že $|a_k| < M'R'^{-k}$ pro $k=0, 1, 2, \ldots$ (viz odst. 142) a my můžeme ihned psáti

$$f(x) \ll M' + \frac{M'}{R'}(x-x_0) + \frac{M'}{R'^2}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$f(x) \ll \frac{M'}{1 - \frac{x-x_0}{R'}}.$$

Kdyby v řadě dané bylo $a_0 = 0$, mohli bychom (podržujíce význam čísel $M', R'$) voliti majorantní funkci dle vztahu

$$f(x) \ll \frac{M'}{1 - \frac{x - x_0}{R'}} - M' = \frac{M'}{R'} \frac{(x - x_0)}{1 - \frac{x - x_0}{R'}};$$

kdyby $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$, pak by obdobně majorantní funkce byla dána vztahem

$$f(x) \ll \frac{M'}{1 - \frac{x - x_0}{R'}} \cdot \left(\frac{x - x_0}{R'}\right)^k.$$

*Poznámka.* Majorantní funkce vlastně jsme již použili při důkazu spojitosti funkce dané potenční řadou (v odst. 143.) Podávaje v následujícím dvojí použití majorantních funkcí, podotýkám, že další použití naskytnou se při vyšetřování implicitních funkcí a při řadě Lagrangeově.

**153.** Jako první příklad pro užitečnost pojmu majorantní funkce budeme řešiti otázku, zda dostaneme funkci proměnné $x$ rozvinutelnou v řadu Taylorovu v okolí bodu $x_0$, dosadíme-li do dané řady potenční postupující dle mocnin rozdílu $y - y_0$ za $y - y_0$ jistou řadu potenční postupující dle mocnin $x - x_0$ (bez konstantního členu.) Budiž tedy

$$F(y) = A_0 + A_1 (y - y_0) + A_2 (y - y_0)^2 + \ldots; \text{ poloměr konverg. } R > 0 \quad (\alpha)$$

a dosaďme za $y - y_0$ dle rovnice

$$y - y_0 = b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + b_3 (x - x_0)^3 + \ldots; \quad \text{poloměr konv. } r > 0. \quad (\beta)$$

Tím změní se $F(y)$ ve funkci proměnné $x$, již označíme $G(x)$, a dostaneme, provedeme-li dosazení, umocnění, roznásobení a uspořádání dle mocnin $x - x_0$, na pravé straně výraz

$$C_0 + C_1 (x - x_0) + C_2 (x - x_0)^2 + \ldots, \quad (\gamma)$$

kde

$$C_0 = A_0, \; C_1 = A_1 b_1, \; C_2 = A_1 b_2 + A_2 b_1^2,$$
$$C_3 = A_1 b_3 + 2 A_2 b_1 b_2 + A_3 b_1^3, \; C_4 = A_1 b_4 + \ldots \quad (\delta)$$

Operace poslední — t. j roznásobení a uspořádání dle mocnin $x - x_0$ — jsou však jenom tenkráte přípustny, je-li řada při roznásobení vzniklá (kterýmžto roznásobením se každý člen původní řady $(\alpha)$ rozpadne v nekonečný počet členů, tedy řada $(\alpha)$ v řadu dvojnou, viz odst. 53.) absolutně konvergentní a o tom právě nás poučí majorantní funkce. Neboť povede-li roznásobení při majorantních funkcích (za jistých podmínek pro $x - x_0$) ku řadě absolutně konvergentní, tím spíše bude tomu tak (za týchž podmínek pro $x-x_0$) i při rozvojích $(\alpha)$, $(\beta)$, jichž koefficienty jsou v absolutní hodnotě menší (a jsou tudíž i součinitelé vznikající při umocňování a násobení s řadami $(\alpha)$ a $(\beta)$ menší v absolutní hodnotě než součinitelé při týchž operacích s příslušnými majorantními funkcemi).

Za majorantní funkci ku $F(y)$ zvolíme si řadu

$$\Phi(y) = |A_0| + |A_1|(y-y_0) + |A_2|(y-y_0)^2 + \ldots;$$

majorantní funkcí ku pravé straně rovnice $(\beta)$ nechť jest řada $(r' \leqq r)$

$$\varphi(x) = \frac{m'}{1-\frac{x-x_0}{r'}} - m' = \frac{m'(x-x_0)}{r'\left(1-\frac{x-x_0}{r'}\right)}. \tag{$\varepsilon$}$$

Dosadíme-li do řady $\Phi(y)$, jejíž poloměr konvergence jest $R$, za $y-y_0$ výraz $\varphi(x)$ právě napsaný, obdržíme řadu postupující dle mocnin výrazu $\varphi(x)$ konvergentní pro všecka $x$, pro něž ($|x-x_0|$ jest menší než $r'$)

$$|\varphi(x)| < R \text{ aneb } \frac{m'|x-x_0|}{r'\left(1-\frac{x-x_0}{r'}\right)} < R, \text{ t. j. } |x-x_0| < \frac{Rr'}{R+m'} \tag{$\iota$}$$

Avšak řada pro $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{m'(x-x_0)}{r'} + \frac{m'(x-x_0)^2}{r'^2} + \frac{m'(x-x_0)^3}{r'^3} + \ldots$$

má členy vesměs kladné, je-li $x-x_0 > 0$ a rovněž tak i mocniny té řady s celistvým mocnitelem. Tedy dosadíme-li do $\Phi(y)$ za $y-y_0$ poslední řadu pro $\varphi(x)$ a provedeme-li v jednotlivých členech příslušná umocnění a roznásobení, rozpadne se každý člen řady $\Phi(y)$ v nekonečný počet členů kladných (stále při $x-x_0 > 0$) a může býti řada dvojná tak vznikající jenom absolutně konvergentní (odst. 53.) To pak nastane vždy, je-li splněno $(\iota)$. Tím spíše nastane absolutní konvergence při obdobných operacích s $(\alpha)$, $(\beta)$ a můžeme v důsledku toho vysloviti větu:

*Dosadíme-li do funkce $F(y)$, rozvinutelné v okolí bodu $y_0$ v řadu Taylorovu o poloměru konvergence $R > 0$, za $y-y_0$ funkci $f(x)$ rovněž rozvinutelnou v řadu Taylorovu a to v okolí bodu $x_0$, který jest zároveň nullovým bodem té funkce, obdržíme funkci $F(y_0+f(x))$, jež jest rozvinutelna v řadu Taylorovu v okolí bodu $x_0$ a jest konvergentní pro všecka $x$, pro něž*

$$|x-x_0| < \frac{Rr'}{R+m'}. \tag{$\iota'$}$$

*Při tom jsou $m'$, $r'$ kladné konstanty tak volené, aby funkce $v$ ($\varepsilon$) byla majorantní ku $f(x)$; součinitele pak řady mocninné argumentu $x-x_0$ pro funkci $F(y_0+f(x))$ získáme, provedeme-li dosazením požadované operace* (umocňování, roznásobení a uspořádání).

Tak ku př., dosazujeme-li do řady

$$1+y+y^2+y^3+\ldots$$

za $y$ řadu

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots,$$

máme nejprve $b_k \leqq 1.1^{-k}$; lze tedy voliti $m'=1$, $r'=1$ a řada mocninná v $x$ dosazením vzniklá jest konvergentní jistě pro všecka $x$, pro něž $|x|<\frac{1}{2}$. (Poloměr konvergence řady tak vzniklé jest dokonce, jak jiným způsobem lze zjistiti, rovný $1-e^{-1}$).

**154. Dělení řadou potenční.** Abychom rozhodli, zda podíl dvou funkcí, rozvinutelných v řadu Taylorovu v okolí bodu $x_0$, dá se rozvinout v řadu Taylorovu rovněž v okolí bodu $x_0$, stačí nejprve místo $x_0$ bráti 0 (t. j. místo $x-x_0$ prostě položiti $x$) a potom zabývati se zlomkem

$$g(x)=\frac{1}{c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k+\ldots}$$

za předpokladu, že $c_0 \neq 0$. Tento zlomek lze takto rozvinouti v řadu geometrickou

$$g(x)=\frac{1}{c_0}-\frac{1}{c_0^2}(c_1x+c_2x^2+\ldots)+\frac{1}{c_0^3}(c_1x+c_2x^2+\ldots)^2-$$
$$-\frac{1}{c_0^4}(c_1x+c_2x^2+\ldots)^3+\ldots$$

a běží tudíž v podstatě o to, abychom dosadili do řady potenční

$$\frac{1}{c_0}-\frac{y}{c_0^2}+\frac{y^2}{c_0^3}-\frac{y^3}{c_0^4}+\ldots,\quad R=|c_0|$$

za $y$ řadu potenční

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Jestliže ku poslední řadě jest majorantní funkcí výraz $m'\left(1-\frac{x}{r'}\right)^{-1}-m'$, dostáváme pro $g(x)$ řadu potenční, jež jistě dle předch. odst. konverguje pro všecka $x$, pro něž

$$|x|<\frac{|c_0|r'}{m'+|c_0|}. \qquad (\alpha)$$

Jelikož součin dvou řad potenčních v $x$ jest dán zase řadou potenční, konvergentní aspoň pro ta $x$, jež jsou obsažena v menším z obou intervalů konvergenčních, jest i podíl

$$\frac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots} = (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

rozvinutelný v řadu potenční, jestliže ovšem řady v čitateli a jmenovateli jsou konvergentní s poloměry konvergence většími než 0 a jestliže zároveň $|c_0| \neq 0$.

Dostaneme tudíž — za těchto podmínek —

$$\frac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots} = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \ldots,$$

kdež řada na pravé straně má jistý poloměr konvergence $> 0$. K výpočtu koefficientů $e_0, e_1, e_2, \ldots$ můžeme použiti methody neurčitých součinitelů, násobíce po obou stranách řadou nekonečnou, nacházející se ve jmenovateli levé strany. Dostaneme pak porovnávajíce koefficienty při $x^k$ na obou stranách

$$d_k = c_0 e_k + c_1 e_{k-1} + c_2 e_{k-2} + \ldots + c_k e_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ze kterýchžto rovnic postupně koefficienty $e_0, e_1, e_2, \ldots$ dají se snadno vypočítati.

Obecněji jest patrně, je-li $c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$, avšak $c_k \neq 0$ a rovněž $d_0 \neq 0$,

$$\frac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots}{c_0 + c_1 x + c_2 x_2 + \ldots} = \frac{e_{-k}}{x^k} + \frac{e_{-k+1}}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{e_{-1}}{x} + e_0 + e_1 x + \ldots,$$

při čemž čísla $e_{-k}, e_{-k+1}, \ldots$ (z nichž první jest od nully různo), lze snadno stejně, jako svrchu, methodou neurčitých součinitelů vypočísti.

**155.** Jakožto další příklad k užití majorantních funkcí vezmeme v úvahu **inversní funkce ku funkcím daným řadou potenční.** Jak známo nám z odst. 82., existuje ku každé funkci $y = f(x)$ ryze monotonní funkce inversní $x = \varphi(y)$ tak, že vztahy $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ mezi proměnnými $x$, $y$ jsou ekvivalentní a rovnice $y = f(\varphi(y))$, $x = \varphi(f(x))$ identicky platny. Je li $f(x)$ dáno řadou potenční argumentu $x - x_0$ a intervalu konvergenčního $(x_0 - R, x_0 + R)$, pak jak jsme ukázali (odst. 146, poznámka), lze každý interval položený uvnitř intervalu konvergenčního rozděliti v konečný počet intervalů částečných tak, že uvnitř tohoto částečného intervalu jest derivace $f'(x)$ stále téhož znaménka, jsouc stále od nully různa a funkce $f(x)$ jest v něm ryze monotonní. Existuje tedy v každém částečném intervalu ku $f(x)$ funkce inversní $\varphi(y)$. Naším úkolem pak bude rozhodovati, zda lze tuto funkci inversní rozvinouti v řadu potenční.

Budiž tedy dána funkce $y$ proměnné $x$ taková, že jest rovna $y_0$ pro $x = x_0$ a že lze ji v okolí bodu $x_0$ rozvinouti v řadu potenční

$$y - y_0 = a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots . \qquad (1)$$

Budiž dále $x_0$ v intervalu, uvnitř něhož derivace funkce $y$ dle $x$ jest stále od nully různa: pak $a_1$ jakožto hodnota té derivace v bodě $x = x_0$ jest různa od nully. Dělíme-li obě strany číslem $a_1$ a k vůli stručnosti zavedeme $y - y_0 = \eta a_1$, $x - x_0 = \xi$, změní se poslední rovnice ve vztah

$$\eta = \xi - A_2 \xi^2 - A_3 \xi^3 - \ldots - A_k \xi^k - \ldots , \qquad (2)$$

ve kterém zavedeno poněkud jiné označení součinitelů. Funkce inversní $\varphi(\eta)$ ku funkci definované řadou ve (2) a rovnající se nulle pro $\eta = 0$ (o níž víme, že existuje) má tu vlastnosť, že dosadíme-li do (2) za $\xi$ funkci $\varphi(\eta)$, rovnice tak vzniklá jest identicky v jistém okolí bodu $\eta = 0$ splněna. Dosaďme do (2) za $\xi$ řadu mocninnou proměnné $\eta$, mající v bodě $\eta = 0$ nullový bod, a zkoumejme, za jakých podmínek vznikne rovnice identická v okolí bodu $\eta = 0$. Tedy dosaďme dle rovnice

$$\xi = c_1 \eta + c_2 \eta^2 + c_3 \eta^3 + \ldots \ldots \qquad (3)$$

a uspořádejme na pravé straně dle mocnin proměnné $\eta$, čímž dostaneme

$$\eta = c_1 \eta + (c_2 - c_1^2 A_2) \eta^2 + (c_3 - 2 c_2 c_1 A_2 - c_1^3 A_3) \eta^3 + \ldots \ldots ;$$

má-li tato rovnice býti splněna identicky v okolí bodu $\eta = 0$, pak jest nutno a stačí dle věty o neurčitých součinitelích, aby splněny byly rovnice

$$\begin{aligned} & c_1 = 1, \quad c_2 = c_1^2 A_2, \quad c_3 = 2 c_2 c_1 A_2 + c_1^3 A_3, \\ & c_4 = (2 c_3 c_1 + c_2^2) A_2 + 3 c_1 c_2 A_3 + c_1^4 A_4, \ldots \ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

Tyto rovnice postupně určují koefficienty a to úplně. Existuje-li tudíž funkce $\xi$ proměnné $\eta$ tvaru (3) splňující identicky rovnici (2), existuje jen jediná a shoduje se tedy s inversní funkcí $\varphi(\eta)$ ku funkci definované řadou ve (2); shodují pak se v tom intervalu, ve kterém obě jsou definovány, při čemž ovšem ku definici řadou (3) se požaduje konvergence té řady.

Jest tedy ještě jenom rozhodnouti, zda řada (3) jest vůbec v jistém okolí bodu $\eta = 0$ konvergentní, a k tomu cíli použijeme právě funkce majorantní. Tu jest ihned patrno, že, kdybychom do rovnic (4), stanovících koefficienty $c_k$, místo čísel $A_k$ dosadili čísla kladná větší absolutní hodnoty, koefficienty $c_k$ rovnicemi těmi pak stanovené by byly rovněž čísla kladná a větší v absolutní hodnotě než $c_k$ původními rovnicemi (4) daná. Nahradíme-li tedy ve (2) řadu $A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots\ldots$ majorantní funkcí a bude-li potom k výrazu tak vzniklému příslušná inversní funkce rozvinutelna v řadu potenční konvergentní v okolí bodu $\eta = 0$, tím spíše bude v tomtéž okolí konvergovati (3) (kde $c_k$ jsou vypočtěny ze (4) na základě původních hodnot koefficientů $A_k$). Majorantní funkci zvolíme dle předpisu odst. 152. a vyšetříme tedy inversní funkci ku funkci $\eta$, jež jest dána vztahem

$$\eta = \xi - \frac{M'\xi^2}{1 - \frac{\xi}{R'}}, \tag{5}$$

při čemž $R'$ jest číslo kladné, menší ($\leq$) než poloměr konvergence řady ve (2) a $M'$ jest rovněž číslo kladné, vhodně ku $R'$ volené (tak, aby menšitel na pravé straně (5) byl majorantní ku $A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots$). Z (5) však následuje řešením dle $\xi$ (při čemž počítáme ten kořen kvadratické rovnice, který pro $\eta = 0$ stává se nullou):

$$\xi = \frac{R' + \eta - R'(1 - \varepsilon_1\eta)^{\frac{1}{2}}(1 - \varepsilon_2\eta)^{\frac{1}{2}}}{2(M'R' + 1)}, \tag{6}$$

kde $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ jsou kořeny rovnice druhého stupně v $\varepsilon$

$$\varepsilon^2 - 2\varepsilon\left(2M' + \frac{1}{R'}\right) + \frac{1}{R'^2} = 0.$$

Indexy při $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ volíme pak tak, aby

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + 2M'R' - \sqrt{(1 + 2M'R')^2 - 1}}{R'},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + 2M'R' + \sqrt{(1 + 2M'R')^2 - 1}}{R'}.$$

Výraz pro (6) jest rozvinutelný (dle binomické věty) v řadu mocninnou proměnné $\eta$, konvergentní pro všecka $\eta$, jichž absolutní hodnota jest menší než $\varepsilon_2^{-1} = R'(1 + 2M'R' - \sqrt{(1 + 2M'R')^2 - 1})$. Tím spíše bude konvergovati řada (3), při níž součinitelé hoví rovnicím (4), v tomto rozsahu.

Tím podán důkaz věty (vrátíme se k původnímu označení rovnice (1)): *Ku funkci $y = f(x)$, která pro $x = x_0$ stává se rovnou $y_0$ a která jest v (1) dána řadou mocninou argumentu $x - x_0$, konvergující v jistém okolí bodu $x = x_0$, existuje vždy, je-li $a_1 \neq 0$, funkce inversní $x = \varphi(y)$, která pro $y = y_0$ stává se rovnou $x_0$, a tato jest rozvinutelna v řadu* *mocninnou argumentu* $y - y_0$, *konvergentní v jistém okolí bodu* $y = y_0$. *T. j. z rovnice* (1) *při* $a_1 \neq 0$ *následuje vztah*

$$x - x_0 = b_1 (y - y_0) + b_2 (y - y_0)^2 + b_3 (y - y_0)^3 + \ldots \qquad (7)$$

*jí úplně ekvivalentní.*

*Koefficienty* $b_k$ *lze určiti postupně methodou neurčitých součinitelů,* $b_1 = a_1^{-1}$.

Na základě čísel $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ můžeme snadno odvoditi si pro hodnotu zbytku v řadě (7) nerovninu, jež může býti užitečna. Koefficienty $\mathfrak{A}_n$ v řadě pro $\xi$ dané rovnicí (6) hoví (jak čtenář snadným počtem prokáže) nerovninám

$$|\mathfrak{A}_n| < (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} \varepsilon_2^n \frac{R'}{2(M'R' + 1)} \qquad n > 1.$$

Na základě tohoto výsledku můžeme psáti pro zbytek $Z_n$ po $n$-tém členu řady (7) tuto nerovninu

$$|Z_n| < \frac{(-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n+1}}{2(M'R' + 1)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{|a_1|}\right)^{n+1} \frac{R'(y - y_0)^{n+1}}{1 - \frac{\varepsilon_2}{|a_1|}(y - y_0)}, \qquad n \geq 1;$$

neboť binomičtí součinitelé $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ s rostoucím $n$ v absolutní hodnotě stále klesají. Při tom jest stále pro čísla $M'$, $R'$ platna tato jich definice

$$\frac{M'}{1 - \frac{x - x_0}{R'}} \gg \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}(x - x_0) + \frac{a_4}{a_1}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Poloměr konvergence řady (7) jest větší ($\geq$) než $| a_1 | \varepsilon_2^{-1}$.

*Příklad.* Ku funkci

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

existuje, jak známo, inversní, jež jest $\log y$. Dle věty právě dokázané jest $\log y$ rozvinutelno v okolí bodu $y = 1$ v řadu potenční; t. j. máme rozvoj

$$\log y = b_1 (y - 1) + b_2 (y - 1)^2 + \ldots,$$

konvergentní v jistém okolí bodu $y = 1$ V tomto případě lze voliti $M' = \frac{1}{2}$, $R' = 3$ a dostaneme, že řada poslední jest jistě konvergentní pro $| y - 1 | \leq 0{\cdot}36$ Ve skutečnosti jest však konvergentní v rozsahu značně větším (jak známo z rozvoje logarithmického) a to pro $| y - 1 | < 1$.

*Poznámka.* Později bude podáno explicitní vyjádření součinitelů $b_k$ pomocí $a_k$. Viz příklad 2. ku větě Lagrangeově, odst 162.

## 5. Některé příklady k užití obecných vět o řadách mocninných.

**156. Rozvoje funkcí** $\cos n(\arcsin x)$, $\sin(n \arcsin x)$. Jelikož $\arcsin x$ lze rozvinouti v řadu potenční o konvergenčním intervalu $(-1, 1)$ a k níž jest majorantní funkcí výraz

$$\frac{x}{1-x} \quad \text{(viz odst. 140.)}$$

a jelikož dále pro funkce $\cos x$, $\sin x$ máme rozvoje o poloměru konvergence $\infty$, víme ihned z věty odst. 153. (vztah ($\iota'$)), že pro dané funkce budou platny rozvoje potenční, jež konvergují pro všecka $|x| < 1$. (Stačí do citovaného vztahu dosaditi $m' = 1$, $r' = 1$ a $\lim R = \infty$). Dále jest patrno, že první z daných funkcí, jsouc funkcí sudou, bude obsahovati jenom sudé mocniny proměnné $x$; druhá funkce pak jenom liché mocniny. Můžeme tudíž psáti pro vnitřek intervalu $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} \cos(n \arcsin x) &= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots, \\ \sin(n \arcsin x) &= a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Snadno jest patrno, že $a_0 = 1$ (dosadíme-li do prvého rozvoje $x = 0$) a že $a_1 = n$ (dělíme-li v druhé rovnici po obou stranách číslem $x$ a potom vypočteme limity obou stran pro $\lim x = 0$). Abychom vypočetli ostatní součinitele, odvodíme si *rovnice differenciální, jimž dané funkce hoví*. Prvou z nich pro krátkost značme $\varphi(x)$, druhou $\psi(x)$; i jest nejprve $\varphi^2(x) + \psi^2(x) = 1$ a dále postupně

$$\varphi'(x) = -\psi(x) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x^2)\varphi'^2(x) = n^2 \psi^2(x),$$
$$(1-x^2)\varphi'^2(x) = n^2(1-\varphi^2(x)).$$

Derivujeme-li ještě jednou rovnici poslední, máme po náležitém krácení

$$(1-x^2)\varphi''(x) - x\varphi'(x) + n^2\varphi(x) = 0.$$

Jest tedy *rovnice differenciální* mezi $y$ (jakožto odvislou) a $x$ (neodvisle proměnnou)

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

splněna, dosadíme-li $y = \varphi(x)$. Tatáž rovnice jest splněna, klademe-li $y = \psi(x)$. Dosadíme-li do nalezené differenciální rovnice za $y$ rozvoje potenční jednak pro funkci $\varphi(x)$, jednak pro $\psi(x)$ a náležitě (dle mocnin proměnné $x$) srovnáme, dostaneme na levé straně rozvoj, který jest identicky uvnitř $(-1, 1)$ rovný nulle a jehož všecky koefficienty dle věty o neurčitých součinitelích jsou tedy rovny nulle. Koefficient při $x^k$

jest (když dosazujeme rozvoj pro $\varphi(x)$, jest $k$ sudé; když rozvoj pro $\psi(x)$, $k$ liché)

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - ka_k + n^2 a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2} + \\ + (n^2 - k^2)a_k.$$

Klademe-li tento výraz rovný nulle, máme

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

Z toho následuje

$$a_2 = -\frac{n^2}{2!},\quad a_4 = \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!},\quad a_6 = -\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!},\ldots$$

Obdobně jest

$$a_3 = -\frac{n(n^2-1^2)}{3!},\quad a_5 = \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!},\quad a_7 = \ldots.$$

Tím jsou koefficienty $a_k$ úplně stanoveny a nebylo by nesnadno vypsat i obecné výrazy pro $a_{2k}$, $a_{2k+1}$.

Jelikož

$$\lim_{k=\infty} \frac{a_{k+2}}{a_k} = +1,$$

jest poloměr konvergence nalezených rozvojů rovný 1. Splývá tedy interval konvergenční s intervalem, pro který platnost rozvojů (1) byla prokázána.

*Poznámka.* Klademe li v nalezených rozvojech $x = \sin\xi$, t. j. $\arcsin x = \xi$, máme, je-li ovšem $\xi$ v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tyto řady

$$\begin{aligned} \cos n\xi &= 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\xi + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4\xi - \ldots \\ \sin n\xi &= \frac{n}{1!}\sin\xi - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3\xi + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\xi - \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Je-li $n$ celé a sudé, jest rozvoj prvý konečný, druhý jest konečný, je-li $n$ liché. Máme-li na mysli jenom ty rozvoje, jež jsou ukončeny, a nahražujeme-li ještě v nich číslo $\xi$ výrazem $\frac{1}{2}\pi - \xi$, dostáváme z nalezených formulí vyjádření kosinu sudého násobku čísla $\xi$, jednak polynomem v $\sin^2\xi$, jednak polynomem v $\cos^2\xi$; dále sinus lichého násobku $\xi$

vyjádřen jest jako polynom v $\sin\xi$ a kosinus lichého násobku $\xi$ jako polynom v $\cos\xi$. Tak jest ku př.

$$\begin{aligned}\cos 6\xi &= 1 - 18\sin^2\xi + 48\sin^4\xi - 32\sin^6\xi\\ &= -1 + 18\cos^2\xi - 48\cos^4\xi + 32\cos^6\xi,\\ \sin 5\xi &= 5\sin\xi - 20\sin^3\xi + 16\sin^5\xi,\\ \cos 5\xi &= 5\cos\xi - 20\cos^3\xi + 16\cos^5\xi.\end{aligned}$$

Jak lze vyjádřiti na základě odvozených výsledků $\sin 2k\xi$, ($k$ celé)? Jak veliký jest součet řad (2), když $\xi$ jest vně intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$? Jak veliký jest součet těch řad, když $\sin\xi$ nahradíme funkcí $\cos\xi$? Vyšetřiti konečně zevrubně konvergenci řad ve (2), když $\xi = \pm\frac{1}{2}\pi$ (srov. vyšetřování odst. 136.).

*Úkol.* Odvoďte stejným způsobem rozvoj funkce $e^{n \arcsin x}$, jakož i rozvoje funkce $e^{nx}$ v řadu mocninnou, jejíž argument jest $\sin x$ (obdobně ku řadám (2)).

**157.** Dříve než budu projednávati další příklady, odvodíme si jednu větu pro nekonečné součiny. Buďiž dán nekonečný součin $(1+u_1)(1+u_2)\ldots$, ve kterém jest $u_k$ dáno řadou potenční:

$$u_k = a_1^{(k)}x + a_2^{(k)}x^2 + a_3^{(k)}x^3 + \ldots \qquad (a)$$

konvergentní pro každé $x$, koefficienty $a_i^{(k)}$ buďtež vesměs čísla kladná ($\geqq 0$). Buďiž dále součin daný rovněž (absolutně) konvergentní pro každé $x$. Značme $P_n(x)$ součin prvých $n$ činitelů daného součinu; lze jej vyjádřiti řadou potenční konvergentní pro každé $x$ a budeme jej vypisovati ve tvaru

$$P_n(x) = 1 + A_1^{(n)}x + A_2^{(n)}x^2 + \ldots$$

Z okolnosti, že čísla $a_i^{(k)} \geqq 0$, plyne ihned, že čísla $A_i^{(n)}$ jsou čísla rostoucí aneb aspoň neklesající s $n$; mají tudíž limitu pro $\lim n = \infty$, neboť jest zároveň patrno, že každé z čísel $A_i^{(n)}$ jest menší než hodnota daného součinu pro $x = 1$. Označme tu limitu $A_i$. Uvažujme pak nejprve za předpokladu $x > 0$ řadu dvojnou sestavenou v řádky a sloupce

$$\begin{array}{l} 1 + A_1^{(1)}x + A_2^{(1)}x^2 + A_3^{(1)}x^3 + \ldots\\ + 0 + \left(A_1^{(2)} - A_1^{(1)}\right)x + \left(A_2^{(2)} - A_2^{(1)}\right)x^2 + \left(A_3^{(2)} - A_3^{(1)}\right)x^3 + \ldots\\ + 0 + \left(A_1^{(3)} - A_1^{(2)}\right)x + \left(A_2^{(3)} - A_2^{(2)}\right)x^2 + \left(A_3^{(3)} - A_3^{(2)}\right)x^3 + \ldots\\ + 0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (b)$$

Členy této řady jsou čísla $\geqq 0$, je-li tedy konvergentní, jest konvergentní absolutně. Sčítejme napřed podle řádků, součty řádků utvoří řadu

$$P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) + (P_3(x) - P_2(x)) + \ldots,$$

jež jest konvergentní, majíc za součet $\lim\limits_{n=\infty} P_n(x) = P(x)$ (neboť dle předpokladu daný součin konverguje a existuje tedy limita výrazu $P_n(x)$ pro $\lim n = \infty$). Jest tedy dvojná řada absolutně konvergentní a můžeme ji sčítati napřed dle sloupců. Sčítáme-li však napřed dle sloupců, utvoří součty sloupců řadu

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

*jež bude tudíž konvergentní a bude míti opět týž součet*, t. j. $P(x)$. Výsledky docílené jsou platny i pro $x \leqq 0$, neboť absolutní konvergence dvojné řady není odvislá od znaménka čísla $x$.

Můžeme však dokázané výsledky rozšířiti na případ, kdy

$$u_k = c_1^{(k)} x + c_2^{(k)} x^2 + \ldots,$$

předpokládáme-li jenom, že řada na pravé straně má poloměr konvergence $\infty$ a že nekonečný součin o činitelích

$$1 + \left|c_1^{(k)}\right| x + \left|c_2^{(k)}\right| x^2 + \ldots \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

jest konvergentní pro každé $x$ (konvergence bude ovšem absolutní). Abychom důkaz naznačili, kladťme pro krátkost $\left|c_i^{(k)}\right| = a_i^{(k)}$ a nechť mají pro čísla $c_i^{(k)}$ a nový součin symboly $C_i^{(n)}$, $C_i$, $Q_n(x)$, $Q(x)$ týž význam jako mají symboly $A_i^{(n)}$, $A_i$, $P_n(x)$, $P(x)$ pro čísla $a_i^{(k)}$ a zprvu uvažovaný součin. Pak jest očividně (odst. 18., posl. vztah)

$$\left|C_k^{(n+p)} - C_k^{(n)}\right| \leqq \left|A_k^{(n+p)} - A_k^{(n)}\right|,$$

odkudž jednak dle věty Bolzano-Cauchyovy plyne existence $\lim\limits_{n=\infty} C_k^{(n)} = C_k$, jednak následuje, že dvojná řada, již dostáváme z ($b$), nahradíme-li $a_i^{(k)}$ čísly $c_i^{(k)}$, jest rovněž absolutně konvergentní jako ($b$), a máme tudíž i důsledek, že řada potenční

$$Q(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

jest konvergentní pro každé $x$ a její součet jest roven nekonečnému součinu v úvahu vzatému.

Můžeme, co jsme právě dokázali, shrnouti ve větu: *Nekonečný součin*

$$(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots,$$

*ve kterém* $u_k = c_1^{(k)} x + c_2^{(k)} x^2 + \ldots$ *jest řada potenční konvergentní pro každé* $x$ *a kterýž součin jest rovněž konvergentní pro každé* $x$ *a to tak, že konverguje i součin vzniklý z daného, nahradíme-li* $c_i^{(k)}$ *jich absolutní hodnotou, jest rovný řadě potenční*

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

*konvergentní pro každé* $x$. Koefficienty $C_k$ můžeme vyjádřiti jako limity $\lim\limits_{n=\infty} C_k^{(n)}$, t. j. jako součty řad nekonečných

$$C_k = \sum_{i_\lambda, j_\lambda} c_{j_1}^{(i_1)} \cdot c_{j_2}^{(i_2)} \cdot \ldots c_{j_r}^{(i_r)}, \quad i_\lambda, j_\lambda = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_r = k; \quad i_\lambda \neq i_\mu, \text{ když } \lambda \neq \mu; \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

**158.** Abychom věty předcházejícího odst. použili na příkladě, uvažujme součin

$$\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{c}$$

Součin tento jest absolutně konvergentní, ať $x^2$ nabývá jakoukoli hodnotu reálnou (kladnou či zápornou) a dá se psáti teďy jakožto potenční řada veličiny $x^2$ konvergentní pro každé $x^2$. Je-li $x^2$ kladné, jest ten součin roven funkci (odst. 91).

$$\frac{\sin x}{x}, \tag{d}$$

již však dovedeme vyjádřiti snadno jako mocninnou řadu proměnné $x^2$

$$\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{e}$$

konvergující pro každé $x^2$. Jsou tedy výrazy (*c*) a (*e*) rovny a to identicky a rovnosť tato tudíž dle předch. odst. trvá, když $x^2$ jest záporné. Klademe-li v (*e*) $-x^2$ místo $x^2$, mění se však výraz tento ve

$$\frac{1}{1!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{e^x - e^{-x}}{2x};$$

tak že máme rovnost platnou pro každé $x$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot, \tag{f}$$

čímž jsme docílili *rozkladu hyperbolického sinusu v součin nekonečný.* Obdobně dostáváme pro *hyperbolický kosinus*:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left(1 + \frac{(2x)^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 + \frac{(2x)^2}{3^2 . \pi^2}\right)\left(1 + \frac{(2x)^2}{5^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

**159.** Rovnice ($f$) použijeme k odvození důležitého v analysi rozvoje. Násobíme-li obě strany té rovnice číslem $e^x . x^{-1}$ a potom klademe $x$ místo $2x$, máme po snadné úpravě

$$\frac{e^x-1}{x} = e^{\frac{1}{2}x}\left(1+\frac{x^2}{1^2(2\pi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2(2\pi)^2}\right)\dots$$

Logarithmujeme-li obě strany, dostaneme

$$\log\frac{e^x-1}{x} = \tfrac{1}{2}x + \log\left(1+\frac{x^2}{1^2.(2\pi)^2}\right) + \log\left(1+\frac{x^2}{2^2.(2\pi)^2}\right) + \dots$$

aneb rozvineme-li logarithmy na pravé straně v mocninné řady a pak náležitě uspořádáme

$$\log\frac{e^x-1}{x} = \tfrac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}\frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{4!}\frac{x^4}{4} + \frac{B_3}{6!}\frac{x^6}{6} - \dots, \tag{g}$$

při čemž jsme k vůli stručnosti kladli

$$\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!} = \frac{2}{(2\pi)^{2\lambda}}\left(\frac{1}{1^{2\lambda}}+\frac{1}{2^{2\lambda}}+\frac{1}{3^{2\lambda}}+\dots\right) \tag{h}$$

Rozvoj ($g$) jest platný pro všechna $x$, jichž abs. hodn. jest menší než $2\pi$. Čísla $B_\lambda$ v ($g$) definovaná slují **čísla Bernoulliská**. Derivujeme-li obě strany rovnice ($g$) dle $x$, pak násobíme $x$ a k oběma stranám přičem $1 - \frac{1}{2}x$, máme též pro $|x| < 2\pi$

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - \dots$$

jakožto *nejjednodušší rozvoj definující Bernoulliská čísla.*

Násobíme-li na obou stranách této rovnice výrazem

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

a potom — užívajíce věty o neurčitých součinitelích — porovnáme koefficienty při $x^{2\lambda+1}$ na obou stranách, obdržíme

$$\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!\,1!} - \frac{B_{\lambda-1}}{(2\lambda-2)!\,3!} + \frac{B_{\lambda-2}}{(2\lambda-4)!\,5!} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda+1)!} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{2}\,\frac{1}{(2\lambda)!}$$

aneb, násobíme-li ještě $(2\lambda+1)!$ a současně zavedeme obvyklé označení binomických součinitelů, po jednoduché úpravě

$$\binom{2\lambda+1}{1}B_\lambda - \binom{2\lambda+1}{3}B_{\lambda-1} + \binom{2\lambda+1}{5}B_{\lambda-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{\lambda-1}\binom{2\lambda+1}{2\lambda-1}B_1 = (-1)^{\lambda-1}\frac{2\lambda-1}{2},$$

což jest *Moivreova relace pro Bernoulliská čísla.* Ta nám dovoluje postupně vypočítati tato čísla; vyplývá pak z ní, že *čísla Bernoulliská jsou vesměs čísla racionálná.* Pro nejnižší indexy jest po snadném počtu

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730},$$

$$B_7=\frac{7}{6},\ B_8=\frac{3617}{510},\ B_9=\frac{43867}{798},\ B_{10}=\frac{174611}{330},\ B_{11}=\frac{854513}{138},\ldots$$

**160.** Avšak i pro funkce goniometrické můžeme odvoditi z předcházejícího některé důležité rozvoje. Derivujeme-li na obou stranách rovnici

$$\log\frac{\sin x}{x}=\log\left(1-\frac{x^2}{1^2.\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{x^2}{2^2.\pi^2}\right)+\ldots,$$

máme ihned

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1^2\pi^2}+\frac{2x}{x^2-2^2\pi^2}+\frac{2x}{x^2-3^2\pi^2}+\ldots. \qquad (i)$$

ze kteréhož rozvoje následuje, užíváme-li vztahu

$$\frac{2x}{x^2-k^2\pi^2}=-\frac{2x}{k^2\pi^2}-\frac{2x^3}{k^4\pi^4}-\frac{2x^5}{k^6\pi^6}-\ldots,\qquad |x|<k\pi,$$

stejně jako svrchu v ($g$) vztah (použijeme při tom rovnosti ($h$))

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-\frac{B_1}{2!}2^2x-\frac{B_2}{4!}2^4x^3-\frac{B_3}{6!}2^6x^5-\ldots;\qquad -\pi<x<\pi.$$

Obdobně z rovnice dávající nám rozklad $\cos x$ v činitele (odst. 93) dostáváme jednak

$$-\operatorname{tg} x=\frac{2x}{x^2-\frac{1}{4}.1^2\pi^2}+\frac{2x}{x^2-\frac{1}{4}.3^2.x^2}+\frac{2x}{x^2-\frac{1}{4}.5^2\pi^2}+\ldots, \qquad (k)$$

jednak potenční rozvoj

$$\operatorname{tg} x=\frac{T_1}{2!}x+\frac{T_2}{4!}x^3+\frac{T_3}{6!}x^5+\ldots,\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \qquad (l)$$

kde

$$\frac{T_\lambda}{(2\lambda)!}=\frac{2^{2\lambda+1}}{\pi^{2\lambda}}\left(\frac{1}{1^{2\lambda}}+\frac{1}{3^{2\lambda}}+\frac{1}{5^{2\lambda}}+\ldots\right), \qquad (m)$$

Avšak

$$\frac{1}{1^{2\lambda}}+\frac{1}{3^{2\lambda}}+\frac{1}{5^{2\lambda}}+\ldots$$

$$\ldots=\left(\frac{1}{1^{2\lambda}}+\frac{1}{2^{2\lambda}}+\frac{1}{3^{2\lambda}}+\ldots\right)-\frac{1}{2^{2\lambda}}\left(\frac{1}{1^{2\lambda}}+\frac{1}{2^{2\lambda}}+\frac{1}{3^{2\lambda}}+\ldots\right)$$

a porovnáme-li $(m)$ s $(h)$, máme na podkladě poslední identity

$$T_\lambda = 2^{2\lambda}(2^{2\lambda}-1)\,B_\lambda, \tag{n}$$

kterýžto vztah stanoví součinitele v rozvoji tangenty jednoduše pomocí Bernoulliských čísel. Stejně jako svrchu pro čísla Bernoulliská dostáváme z $(l)$ pro tangentové součinitele tento rekurrentní vzorec

$$T_\lambda - \binom{2\lambda}{2} T_{\lambda-1} + \binom{2\lambda}{4} T_{\lambda-2} - \ldots + (-1)^{\lambda-1}\binom{2\lambda}{2\lambda-2} T_1 = (-1)^{\lambda-1} 2\lambda,$$

ze kterého vyplývají *čísla $T_\lambda$ postupně jako čísla celistvá* ($T_1 = 2$, $T_2 = 8$).

Ku odvození rozvojů pro $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ použijeme vztahu

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2},$$

ze kterého v důsledku $(i)$ a $(k)$ následuje

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{1^2\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{3^2\pi^2 - x^2} - \ldots \tag{p}$$

aneb též

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \ldots$$

Klademe-li v této rovnosti $\frac{\pi}{2} - x$ místo $x$ a uspořádáme-li vzniklý výraz vhodněji, dostaneme

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x = \left(\frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x}\right) - \left(\frac{2}{3\pi - 2x} + \frac{2}{3\pi + 2x}\right) + $$
$$+ \left(\frac{2}{5\pi - 2x} + \frac{2}{5\pi + 2x}\right) - \ldots$$

aneb

$$\sec x = \frac{4.1.\pi}{1^2\pi^2 - 4x^2} - \frac{4.3.\pi}{3^2\pi^2 - 4x^2} + \frac{4.5.\pi}{5^2\pi^2 - 4x^2} - \ldots \tag{s}$$

Z výrazů získaných následují potenční rozvoje pro $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$. Ostatně pro první z těchto funkcí máme z $(p)$ ihned při $-\pi < x < \pi$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + (2^2 - 2)\frac{B_1}{2!}x + (2^4 - 2)\frac{B_2}{4!}x^3 + (2^6 - 2)\frac{B_3}{6!}x^5 + \ldots$$

Pro druhou funkci pak máme z $(s)$ rozvoj tvaru

$$\sec x = E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \frac{E_3}{6!}x^6 + \ldots, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

kde

$$\frac{E_k}{(2k)!}=\frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}}\left[\frac{1}{1^{2k+1}}-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}\ldots\right].$$

Z věty o neurčitých součinitelích plyne (obdobně jako při číslech Bernoulliských) pro čísla $E_k$ — tak zvaná **čísla Eulerova** — relace $(n>0)$

$$E_n-\binom{2n}{2}E_{n-1}+\binom{2n}{4}E_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-2}E_1+$$
$$+(-1)^n\binom{2n}{2n}E_0=0.$$

Jelikož, jak bezprostředně patrno, $E_0=1$, plyne z této relace, že všecka čísla Eulerova jsou čísla celá; jest pak ku př. $E_1=1$, $E_2=5$, $E_3=61$, $E_4=1385$, $E_5=50521$, $E_6=2702765$, $E_7=199360981$.

*Poznámka 1.* V předcházejícím získali jsme současně vyjádření součtů některých řad nekonečných častěji se vyskytujících. Jest

$$\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots=\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_k$$

$$\frac{1}{1^{2k+1}}-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k$$

a specielně

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\qquad=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\qquad=\frac{\pi}{4},$$

z nichž poslední známa je nám z rozvoje pro arctg $x$ (řada Leibnicova).

*Poznámka 2.* Podávám ještě počáteční členy rozvojů funkcí goniometrických; jest

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\ldots,$$

$$x\operatorname{cotg} x=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\frac{1}{4725}x^8-\frac{2}{31185}x^{10}-\ldots,$$

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\frac{50521}{3758400}x^{10}+\ldots,$$

$$x\operatorname{cosec} x=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\frac{127}{604800}x^8+\frac{73}{3421440}x^{10}+\ldots$$

**161. $n$-tá derivace funkce funkce.** Abychom si zjednali výraz pro $n$-tou derivaci funkce funkce, můžeme s prospěchem použiti věty odst. 153. o dosazení řady mocninné do jiné řady mocninné.

Budiž $F(u)$ funkce rozvinutelná v řadu Taylorovu, takže lze psáti

$$F(u+k)=F(u)+\frac{k}{1!}F'(u)+\frac{k^2}{2!}F''(u)+\ldots \quad (1)$$

a budiž $k$ rovna funkci $f(x)$ rozvinutelné rovněž v řadu Taylorovu ve tvaru

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots$$

Dosadíme-li do (1) $u=f(x)$, $k=\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots$ a uspořádáme-li dle mocnin proměnné $h$, obdržíme řadu potenční proměnné $h$, jež bude řadou Taylorovou pro $F(f(x+h))$ a v níž koefficient při $h^n$ bude $n$-tou derivací funkce $F(f(x))$ dle $x$ dělenou číslem $n!$ Avšak koefficient při $h^n$ ve výraze $k^m$, t. j. ve výraze

$$\left(\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots\right)^m \quad (2)$$

jest dle polynomické věty, píšeme-li k vůli stručnosti $f^{(k)}(x)$ krátce $u^{(k)}$,

$$P_m=\sum_{\lambda_k}\frac{m!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!\ldots}\cdot\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{u''}{2!}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\lambda_3}\ldots, \quad (3)$$

kde součet se vztahuje na všecka čísla kladná celá $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ hovící rovnicím

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots=m, \quad (4)$$
$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots=n. \quad (5)$$

Tedy pro $n$-tou derivaci hledanou máme

$$D_x^n F(f(x))=\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{m!}F^{(m)}(u).P_m. \quad (6)$$

Výsledek jest sice odvozen pouze pro funkce rozvinutelné v řadu Taylorovu, avšak jest platný pro všecky funkce mající derivace řádů ve formuli se vyskytujících, jak čtenář snadno nahlédne. Výsledku tomu můžeme dáti též tento tvar

$$D_x^n F(f(x))=n!\sum_{\lambda_k}\frac{F^{(m)}(u)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!\ldots}\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{u''}{2!}\right)^{\lambda_2}\cdot\left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\lambda_3}\ldots, \quad (7)$$

kde součet vztahuje se na všecka čísla celá kladná hovící rovnici (5) a kde jsme pro krátkost psali $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots=m$.

*Příklad* 1. ***n-tá derivace*** $F(x^2)$. Tu jest $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, $f'''(x)=0\ldots$ Jest tedy

$$D_x^n F(x^2)=n!\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(m)}(x^2)\,2^{\lambda_1}x^{\lambda_1},$$

kde $\lambda_1 + 2\lambda_2 = n$, $m = \lambda_1 + \lambda_2$. Klademe-li v tomto výrazu postupně $\lambda_2 = 0, 1, 2, \ldots$, jest zároveň $\lambda_1 = n$, $n - 2$, $n - 4, \ldots$ a $m = n$, $n - 1$, $n - 2, \ldots$ a tak se výraz právě napsaný mění v následující

$$D_x^n F(x^2) = \frac{n!}{n!} 2^n x^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n!}{(n-2)!\,1!} 2^{n-2} x^{n-2} F^{(n-1)}(x^2) +$$
$$+ \frac{n!}{(n-4)!\,2!} 2^{n-4} x^{n-4} F^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$

*Příklad* 2. ***n*-tá derivace *F(u)*, kde** $u = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Tu jest

$$u' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}, \quad u'' = -1.2\frac{(ad-bc)c}{(cx+d)^3},$$

$u^{(\varrho)}$ jest obecně rovno podílu konstanty a $(cx+d)^{\varrho+1}$; se zřetelem ku (4) a (5) se tedy výraz

$$F^{(m)}(u)\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{u''}{2!}\right)^{\lambda_2}\ldots \quad \text{redukuje na} \quad C'_m \frac{F^{(m)}(u)}{(cx+d)^{m+n}},$$

kde $C'_m$ jest konstanta. Můžeme tedy psáti

$$D_x^n F\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \sum_{m=1}^{n} C'_m \frac{F^{(m)}(u)}{(cx+d)^{m+n}} \tag{$\alpha$}$$

a zbývá stanoviti jenom $C_m$. K tomu cíli volme $F(u) = u^r$, kde $r$ jest celé, a stanovme $n$-tou derivaci toho výrazu pro $x = -b\,.\,a^{-1}$, tudíž pro $u = 0$. Jest patrno, že $F^{(r)}(0) = r!$, všecky ostatní derivace $F^{(k)}(0) = 0$, $k \neq r$. Redukuje se tedy pravá strana ($\alpha$), je-li $r$ v $(1, n)$, na

$$C_r\,.\,r!\,\frac{a^{r+n}}{(ad-bc)^{r+n}}. \tag{$\beta$}$$

Levou stranu vypočteme přímo tím, že derivujeme $u^r = (ax+b)^r(cx+d)^{-r}$ jako součin dle Leibnicova pravidla, dosazujíce hned za $x$. Dostaneme

$$\left[D_x^n u^r\right]_{x=-ba^{-1}} = \binom{n}{r}\,.\,r!\,a^r.\,c^{n-r}.\,a^n\,.(ad-bc)^{-n}\,.\,(-1)^{n-r}\frac{(n-1)!}{(r-1)!}. \tag{$\gamma$}$$

Porovnáme-li oba výsledky ($\beta$) a ($\gamma$), máme ihned

$$C_r = (-1)^{n-r}\frac{n!\,(n-1)!}{(n-r)!\,r!\,(r-1)!}(ad-bc)^r c^{n-r} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

čímž úkol náš úplně řešen.

*Příklad* 3. ***n*-tá derivace *F(e*$^x$*)*.** V tomto případě jest $u = e^x = u' = u'' = u''' = \ldots$ a rovnice (7) se mění ihned na

$$D_x^n F(e^x) = \sum_{m=1}^{n} G_m F^{(m)}(u)\,e^{mx}.$$

kde jest ještě určiti konstantu $G_m$. K stanovení její můžeme voliti $F(u)=(u-1)^r$, $r$ celé v intervalu $(1, n)$, a vypočísti $n$-tou derivaci pro $x=0$, $(u=1)$. Jelikož $F^{(m)}(1)=0$ pro $m \neq r$ a $F^{(r)}(1)=r!$ a ježto $n$-tá derivace funkce $(u-1)^r=e^{rx}-re^{(r-1)x}+\dots$ snadno se vypočte přímo, dostaneme ihned porovnáním obou výsledků

$$G_r=\frac{1}{r!}\left[r^n-\binom{r}{1}(r-1)^n+\binom{r}{2}(r-2)^n-\dots\right].$$

*Příklad* 4. ***n-tá derivace*** $F(x^\varrho)$. Tu dostáváme podobně jako v příkladech předcházejících kladouce $u=x^\varrho$

$$D_x^n F(x^\varrho)=\sum_{m=1}^{n} E_m F^{(m)}(u)x^{\varrho m-n}.$$

K stanovení čísel $E_m$ stačí voliti $F(u)=(u-1)^r$, kde $r$ celé v $(1, n)$, a počítati $n$-tou derivaci pro $x=1$, $(u=1)$. Dostaneme podobně jako v předch. příkladě

$$E_r=\frac{n!}{r!}\left[\binom{\varrho r}{n}-\binom{r}{1}\binom{\varrho r-\varrho}{n}+\binom{r}{2}\binom{\varrho r-2\varrho}{n}-\dots\right].$$

Je-li $\varrho$ celé kladné, stačí jen ta $m$ v součtu svrchu napsaném bráti v úvahu, pro něž $\varrho m-n \geqq 0$.

*Příklad* 5. ***Odvození Waringovy formule pro součet n-tých mocnin kořenů rovnice algebraické.*** Uvažujme funkci $\log(1+a_1t+a_2t^2+\dots +a_Nt^N)$ proměnné $t$. Vypočteme $n$-tou derivaci dle $t$ pro hodnotu $t=0$, užívajíce rovnice (7); jest $F(u)=\log u$, $u=1+a_1t+a_2t^2+\dots +a_Nt^N$. Jest

$$\left[\frac{u^{(k)}}{k!}\right]_{t=0}=a_k,\quad \left[F^{(m)}(u)\right]_{t=0}=(-1)^{m-1}(m-1)!$$

a tedy

$$\left[D_t^n\log(1+a_1t+\dots)\right]_{t=0}=n!\sum\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots\lambda_N!}a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_N^{\lambda_N}.$$

Avšak, označíme-li kořeny rovnice $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ značkami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jest $\log(1+a_1t+\dots+a_nt^n)=\log(1-\alpha_1t)(1-\alpha_2t)\dots(1-\alpha_nt)=\log(1-\alpha_1t)+\log(1-\alpha_2t)+\dots+\log(1-\alpha_nt)$ a koefficient při $t^n$ v Maclarinově rozvoji této funkce jest

$$-\frac{1}{n}\left(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\dots+\alpha_n^n\right)=-\frac{S_n}{n}.$$

Porovnáme-li oba výsledky, máme

$$S_n=\sum_{\lambda_k}\frac{(-1)^m n.(m-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots\lambda_N!}a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_N^{\lambda_N},$$
$$\lambda_1+2\lambda_2+\dots+N\lambda_N=n$$

a kde $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N$. Formule tato jest právě hledaná formule Waringova.

**162. Řada Lagrangeova.** Funkci $y$ proměnné $x$ danou rovnicí

$$y = a + x\psi(y) \tag{1}$$

a podmínkou, že pro $x = 0$ jest $y = a$, můžeme pokládati za funkci inversní ku funkci

$$\frac{y - a}{\psi(y)} = x.$$

Levou stranu této rovnice lze rozvinouti v řadu potenční argumentu $y - a$, lze-li jenom $\psi(y)$ v takovou řadu rozvinouti a je-li dále $\psi(a) \neq 0$ (viz odst. 154). Jest tedy

$$x = a_1(y - a) + a_2(y - a)^2 + a_3(y - a)^3 + \ldots; \quad a_1 \neq 0.$$

Z věty odst. 155. následuje na základě této rovnice rozvoj

$$y - a = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$$

konvergentní v jistém okolí bodu $x = 0$; ba lze dokonce i pro $F(y)$, je-li $F(y)$ funkce rozvinutelná v řadu Taylorovu v okolí bodu $y = a$, psáti rozvoj

$$F(y) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots \quad \text{(odst. 153.)} \tag{2}$$

Formule Lagrangeova podává výpočet koefficientů $A_k$ v jednoduchém tvaru. Abychom si příslušné výrazy odvodili, jest třeba nejprvé poukázati k tomu, že veličina $a$ jest vázána toliko podmínkou $\psi(a) \neq 0$ a lze tedy ji v jistém intervalu libovolně měniti, ba dokonce lze ji pokládati za proměnnou omezenou na jistý interval, což také učiníme. Pak jest ovšem také $y$ funkcí proměnné $a$, kteroužto funkci můžeme pokládati za inversní ku funkci $a = +y - x\psi(y)$, tedy za funkci mající prvou derivaci dle $a$ i derivace vyššího řádu. Derivujeme-li však (1) jednou dle $x$, podruhé dle $a$, dostáváme rovnice

$$\frac{dy}{dx} = x\psi'(y)\frac{dy}{dx} + \psi(y), \quad \frac{dy}{da} = 1 + x\psi'(y)\frac{dy}{da}, \tag{3}$$

ze kterých následuje mezi derivacemi funkce $y$ dle $x$ a dle $a$ tento vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} \cdot \psi(y). \tag{4}$$

Obraťme se nyní ku počítání čísel $A_k$, koefficientů v rozvoji funkce $F(y)$ v potenční řadu argumentu $x$. Koefficienty ty budou funkce druhé proměnné $a$ a můžeme je snadno počítati dle formule Maclaurinovy. Tak pro prvé dva ku př. máme (při výpočtu $A_1$ použito prvé z rovnic (3))

$$A_0 = \Big[F(y)\Big]_{x=0} = F(a), \quad A_1 = \left[\frac{dF(y)}{dx}\right]_{x=0} = \left[F'(y)\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = F'(a)\,\psi(a); \tag{5}$$

takovýmto způsobem bychom postupně mohli počítati všechny součinitele $A_k$. Abychom však je mohli vyjádřiti ve tvaru jednoduchém, užijeme zvláštního obratu, který i při jiných příležitostech bývá užitečný. Derivujeme rovnici (2) dle $x$; obdržíme používajíce zároveň (4)

$$F'(y)\psi(y)\frac{dy}{da}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+kA_kx^{k-1}+\ldots \quad (6)$$

Uvažujeme-li rozvoj jiné funkce $F_1(y)$ (rovněž rozvinutelné v řadu mocninnou argumentu $(y-a)$) obdobný ku rozvoji funkce $F(y)$ ve (2) a kterýž píšeme ve tvaru

$$F_1(y)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_kx^k+\ldots, \quad (7)$$

můžeme, derivujeme-li na obou stranách nyní však dle $a$*), docíliti, aby levá strana rovnice tak vzniklé shodla se s levou stranou rovnice (6). Tomu bude patrně vyhověno, volíme-li $F_1(y)$ tak, aby $F'_1(y)=F'(y)\psi(y)$ (t. j. aby $F_1(y)$ jako funkce proměnné $y$ byla primitivní funkcí $F'(y)\psi(y)$; že takové funkce existují a jsou rozvinutelné v mocninné řady arg. $y-a$, jest na snadě, viz odst. 144). Provedeme-li derivaci dle $a$ rovnice (7) a dosadíme-li pak $F'$ tedy celkem $F'_1(y)=F'(y)\psi(y)$, dostaneme

$$F'(y)\psi(y)\frac{dy}{da}=\frac{dB_0}{da}+\frac{dB_1}{da}x+\frac{dB_2}{da}x^2+\ldots+\frac{dB_k}{da}x^k+\ldots \quad (8)$$

Porovnáme-li součinitele na pravých stranách rovnice (6) a (8), obdržíme

$$(k+1)A_{k+1}=\frac{dB_k}{da};\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \quad (9)$$

Známe-li však součinitel $A_k$ v (6) pro funkci $F(y)$, která jest libovolná funkce proměnné $y$ rozvinutelná v mocninnou řadu argumentu $y-a$, známe také $B_k$ a tedy v důsledku (9) $A_{k+1}$; t. j. známe-li $A_k$ pro libovolnou funkci $F(y)$ rozvinutelnou v mocninnou řadu arg. $x-a$, známe také $A_{k+1}$. Poněvadž však známe $A_0=F(a)$, známe také $A_1$, a tedy také $A_2$, $A_3$, ... Jest ku př.

$$A_0=F(a),\ \text{tedy}\ B_0=F_1(a)\ \text{a tedy dle (9), při}\ k=0,$$

$$A_1=\frac{1}{1!}F'(a)\psi(a),$$

*) Přípustnost derivování dle $a$ u rovnice (7) by ovšem měla býti zdůvodněna; nechci však touto věcí se zdržovati, neboť z pozdějších obecných úvah o implicitních funkcích a mocninných řadách dvou proměnných (a takovéto řady tu právě máme a to jednak argumentu $x$, jednak argumentu $a-a_0$, kde $a_0$ jest jistá hodnota zvolená libovolně uvnitř intervalu, který může probíhati $a$) vyplývá přípustnost tato bezprostředně.

tudíž dále $B_1 = \frac{1}{1!} F_1'(a)\psi(a) = \frac{1}{1!} F'(a)\psi^2(a)$ a tedy dle (9), při $k=1$,

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d}{da}(F'(a)\psi^2(a)),$$

$$B_2 = \frac{1}{2!}\frac{d}{da}(F'(a)\psi^3(a)),\ A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^2}{da^2}(F'(a)\psi^3(a)) \text{ a t. d.}$$

Úplnou indukcí pak dostáváme ihned

$$A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}(F'(a)\psi^k(a)) \tag{10}$$

čímž součinitelé v rozvoji 2) stanoveny a řada Lagrangeova odvozena.

***Poznámka 1.*** Methody vyložené dá se též použiti, máme-li místo (1). rovnici poněkud obecnější

$$y = \Phi(a + x\psi(y)),$$

za jistých ovšem předpokladů (na snadě ležících) pro funkce $\Phi$ a $\psi$. I v tomto případě totiž zůstane zachována rovnice (4); pro koefficienty $A_k$ rozvoje (2) dostaneme tvar

$$A_0 = F(\Phi(a)),\ A_k = \frac{1}{k!} D_a^{k-1}[F'(\Phi(a))\psi^k(\Phi(a))\Phi'(a)]. \tag{11}$$

***Poznámka 2.*** Řada Lagrangeova řeší také úkol, dle kterého funkce $F(y)$ se má rozvinouti v řadu potenční postupující dle mocnin funkce $f(y)$ rozvinutelné v potenční řadu argumentu $y - a_0$ a mající nullový bod řádu prvého v $a_0$; jest tedy $f(y) = (y - a_0)\varphi(y)$, $\varphi(a_0) \neq 0$. Klademe

$$(y - a)\varphi(y) = x \text{ a tedy } y = a + \frac{x}{\varphi(y)}$$

kde $a$ jest veličina proměnná jistého okolí bodu $a_0$. Dostaneme pak ihned z řady Lagrangeovy (za jistých předpokladů o $F(y)$, které netřeba poznovu uváděti) — za $x$ dosazujeme ve vypsané formuli L. $(y - a)\varphi(y)$ a pak za $a$ klademe $a_0$, tedy celkem za $x$ klademe $f(y)$ —

$$F(y) = A'_0 + A'_1 f(y) + A'_2 f(y)^2 + \ldots, \tag{12}$$

kde

$$A'_k = \frac{1}{k!}\left[D_a^{k-1}\left(\frac{F'(a)}{\varphi^k(a)}\right)\right]_{a=a_0} = \frac{1}{k!}\left[D_a^{k-1}\left(F'(a)\frac{(a-a_0)^k}{f^k(a)}\right)\right]_{a=a_0} \tag{12'}$$

Tomuto rozvoji říkává se někdy *řada Bürmannova.*

***Poznámka 3.*** Použijeme majorantních funkcí, abychom si odvodili nerovninu pro poloměr konvergence řady Lagrangeovy. Vyšetřujme tento poloměr pro případ, že veličině $a$ dáme pevnou hodnotu $a_0$.

Funkce $\psi(y)$ jest funkce rozvinutelná v řadu mocninnou v okolí bodu $y-a_0$, budiž pak výraz

$$\frac{M}{1-\dfrac{y-a_0}{\varrho}}, \quad M>0,\ \varrho>0$$

majorantním ku $\psi(y)$. Pak pro koefficienty $b_k$ řady Lagrangeovy pro $y$ ($F(y)=y, F'(y)=1$) a pro $a=a_0$ budeme míti nerovninu

$$|b_k| = \frac{1}{k!}\left|D_a^{k-1}[\psi^k(a)]\right|_{a=a_0} < \frac{1}{k!}\left|D_a^{k-1}\frac{M^k}{\left(1-\dfrac{a-a_0}{\varrho}\right)^k}\right|_{a=a_0}$$

$$|b_k| < \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!}\frac{M^k}{\varrho^{k-1}}.$$

Avšak

$$\lim_{k=\infty}\sqrt[k]{\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!}\frac{M^k}{\varrho^{k-1}}} = \lim_{k=\infty}\frac{2k(2k-1)}{k(k+1)}\frac{M}{\varrho} = \frac{4M}{\varrho}, \text{ (odst. 31., (III))},$$

odkudž jest patrno, že *poloměr řady Lagrangeovy, sestrojené pro* $F(y)=y$, *jest větší* ($\geqq$) *než* $\frac{\varrho}{4M}$ (odst 142., pozn.)

Zbytek po $(n+1)$-tém členu jest v tom případě rovný výrazu

$$\Theta\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}\frac{M^{n+1}x^{n+1}}{\varrho^n}\frac{1}{1-\dfrac{4Mx}{\varrho}}, \quad |\Theta|<1.$$

*Příklad* 1. Užijeme-li formule Lagrangeovy na rovnici

$$y = a + \frac{x}{2}(y^2-1) \tag{13}$$

k výpočtu řady pro $y$, dostaneme řadu dávající pro dosti malou $|x|$ ten kořen rovnice, který jest rovný nulle, když $a=0$. Řada Lagrangeova pro $y$ jest v tomto případě

$$y = a + \frac{x}{2}(a^2-1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 D_a(a^2-1)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k D_a^{k-1}(a^2-1)^k + \dots \tag{14}$$

Vypočteme-li však kořen rovnice (13), o nějž jde, dostaneme snadným počtem

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2}. \tag{15}$$

Položíme výraz (15) rovný řadě (14) a derivujeme-li potom ještě dle $a$ na obou stranách (viz pozn. pod čarou, str. 252.), obdržíme rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xa+x^2}}=1+x\,.\,X_1(a)+x^2X_2(a)+\ldots+x^kX_k(a)+\ldots, \quad (16)$$

kde součinitelé daní vztahem

$$X_k(a)=\frac{1}{2.4.6\ldots 2k}\,D_a^k\,(a^2-1)^k \quad (17)$$

jsou t. zv. **polynomy Legendreovy.**

*Příklad* 2. Pomocí Lagrangeovy formule lze *vypočísti explicitně* **součinitele pro inversi mocninné řady** (odst. 155.). Máme-li vztah

$$x-x_0=a_1(y-y_0)+a_2(y-y_0)^2+\ldots, \quad (18)$$

můžeme, je-li $a_1 \neq 0$, užiti formule Lagrangeovy na rovnici $y=a+$ $+(x-x_0)\,\psi(y)$,

kde $$\psi(y)=\frac{1}{a_1+a_2(y-y_0)+a_3(y-y_0)^2+\ldots}$$

a ve které $a$ jest proměnná, jejíž obor jest jisté okolí bodu $y_0$; místo svrchu užívaného $x$ psáno $x-x_0$.

Výraz $\psi^k(y)$, vyskytující se ve formuli Lagrangeově, počítáme dle poučky binomické, kladouce

$$\psi^k(y)=\frac{1}{a_1^k}-\frac{k}{1}\cdot\frac{\chi(y)}{a_1^{k+1}}+\frac{k(k+1)}{1.2}\cdot\frac{\chi^2(y)}{a_1^{k+2}}-\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\frac{\chi^3(y)}{a_1^{k+3}}+\ldots,$$

kde $$\chi(y)=a_2(y-y_0)+a_3(y-y_0)^2+\ldots$$

Formule Lagrangeova pro $y-y_0$ dává, když jsme napřed provedli umocnění řady $\chi(y)$ a naznačené v ní derivování dle $a$ a potom za $a$ dosadili vesměs $y_0$, po snadném počtu tento výsledek

$$y-y_0=\frac{x-x_0}{a_1}+\frac{A_2}{a_1^3}(x-x_0)^2+\frac{A_3}{a_1^5}(x-x_0)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_k}{a_1^{2k-1}}(x-x_0)^k\ldots \quad (19)$$

kde

$$A_k=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(-1)^{\lambda_1}\frac{(2k-2-\lambda_1)!}{\lambda_2!\,\lambda_3!\ldots}a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3}\ldots \quad (19')$$

Při tom se součtové znaménko vztahuje na všecka kladná ($\geqq 0$), celá čísla $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. . . . hovící současně oběma rovnicím

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots=k-1,$$
$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots=2k-2.$$

Specielně jsou součinitelé $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ dáni těmito výrazy

$$-a_2, \quad -a_3a_1+2a_2^2, \quad -a_4a_1^2+5a_3a_2a_1-5a_2^3,$$
$$-a_5a_1^3+6a_4a_2a_1^2+3a_3^2a_1^2-21a_3a_2^2a_1+14a_2^4,$$
$$-a_6a_1^4+7a_5a_2a_1^3+7a_4a_3a_1^3-28a_4a_2^2a_1^2-28a_3^2a_2a_1^2+84a_3a_2^3a_1-42a_2^5.$$

Zároveň máme pro poloměr konvergence $\varrho$ a zbytek po $n$-tém členu $Z_n$ řady (19) dle výsledků odst. 155. tyto nerovniny

$$\varrho \geqq \varepsilon_2^{-1}\,|\,a_1\,|\,,$$
$$|\,Z_n\,| < \frac{1.1\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n+2)}\left(\frac{\varepsilon_2\,|\,x-x_0\,|}{|\,a_1\,|}\right)^{n+k}\frac{R}{2(MR+1)}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon_2\left|\dfrac{x-x_0}{a_1}\right|}, \tag{20}$$

kde
$$\varepsilon_2 = \frac{1+2MR+\sqrt{(1+2MR)^2-1}}{R}$$

a kde kladná čísla $M$, $R$ jsou tak volena, aby

$$\frac{M}{R^{k-2}} > \left|\frac{a_k}{a_1}\right|.$$

Místo $\varepsilon_2$ můžeme očividně užívati hodnoty $\varepsilon'_2 = \dfrac{2(1+2MR)}{R}$, jež jest větší než $\varepsilon_2$ a nebude tím dotčena správnost nerovnin (20).

*Příklad 3.* **Řešení rovnic numerických** lze s výhodou prováděti pomocí Lagrangeovy formule, známe-li ovšem kořeny rovnice již s jistým přiblížením. Odvodím příslušné vztahy pouze pro rovnice algebraické tvaru

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1}y + b_n = 0. \tag{21}$$

Budiž přibližná hodnota kořene této rovnice $y_0$; rovnici samu můžeme pak psáti ve tvaru

$$-f(y_0) = \frac{1}{1!}f'(y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}f''(y_0)(y-y_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(y_0)(y-y_0)^n.$$

Užijeme-li nyní tu rovnice (19) kladouce $x - x_0 = -f(y_0)$, $a_k = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(y)$, máme ihned pro hodnotu $y$, kořene to blízkého ku $y_0$, rovnici

$$y = y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} - \frac{f''(y_0)f^2(y_0)}{2f'^3(y_0)} + \frac{[f'''(y_0)f'(y_0) - 3f''^2(y_0)]\,f^3(y_0)}{6f'^5(y_0)} + \ldots \tag{22}$$

O konvergenci této řady a o zbytku jejím po $n$-tém členu nás poučují vztahy (20). Použijeme nejprve těchto rovnic pro kořen blízký nulle (jehožto přibližná hodnota $y_0 = 0$). Pak pro $y_0 = 0$ jest $f(y_0) = b_n$, $\frac{1}{1!} f'(y_0) = b_{n-1}$, $\frac{1}{2!} f''(y_0) = b_{n-2}$, . . . . ; podržíme-li pak ve (22) po členu $y_0$ toliko jeden člen, můžeme vysloviti na základě (19) a (20) větu: Jsou-li čísla kladná $M$, $R$ tak volena, aby

$$\frac{M}{R^{k-2}} \geqq \left| \frac{b_{n-k}}{b_{n-1}} \right|$$

a je-li dále $| b_n | \leqq | b_{n-1} | \, \varepsilon_2^{-1}$, pak v intervale $(a, b)$, kde*)

$$a = -\frac{b_n}{b_{n-1}} - \frac{1}{4} \frac{R}{1 + 2MR} \left( \frac{\varepsilon_2 b_n}{b_{n-1}} \right)^2,$$

$$b = -\frac{b_n}{b_{n-1}} + \frac{1}{4} \frac{R}{1 + 2MR} \left( \frac{\varepsilon_2 b_n}{b_{n-1}} \right)^2,$$

jest kořen rovnice (21), který jest nejmenší absolutní hodnoty ze všech kořenů reálných (i komplexních). Obdobnou větu lze vysloviti i pro kořen o největší absolutní hodnotě; dostaneme ji transformací rovnice (21) substitucí $y = z^{-1}$ a užitím na rovnici tak vzniklou věty právě dokázané.

Ku př. při rovnici $x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 2 = 0$ můžeme klásti $M = \frac{2}{7}$, $R = \frac{2}{3}$ a tedy $\varepsilon_2 = \frac{7}{2}$; jelikož pak jest $b_5 = 2$, $b_4 = 7$ a podmínce $| b_5 | \leqq | b_4 | \, \varepsilon_2^{-1}$ vyhověno jest v intervalu $\left( -\frac{2}{7} - \frac{7}{58}, \; -\frac{2}{7} + \frac{7}{58} \right)$ reálný kořen dané rovnice, jenž jest nejmenší absolutní hodnoty ze všech kořenů dané rovnice. Odporučuji čtenáři, aby kořen příslušný vypočítal přesněji na základě odvozených formulí.

Abych aspoň na jednom numerickém příkladě objasnil užitek rovnic odvozených, budu uvažovati rovnici

$$y^3 - 2y - 5 = 0.$$

---

*) Při tom ve (20) výraz $\frac{1}{8} \varepsilon_2^2 \frac{1}{1 - \varepsilon_2 \left| \frac{b_n}{b_{n-1}} \right|}$, kterýžto výraz zastupuje vlastně nekonečnou řadu

$$\varepsilon_2^2 \left\{ \left| \binom{\frac{1}{2}}{2} \right| + \left| \binom{\frac{1}{2}}{3} \varepsilon_2 \frac{b_n}{b_{n-1}} \right| + \left| \binom{\frac{1}{2}}{4} \varepsilon_2^2 \frac{b_n^2}{b_{n-1}^2} \right| + \dots \right\},$$

nahražen prostě $\frac{1}{2} \varepsilon_2^2$, což jest přípustno, je-li $\varepsilon_2 \, | b_n | \, | b_{n-1} |^{-1} \leqq 1$.

Rovnice tato má kořen blízký 2; jelikož pak jest $y^3 - 2y - 5 = (y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 10(y-2) - 1$, můžeme používati formulí příkladu 2., kladouce $x - x_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 6$, $a_3 = 1$, $a_4 = \ldots = 0$, $M = \frac{6}{10}$, $R = 6$. Dostaneme $\varepsilon_2 = 2{\cdot}72$ a pro $\varrho$ nerovnost $\varrho > (0{\cdot}272)^{-1}$. Podržíme-li z rozvoje (15) prvých 5 členů, dostaneme pro kořen blízký 2 vztah

$$y - 2 = \frac{1}{10} - \frac{6}{1000} + \frac{62}{100000} - \frac{780}{10000000} + \frac{10884}{10^9} + \Theta\,.\,7{\cdot}44.10^{-6}$$

aneb

$$y = 2{\cdot}094553 + \Theta\,.\,7{\cdot}44.10^{-6},\ |\,\Theta\,| < 1.$$

Na příkladě tomto jest patrno, že hlavní užitek pro výpočet přinášejí první členové rozvoje (19); tato okolnost platí obecně, jak snadno lze prokázati.

## 6. Pravé hodnoty výrazů neurčitých.

**163.** Někdy bývá dána funkce výrazem, který však pro některé hodnoty neodvisle proměnné ztrácí úplně význam, a my pak říkáme, že stává se pro ty hodnoty *neurčitým*. Tak ku př. výraz $\frac{\sin x}{x}$ stanoví pro každé $x$ různé od 0 určitou hodnotu, pro $x = 0$ však nabývá tvaru $\frac{0}{0}$ zcela bezvýznamného; stejně i výraz $\sin\frac{1}{x}$ jest pro $x = 0$ výrazem neurčitým.

Může se však státi, že jest funkce spojitá, která se s výrazem daným shoduje a nabývá určitých hodnot i v bodech, ve kterých výraz daný stává se neurčitým. Pak říkáme oněm určitým hodnotám **pravé hodnoty** daného výrazu pro příslušné hodnoty neodvisle proměnné. Dle této definice jest tedy pravá hodnota výrazu $f(x)$ v bodě $x = a$, ve kterém $f(x)$ není definováno (nemá významu), dána limitou

$$\lim_{x=a} f(x),$$

existuje-li tato limita; neexistuje-li tato limita, pak výraz $f(x)$ nemá pravé hodnoty v bodě $a$, neboť nemůže býti funkce, která by v okolí bodu $a$ shodovala se s $f(x)$ a byla spojitá v bodě $a$ (dle definice funkce spojité v bodě $a$).

Výrazy $\frac{\sin x}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$ mají tedy pravé hodnoty v bodě $x = 0$, existují-li limity

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x=0}\sin\frac{1}{x},$$

a jsou pak ty pravé hodnoty těmto limitám rovny. Jak patrno, toliko prvý z výrazů má pravou hodnotu ($=1$) v bodě $x=0$; druhý nemá pravé hodnoty.

Jest tedy v podstatě počítání pravých hodnot výrazů v bodě $a$ neurčitých počítáním limit výrazů daných v okolí bodu $a$ spojitými funkcemi.

**164.** Případ nejčastěji se vyskytující jest vyšetřování **limity podílu dvou spojitých funkcí**

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} \text{ za předpokladu, že } \lim_{x=a} f(x)=0,\ \lim_{x=a} F(x)=0, \tag{1}$$

kde tedy výraz v bodě $x=0$ má bezvýznamný tvar $\frac{0}{0}$. Uvažujme tento případ nejprve za předpokladu, že i $f(x)$ i $F(x)$ dají se rozvinouti v nekonečnou řadu Taylorovu v okolí bodu $a$. Budiž

$$f(x)=a_l\,(x-a)^l+a_{l+1}\,(x-a)^{l+1}+\ldots,$$
$$F(x)=A_L(x-a)^L+A_{L+1}(x-a)^{L+1}+\ldots$$

($a_0$ jakož i $A_0$ jest rovno 0, neboť $f(a)=0$, $F(a)=0$; v rozvojích napsaných jsme učinili předpoklad, že též $a_1=a_2=\ldots=a_{l-1}=0$, $A_1=A_2=\ldots=A_{L-1}=0$); o $a_l$ resp. $A_L$ budeme předpokládati, že jsou od nully různy. Pak jest

$$\frac{f(x)}{F(x)}=(x-a)^{l-L}\,\frac{a_l+a_{l+1}(x-a)+\ldots}{A_L+A_{L+1}(x-a)+\ldots}.$$

Druhý činitel výrazu na pravé straně má vždy limitu a to rovnou podílu $a_l : A_L$; má-li též limitu i první činitel, pak existuje i limita (1).

Jsou tři případy možny:

$a$) $l>L$; tu limita hledaná existuje a jest rovna nulle, neboť první činitel výrazu na pravé straně má limitu rovnou nulle.

$b$) $l<L$; v tomto případě limita (1) neexistuje a můžeme psáti

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)}=\pm\infty;$$

je-li $L-l$ sudé a $a_l : A_L$ kladné (záporné), jest voliti znaménko horní (dolní); jinak jest znaménko neurčité.

$c$) $l=L$; pak jest

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{a_l}{A_L} \text{ aneb jinak psáno } =\frac{f^{(l)}(a)}{F^{(l)}(a)}.$$

*Příklady.*

1. $$\lim_{x=0}\frac{a^x-1}{b^x-1}=\lim_{x=0}\frac{x\log a+\frac{1}{2}x^2\log^2 a+\dots}{x\log b+\frac{1}{2}x^2\log^2 b+\dots}=\frac{\log a}{\log b}.$$

2. $$\lim_{x=0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x=0}\frac{4x^2+\dots}{x^2+\dots}=4.$$

3. $$\lim_{x=0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)=\lim_{x=0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\dots\right)-x^2(1-x^2+\dots)}{x^4\left(1-\frac{x^2}{3}+\dots\right)}=\frac{2}{3}.$$

4. $$\lim_{x=0}\left[\frac{1}{x}\sqrt[n]{(1+a_1x)(1+a_2x)\dots(1+a_nx)}-\frac{1}{x}\right]=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{\sqrt[n]{(1+a_1x)\dots(1+a_nx)}-1}{x}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)x+(\dots)x^2+\dots)}{x}=$$
$$=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n).$$

5. $$\lim_{x=0}\left[\frac{\alpha a^x+\beta b^x+\gamma c^x}{\alpha+\beta+\gamma}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

Místo limity tohoto výrazu budeme počítati limitu logaritmu toho výrazu. Když $x$ se blíží k nulle, pak výraz v závorce hranaté se blíží ku 1 a můžeme psáti

$$\frac{\alpha a^x+\beta b^x+\gamma c^x}{\alpha+\beta+\gamma}=1+\frac{\alpha(a^x-1)+\beta(b^x-1)+\gamma(c^x-1)}{\alpha+\beta+\gamma}=$$
$$=1+Bx+Cx^2+\dots,$$

kde $$B=\frac{\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c}{\alpha+\beta+\gamma},\quad C=\dots$$

a $$\log\frac{\alpha a^x+\beta b^x+\gamma c^x}{\alpha+\beta+\gamma}=Bx+C'x^2+\dots$$

Jest tudíž limita logaritmu daného výrazu pro lim $x=0$ rovna číslu $B$ a hledaná limita

$$\lim_{x=0}\left[\frac{\alpha a^x+\beta b^x+\gamma c^x}{\alpha+\beta+\gamma}\right]^{\frac{1}{x}}=(a^\alpha b^\beta c^\gamma)^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

6. $\lim\limits_{x=k\pi} \dfrac{\sin x}{x - k\pi}$, kde $k$ jest číslo celé. Lze psáti

$$\lim_{x=k\pi} \frac{\sin x}{x - k\pi} = (-1)^k \lim_{x=k\pi} \frac{\sin(x - k\pi)}{x - k\pi} = (-1)^k.$$

**165.** V odstavci předcházejícím jsme učinili o funkcích $f(x)$, $F(x)$ předpoklad, že lze je rozvinout v řady Taylorovy v okolí bodu $a$. Předpoklad tento lze nahraditi často předpokladem obecnějším, který nám rovněž umožní výpočet limity (1). K tomu směřují tyto věty:

1. věta. *Jestliže $F(a) = f(a) = 0$ a mají-li funkce $f(x)$, $F(x)$ v bodě a derivace $f'(a)$, $F'(a)$, při čemž jest $F'(a)$ různé od nully, pak jest*

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Neboť jest

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)}. \tag{2}$$

Avšak

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{F(a+h) - F(a)} = \frac{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}}, \tag{3}$$

odkudž učiněné tvrzení ihned následuje.

2. věta. *Jestliže* $\lim F(x) = 0$, $\lim f(x) = 0$ *pro* $\lim x = a$, *jestliže dále funkce $F(x)$, $f(x)$ mají v okolí bodu a derivace a jestliže ani $F(x)$, ani $F'(x)$ v každém okolí bodu a nestávají se nullou, pak*

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \tag{4}$$

*za dalšího předpokladu, že limita na pravé straně existuje. Avšak i když*

$\lim\limits_{x=a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)} = +\infty$, *resp.* $-\infty$, *resp.* $\pm\infty$, *jest i* $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = +\infty$,

*resp.* $-\infty$, *resp.* $\pm\infty$.

Jest totiž dle (2) a (3) a dle formule Cauchyovy (odst. 106.) (v důsledku předpokladů $f(a)$ i $F(a)$ jest v následujícím rovno nulle)

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{F(a+h) - F(a)} = \lim_{h=0} \frac{f'(a + \Theta h)}{F'(a + \Theta h)}. \quad 0 < \Theta < 1.$$

Avšak

$$\lim_{h=0} \frac{f'(a+\Theta h)}{F'(a+\Theta h)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \tag{5}$$

jestliže limita na pravé straně existuje. Odtud tvrzení větou učiněné vyplývá.

*Poznámka 1.* Zdálo by se na prvý pohled, že z rovnic napsaných vyplývá, že kdykoliv existuje

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)}, \quad \text{že vždy též existuje i } \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

za předpokladů ovšem ve větě učiněných. Tomu však tak není, jak na příkladě, jejž ihned uvedu, jasně seznáme, a příčina toho tkví v okolnosti, že sice $a+\Theta h$ v rovnici (5) konverguje ku $a$, když $\lim h=0$, avšak způsob, kterým $a+\Theta h$ se blíží k $a$, není zcela libovolný, jak to pojem limity na pravé straně rovnice (5) vyžaduje, jelikož $\Theta$ jest při daných funkcích $f(x)$, $F(x)$ určitá funkce $h$, avšak nám neznámá (až na to, že její hodnota jest v intervalu $(0, 1)$) a může tudíž konvergence $a+\Theta h$ ku $a$ při $\lim h=0$ býti taková, že limita na levé straně rovnice (5) existuje, na pravé pak neexistuje a rovnice ta pozbývá významu. To nastává ku př., klademe-li

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0, \ f(0) = 0; \ F(x) = \sin x, \ a = 0.$$

Pak jest

$$\lim_{x=0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x=0} x\cos\frac{1}{x} : \frac{\sin x}{x} = 0 : 1 = 0. \tag{$\alpha$}$$

Avšak

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}}{\cos x},$$

limita výrazu tohoto pro $\lim x=0$ neexistuje a rovnice (4) nemá tu významu. Limitu $(\alpha)$ můžeme však tu snadno vypočítati dle věty 1., odkudž jest patrno, že věta (1) může býti užitečná v případech, kdy věta (2) pozbývá významu; jest to tenkráte, když derivace $f'(x)$, $F'(x)$ existují v okolí bodu $a$ i v bodě $a$ a nejsou v bodě $a$ funkcemi spojitými.

*Poznámka 2.* Věty tohoto odstavce snadno dají se rozšířiti i pro ten případ, že se vyšetřují limity, když proměnná se blíží ku $a$ buď jenom *z leva* nebo jenom *z prava*. Tak ku př. místo věty 1. lze psáti vztah

$$\lim_{x=a+0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'_+(a)}{F'_+(a)},$$

kde $f'_+(a)$, $F'_+(a)$ jsou derivace z prava funkcí $f(x)$, $F(x)$ v bodě $a$ a vztah právě napsaný jest platný, existují-li tyto dvě derivace z prava a je-li druhá z nich od nully různá.

Věta druhá pak dá se rovněž nahraditi obecnější vyjádřenou vztahem

$$\lim_{x=a+0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a+0} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

za předpokladů obdobných jako svrchu.

Obdobné rovnice lze psáti i pro lim $x = a - 0$.

**166.** Věta druhá odst. předcházejícího vede přímo k t. zv. **pravidlu l' Hospitalovu**. Dle tohoto pravidla převádí se za jistých předpokladů výpočet limity, jevící se ve tvaru neurčitém $\frac{0}{0}$, na výpočet limity podílu $f'(x) : F'(x)$ pro lim $x = a$. Jestliže však i tato limita vede ku neurčitému tvaru $\frac{0}{0}$, vezmeme v úvahu $f''(x) : F''(x)$ (jsou-li ovšem splněny předpoklady obdobné těm, jež udány ve větě druhé). Je-li i limita tohoto poměru tvaru neurčitého $\frac{0}{0}$, přejdeme ku podílu $f'''(x) : F'''(x)$ atd. Takovýmto způsobem možno často vypočísti hledanou limitu, po případě zjistiti, zda lim $f(x) : F(x) = \infty, -\infty, \pm\infty$.

Tak můžeme snadno odvoditi též hlavní pravidla odstavce 164. (což tu pomíjím) a rovněž počítati příklady uvedené v tomto odstavci. Uvedu ještě jenom jediný příklad, abych naznačil obrat, který často zjednodušuje výpočet.

*Příklad.* Vypočísti jest při $n$ různém od hodnot 0, $\pm 1$ limitu

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} m x - m \operatorname{tg} x}{\sin n x - n \sin x}.$$

Užijeme-li věty 2. předch. odst., máme ihned pro hledanou limitu výraz

$$\lim_{x=0} \frac{\dfrac{m}{\cos^2 m x} - \dfrac{m}{\cos^2 x}}{n \cos n x - n \cos x},$$

který jest opět neurčitý. Jelikož lim $\cos^2 x = 1$, lim $\cos^2 m x = 1$ pro lim $x = 0$, můžeme v čitateli násobiti $\cos^2 x \cos^2 m x$, aniž by limita se měnila, a dostaneme tak limitu

$$\lim_{x=0} \frac{m(\cos^2 x - \cos^2 m x)}{n(\cos n x - \cos x)} = \lim_{x=0} \frac{2m(\sin x \cos x - m \sin m x \cos m x)}{n(n \sin n x - \sin x)} =$$

$$\frac{m}{n} \lim_{x=0} \frac{\sin 2x - m \sin 2 m x}{n \sin n x - \sin x} = \frac{2m}{n} \lim_{x=0} \frac{\cos 2x - m^2 \cos 2 m x}{n^2 \cos n x - \cos x} =$$

$$= \frac{2m(1 - m^2)}{n(n^2 - 1)}.$$

**167.** Větu 2. (odst. 165.), jakož i její rozšíření dostáváme snadno jako důsledek věty: Jestliže $\lim f(x) = 0$, $\lim F(x) = 0$ při $\lim x = a$ a jestliže $F(x)$ v okolí bodu $a$ není rovno nulle, pak jest

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a,\, x'=a} \frac{f(x) - f(x')}{F(x) - F(x')} \tag{6}$$

za předpokladu, že limita na pravé straně existuje, ať $x$, $x'$ jakkoliv — jsouce jenom různy — konvergují ku $a$. Za týchž předpokladů jest rovnice (6) platna když při $\lim x = a$ jest $\lim f(x) = \pm\infty$, $\lim F(x) = \pm\infty$.

Abychom větu tuto dokázali, předpokládejme, že limita na pravé straně existuje a že jest rovna $\beta$. Pak dle definice limity (odst. 70.) lze ku kladnému číslu $\varepsilon$ stanoviti číslo $\delta$ tak, že

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{F(x) - F(x')} - \beta \right| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } x,\ x', \text{ pro něž } 0 < |x - a| < \delta,$$
$$0 < |x' - a| < \delta. \tag{7}$$

1. Za předpokladu $\lim f(x) = 0$, $\lim F(x) = 0$ volme v této nerovnině $x$ pevně a nechme $x'$ konvergovati ku $a$, pak jest ihned

$$\left| \frac{f(x)}{F(x)} - \beta \right| \leqq \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - a| < \delta;$$

tím věta v tomto případě dokázána.

2. Za předpokladu $\lim f(x) = \pm\infty$, $\lim F(x) = \pm\infty$ můžeme — volíce $x$ v (7) opět pevně — stanoviti kladné číslo $\delta' < \delta$ tak, aby druhý činitel na pravé straně identické rovnice

$$\frac{f(x) - f(x')}{F(x) - F(x')} = \frac{f(x')}{F(x')} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x)}{f(x')}}{1 - \dfrac{F(x)}{F(x')}}$$

byl v intervalu $(1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon')$ pro všecka $x'$, pro něž $0 < |x' - a| < \delta'$, ať kladné číslo $\varepsilon'$ jest jakkoliv malé. V důsledku toho plyne ze vztahu (7), jemuž lze dáti tvar

$$\beta-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x')}{F(x)-F(x')}<\beta+\varepsilon,$$

ihned

$\frac{\beta-\varepsilon}{1+\varepsilon'}<\frac{f(x')}{F(x')}<\frac{\beta+\varepsilon}{1-\varepsilon'}$ pro všechna $x'$, pro něž $0<|x'-a|<\delta'$,

ze kteréžto nerovniny následuje i druhá část věty (neboť $\varepsilon$, $\varepsilon'$ lze si zvolit tak malé, jak chceme, a vždy jest číslo $\delta'$, pro něž jest poslední nerovnina splněna).

Jelikož dle věty Cauchyovy jest (za předpokladu, že existují $f'(x)$, $F'(x)$ v okolí bodu $a$ a že v tom okolí — jež můžeme si zvoliti libovolně malé — jest $F'(x)$ různé od nully)

$$\frac{f(x)-f(x')}{F(x)-F(x')}=\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)};\quad x_1 \text{ jest uvnitř interv. } (x, x'), \tag{8}$$

jest patrno, že existuje-li limita výrazu na pravé straně (8), existuje za vytčených právě předpokladů i limita na pravé straně rovnice (6); obě pak jsou si rovny. Odtud pak následuje jednak věta 2. odst. 165. a dále tato věta:

*Jestliže* $\lim F(x)=\pm\infty$, $\lim f(x)=\pm\infty$ *pro* $\lim x=a$ *a jestliže v okolí bodu* $a$ *mají funkce* $f(x)$, $F(x)$ *derivace, z nichž* $F'(x)$ *není v každém okolí bodu* $a$ *rovna nulle, jest*

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

*za dalšího předpokladu, že limita na pravé straně existuje.*

Větu tuto můžeme snadno doplniti (stejně jako při 2. větě odst. 165,) i pro případy, že

$$\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=+\infty,\ -\infty,\ \pm\infty.$$

V tomto případě stačí totiž uvažovati místo poměru $\frac{f(x)}{F(x)}$ jeho převratnou hodnotu.

Dokázaná právě věta často nám usnadní výpočet limit podílů, v nichž dělitel i dělenec v absolutní hodnotě rostou nade všecky meze a jež krátce symbolicky vyznačujeme jako neurčité tvary $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ovšem jestliže $\lim\limits_{x=a} f(x)=+\infty$, jest i $\lim\limits_{x=a} f'(x)=\infty$ (viz odst. 109.) a věta zdánlivě jest neužitečna, avšak zhusta lze podíl $f'(x):F'(x)$ zjednodušiti a tím právě ku výpočtu hledané limity dospěti snáze než při bezprostředním vyšetřování podílu $f(x):F(x)$.

*Příklady 1.* $\lim\limits_{x=0} x^{\alpha} \log x$; $x>0$, $\alpha>0$. Výraz tento lze psáti jako limitu podílu

$$\lim_{x=0} \frac{\log x}{x^{-\alpha}}, \quad \alpha>0,\ x>0.$$

Dostáváme, užijeme-li věty právě odvozené

$$\lim_{x=0} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x=0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x=0} x^{\alpha} = 0,$$

což jest známý výsledek.

2.* $\lim\limits_{x=+0} x^{\alpha} e^{\frac{1}{x}}$. Tato limita jest očividně $+\infty$, konverguje-li $x$ ku nulle hodnotami kladnými, jak chceme předpokládati a jakož znaménkem $+$ při 0 bylo ve výraze uvedeném vyznačeno, je-li $\alpha \leqq 0$. Stanovme limitu tu pro $\alpha>0$. Jest

$$\lim_{x=+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-\alpha}} = \lim_{x=+0} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x=+0} x^{\alpha-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Z této rovnice jest patrno, že je-li pro určité $\alpha$ limita hledaná $+\infty$, že jest také $+\infty$ pro $\alpha$ o jednu větší; tedy jest také $+\infty$ pro $\alpha$ o dvě větší a t. d. Jelikož pak limita ta jest vskutku $+\infty$ pro $\alpha \leqq 0$, jest tudíž $+\infty$ pro každé $\alpha$.

**168. Výpočet limit** $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x)}{F(x)}$ lze prováděti, jsou-li obě limity $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$ buď rovny nulle aneb $=\pm\infty$, tím, že zavedeme napřed novou proměnnou substitucí $x=\dfrac{1}{y}$, a počítáme limitu

$$\lim_{y=+0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{F\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Ta jest dle předcházejícího za jistých předpokladů rovna limitě — existuje-li ovšem ta limita —

$$\lim_{y=+0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} F'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y=+0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{F'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

takže i v tomto případě máme rovnici

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \tag{9}$$

platnou za předpokladu, že limita na pravé straně její existuje a že $F(x)$ a $F'(x)$ pro žádné $x > A$ se nerovnají nulle ($A$ můžeme si zvoliti tak veliké, jak chceme). Rovněž je-li limita na pravé straně $+\infty$, resp. $-\infty$, jest i limita na levé straně $+\infty$ resp. $-\infty$.

V následujícím užívám označení $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = \varphi(\infty)$ (viz odst. 71., pozn.).

*Příklad 1.*

$$\lim_{x=\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty} \frac{-1}{1+x^2} : -\frac{1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

*Příklad 2.* Nechť existuje $f'(\infty)$; pak jest

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{1} = f'(\infty). \tag{$\alpha$}$$

Rovnice tato jest v důsledku dokázaných vět platna toliko, když $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = \infty$ (jelikož jmenovatel daného výrazu rovněž vzrůstá nade všecky meze s $x$ — neboť jest právě rovný $x$). Avšak jest platna i v tom případě, když $f(\infty) = a$, neboť potom jest (je-li $h$ libovolné číslo)

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\Theta h), \quad 0 < \Theta < 1 \tag{$\beta$}$$

a

$$\lim_{x=\infty} [f(x+h) - f(x)] = a - a = 0 \text{ a tedy i } h \,.\lim_{x=\infty} f'(x+\Theta h) = 0,$$

t. j. (v důsledku toho že existuje $f'(\infty)$) $f'(\infty) = 0$ a mají tudíž obě strany rovnice ($\alpha$) stejnou hodnotu, i když $f(\infty) = a$. Z ($\beta$) následuje (stále za předpokladu, že existuje $f'(\infty)$)

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\infty) \tag{$\gamma$}$$

a tedy porovnáme li ($\alpha$) a ($\gamma$)

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)].$$

Poslední článek této rovnice následuje z předcházejícího, klademe-li v tomto $h = 1$. Viz odst. 31., kde odvozena pro řadu čísel $a_1$, $a_2$, $a_3 \ldots$

za jistých předpokladů relace

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

*Příklad 3.* Dokažte obecněji vztah

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{F(x+h) - F(x)}$$

platný, když buď $\lim F(x) = 0$ aneb $\lim F(x) = +\infty$ resp. $= -\infty$ a když zároveň buď existuje $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ aneb $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = +\infty, -\infty$ (všecky ty limity při $\lim x = \infty$).

*Příklad 4.* Limita

$$\lim_{x=\infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x} = \lim_{x=\infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

jelikož $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Kdybychom chtěli tuto limitu počítati dle rovnice (9), nedospěli bychom k výsledku žádnému, neboť limita výrazu

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

neexistuje, když $\lim x = \infty$.

**169.** Vedle případů hlavních v předcházejícím vylíčených přicházejí někdy v úvahu limity, jež se jeví v jiných tvarech neurčitých. Tak ku př. je-li limita funkce $\varphi(x)$ pro $\lim x = a$ rovna 0, limita $\psi(x)$ však $\infty$, nelze $\lim \varphi(x)\psi(x)$ při $\lim x = a$ vypočísti na základě známé věty o limitě součinu (odst. 30., 4.) a mluvíme v tomto případě o neurčitém tvaru $0 \cdot \infty$. Tu můžeme však psáti

$$\lim_{x=a} \varphi(x) \cdot \psi(x) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^{-1}},$$

čímž jsme tvar $0 \cdot \infty$ převedli na tvar $\frac{0}{0}$. (Viz ostatně příkl. odst. 167. a dole příkl. 3.).

Obdobné transformace můžeme provésti při neurčitých tvarech, jež srozumitelným způsobem označiti lze $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$, při čemž můžeme místo limit příslušných výrazů užívati limity logaritmů (při vhodné úpravě a za náležitých předpokladů). Abych aspoň ještě jeden obecný příklad uvedl, uvažujme

$$\lim_{x=a} [\varphi(x) - \psi(x)], \quad \text{když} \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} \psi(x) = \infty;$$

tedy neurčitý tvar $\infty - \infty$. Tu můžeme identicky klásti

$$\varphi(x) - \psi(x) = \left[\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}\right] : \frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)},$$

čímž tvar $\infty - \infty$ se převádí na tvar $0:0$. Lze-li tu užiti pravidel svrchu odvozených, jest po snadném počtu

$$\lim_{x=a}[\varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x=a} \frac{\varphi^2(x)\,\psi'(x) - \varphi'(x)\,\psi^2(x)}{\varphi(x)\,\psi'(x) + \varphi'(x)\,\psi(x)}.$$

Ovšem zbývá rozhodnouti otázku, zda v určitém případě takovýmito operacemi se vůbec nějak k cíli přibližujeme; zda výrazy, k nimž jsme tak dospěli, neposkytují při výpočtu limity větší potíže než výrazy původně dané. Otázku tuto nelze ovšem obecně rozhodnouti a lze jenom tolik poznamenati, že často, provedeme-li jednoduchou úpravu resp. rozvoj daných funkcí podobně jako v odst. 164., lze v mnohých případech vypočítati snadno žádanou limitu.

Uvedu v následujícím k tomu cíli několik příkladů.

1. Při výpočtu limity

$$\lim_{x=+0}\left[\frac{1}{x(A+x)} - \frac{B\log(A+x)}{x^2}\right], \quad A > 0$$

máme tvar $\infty - \infty$. Uvedeme-li však výraz v závorce na společný jmenovatel, dostaneme (užívajíce druhé věty odst. 165.)

$$\lim_{x=+0} \frac{x - B(A+x)\log(A+x)}{x^2(A+x)} = \lim_{x=+0} \frac{1 - B - B\log(A+x)}{2Ax + 3x^2}.$$

Není li trojčlen $1 - B - B\log A$ rovný nulle, jest limita na pravé straně a tedy i limita daná rovna $+\infty$, aneb $-\infty$ dle toho, jaké znaménko má onen trojčlen. Je-li trojčlen rovný nulle, jest limita hledaná rovna číslu

$$-\frac{B}{2A^2} = -\frac{1}{2(1+\log A)A^2}.$$

2. Abychom vypočetli známou limitu

$$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

methodami tu naznačenými, vypočítáme limitu logaritmu daného výrazu (za předpokladu tu možného $x > -1$) a užijeme věty druhé odst. 165. Máme ihned

$$\lim_{x=0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1+x} : 1 = 1.$$

Jest tedy limita daná rovna $e$. Podobně

$$\lim_{x=\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1,$$

$$\lim_{x=+0} x^x=1 \quad \text{(viz odst. 167. př. 1.).}$$

3. Limita

$$\lim_{x=\infty} x^2 \log \frac{x^2+2ax+b}{x^2+2Ax+B}=\lim_{x=\infty} \log \frac{x^2+2ax+b}{x^2+2Ax+B}:\frac{1}{x^2}.$$

Užijeme-li věty odst. 168. na poslední podíl (tvar $\frac{0}{0}$), máme, že limita hledaná jest rovna limitě

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{2(x+a)}{x^2+2ax+b}-\frac{2(x+A)}{x^2+2Ax+B}\right]:-\frac{2}{x^3}.$$

Limita tato jest $+\infty$, resp. $-\infty$, není-li $A=a$; je-li $A=a$, jest

$$\lim_{x=\infty} x^2 \log \frac{x^2+2ax+b}{x^2+2Ax+B}=b-B.$$

## 7. O maximech a minimech funkce jedné proměnné.

**170.** Uvažujeme-li funkci $f(x)$ v intervalu $(a, b)$, ve kterém jest ve všech bodech definována, naskytá se často otázka po největší nebo nejmenší hodnotě té funkce v intervalu $(a, b)$. Může nastati, že největší (resp. nejmenší) hodnoty nabývá funkce v jednom z hraničných bodů intervalu $(a, b)$. Ku př. při funkci rostoucí v $(a, b)$ jest $f(a)$ nejmenší, $f(b)$ pak největší hodnotou té funkce v $(a, b)$. Může však také funkce nabývati své největší resp. nejmenší hodnoty i pro body ležící uvnitř intervalu a konečně jsou funkce definované v $(a, b)$, jež nenabývají v $(a, b)$ největší (resp. nejmenší) hodnoty, jakož na jednom příkladě ukážeme.

Nazýváme pak největší hodnotu, které $f(x)$ v intervalu $(a, b)$ nabývá, **absolutním maximem funkce $f(x)$ v intervalu** $(a, b)$; nejmenší pak hodnotu její *absolutním minimem funkce $f(x)$ v intervalu* $(a, b)$; absolutní maximum a absolutní minimum zahrnujeme pak jediným pojmenováním jakožto *absolutní* **extrém**.*)

*) Pojmenování v nauce o maximech a minimech používaná jsou dosud neustálená; někteří autoři ku př. pod pojmenováním absolutní maximum rozumějí to, co v této knize pojmenováno relativním maximem. Volba pojmenování provedena tu ve shodě s „Encyklopädie der math. Wis." II A 2, 16.

*Příklady.* 1. Funkce $\sin x$ má v intervalu $(0, 4\pi)$ absolutní maximum 1, nabývá ho v bodech $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; absolutní minimum má $-1$ a to v bodech $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$. Kdybychom funkci tu uvažovali v intervalu $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, měli bychom absolutní extrémy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to v krajních bodech toho intervalu.

2. Funkce definovaná v intervalu $(0, 1)$ rovnicemi

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pro } 0 < x \leqq 1, \quad f(0) = 0$$

nemá absolutního maxima, absolutní minimum jest 0 pro $x = 0$.

Z příslušných pojmů jest patrna ihned správnost věty: Funkce $f(x)$ může míti jenom tenkráte absolutní maximum v $(a, b)$, je-li $f(x)$ v $(a, b)$ shora ohraničena; absolutní maximum pak — jestliže existuje — jest rovno horní hranici funkčních hodnot v $(a, b)$. Obdobná věta platí i pro absolutní minimum.

Při funkcích spojitých pak *pojem horní resp. dolní hranice funkčních hodnot v intervalu* $(a, b)$ *vůbec splývá s pojmem absolutního maxima* (*resp. minima*) (odst. 79.)

**171. Relativní maximum resp. minimum.** Důležitější pro nás však jest nyní pojem relativního maxima. Říkáme, že funkce $f(x)$ nabývá v bodě $x_0$ relativního maxima, jestliže $f(x_0)$ jest větší než hodnoty funkce $f(x)$ ve všech bodech jistého okolí bodu $x_0$. Okolí to pak nachází se uvnitř intervalu $(a, b)$, ve kterém $f(x)$ jest definováno a obsahuje body na levo i na pravo od $x_0$. Analyticky můžeme vyjádřiti definici relativního maxima takto: *V bodě $x_0$ má $f(x)$ relativní maximum, jestliže*

$$f(x_0) > f(x_0 + h) \quad \textit{pro všecka } h, \textit{ pro něž } 0 < |h| < \eta;$$

$\eta$ jest jisté číslo kladné vhodně (vzhledem k $f(x)$, $(a, b)$ a bodu $x_0$) volené. Anebo: *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ relativní maximum, lze-li udati číslo kladné $\eta$ tak, aby*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 \quad \textit{pro všecka } h, \textit{ pro něž } 0 < |h| < \eta. \qquad \text{(I)}$$

Podobně se stanoví: *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ relativní minimum, lze-li udati číslo kladné $\eta$ tak, aby*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \quad \textit{pro všecka } h, \textit{ pro něž } 0 < |h| < \eta. \qquad \text{(I')}$$

Relativní maxima a minima slují souhrnným jménem **relativní extrémy**.

*Poznámka.* Kdyby (I) neplatila, avšak místo toho bylo

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqq 0 \quad \text{pro všecka } h, \text{ pro něž } 0<|h|<\eta$$

ať si zvolíme $\eta$ jakkoliv malé, pak by nastal případ, který bývá označován jakožto *nevlastní relativní maximum.* Obdobně *nevlastní rel. minimum, nevlastní rel. extrém.*

***Příklady.*** 1. Funkce

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

má v bodě $x=0$ relativní maximum. Neboť jest

$$\frac{1}{1+h^2}-\frac{1}{1+0^2}<0 \quad \text{pro všecka } h \text{ od nully různá.}$$

V tomto případě relativní maximum splývá s absolutním maximem.

2. Funkce $f(x)=\sin x$ má relativní maxima v bodech $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, relativní minima pak v bodech $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Při tom jest $k$ libovolné číslo celé.

3. Funkce definovaná vztahy

$$f(x)=\left(x\sin\frac{\pi}{x}\right)^2 \quad \text{pro } x\gtrless 0; \quad f(0)=0$$

jest funkcí spojitou definovanou pro každé $x$. Jest zároveň stále rovna číslu buď kladnému buď nulle rovnému. Poněvadž $f(0)=0$, dalo by se očekávati, že pro $x=0$ nastává relativní (a tu zároveň i absolutní) minimum. Ve skutečnosti však nelze zvoliti číslo $\eta$ tak, aby byla splněna (I'); neboť v každém okolí bodu $x=0$ nacházejí se hodnoty, pro něž daná funkce se stává také nullou. Stává se totiž nullou pro $x=0$ a pro všecky body $x=\frac{1}{k}$, kde $k$ jest číslo celé. Jest tedy splněna toliko nerovnina

$$\left(h\sin\frac{\pi}{h}\right)^2-0\geqq 0 \quad \text{pro všecka } h, \text{ pro něž } 0<|h|<\eta,$$

ať si $\eta$ zvolíme jakkoliv malé. Má tedy funkce v bodě $x=0$ toliko nevlastní minimum.

**172. Podmínky pro relativní extrém.** Zavedeme-li pro funkci $f(x)$ některé předpoklady, můžeme o funkci té předem rozhodovat, zda a ve kterých bodech nastává extrém.

1. Nejprve učiníme předpoklad, že *funkce má ve všech bodech jistého intervalu první derivaci.* Pak z úvah odst. 102. vyplývá ihned, že **nutná podmínka**, *aby v bodě $x_0$, uvnitř toho intervalu se nacházejícího, nastal relativní extrém, jest, aby derivace funkce v bodě $x_0$ byla rovna nulle*; t j. *aby* $f'(x_0) = 0$.

Na základě však věty o střední hodnotě můžeme snadno odvoditi podmínky *postačující* ku relativnímu extrému v bodě $x_0$. Nastává-li ku př. v $x_0$ relativní maximum, jest dle (I) a dle věty o střední hodnotě

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \Theta h) < 0 \text{ pro všecka } h, \quad \text{pro něž } 0 < |h| < \eta; \quad (1)$$

$0 < \Theta < 1$. Nerovnina tato bude jistě splněna, jestliže pro všecka $h$ kladná a menší než $\eta$ bude $f'(x_0 + h) < 0$ (pak bude pro ta $h$ i $f'(x_0 + \Theta h) < 0$) a jestliže zároveň pro všecka $h$ záporná a v absolutní hodnotě menší než $\eta$, bude $f'(x_0 + h) > 0$. Jest tedy platna věta: **Postačitelná podmínka**, *aby funkce $f(x)$, mající ve všech bodech jistého intervalu derivaci, měla v bodě $x_0$ uvnitř toho intervalu ležícího relativní maximum, jest, aby $f'(x)$, když $x$ prochází bodem $x_0$ rostouc, měnila své znaménko, přecházejíc od hodnot kladných k záporným.* A obdobně: *Jestliže $f'(x)$, když $x$ prochází bodem $x_0$ rostouc, mění své znaménko přecházejíc od hodnot záporných ke kladným, jest v bodě $x_0$ relativní minimum funkce $f(x)$.*

2. Na druhém místě učiníme předpoklad nejčastěji platný, že $f(x)$ *má ve všech bodech jistého intervalu derivace všech řádů* (a tudíž spojité). V bodě $x_0$ buďtež derivace prvých $(n-1)$ řádů rovny nulle a derivace $n$-tého řádu různa od nully. Pak dle formule Taylorovy se zbytkem Lagrangeovým lze psáti pro jisté okolí bodu $x_0$ (t. j. pro všecka $|h| < \eta_1$, kde $\eta_1$ vhodně volené číslo):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \Theta h), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Jelikož $f^{(n)}(x)$ jest spojitá funkce, má pravá strana, je-li $h$ v jistém intervalu $(-\eta, \eta)$, totéž znaménko, jako $h^n f^{(n)}(x_0)$. Tento výraz, je-li $n$ liché, mění své znaménko, mění-li $h$ znaménko, a není tudíž, je-li $n$ liché, v bodě $x = x_0$ ani maximum ani minimum. Je-li $n$ sudé a zároveň $f^{(n)}(x_0)$ kladné, jest výraz poslední kladný pro všecka $h$, pro něž $|h| < \eta$, a funkce $f(x)$ má v bodě $x = x_0$ minimum; je-li $n$ sudé a $f^{(n)}(x_0)$ záporné, má funkce $f(x)$ v bodě $x = x_0$ maximum. Máme tedy větu:

*Má-li funkce $f(x)$ v jistém intervalu, uvnitř něhož se nachází bod $x_0$, spojité derivace prvých $n$ řádů a jestliže*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = 0, \ldots \quad f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

*pak nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(x)$ měla v bodě $x = x_0$ relativní extrém, jest, aby bylo n sudé. Jestliže $f^{(n)}(x_0) > 0$, jest extrém ten minimem, pro $f^{(n)}(x_0) < 0$ pak jest maximem.*

Věty právě odvozené postačují v případech zpravidla se naskytujících ku vyšetření bodů, ve kterých funkce daná $f(x)$ dosahuje extrémní hodnoty. Propočítám v následujícím některé příklady, při čemž budu užívati buď věty 1. aneb 2. dle toho, která jest právě výhodnější.

*Příklad* 1. Stanoviti jest extrémy funkce $y = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta$ v intervalu $(a, b)$; $a < b$; $\alpha$, $\beta$ reálná čísla, různá od nully. Jest

$$y' = (x - a)^{\alpha - 1} (b - x)^{\beta - 1} [-(\alpha + \beta) x + (b\alpha + a\beta)].$$

Extrém může nastati uvnitř intervalu $(a, b)$ toliko v bodě

$$x_0 = \frac{b\alpha + a\beta}{\alpha + \beta},$$

(ve kterémž derivace se rovná nulle), jestliže ovšem $x_0$ jest uvnitř $(a, b)$. Avšak $x_0$ nenachází se uvnitř $(a, b)$. jsou-li $\alpha$, $\beta$ protivného znaménka; v tomto případě nenastává relativní extrém v $(a, b)$. Mají-li $\alpha$, $\beta$ stejná znaménka, jest $a < x_0 < b$ a $y'$ mění při průchodu neodvisle proměnné hodnotou $x_0$ své znaménko. Nastává tedy v tomto případě v $x_0$ relativní extrém a to maximum, jestliže $\alpha > 0$, $\beta > 0$, minimum pak, jestliže $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

Které extrémy má daná funkce, jsou-li $\alpha$, $\beta$ celá čísla, v intervalu $(-\infty, \infty)$?

*Příklad* 2. Stanoviti jest extrémy pro plochu čtyřúhelníka, jehož čtyři strany $a$, $b$, $c$, $d$ jsou dány. Značí-li $x$ úhel sevřený stranami $a$, $b$, $x'$ pak úhel stranami $c$, $d$, jest funkce

$$y = ab \sin x + cd \sin x' \tag{$\alpha$}$$

rovna dvojnásobné ploše čtyřúhelníka vyšetřovaného. O $x$ budeme předpokládati, že jest v intervalu $(0, \pi)$; mezi $x$, $x'$ pak jest vztah (dle Carnotovy věty)

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos x', \tag{$\beta$}$$

na jehož základě můžeme pokládati $x'$ za funkci proměnné $x$ a $y$ rovněž za funkci jediné proměnné $x$. Extrém nastati může toliko pro hodnoty hovící rovnici

$$y' = ab \cos x + cd \cos x' \cdot \frac{dx'}{dx} = 0. \tag{$\gamma$}$$

Avšak dle $(\beta)$ jest (derivujeme-li ji)

$$2ab \sin x = 2cd \sin x' \frac{dx'}{dx}$$

a tedy

$$y' = ab \sin x \,(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x') = \frac{ab \sin (x + x')}{\sin x'};$$

nastává tudíž extrém funkce ($\alpha$) toliko pro hodnoty, pro něž

$$1. \quad x + x' = \pi \quad \text{aneb} \quad 2. \quad x + x' = 0.$$

Pro druhou derivaci máme v těchto dvou případech (hodnotu proměnné $x$ hovící ($\beta$) a jedné z těchto dvou podmínek označíme $x_0$, hodnoty funkční příslušné vyznačíme rovněž indexem 0)

$$1. \quad y_0'' = -\frac{ab\,(ab + cd)}{cd \sin x_0}, \qquad 2. \quad y_0'' = -\frac{ab\,(ab - cd)}{cd \sin x_0}.$$

Nastává tedy v případě 1. maximum, v případě 2. maximum, je-li $cd < ab$, minimum, je-li $cd > ab$. Příslušné extrémy jsou (jak snadným počtem plyne)

$$1. \quad y_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)};$$

$$2. \quad y_0 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)}.$$

kde znaménko horní jest voliti, je-li $ab > cd$, dolní, když $ab < cd$. Toliko případ 1. má význam geometrický úlohou vytčený; jaký geometrický význam má případ 2., vyšetří snadno čtenář.

Na základě provedené úvahy vyplývá věta: Ze čtyřúhelníků o daných čtyrech stranách má čtyřúhelník, kterému lze opsati kruh, největší plošný obsah. A dále: Z $n$-úhelníků, jichž strany jsou dány, má $n$-úhelník, kterému lze opsati kruh, největší plošný obsah.*)

*Příklad* 3. K určení extrémů *polynomu* $P(x)$ stačí psáti derivaci jeho ve tvaru

$$P'(x) = (x - \alpha_1)^{a_1} (x - \alpha_2)^{a_2} \ldots (x - \alpha_\varrho)^{a_\varrho} P_1(x),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ jsou veškeré reálné kořeny rovnice $P'(x) = 0$ násobnosti liché ($a_1, a_2, \ldots$ jsou tedy celá čísla lichá); buďtež dále tyto kořeny spořádány dle velikosti tak, že $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_\varrho$. $P_1(x)$ potom, když $x$ se libovolně mění, nemění své znaménko. Buď jeho znaménko kladné. Pak dle věty 1. nastává, když $x = \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots$, minimum, když $x = \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots$, nastává maximum polynomu $P(x)$.

*) Předpokládati při tom nutno, že při daných stranách existuje vždy $n$-úhelník konvexní, který má maximální plošný obsah (lze-li vůbec z daných $n$ stran nějaký $n$-úhelník konstruovati). Důkaz tohoto předpokladu vyplyne snadno z věty o funkcích spojitých (odst. 191., věta 3.); plocha konvexního $n$-úhelníka o daných stranách jest totiž spojitou funkcí $n - 3$ úhlů dvou sousedních stran.

Tak ku př. je-li $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$, jest $P'(x) = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$ a nastává pro $x = 2$ minimum, pro $x = 1$ pak maximum; $P(2) = 10$, $P(1) = 11$.

*Příklad* 4. Abychom stanovili extrémy racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$, píšeme derivaci ve tvaru $\frac{M(x)}{N(x)}$, kde $M$ a $N$ jsou mnohočleny bez společné míry. Sestavíme kořeny *obou* rovnic $M(x) = 0$, $N(x) = 0$, pokud jsou násobnosti liché, v *jedinou* řadu dle velikosti, jako v příkladu předcházejícím. Pak, je-li $\frac{M(\infty)}{N(\infty)}$ kladné aneb $+0$, jsou kořeny rovnice $M(x) = 0$ na prvém, třetím, ... místě v řadě se nacházející hodnotami, pro něž nastává minimum dané racionálné funkce, kořeny pak rovnice $M(x) = 0$ nacházející se na sudém místě udávají, kdy jest maximum. Ku př. pro

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{(x-1)^2} \quad \text{jest } y' = -\frac{(a+2)x + (a+2b)}{(x-1)^3}$$

a nastává, je-li $a < -2$ a je-li prvá z obou hodnot

$$-\frac{a+2b}{a+2}, \ 1$$

větší, pro tuto prvou hodnotu minimum daného výrazu. Je-li $a > -2$, pak maximum. Opačně jest tomu, je-li prvá z obou vytknutých hodnot menší. Jestliže $a = -2$, nemá daná funkce relativního (ani absolutního) extrému.

*Příklad* 5. Stanoviti jest maxima a minima funkce proměnné $x$

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x),$$

kde předpokládáme k vůli jednoduchosti, že i $F$ i $\varphi$ jsou funkce mající spojité derivace prvního řádu, kteréžto derivace mají nad to v okolí bodů, v nichž stávají se nullou, a to v okolí v pravo i v okolí v levo určitá znaménka. Derivace funkce $y$ jest $y' = F'(u)u'$. Může tudíž daná funkce míti extrém jenom v bodech, ve kterých buď

$$F'(u) = 0, \quad \text{aneb} \quad u' = \varphi'(x) = 0,$$

to jest především v bodech, ve kterých buď $F(u)$ jako funkce proměnné $u$ nabývá extrému, aneb v bodech, ve kterých $u$ jakožto funkce proměnné $x$ nabývá extrému. Uvažujme případ prvý a buďiž $u_0$ hodnota taková, že $F(u_0)$ jest ku př. maximum, pokládáme-li $F(u)$ za funkci proměnné $u$. Pak $F'(u)$, když $u$ prochází hodnotou $u_0$ rostouc, přechází od hodnot kladných k záporným. Totéž platí i pro $F'(u)$, pokládáme-li ji za funkci proměnné $x$, je-li jenom $u' = \varphi'(x)$ pro ta $x$, pro něž $u = u_0$, různé od nully; je-li jedno takové $x = x_0$ (takže $u_0 = \varphi(x_0)$ a $\varphi'(x_0) \gtreqless 0$) pak $F'(u)u'$, když $x$ prochází hodnotou $x_0$ rostouc, přechází rovněž od hodnot kladných k záporným, ať jest $\varphi'(x_0)$ kladné či záporné. Avšak totéž platí i když $\varphi'(x_0) = 0$, ať již funkce $\varphi(x)$ má v bodě $x = x_0$ extrém či ne, jak čtenář rozborem otázky, jaká změna znaménková při $F'(u)u'$ nastává, když $x$ prochází $x_0$, snadno dokáže.

Máme tedy nejprve tento výsledek: *Má-li $F(u)$ jakožto funkce proměnné $u$ v bodě $u = u_0$ maximum (resp. minimum), má funkce ta maximum (resp. minimum) i jako funkce proměnné $x$ a to pro všecka $x_0$, pro něž $u_0 = \varphi(x_0)$.*

V případě druhém, má li $u = \varphi(x)$ v bodě $x = x_1$ extrém ku př. maximum $u_1 = \varphi(x_1)$, přechází $u' = \varphi'(x)$, když $x$ prochází hodnotou $x_1$ rostouc, od hodnot kladných k záporným. Totéž platí i pro $F'(u)u'$, je-li $F'(u_1) > 0$ aneb aspoň, je-li $F'(u) > 0$ pro všecka $u$, pro něž $u_1 - \delta < u < u_1$, kde $\delta$ jest kladné vhodně volené číslo; je-li však $F'(u_1) < 0$ (aneb aspoň v intervalu právě vytčeném $F'(u) < 0$), přechází $F'(u)u'$, když $x$ prochází hodnotou $x_1$ rostouc, od hodnot záporných ke kladným. Jest tedy za posledního předpokladu $F(u_1)$ minimum, za dřívějšího předpokladu jest $F(u_1)$ maximum. Tudíž máme pro funkci $F(\varphi(x))$ tento výsledek: *Funkce tato má v bodě $x = x_1$ maximum, je-li $u_1 = \varphi(x_1)$ maximem (resp. minimem) funkce $\varphi(x)$ a zároveň $F'(u) > 0$ pro všecka $u$, pro něž $u_1 - \delta < u < u_1$ (resp. $F'(u) < 0$, pro všecka $u$, pro něž $u_1 < u < u_1 + \delta$).* Funkce $F(\varphi(x))$ má dále v bodě $x = x_1$ minimum, je-li $u_1 = \varphi(x_1)$ minimem (resp maximem) funkce $\varphi(x)$ a zároveň $F'(u) > 0$ pro všecka $u$, pro něž $u_1 < u < u_1 + \delta$ (resp. $F'(u) < 0$ pro $u_1 - \delta < u < u_1$).

Jestliže konečně v bodě $x = x_2$, ve kterémž $u_2 = \varphi(x_2)$, jest buď $F'(u_2) = 0$ aneb $\varphi'(x_2) = 0$, aneb konečně obojí současně a jestliže ani funkce proměnné $u$ $F(u)$ nemá v bodě $u_2$ extrém, ani $\varphi(x)$ v bodě $x = x_2$, nemá extrém ani $F(\varphi(x))$ v bodě $x = x_2$, jak čtenář snadno nahlédne.

Tak ku př. funkce

$$y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos x} \quad \text{aneb jinak psáno} \quad y = u^2 + \frac{1}{u}, \quad u = \cos x$$

má extrémy nejprve v bodech $x_0$, pro které $2u_0 - u_0^{-2} = 0$, t. j. pro které $u_0 = 2^{-\frac{1}{3}}$; tato jsou vesměs minima. Dále má extrémy v bodech, pro které $u' = -\sin x = 0$, t. j. pro $x_1 = k\pi$, $k$ celé číslo. Ta jsou pro $k$ sudé i pro $k$ liché maxima.

Čtenář nechť odvodí věty svrchu dokázané prostým užitím definice extrému.

**173.** *Příklad.* Budiž dána v intervalu $(-1, 1)$ funkce $f(x)$ těmito vztahy

$$f(x) = 2x^2 - |x| \sin\frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Funkce tato jest spojitá a má derivaci pro všecka $x$ v $(-1, 1)$. Ve všech bodech tohoto intervalu jest kladná, vyjma v bodě $x = 0$, kdy stává se nullou. Má tedy v bodě $x = 0$ relativní (avšak i absolutní) minimum. Podmínka nutná pro existenci minima jest splněna, neboť derivace v bodě 0 jest rovna nulle; naproti tomu podmínka k extrému postačující (odst. 172.) (že derivace mění své znaménko, když proměnná prochází hodnotou, pro níž nastává extrém) splněna není. Neboť pro $x$ různé od nully jest

$$f'(x) = 4x \mp \frac{5}{2} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x} + |x|^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{x}, \quad \begin{array}{r} \text{horní znaménko pro } x > 0, \\ \text{dolní pro } x < 0. \end{array}$$

Funkce $f'(x)$ jest spojitou v bodě $x = 0$, nemá však v okolí toho bodu ani pro $x > 0$ ani pro $x < 0$ určité znaménko, ať si to okolí zvolíme tak malé, jak chceme. Neboť když $x$ blíží se k nulle, pak aspoň pro ty hodnoty, pro které $\cos\frac{1}{x} = \pm 1$, t. j. pro hodnoty $x = \frac{1}{k\pi}$ ($k$ celistvé) rozhoduje o znaménku derivace $f'(x)$, je-li $x$ dosti malé (totiž je-li $|x|^{\frac{1}{2}} > 4|x|$, $|x| < \frac{1}{16}$), člen poslední a ten je kladný či záporný dle toho, je-li $k$ sudé či liché.

Z příkladu tohoto jest patrno, že podmínka odst. 172., uvedená jakožto k extrému postačující, není podmínkou nutnou.

**174.** Dokázali jsme, že v bodech, ve kterých funkce má relativní extrém a zároveň derivaci, derivace tato nutně jest rovna nulle. Jestliže tedy jest naším úkolem vyšetřovati všecky relativní extrémy nějaké funkce v intervalu $(a, b)$, pak jest především třeba vyšetřovati body, v nichž derivace funkce jest rovna nulle.

Mimo tyto body nastávati může extrém ještě v jiných bodech (v nichž tudíž derivace vůbec neexistuje). Uvedu některé důležitější případy, při čemž se ovšem omezím na funkce spojité.

1. V bodě $x_0$ derivace sice neexistuje, avšak existuje v jeho okolí. Pak, je-li v okolí z prava kladná, z leva záporná, nastává v $x_0$ relativní minimum; je-li na pravo záporná, na levo kladná maximum. Plyne to z věty o střední hodnotě (viz rovnice (1) odst. 172.), která jest platna i když v bodě $x_0$ není derivace.

2. V bodě $x_0$ jest derivace funkce $f(x)$ z leva záporná, derivace z prava kladná; pak má $f(x)$ v bodě $x_0$ relativní minimum, obdobné pravidlo jest i pro rel. maximum. Viz odst. 102., pozn. 3.

3. Funkce $f(x)$ má v $x_0$ derivaci z prava $+\infty$, z leva $-\infty$, pak má $f(x)$ v bodě $x_0$ minimum; jestliže $f'^{+}(x_0) = -\infty$, $f'^{-}(x_0) = +\infty$, jest v $x_0$ maximum.

Osvětlím věty tyto na příkladech.

*Příklad* 1. Funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

jest spojitá a má v bodě $x = 1$ relativní (a také absolutní) minimum. Derivace této funkce jest

$$f'(x) = \tfrac{2}{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{pro } x \neq 1.$$

Na pravo od $x = 1$ jest kladnou, na levo pak zápornou. Lze užiti též svrchu uvedeného pravidla 3.

*Příklad* 2. Funkce $y = |x|$ má v bodě $x = 0$ derivaci z leva $-1$, derivaci z prava $+1$; v bodě $x = 0$ má tudíž minimum (relat i absol.).

*Příklad* 3. Funkce definovaná rovnicemi

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

jest funkcí v bodě 0 a jeho okolí spojitou. Jelikož jest v okolí bodu $x = 0$ zápornou, vyjma bod $x = 0$, kde jest rovna nulle, jest v bodě $x = 0$ maximum; funkce $f(x)$ však nemá v bodě tom vůbec derivaci. Má ovšem derivaci z prava rovnou nulle a derivaci z leva rovnou 1, jak čtenář snadno dokáže. Příklad tento ukazuje, že i v případech, kdy jedna z derivací z prava a z leva jest rovna nulle, může míti $f(x)$ relativní extrém.