II. O limitách

In: Karel Petr (author): Počet differenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1923. pp. 20–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402690

dáme všechna čísla a, pro něž $u^a < \gamma$; do skupiny B dáme všechna čísla b, pro něž $u^b > \gamma$. Patrně jest každé b větší než každé a (viz odst. předch.) a poněvadž vytčeným rozdělením jsou všechna čísla rac. vyčerpána (ve zvláštním případě s vyjmutím jednoho čísla c_1, pro které pak jest $u^{c_1} = \gamma$), mají skupiny A a B vskutku všechny tři základní vlastnosti a definují tudíž určité číslo γ_1. Abychom dokázali, že platna jest nyní rovnice (4), stanovme u^{γ_1} dle předpisu předcházejícího odstavce tím, že sestrojíme nové dvě skupiny C, D. V prvé budou všechna čísla reálná, která jsou menší než některé u^a, v druhé všechna čísla reálná, která jsou větší než některé u^b. Čísla c skupiny C jsou menší než γ, čísla d skupiny D větší než γ. Jelikož pak dle předchozího odstavce C i D mají tři základní vlastnosti, jest skupinami těmi dáno číslo a to jest právě γ. Jest tedy (4) vskutku splněna. Podobně by se provedl důkaz, kdyby $u < 1$.

Z definice logarithmů vyplývají snadno věty z elementů známé:

$$\log_u(\gamma\gamma') = \log_u \gamma + \log_u \gamma', \quad \log_u \gamma^\mu = \mu \log_u \gamma$$

a jiné Z rovnice (4) následuje přímo

$$u = \gamma^{\frac{1}{\gamma_1}}.$$

Je-li $u > 1$ a $\gamma > \gamma'$, jest i $\log_u \gamma > \log_u \gamma'$.

II. O limitách.

22. Množství číselná. Pod množstvím číselným vyrozumíváme souhrn (sbírku) čísel dle určitého předpisu vybraných. Tak ku př. 1, 3, 7, tvoří dohromady množství číselné o třech členech. Všechna čísla racionálná kladná a menší než 1 tvoří rovněž množství číselné; počet členů tohoto množství jest nekonečný. Čísla

$$(m) \qquad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

tvoří číselné množství rovněž o nekonečném počtu členů.

Množství číselné jest **shora ohraničeno**, lze-li udati číslo L tak, že všechna čísla množství jsou menší než L. Množství číselné jest **zdola ohraničeno**, lze-li udati číslo l tak, že všechna čísla množství jsou větší než číslo l.

Ku př.: Souhrn čísel racionálných kladných a menších než 1 tvoří množství ohraničené shora i zdola. Množství číselné (m) jest rovněž shora i zdola ohraničeno, neboť všechna čísla toho množství jsou menší než 2 a větší než 0. Množství číselné dané přirozenou řadou čísel celých 1. 2, 3, ... n ... jest sice ohraničeno zdola, nikoliv však shora, neboť lze udati čísla v tomto množství, která jsou větší než každé číslo A.

Poznámka. V předcházející kapitole používali jsme již rčení „nesčíslné množství" ve smyslu snadno přístupném a neodporujícím definici množství zde podané.

23. Veličina proměnná a některá jiná často užívaná pojmenování a zkratky. Ve výrazech, které tvoří předmět analyse a algebry, vyskytují se často veličiny, jež mohou nabývati různé hodnoty vybrané z jistého množství číselného. Takovýmto veličinám říkáme *veličiny proměnné*, příslušnému množství číselnému **obor veličiny proměnné**. Tak ku př. ve vztahu $xy = yx$ můžeme za x i y dosazovati jakákoliv čísla reálnáa aniž by platnost vztahu byla dotčena a můžeme tudíž x, y pokládati za proměnné, jichž oborem je souhrn čísel reálných. V nerovnině

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-a},$$

kde a jest určité číslo kladné, můžeme pokládati x za proměnnou, jejíž obor tvoří všechna čísla reálná větší než a a všechna čísla záporná. V rovnici konečně $\sin \pi x = 0$ lze x pokládati za proměnnou, jejímž oborem jsou všechna čísla celistvá.

Veličiny numerické (jako ku př. právě uvedené číslo π), anebo takové, o nichž předpokládáme, že v úvaze příslušné hodnotu svoji nemění, nazývají se *konstantní* nebo konstanty.

Velmi často omezuje se veličina proměnná na hodnoty určitého množství, jež položeny jsou mezi dvěma čísly a a b. K vůli kratšímu vyjádřování budeme nazývati souhrn čísel reálných položených mezi a, b **intervalem** (a, b), při čemž zpravidla činíme předpoklad, že $a < b$, a máme na mysli všechna čísla reálná mezi a a b *včetně* a i b. Odloučíme-li z intervalu (a, b) bod a, užíváme (při $a < b$!) pro zbývající množství označení $(a + 0, b)$; označením $(a, b - 0)$ resp. $(a + 0, b - 0)$ rozumí se interval (a, b) zbavený bodu b, resp. bodů a, b.

Značí tedy ku př. čísla celistvá intervalu $(a, b - 0)$ všechna čísla celistvá n, pro něž platna jest nerovnina $a \leqq n < b$.

Jelikož závorek kulatých, obsahujících dvě veličiny oddělené čárkou, výhradně užívati budeme pro označení intervalu, budeme často slovo interval vynechávati a psáti ku př. číslo v (a, b) místo číslo v intervalu (a, b).

Zhusta se používá místo slova *číslo* pojmenování **bod.** Toto pojmenování má patrně původ jednak v zobrazování všech reálných čísel na ose čísel reálných, jednak v geometrickém znázorňování vztahů mezi veličinami proměnnými. Je-li tedy řeč o bodu c intervalu (a, b) myslíme tím jednu hodnotu c, pro níž $a \leq c \leq b$; rčení „bod c *uvnitř intervalu* (a, b)“ značí hodnotu c, pro níž $a < c < b$, t. j. bod intervalu $(a + 0, b - 0)$.

Konečně jest třeba vyložiti pojmenování **okolí bodu**. Pod okolím bodu c vyrozumíváme všechny body intervalu $(c - \varepsilon', c + \varepsilon)$ *vyjma bod c sám*. Při tom jsou $\varepsilon, \varepsilon'$, čísla *kladná* vhodně volená. Obyčejně klademe $\varepsilon' = \varepsilon$ (abychom nezaváděli zbytečných značek). Konečně mluvíme o okolí bodu *c v pravo* a okolí bodu *c v levo*. Při tom máme na mysli v prvém případě body intervalu $(c + 0, c + \varepsilon)$ a v druhém $(c - \varepsilon, c - 0)$.*)

Někdy se také k vůli stručnosti užívá pojmenování interval (a, ∞); míní se tu hodnoty reálné, jež jsou větší po případě rovny číslu a. Jaký význam mají intervaly $(a + 0, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$ a pod, jest patrno.

Konečně pod okolím bodu $+\infty$ máme na mysli reálná čísla větší než L, kde kladné číslo L si můžeme zvoliti tak veliké, jak chceme; obdobný význam má výraz okolí bodu $-\infty$.

24. Horní hranice (dolní hranice). Mějmež množství číselné shora ohraničené. Rozdělme všechna čísla racionálná na dvě skupiny A, B. Do dolní skupiny A nechť patří každé číslo racionálné menší ($\leq$) než *některé* z čísel daného množství, do B nechť patří každé racionálné číslo, které jest větší než *každé* číslo daného množství. Tyto dvě skupiny definují dle odstavce 6. jisté reálné číslo M. To pak má vlastnost: *Žádné číslo z daného množství není větší než číslo M; avšak jsou čísla (resp. číslo) daného množství, která jsou větší než M — ε, je-li ε číslo kladné. Číslo M sluje horní hranice daného množství číselného shora ohraničeného.*

Patří-li M k danému množství, jest M číslo největší z daného množství číselného. Nepatří-li M k danému množství, jest mezi M a $M - \varepsilon$ nekonečný počet čísel daného množství. Neboť, kdyby mezi M a $M - \varepsilon$ byl jenom konečný počet čísel daného množství a největší z tohoto konečného počtu bylo M_1, nebylo by v intervalu $(M_1 + 0, M)$ žádných čísel daného množství a M nebylo by horní hranicí daného množství, jak předpokládáno, nýbrž $M_1 < M$.

Obdobně *se dokáže existence dolní hranice m při množství číselném zdola ohraničeném, mající tuto vlastnost. Žádné číslo daného množství není menší než číslo m; avšak jsou čísla (resp. číslo) daného množství, která jsou menší než m + ε, je-li ε libovolné číslo kladné.*

---

*) Osu číselnou si při tom očividně myslíme před sebou horizontálně.

Patří-li m k danému množství, jest m nejmenší z čísel daného množství. Nepatří-li k němu, jest mezi m a $m + \varepsilon$ nekonečný počet čísel daného množství.

Poznámka. Není-li dané množství číselné shora ohraničeno, můžeme tuto okolnost krátce vyslovovati též tak, že horní hranice daného množství jest ∞. Podobný význam má také rčení, že dolní hranice daného množství jest $-\infty$. Avšak podotýkám výslovně, že v prvém případě zde vytčeném neexistuje horní hranice (v druhém pak dolní hranice) a že běží tu pouze o symbolickou brachylogii, která, jak doufám, nepovede k nedorozumění.

25. Body zhuštění. Mějmež množství číselné shora i zdola ohraničené; M a m buďtež jeho horní a dolní hranice. Množství číselné nechť obsahuje nekonečné množství čísel. Pak lze udati v intervalu (m, M) aspoň jeden bod takový, že v každém okolí jeho nachází se nekonečné množství čísel daného množství (t. j. že mezi $\alpha - \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon$, ať si zvolíme ε jakkoliv malé, nacházejí se body daného množství různé od α, a ovšem v nekonečném množství). Abychom to dokázali, rozdělíme všechna reálná čísla ve dvě skupiny A, B. Do dolní dáme všechna čísla reálná $\leq m$ a mimo to všechna čísla reálná a taková, že v intervalu (m, a) jest jenom konečný počet čísel daného množství. Do skupiny B dáme všechna ostatní čísla reálná. Jest patrno, že toto rozdělení jest možno, neboť o každém a dovedeme říci, zda v intervalu (m, a) jest konečný či nekonečný počet čísel daného množství, a dále jest patrno, že každé číslo skupiny A jest menší než každé číslo skupiny B. Mají tedy skupiny A, B vlastnosti v odst. 5 vytčené a stanoví tudíž reálné číslo α (jakožto rozhraní obou skupin), jež jest právě bodem vytčené vlastnosti. Neboť, jak z důkazu vyplývá, jest v $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ nekonečné množství čísel daného množství, jelikož $\alpha + \varepsilon$ jest číslem horní skupiny B (ať si ε zvolíme jakkoliv malé) a $\alpha - \varepsilon$ číslem ze skupiny A a tudíž mezi m a $\alpha - \varepsilon$ jest jenom konečný počet čísel daného množství a mezi m a $\alpha + \varepsilon$ pak nekonečný počet.

Číslo α může splývati s m, pak jest m bodem, v jehož okolí v pravo se nachází nekonečné množství čísel daného množství. Patří-li α ke skupině dolní A, jest v (m, α) konečný počet hodnot daného množství a nekonečný počet hodnot jest v okolí bodu α rovněž pouze v pravo od bodu α.

Body α, jichž existence jest v důkaze prokázána, slují *body zhuštění.* Dokázali jsme pak, že *množství číselné shora i zdola ohraničené a obsahující nekonečné množství čísel má aspoň jeden bod zhuštění.*

Rozdělení ve skupiny A, B při důkaze právě provedeném použité mohli jsme provésti také takto. Do skupiny B dáme všechna reálná čísla $\geqq M$ a mimo to ještě čísla b taková, že mezi b a M jest jenom konečný počet čísel daného množství. Do skupiny A dáme čísla ostatní. Skupiny takto volené definují jisté číslo β, které z týchž důvodů právě jako α jest *bodem zhuštění* daného množství. Splývají-li α a β má dané množství číselné toliko jeden bod zhuštění. Body α, β můžeme nazývati **krajními** *body zhuštění*.

Body zhuštění daného množství mohou, avšak nemusí přináležeti k danému množství.

Příklady: 1. Množství číselné

$$\frac{n-1}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

jest shora i zdola ohraničené. $M = 1$, $m = -1$. Bod zhuštění jest jeden $\alpha = \beta = 1$. $\leqq M$

2. Čísla racionálná intervalu (0, 1) mají za body zhuštění všechna čísla reálná toho intervalu. Vůbec množství číselné, dané souhrnem čísel všude hustým, má za body zhuštění všechna čísla reálná.

3. Čísla která dostaneme z výrazu

$$\frac{2m+n}{m+2n+1},$$

dosazujeme-li za m i za n čísla 0, 1, 2, 3, ... (t. j. všechna čísla přirozené řady číselné), mají za dolní hranici 0 a za horní 2. Krajní body zhuštění jsou: $\frac{1}{2}$, 2. Čtenář může důkaz toho provésti, hledaje bod α (resp. β) způsobem naznačeným v obecném případě. Vedle toho jsou body zhuštění všechny body uvnitř intervalu $(\frac{1}{2}, 2)$. Neboť každý takový bod jest dán patrně číslem

$$\frac{2\mu+\nu}{\mu+2\nu},$$

kde poměr $\mu : \nu$ může nabývati všechny hodnoty kladné, a jest

$$\frac{2\mu+\nu}{\mu+2\nu} - \frac{2m+n}{m+2n+1} = \frac{2\mu+\nu+3(n\mu-m\nu)}{(\mu+2\nu)(m+2n+1)}.$$

Výraz na pravé straně lze však učiniti v absolutní hodnotě menším než číslo ε; čísla m, n můžeme si totiž obě zvoliti větší než kladné číslo A (libovolně zvolené) a zároveň tak, aby

$$|n\mu - m\nu| < \nu,\text{*)}$$

čímž učiněné tvrzení dokázáno.

---

*) Neboť ať jest n číslo celé kladné jakkoliv veliké, lze celé číslo m tak voliti, aby

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{\mu}{\nu}\right| < \frac{1}{n},$$

odkudž tvrzení snadno učiněné následuje.

Poznámka. Není-li množství číselné shora ohraničeno, jest nekonečné množství čísel, jež jsou větší než L, kde L jest libovolné číslo kladné. To můžeme vysloviti tak (viz odst. 23), že v okolí bodu ∞ jest nekonečné množství čísel daného množství t. j. že bod ∞ jest bodem zhuštění daného množství. Podobně, když množství číselné není zdola ohraničeno, můžeme $-\infty$ pokládati za bod zhuštění daného množství Pojímáme-li body zhuštění v tomto širším smyslu, (že mezi ně počítáme v případech právě zmíněných i body ∞, $-\infty$), můžeme vysloviti větu, *že každé množství číselné obsahující nekonečné množství čísel má aspoň jeden bod zhuštění v širším smyslu.*

26. O limitách. *Jestliže proměnné veličině* x *dáváme po řadě nekonečné množství hodnot* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *a jestliže ke každému kladnému číslu* ε *lze udati číslo* N *tak, že*

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > N, \tag{1}$$

říkáme, že **řada** *hodnot* $x_1, x_2, \ldots$ *má za limitu číslo* a. Říkáme též, že čísla x_k s rostoucím k konvergují ku a. K označení tohoto výroku užíváme symbolu

$$\lim_{n=\infty} x_n = a.$$

Nerovninu (1) můžeme vypisovati též takto

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{pro } všechna\ n > N. \tag{1'}$$

Jelikož ε můžeme si zvoliti tak malé, jak chceme, jest patrno, že x_k, vzroste-li k dostatečně, se přiblíží k číslu a tak blízko, jak chceme, aneb že $x_k - a$ stane se menší v absolutní hodnotě než číslo kladné ε libovolně malé. Jest rovněž patrno, že jedna a táž řada $x_1, x_2, \ldots$ může míti toliko jednu limitu.

Příklad: Uvažujme řadu

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

Limita této řady jest 1. Neboť jest

$$\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}, \text{ t. j. } \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \text{ pro všechna } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

V tomto příkladě jest tedy $N = \frac{1}{\varepsilon}$; — obecně jest N závislo na ε, s klesajícím ε zpravidla vzrůstající. — Členové v příkladě daném s rostoucím indexem stále klesají a stále více se blíží k 1.

členů

27. *Je-li* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *řada hodnot proměnné* x *s rostoucím indexem stále rostoucích a nerostou-li členové této řady nade všechny meze, pak tato řada má vždy limitu.*

Říkáme, že daná řada jest rostoucí, jestliže vždy $x_k > x_{k'}$, je-li $k > k'$; členové pak řady nerostou nade všechny meze, lze-li udati jisté číslo A tak, že všechny členy řady jsou menší než A. Důkaz věty uvedené jest zcela na snadě; neboť množství číselné $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jest shora ohraničené; horní hranice jeho budiž M. pak dle známých vlastností horní hranice jest jistě jedno z čísel daného množství x_N které jest větší než $M - \varepsilon$ (ať ε jest jakékoliv kladné číslo); tedy tím spíše (jelikož členové řady s rostoucím indexem rostou a zároveň M jest větší než všechna x_n)

$$M > x_n > M - \varepsilon \text{ pro všechna } n > N, \text{ odkudž } |x_n - M| < \varepsilon \text{ pro } n > N, \tag{2}$$

což dle základní definice limity nám právě praví, že řada $x_1, x_2, \ldots$ má limitu rovnou M.

Podobně se dokáže věta: Je-li $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *řada hodnot s rostoucím indexem stále klesajících a neklesají-li členové této řady pode všechny meze. pak tato řada má vždy limitu*, (jež jest dolní hranicí množství číselného $x_1, x_2, x_3, \ldots$).

Pojmy v této větě se vyskytující mají význam na snadě ležící.

Ve větách právě dokázaných lze docíliti jistého zevšeobecnění tím, že se v prvé nahradí slova, *„s rostoucím indexem stále rostoucích"* slovy *„s rostoucím indexem neklesajících"*, v druhé pak slova *„s rostoucím indexem stále klesajících"* slovy *„s rostoucím indexem nerostoucích"*. Při tom říkáme ku př. o řadě $x_1, x_2, x_3, \ldots$, že členové její jsou s rostoucím indexem nerostoucí, jestliže $x_k \geqq x_{k+1}$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$. Místo nerovniny (2) jest v tomto případě psáti při řadě členů neklesajících

$$M \geqq x_n > M - \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > N.$$

Poznámka. Znaménko rovnosti v nerovnině $M \geqq x_n$ jest tu jen tenkráte na místě, když členové řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (členové s indexem neklesají) od jistého indexu jsou stále rovni číslu M. Pak řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ má jen konečný počet členů různých a nastává zcela jednoduchý případ limity.

Abychom si vývody následující zbytečně nestěžovali, vyloučíme tento jednoduchý případ z úvah následujících (odst. 28., 29.) a *budeme vůbec v nich k vůli jednoduchosti předpokládati, že v řadě $x_1, x_2, x_3, \ldots$ není nesčíslný počet členů majících jednu a touž hodnotu.* Podotýkám však, že veškeré věty o limitách v následujících odst. odvozené i v tomto vyloučeném případě jsou platny (jak snadno by čtenář mohl dokázati); jenom ve vztazích mezi limitou a body zhuštění bylo by třeba jistých malých doplňků, jež však nemají tu důležitost, aby bylo třeba o nich zvlášť pojednávati.

28. Jest snadno nahlédnouti, že řada čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mající limitu a, jest zároveň množstvím číselným (x) majícím jeden a jen jeden bod zhuštění a. Neboť dle (1') jest v okolí bodu a nekonečné množství členů řady (a tedy čísel řadou daného číselného množství (x)) a vně toho okolí (ať si ε zvolíme jakkoliv malé) jest vždy toliko konečný počet členů té řady. Jest tedy bod a bodem zhuštění pro množství (x) a nemůže býti jiný bod zhuštění.*) Zároveň jest patrno z (1'), že množství číselné (x) v případě, že řada $x_1, x_2, \ldots$ má limitu, jest shora i zdola ohraničené. Nemá tedy množství (x) obsahující členy řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mající limitu a, mimo bod a žádný bod zhuštění ani v širším smyslu (viz poznámku odst. 25.).

Naopak vyplývá téměř bezprostředně, že, má-li množství číselné shora i zdola ohraničené, sestávající ze členů řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$, jediný bod zhuštění a, pak řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ má za limitu číslo a. Neboť pak dle definice bodů zhuštění a příslušných vět jest, ať zvolíme ε jakkoliv malé, uvnitř intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nekonečné množství čísel (x), vně toho intervalu, včetně hranic, jest jenom konečné množství čísel (x); označme největší index z čísel (x) tohoto konečného množství N, pak jest splněna nerovnina

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > N,$$

čímž tvrzení naše úplně dokázáno. Můžeme tedy vysloviti větu:

Aby řada čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ měla limitu, k tomu jest nutno a postačitelno, aby množství číselné (x) mělo jediný bod zhuštění, a aby bylo shora i zdola ohraničeno.

Větě této můžeme dáti také jiný výraz. Je-li jeden bod zhuštění a, pak všechna $x_1, x_2, x_3, \ldots$ od jistého indexu N počínajíc nacházejí se uvnitř intervalu $(a - \frac{1}{2}\varepsilon, a + \frac{1}{2}\varepsilon)$, délka tohoto intervalu jest ε;

$$|x_{k'} - x_{k''}| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } k', k'' > N. \tag{3}$$

Jsou-li dva body zhuštění a, b pak, ať jest N jakkoliv veliké, vždy jsou jistá $k' > N$ a jistá $k'' > N$ a taková, že (budiž $b > a$)

$$|x_{k'} - a| < \varepsilon \quad |x_{k''} - b| < \varepsilon \quad \text{a tedy} \quad |x_{k'} - x_{k''}| > b - a - 2\varepsilon$$

a vidíme, volíme-li si $\varepsilon < \frac{1}{3}(b - a)$, že ku kladnému číslu ε nemůže býti zvoleno N tak, aby byla splněna (3).

*) Uvažujme ku př. bod b různý od a (dejme tomu, že $b > a$) a zvolme si ε menší než $b - a$; pak jest v intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nekonečné množství čísel (x) vně toho intervalu a tedy také v dosti malém okolí čísla b konečné množství čísel (x); nemůže tedy býti b bodem zhuštění množství (x).

Nerovnina tato nemůže býti rovněž splněna, když množství (x) není buď shora neb zdola ohraničeno.

Vyplývá tedy ~~věta~~ **Bolzano-Cauchy-ova**: *Nutná a postačující podmínka, aby řada hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$ měla limitu, jest, aby ku každému kladnému číslu ε příslušelo N tak, že jest splněna nerovnina*

$$| x_{k'} - x_{k''} | < \varepsilon \text{ pro } \textit{všechna } k' > N \text{ a pro } \textit{všechna } k'' > N. \tag{I}$$

Nerovnině této dává se často tvar $| x_{n+p} - x_n | < \varepsilon$, jež pak má býti splněna pro všechna $n > N$ a všechna p.

Věta tato jest equivalentní (jak čtenář snadno prokáže) této: *Nutná a postačující podmínka pro tvrzení, že řada hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$ má limitu, jest, aby bylo lze ku každému kladnému číslu ε stanoviti číslo n tak, ~~že jest~~*

$$| x_n - x_{n+p} | < \varepsilon \text{ pro všechna } p > 0. \tag{II}$$

Věta tato, jakož i věty odst. 27. jsou základní věty z theorie limit řad číselných $x_1, x_2, \ldots$.

Poznámka 1. Jestliže čísla řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jsou — je-li jich index dosti veliký — větší než kladné číslo A libovolně zvolené, pak sice neexistuje $\lim x_n$ v tom smyslu, jak jsme ji definovali; než i tu *k vůli stručnosti ve vyjadřování* (písemném i slovném) mluvíme o limitě řady x_n *v širším smyslu* a říkáme, že jest ∞. Vyjadřujeme tuto vlastnost řady (x) symbolickou rovnicí

$$\lim_{n=\infty} x_n = \infty. \tag{p}$$

Podobně jestliže ku každému číslu $A > 0$ lze nalézti číslo N tak, aby bylo

$$x_k < -A \quad \text{resp. aby bylo} \quad | x_k | > A \quad \text{pro všechna } k > N,$$

říkáme, že existuje limita v širším smyslu a ta jest v prvém případě $-\infty$; v druhém pak případě, jsou-li — ať si zvolíme N jakkoliv veliké — x_k z části kladná, z části záporná, $\pm\infty$. Píšeme pak v těchto dvou případech

$$\lim_{n=\infty} x_n = -\infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{n=\infty} x_n = \pm\infty. \tag{q}$$

Jestliže tudíž pravíme, že řada $x_1, x_2, \ldots$ má limitu v širším smyslu, pak připouštíme tímto výrokem možnosť vztahů (p), (q), z nichž jeden vskutku nastává, nemá-li daná řada limitu dle základní definice odst. 26.

Pomocí takto rozšířeného pojmu limitního můžeme vysloviti větu odst. 27. v tomto zjednodušeném znění: *Každá řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$, jejíž členové s rostoucím indexem rostou, neb alespoň neklesají, má limitu v širším smyslu.* Obdobně i větu o členech klesajících (resp. nerostoucích). Konečně větu odst. 28. lze takto upraviti: *Nutná a postačující podmínka pro existenci limity v širším smyslu řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jest, aby množství číselné (x) mělo jeden a pouze jeden bod zhuštění (v širším smyslu).* Při tom jest bod $+\infty$ a bod $-\infty$ čítati za jediný bod.

Poznámka 2. Nemá-li řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ limitu v širším smyslu, má množství číselné (x) dva nebo více (po případě i nekonečné množství) bodů zhuštění. Budiž a jeden z takových bodů zhuštění a budiž $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ řada čísel mající za limitu nullu. Pak můžeme si v intervalu $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$ vybrati bod x_{λ_1} (neboť v tom intervalu nachází se bodů (x) jelikož a jest jich bodem zhuštění, nekonečné množství), podobně v intervalu $(a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2)$ bod x_{λ_2} různý od x_{λ_1}, v intervalu $(a-\varepsilon_3, a+\varepsilon_3)$ bod x_{λ_3} a t. d. a dostaneme řadu čísel

$$x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, \ldots$$

o nekonečném počtu členů, jež jest součástí řady $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a jež má za limitu číslo a udávající jeden bod zhuštění.

Ku každému bodu zhuštění lze sestrojiti takovou řadu (ba nekonečné množství takových řad, neboť ve výběru členů $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, \ldots$ jest, jak patrno, jistá libovůle).

Poznámka 3. V nerovninách (I) a (II) můžeme místo znaménka $<$ vesměs zavésti znaménko $\leqq$, aniž by obsah příslušných vět podstatně byl změněn — jakož bezprostředně jest jasno. Tak ku př. (II) lze nahraditi požadavkem, aby

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad p \geqq 0.$$

29. Největší z limit a nejmenší z limit. Nemá-li nekonečná řada čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ limitu a je-li zároveň shora i zdola ohraničena, pak má množství číselné obsahující všechna čísla (x_k) aspoň dva různé body zhuštění. Nejdůležitější pro nás jsou oba krajní body zhuštění, jak jsme k nim dospěli v odst. 25. a které jsme značili α, β; $\alpha < \beta$. Budeme nazývati α *nejmenší z limit* a β *největší z limit* a značiti je ve tvaru

$$\underline{\lim}_{n=\infty} x_n = \alpha, \quad \overline{\lim}_{n=\infty} x_n = \beta.$$

K těmto pojmům jsme přiváděni i touto úvahou: Jelikož množství číselné (x_k) jest shora i zdola ohraničeno, má jistou horní hranici M_1, a jistou dolní hranici m_1. Vynecháme-li z daného množství x_1, nechť jest horní resp. dolní hranice zbývajícího množství M_2, m_2; vynecháme-li $x_1\; x_2$, nechť zbývající množství má horní a dolní hranici M_3, m_3 a t. d.; obecně vynecháme-li $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{k-1}$, buďtež M_k, m_k obě hranice zbylého množství. Tak dostáváme dvě řady čísel $M_1, M_2, M_3, \ldots$ a $m_1, m_2, m_3, \ldots$ a jest patrno, že

$$M_1 \geqq M_2 \geqq M_3 \geqq \ldots \geqq M_k \geqq \ldots$$
$$m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 \leqq \ldots \leqq m_k \leqq \ldots$$

Dále jest patrno, že $M_k \geqq m_k$ a tím spíše $M_k \geqq m_1$ a obdobně $m_k \leqq M_1$ pro všechna k. Máme tudíž řady, prvá (M_k) jest nerostoucí a zdola ohraničená a má tudíž limitu M, druhá (m_k) jest neklesající a shora ohraničená a má limitu m. Obě tyto limity však splývají s čísly α, β. Neboť vně intervalu $(m - \varepsilon, M + \varepsilon)$ jest dle definice obou čísel (ε jest kladné) jenom konečný počet čísel (x_k),*) v každém pak z intervalů $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$, $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ jest čísel těch nekonečný počet.

Tak jest

$$\underline{\lim}_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty} m_n = m = \alpha, \quad \overline{\lim}_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty} M_n = M = \beta.$$

Větu dávající nám nutné a postačující podmínky pro existenci limity můžeme, užívajíce nově zavedených pojmů, vysloviti též takto: *Nutná a postačující podmínka, aby řada hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$ měla limitu jest, aby byla zdola i shora ohraničena a aby největší z limit byla rovna nejmenší z limit.*

Poznámka. Není-li řada (x_k) shora ohraničena, můžeme, zavádějíce pojem největší z limit v širším smyslu, psáti

$$\overline{\lim}_{n=\infty} x_n = \infty;$$

a podobně není-li ohraničena zdola.

30. Pravidla a věty pro počítání limitami. 1. Limita řady (x_k), v níž každý člen jest kladný aspoň od jistého indexu počínaje, jest buď číslo kladné nebo nulla. Neboť kdyby byla limita rovna číslu zápornému $-a$ (kde a jest kladné), pak rozdíl

$$x_k - (-a) = x_k + a$$

byl by od toho jistého indexu stále větší než a, a nemohl by býti učiněn, jak toho vyžaduje definice limity, menším než ε, kde $\varepsilon < a$, pro všechna k větší než N, ať N volíme jakkoliv.

2. *Limita součtu.* Máme li řadu $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a řadu $y_1, y_2, y_3, \ldots$ obě mající limity, pak má i řada $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots$ limitu a jest

$$\lim_{n=\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n=\infty} x_n + \lim_{n=\infty} y_n.$$

*) Od jistého indexu počínaje všechny jsou uvnitř toho intervalu.

Neboť, poněvadž řady (x_k), (y_k) mají limitu, lze ke kladnému číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ udati číslo N tak, že

$$| x_k - a | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | y_k - b | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pro všechna } k > N, \qquad (1)$$

při čemž $a = \lim\limits_{n=\infty} x_n$. $b = \lim\limits_{n=\infty} y_n$. Tedy jest

$$| (x_k + y_k) - (a + b) | \leq | x_k - a | + | y_k - b | < \varepsilon, \text{ pro všechna } k > N,$$

čímž tvrzení jest dokázáno.

3. Zcela stejně se dokáže za týchž předpokladů pro *limitu rozdílu* vztah

$$\underline{\lim_{n=\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n=\infty} x_n - \lim_{n=\infty} y_n}.$$

4. Pro *limitu součinu* máme za týchž předpokladů a označení, jako při vyšetřování limity součtu (A jest horní hranice množství číselného obsahujícího absolutní hodnoty členů řady (x) a $k > N$)

$$| x_k y_k - ab | = | x_k (y_k - b) + b (x_k - a) | \leq | y_k - b | \,.\, | x_k | +$$
$$. + | b | \,.\, | x_k - a | < \frac{\varepsilon}{2} (A + | b |) < \varepsilon_1$$

Je-li tedy ε takové, že

$$\varepsilon < \frac{2\,\varepsilon_1}{A + | b |},$$

jest

$$| x_k y_k - ab | < \varepsilon_1 \quad \text{pro všechna } k > N,$$

kde N jest stanoveno prostřednictvím ε tak, že jsou splněny (1). Máme tudíž

$$\underline{\lim_{n=\infty} (x_n y_n) = ab = \lim_{n=\infty} x_n \,.\, \lim_{n=\infty} y_n}.$$

5. Podobně vyplývá, je-li limita řady $y_1, y_2, y_3, \ldots$ různa od nully (t. j. $b \neq 0$), pro *limitu podílu*

$$\underline{\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} x_n}{\lim\limits_{n=\infty} y_n}}.$$

Neboť, je-li N již tak veliké, aby y_k bylo od nully různo, a je-li $\frac{\varepsilon}{2} < | b |$, (což možno vždy předpokládati vzhledem k tomu, že $b \neq 0$), jest

$$\left| \frac{x_k}{y_k} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{b x_k - a y_k}{b y_k} \right| = \left| \frac{b (x_k - a) - a (y_k - b)}{b (b + y_k - b)} \right| < \frac{| b | + | a |}{| b | \left(| b | - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pravá strana této nerovniny, jako při vyšetřování limity součinu, může býti učiněna menší než kladné číslo ε_1, při vhodné volbě ε.

6. Pravidla tato opětovným jich použitím dají se rozšířiti na výrazy mnohem obecnější. Tak ku př.:

$$\lim (x_n + y_n - z_n) = \lim (x_n + y_n) - \lim z_n = \lim x_n + \\ + \lim y_n - \lim z_n \text{ pro } \lim n = \infty$$

(napřed použito pravidla pro limitu rozdílu a potom pro limitu součtu). Obdobně jest (A, B, C jsou konstanty)

$$\lim (Ax_n^2 + Bx_n + C) = \lim (Ax_n^2) + \lim (Bx_n) + C = \\ = A (\lim x_n)^2 + B \lim x_n + C.$$

Abychom z uvedených pravidel mohli odvoditi co nejobecnější důsledek, zavedeme pojem *výrazu* (funkce) *racionálného*. Vycházejíce od několika veličin proměnných $x, y, z, \ldots$ a konstant $A, B, C, \ldots$ v libovolném počtu, můžeme postupně s nimi prováděti čtyři základní operace arithmetické. Všechny výrazy, které takto získáme, nazývají se výrazy racionálné (funkce racionálné) veličin proměnných $x, y, z, \ldots$ Ku př. jest

$$\frac{Axy + Bx + Cy + D}{Ex^2 - Fy^2 + G}$$

výraz racionálný ve veličinách x, y. (Napřed jsme ku př. provedli součiny $A.x.y$, $B.x$, $C.y$, $E.x.x$, $-F.y.y$; pak postupným sčítáním jsme obdrželi nejprve čítatele a potom jmenovatele a konečně dělením celý výraz). Budiž *$R(x, y, z, \ldots)$ racionálný výraz v proměnných $x, y, z, \ldots$ a buďtež $x_1, x_2, x_3, \ldots$; $y_1, y_2, y_3, \ldots$; $z_1, z_2, z_3, \ldots$; $\ldots$ řady čísel mající po řadě limity $a, b, c, \ldots$, pak jest*

$$\lim_{n=\infty} R(x_n, y_n, z_n, \ldots) = R(a, b, c, \ldots), \tag{2}$$

není-li jmenovatel racionálného výrazu $R(x, y, z, \ldots)$ roven nulle pro $x = a$, $y = b$, $z = c$, ... (či jinými slovy, má-li $R(a, b, c, \ldots)$ význam). Neboť $R(x, y, z, \ldots)$ vznikl konečným počtem kroků, z nichž každý spočíval v provádění čtyř základních operací arithmetických. Poněvadž pak pro jednotlivé kroky platí pravidlo obsažené v rovnici (2), platí obecně.

7. Jest

$$\lim_{n=\infty} A^{x_n} = A^a, \text{ jestliže } \lim x_n = a,\ A > 0,\ A \neq 1. \tag{3}$$

Neboť — buď nejprve $A > 1$ —

$$|A^{x_k} - A^a| = A^a\, |A^{x_k - a} - 1| < A^a \delta \text{ pro } |x_k - a| < \frac{\delta}{A + \delta - 1}$$

(odst. 20.)

Zvolíme-li N tak, aby $|x_k - a| < \dfrac{\varepsilon A^{-a}}{A + \varepsilon A^{-a} - 1}$ pro všechna $k > N$, což jest možno dle předpokladu, bude

$$|A^{x_k} - A^a| < \varepsilon \text{ pro všechna } k > N,$$

čímž tvrzení učiněné dokázáno.

Větu dokázanou lze psáti ve tvaru

$$\lim_{n=\infty} A^{x_n} = A^{\lim\limits_{n=\infty} x_n}. \tag{3$_1$}$$

Jako zvláštní její případ jest vztah

$$\lim_{n=\infty} A^{\frac{1}{n}} = A^0 = 1.$$

Výsledek (3) rozšiřuje se ihned i pro případ, že $0 < A < 1$: neboť v tomto případě jest

$$A^{x_n} = \left(\frac{1}{A}\right)^{-x_n} \text{ a } \frac{1}{A} > 1.$$

8. Je li

$$y_n = A^{x_n}, \tag{4}$$

jest

$$x_n = \log_A y_n. \qquad \text{(odst. 21.)}$$

Uvažujme řadu $y_1, y_2, y_3, \ldots$ mající limitu $b > 0$. K ní jest rovnicí (4) přiřaděna řada čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kde $x_k = \log_A y_k$, a tu lze tvrditi, že i tato řada má limitu a ta jest $\log_A b$. Neboť ať řada $x_1, x_2, x_3, \ldots$ má limitu či ne, jistě má množství čísel (x) body zhuštění; budiž jeden takový bod zhuštění a. Pak lze jistě z řady (x_k) vybrati její část x_{λ_1}, $x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}, \ldots$ tak, že $\lim x_{\lambda_n} = a$ (odst. 28. Pozn. 2.). Příslušná řada $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \ldots$ (část to řady (y_k)) má dle předpokladu za limitu b a jest dle rovnice (3)

$$b = \lim_{n=\infty} y_{\lambda_n} = \lim_{n=\infty} A^{x_{\lambda_n}} = A^a, \text{ t. j. } b = A^a,\ a = \log_A b,$$

t. j. řada $x_1, x_2, \ldots$ může míti (a má) toliko jediný bod zhuštění a určený úplně předcházející rovnicí. Tak můžeme psáti

$$\lim_{n=\infty} x_n = \log_A b \text{ aneb } \lim_{n=\infty} \log_A y_n = \log_A b = \log_A (\lim_{n=\infty} y_n). \tag{5}$$

9. Z předcházejících dvou vět vyplývá konečně rovnost, jestliže $\lim x_n = a$ pro $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} x_n^{\mu} = a^{\mu}.$$

Neboť

$$x_n^\mu = A^{\mu \log_A x_n} = (A^\mu)^{\log_A x_n}$$

a jelikož dle (5) jest $\lim \log_A x_n = \log_A a$, jest dle ($3_1$)

$$\lim_{n=\infty} x_n^\mu = A^{\mu \log_A a} = a^\mu$$

aneb

$$\lim_{n=\infty} x_n^\mu = (\lim_{n=\infty} x_n)^\mu. \tag{6}$$

10. Z 1. a 3. věty tohoto odstavce vyplývá důsledek: *Je-li $x_k > y_k$ pro všechna k, aspoň od jistého indexu počínaje, a mají-li obě řady $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ limity, jest*

$$\lim_{n=\infty} x_n \geqq \lim_{n=\infty} y_n.$$

Kdyby jenom prvá řada měla limitu, bylo by

$$\lim_{n=\infty} x_n \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} y_n > \underline{\lim_{n=\infty}} y_n \quad \text{(dle věty předch. a pozn. 2. odst. 28.).}$$

Obecněji, nemá-li žádná z obou řad limitu, jest *buď*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} x_n > \underline{\lim_{n=\infty}} x_n \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} y_n > \underline{\lim_{n=\infty}} y_n,$$

aneb

$$\overline{\lim_{n=\infty}} x_n \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} y_n \geqq \underline{\lim_{n=\infty}} x_n \geqq \underline{\lim_{n=\infty}} y_n;$$

při tom v posledním řetězu nerovnin jest znaménko rovnosti zároveň buď jenom uprostřed, buď na jednom nebo na obou krajních místech anebo konečně na žádném ze tří míst v platnosti.

Obdobné důsledky lze činiti, když pro všechna k $x_k < y_k$.

Z uvedeného následuje tato často užitečná věta: *Jestliže od jistého indexu počínaje jest stále $x_k < y_k < z_k$* (kde (x_k), (y_k), (z_k) jsou řady čísel o nekonečném počtu čísel), *pak*

$$\underline{\lim_{n=\infty}} x_n \leqq \underline{\lim_{n=\infty}} y_n \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} y_n \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} z_n. \tag{7}$$

V tom případě, že řady (x_k), (y_k), (z_k) mají limity, lze tyto nerovniny psáti

$$\lim_{n=\infty} x_n \leqq \lim_{n=\infty} y_n \leqq \lim_{n=\infty} z_n.$$

31. Některé další věty o limitách. *Buďtež dány dvě řady číselné $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Řada (b_k) budiž řadou stále rostoucí a to nade všecky meze. Sestrojme ze členů těchto řad dvě nové řady*

$$x_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}}, \qquad y_k = \frac{a_k}{b_k}; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{r}$$

Pak lze tvrditi: *Existuje-li* lim x_n, *existuje i* lim y_n (pro lim $n = \infty$) *a obě jsou si rovny.*

Označme — jako v odst. 29. — horní resp. dolní hranici množství číselného, obsahujícího čísla x_λ, $x_{\lambda+1}$, $x_{\lambda+2}, \ldots$, značkou M_λ resp. m_λ. Pak můžeme psáti nerovninu

$$m_\lambda \leqq x_{\lambda+k} \leqq M_\lambda; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

aneb nahradíme-li dle rovnice (r) x_k příslušným výrazem a násobíme-li zároveň jmenovatelem toho výrazu, který jest kladný

$$m_\lambda (b_{\lambda+k} - b_{\lambda+k-1}) \leqq a_{\lambda+k} - a_{\lambda+k-1} \leqq M_\lambda (b_{\lambda+k} - b_{\lambda+k-1});$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Sčítáme-li tyto nerovniny psané pro $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, dostaneme

$$m_\lambda (b_{\lambda+p} - b_{\lambda-1}) \leqq a_{\lambda+p} - a_{\lambda-1} \leqq M_\lambda (b_{\lambda+p} - b_{\lambda-1})$$

a dělíme-li číslem $b_{\lambda+p}$ po jednoduché úpravě

$$m_\lambda + \frac{a_{\lambda-1} - m_\lambda b_{\lambda-1}}{b_{\lambda+p}} \leqq \frac{a_{\lambda+p}}{b_{\lambda+p}} \leqq M_\lambda + \frac{a_{\lambda-1} - M_\lambda b_{\lambda-1}}{b_{\lambda+p}}.$$

Přejdeme-li v těchto nerovninách k limitě pro lim $p = \infty$ (viz předch. odst. rovn. (7)), majíce na paměti, že b_n roste nade všecky meze s n,

$$m_\lambda \leqq \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n}{b_n} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n}{b_n} \leqq M_\lambda.$$

(Při tom jsme v prostředním členu zavedli místo $\lambda + p$ rostoucího nade všechny meze zkrátka n). Avšak i za λ můžeme si zvoliti číslo kladné celé, libovolně veliké. Přejdeme-li tudíž v poslední nerovnině opětně k limitě a to pro lim $\lambda = \infty$, máme konečně (viz definici největší a nejmenší z limit, odst. 29.)

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leqq \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n}{b_n} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n}{b_n} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Nerovnina tato se redukuje, když existuje lim x_n (t. j. když $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$) na rovnost

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}, \tag{I}$$

jež se měla dokázati.

Zvláštní případy: 1. Klaďme v (I) $b_k = k$. *Pak*

$$\lim_{n=\infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n}, \tag{II}$$

existuje-li limita na levé straně.

2. Klademe-li v předcházející rovnici místo a_k výraz $\log a_k$ a ve výsledné rovnici od logarithmu přejdeme k číslům (odst. 20. (3)), obdržíme

$$\underline{\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}} \qquad \underline{\underline{(\mathrm{III})}}$$

za předpokladu, že limita na levé straně má význam a že čísla a_k jsou vesměs kladná.

3. Položme do (I) místo a_k resp. b_k výrazy $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k$ resp. $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$. Dostaneme:

$$\underline{\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}} \qquad \underline{\underline{(\mathrm{IV})}}$$

za předpokladu, že existuje $\lim a_n$ a že součet $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ roste s k nade všechny meze. Klademe-li v poslední rovnici specielně $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, získáme vztah

$$\underline{\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}. \qquad \underline{\underline{(\mathrm{IV}')}}$$

4. Jsou-li a_k i b_k čísla taková, že $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ pro $\lim n = \infty$, můžeme dle předcházejících vztahů dokázati, že

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1) = ab. \qquad (\mathrm{V})$$

Zaveďme místo čísel a_k čísla e_k rovnicí $a_k = a + e_k$; pak jest $\lim e_k = 0$ pro $n = \infty$. Lze potom psáti:

$$\frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = a \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} +$$
$$+ \frac{e_1 b_n + e_2 b_{n-1} + \ldots + e_n b_1}{n}.$$

Když n roste nade všechny meze, má první člen poslední rovnice dle (IV′) limitu ab. Druhý člen má za limitu nullu, neboť jest co do absolutní hodnoty menší než výraz

$$B \frac{|e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|}{n},$$

při čemž B jest horní hranice absolutních hodnot čísel b_k; výraz právě napsaný má za limitu pro $n = \infty$ nullu rovněž dle (IV′)

Poznámka. Základní větu tohoto odstavce svrchu dokázanou lze poněkud rozšířiti tvrzením, že jestliže $\lim x_n = \infty$ pro $n = \infty$, i $\lim y_n = \infty$.

Zvláště pak jest, jestliže

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \infty \quad \text{i} \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty.$$

32. Příklady pro počítání limit. 1. *příklad.* Jest vypočítati $\lim x^n$ pro $n = \infty$ a $x > 0$. Jsou tři případy možné:

a) $0 < x < 1$; pak řada $x^1, x^2, x^3, \ldots$ jest řada čísel kladných stále klesajících a má tedy jistě limitu (odst. 27); označme-ji α. Máme pak

$$\lim_{n=\infty} x^n = \alpha, \lim_{n=\infty} x^n = x^\lambda \lim_{n=\infty} x^{n-\lambda} = x^\lambda \lim_{n=\infty} x^n = \alpha\, x^\lambda,$$

kde λ jest číslo celé kladné libovolně zvolené; jest tedy

$$\alpha = \alpha\, x^\lambda, \ \alpha\,(1 - x^\lambda) = 0, \ \alpha = 0$$

a *hledaná limita jest rovna nulle.*

b) $x > 1$; pak řada $x^1, x^2, x^3, \ldots$ jest řada čísel větších než jedna a stále rostoucích a to *nade všechny meze*; neboť kdyby byla

$$\lim_{n=\infty} x^n = \beta, \text{ bylo by } \beta > 1 \text{ a zároveň } \lim_{n=\infty} x^n = x^\lambda \lim_{n=\infty} x^{n-\lambda} = \beta\, x^\lambda$$

a tedy $\beta = \beta\, x^\lambda$, což jest nemožno (neboť pravá strana jest větší než levá). Jest tedy nutně (odst. 27.) $\lim x^n = \infty$ pro $n = \infty$ a $x > 1$

c) $x = 1$; pak všechny členy řady $x, x^2, x^3, \ldots$ jsou rovny jedné a lze je psáti v tomto případě $\lim x^n = 1$.

Poznámka. Doporučuji čtenáři, aby výsledky právě odvozené odvodil ještě jiným způsobem. Případ *b)* vyplývá ku př. snadno z věty binomické, klademe-li $x = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Pak jest $x^n > 1 + n\delta$, věta *b* znovu dokázána. Z *b)* však plyne snadno *a)*, neboť, je-li $x > 1$, jest $x^{-1} < 1$ a naopak. Rovněž doporučuji, aby čtenář věty obdobné odvodil i pro případ $x < 0$.

2. *příklad.* Jsou-li členové řady $u_1, u_2, u_3, \ldots$, jež jsou vesměs čísla kladná, aspoň od jistého indexu počínajíc, stále menší než jisté číslo α, jež jest menší než jedna, jest

$$\lim_{n=\infty} u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots u_n = 0,$$

Věta tato vyplývá jakožto jednoduchý důsledek z výsledku příkladu předchozího a přenechávám podrobné provedení naznačeného důkazu čtenáři. Z věty té následuje ku př.

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} = 0, \qquad (\gamma)$$

ať jest x jakékoliv kladné číslo. Postačí totiž v oné větě klásti

$$u_1 = \frac{x}{1},\ u_2 = \frac{x}{2},\ u_3 = \frac{x}{3}, \ldots\ldots$$

Avšak potom jest

$$u_k = \frac{x}{k} < \frac{1}{2} \text{ pro všechna } k > 2x,$$

odkudž tvrzení (γ) následuje.

3. *příklad.* Jsou-li $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$ čísla vesměs kladná, a je-li aspoň od jistého indexu počínaje stále

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} > \alpha', \text{ kde } \alpha' \text{ jest číslo větší než } 1,$$

jest $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \infty$. Jestliže však od jistého indexu počínaje jest stále

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} < \alpha, \text{ kde } \alpha \text{ jest číslo menší než } 1,$$

jest $\lim\limits_{n=\infty} v_n = 0$. Věta tato plyne z předcházejícího příkladu, klademe-li $u_k = v_k : v_{k-1}$, pro $k \geqq 1$.

4. *příklad.* K stanovení $\lim \sqrt[n]{n}$, lze užíti věty III. odst. 31. Dle ní jest

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Podobně lze stanoviti limity výrazů $\sqrt[n]{n^\alpha}$ a pod.

5. *příklad.* $\lim \dfrac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$

za předpokladu $p > -1$ vypočteme snadno na základě věty (I) odst. 31., klademe-li tam $a_n = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, $b_n = n^{p+1}$; i jest limita vytčená rovna

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{n^p}{(p+1)\,n^p - \frac{1}{2}(p+1)\,p\,n^{p-1} + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{p+1}.$$

Z tohoto výsledku, který jest tu odvozen toliko pro p celistvé, avšak platný jest pro libovolné reálné p (jakož následuje snadno z rovnice (8) odst. 37.), následuje, že součet S_n daný výrazem

$$s_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}$$

(p zaměněno tu v $-p$) roste, je-li $p < 1$, nade všechny meze a to v prvním přiblížení jako

$$\frac{n^{1-p}}{1-p}.$$

Že i pro $p = 1$ výraz ten roste nade všecky meze vyplyne z úvah odst. 38.

6. *příklad.* Uvažujme řadu čísel x_k, které dostaneme, když v čitateli a jmenovateli zlomku

$$\frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 8 \ldots.}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots.}$$

podržíme prvých k činitelů. Dostáváme po řadě čísla

$$x_1 = \frac{2}{1},\quad x_2 = \frac{2 \,.\, 2}{1 \,.\, 3},\quad x_3 = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4}{1 \,.\, 3 \,.\, 3}, \ldots.$$

$$x_{2k} = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \ldots.. 2k \,.\, 2k}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2k-1)(2k+1)}, \ldots.$$

Mají, jak patrno, x s lichými indexy poněkud jiné vyjádření než x se sudými indexy. Utvořme podíl dvou po sobě následujících x se sudými indexy, jakož i podíl dvou po sobě následujících x s lichými indexy Jest

$$\frac{x_{2k}}{x_{2k-2}} = \frac{2k \,.\, 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4k^2}{4k^2-1} > 1,$$

$$\frac{x_{2k+1}}{x_{2k-1}} = \frac{(2k+2)\; 2k}{(2k+1)(2k+1)} = \frac{4k^2+4k}{4k^2+4k+1} < 1,$$

a tudíž

$$x_2 < x_4 < x_6 < x_8 < \ldots.. < x_{2k} < \ldots,\quad x_1 > x_3 > x_5 \ldots. > x_{2k+1} > \ldots.$$

Jest pak dále $x_{2k} < x_{2k-1} < x_1$, i jest řada x_2, x_4, $x_6, \ldots$ řadou čísel shora ohraničenou a stoupající a má tedy limitu; označme jí a. Rovněž z obdobných důvodů má řada x_1, x_3, $x_5, \ldots.$ limitu a'. Přejdeme li však v rovnici

$$x_{2k} = x_{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}$$

k limitě pro $\lim k = \infty$, máme $a = a'$. Má tedy řada čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ limitu. Limita tato jest, jak na různých místech v následujícím se ukazuje, číslo $\frac{1}{2}\pi$ (Wallisova formule). viz odst. 92

33. Některá užití obecných úvah o limitách, zvláště na výpočet čísla e^x.

Budiž dána řada čísel v_1, v_2, $v_3, \ldots.$ výrazy

$$v_1 = 1 + \frac{x}{1},\quad v_2 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!},\quad v_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \ldots..$$

a obecně

$$v_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. + \frac{x^k}{k!}.$$

Předpokládejme $x > 0$. Pak jest $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$ a řada čísel v_k jest řadou rostoucí. Vezměme zároveň v úvahu řadu čísel v'_k, kde

$$v'_k = v_k + \frac{x^{k+1}}{k!\,(k+1-x)} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{k!\,(k+1-x)}$$

a vyšetřujme, zda tato řada jest snad rostoucí či klesající. Vypočteme tudíž rozdíl $v'_k - v'_{k-1}$ a dostaneme

$$v'_k - v'_{k-1} = \frac{x^{k+1}}{k!\,(k+1-x)} + \frac{x^k}{k!} - \frac{x^k}{(k-1)!\,(k-x)} =$$

$$= \frac{x^{k+1}}{k!}\left(\frac{1}{k+1-x} - \frac{1}{k-x}\right).$$

Výraz tento jest záporný, je-li $k > x$. Budiž k_0 to z celých čísel větších než x, jež jest ku x nejblíže. Pak řada $v'_{k_0}, v'_{k_0+1}, v'_{k_0+2}, \dots$ jest řadou klesající. Poněvadž pak $v'_k > 0$ (aspoň pro všechna $k > k_0$), jest tato řada zdola ohraničena a existuje tudíž $\lim v'_k$ pro $k = \infty$. Jelikož pak i rostoucí řada v_k jest shora ohraničena (neboť $v_k < v'_k < v'_{k_0}$ pro $k > k_0$), jest i $\lim v_k$ pro $k = \infty$. Avšak

$$v'_k - v_k = \frac{x^{k+1}}{k!\,(k+1-x)} \text{ a tedy } \lim_{n=\infty} v'_n - \lim_{n=\infty} v_n = 0.$$

Zavedeme pak (se zřetelem k tomu, že limita stanovená závisí na x) prozatímně toto označení

$$E_x = \lim_{n=\infty} v_n = \lim_{n=\infty} v'_n.$$

Při tom jest zároveň E_x horní hranicí pro množství číselné obsahující členy řady v_k, (a dolní hranicí pro (v'_k), $k \geqq k_0$).

34. Uvažujme nyní opět za předpokladu $x > 0$ řadu číselnou $u_1, u_2, u_3, \dots$, kde $u_m = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$.

Rozvineme-li výraz na pravé straně dle binomické poučky, dostaneme na pravé straně členy tvaru ($m > 0$ a celé)

$$\alpha_k = \binom{m}{k}\frac{x^k}{m^k} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}\,\frac{x^k}{m^k} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right)\frac{x^k}{k!}, \tag{p}$$

takže jest

$$u_m = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

Podobně jest

$$u_{m+1} = 1 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_m + \alpha'_{m+1},$$

kde

$$\alpha'_k = \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{m+1}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

Čísla α_k, α'_k jsou kladná a $\alpha'_k > \alpha_k$. Jest tedy $u_{m+1} > u_m$. Rostou tedy členové řady (u_k) zároveň s indexem. Jest však také

$$\alpha_k < \frac{x^k}{k!} \qquad \frac{x^k}{k!}$$

a tedy

$u_m < v_m$, kde v_m jest výraz stanovený v předchozím odstavci. Tím spíše jsou všechna u_m menší než horní hranice čísel v_k, již jsme označili E_x. Jelikož řada čísel (u_m) jest řadou rostoucí a shora ohraničenou, existuje lim u_k pro $k = \infty$ a zároveň jest

$$\lim_{n=\infty} u_n \leqq E_x.$$

Avšak jest také

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < u_m; \qquad k < m.$$

Budiž v této nerovnině k číslo pevné, přejděme pak na obou stranách k limitám pro ten případ, že m roste nade všechny meze. Limitu α_k vypočteme na základě věty 4. odst. 30. a obdržíme pro ni výraz $\frac{x^k}{k!}$ a tak dostaneme (snadno nahlédneme, že ve výsledku netřeba vedle značky $<$ psáti znaménko rovnosti)

$$v_k < \lim_{n=\infty} u_n.$$

Jest tedy limita řady u_k větší než každé číslo v_k, zároveň však jest menší nebo rovna horní hranici pro tato čísla; jest tedy nutně

$$\lim_{n=\infty} u_n = E_x.$$

Specielně pro $x = 1$ dostáváme za limitu pro analysu důležité číslo, číslo E_1, jež značíme e; pro toto číslo tudíž máme vztahy

$$e = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \qquad (q)$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{k!} + \frac{1}{k\,.\,k!}. \qquad (r)$$

Druhý z těchto vztahů jest velmi způsobilý pro numerický výpočet čísla e. Pro $k = 10$ dostáváme po krátkém počtu $2{\cdot}7182818262 < e < 2{\cdot}7182818287$, čímž e stanoveno na 9 cifer. Přesnější hodnota pro e jest číslo

$$e = 2{\cdot}718281828459045235 36\dots$$

35. Vyšetřujme nyní limitu

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n},$$

kdež a_n jsou čísla reálná s indexem rostoucí nade všechny meze. Budiž λ_n číslo celé takové, že $\lambda_n + 1$ jest prvé číslo v pořadí čísel celých, které jest větší než a_n; jest tedy $\lambda_n \leqq a_n < \lambda_n + 1$. Pak jest stále za předpokladu $x > 0$ (je-li n již tak veliké, že $a_n \geqq 1$)

$$\left(1+\frac{x}{\lambda_n+1}\right)^{\lambda_n} < \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{x}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n+1}$$

aneb

$$\left(1+\frac{x}{\lambda_n+1}\right)^{\lambda_n+1}\cdot\left(1+\frac{x}{\lambda_n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} <$$

$$< \left(1+\frac{x}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n}\left(1+\frac{x}{\lambda_n}\right).$$

Přecházíme-li nyní k limitě pro $n=\infty$, jest třeba uvážiti, že celá čísla λ_n s n rostou nade všechny meze a že tedy levé i pravé křídlo poslední nerovniny má limitu E_x a tudíž i prostřední výraz; t. j. že

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = E_x \quad \text{pro} \lim_{n=\infty} a_n = \infty, \tag{s}$$

ať jest $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ jakákoliv řada čísel reálných majících vytčenou vlastnost. Kladme nyní v (s) místo a_n součin $a_n x$ (což jest možno, neboť i $\lim a_n x = \infty$); obdržíme

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n x} = E_x.$$

Avšak dle 9. odst. 30. jest

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n x} = \left\{\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\}^x = E_1^x = e^x.$$

t. j. E_x **jest rovno** x**-té mocnině čísla** e. Dospíváme tedy k výsledku platnému pro každé kladné $x < n$

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots.+\frac{x^n}{n!} < e^x < 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots.+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{x^n}{(n-1)!\,(n-x)}, \tag{t}$$

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots.+\frac{x^n}{n!}\right). \tag{u}$$

Výsledek (s) lze ještě poněkud rozšířiti. Budiž $\lim a_n = -\infty$ pro $n = \infty$ a zaveďme $b_n = -a_n$ (pak $\lim b_n = \infty$). Jest pak postupně (za předpokladu, že x není rovno žádnému z b_n)

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{-b_n} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{b_n-x}\right)^{b_n} =$$

$$= \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{b_n-x}\right)^{b_n-x}\cdot\left(1+\frac{x}{b_n-x}\right)^{x} = E_x \,.\, 1, \text{ (dle } (s));$$

neboť $\lim(b_n - x)$ jest rovněž ∞. Jest tedy pro $x > 0$

$$\lim\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} \text{ pro } \lim_{n=\infty} a_n = \pm\infty\,; \tag{s_1}$$

avšak

$$\left(1+\frac{-x}{a_n}\right)^{a_n} = \left[\left(1+\frac{x}{-a_n}\right)^{-a_n}\right]^{-1}$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{-x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(e^x\right)^{-1} = e^{-x} \text{ pro } x > 0$$

a *výsledek* (s) *platný pro* x *kladné i záporné.* Platnost vztahu (t) a (u) jest však omezena dosud na $x > 0$.

Poznámka. Dokázali jsme, že oba výrazy při $x > 0$

$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad u'_n = \left(1+\frac{x}{-n}\right)^{-n}$$

mají za limitu e^x, když celé číslo n roste nade všecky meze. První výraz s rostoucím n stále roste; jsou tudíž všechna u_n *menší* než e^x. Obdobné tvrzení lze učiniti i o u'_n. Tu jest nejprve po snadném počtu

$$\frac{u'_{2n}}{u'_n} = \left(1+\frac{1}{4n}\cdot\frac{x^2}{n-x}\right)^{-n}$$

a jest tedy $u'_{2n} < u'_n$, je-li jen $x < n$. Jest tudíž řada čísel u'_k, kde k probíhá po řadě čísla n, $2n$, $2^2 n$, $2^3 n$, ... řada čísel klesajících (při $0 < x < n$); jelikož pak má za limitu e^x, jsou všechna ta čísla větší než e^x. *Můžeme následkem toho psáti celkem tyto nerovniny platné obě pro n celistvé a druhá pro x mezi 0 a n*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x,\ x > 0;\ \left(1+\frac{x}{-n}\right)^{-n} > e^x,\ n > x > 0. \tag{v}$$

36. Přirozený logarithmus. Je-li $e^x = A$, jest dle definice logarithmu x logarithmem čísla A při základě e; sluje pak x přirozený logarithmus čísla A. Při označení přirozeného logarithmu se index e, značící základ logarithmický, vynechává a místo $x = \log_e A$ se prostě píše

$$x = \log A. \tag{1}$$

Zpravidla také v pojmenování se slovo přirozený vynechává a mluvíce v analysi o logarithmu (neudávajíce základ), máme na mysli logarithmus přirozený.

Je-li mezi x a A vztah (1), můžeme nerovniny (v) předch. odst. psáti takto (n resp. n' buďtež v následujícím čísla celá) kladná)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < A, \quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} > A,$$

jež platny jsou, když $x > 0$ a tedy $A > 1$ (při poslední se vyžaduje ještě $n > x$). Z nerovnin těchto výpočtem vyplývá

$$x < n\left(A^{\frac{1}{n}}-1\right), \quad x > -n\left(A^{-\frac{1}{n}}-1\right); \quad x > 0, \quad A > 1$$

aneb

$$-n\left(A^{-\frac{1}{n}}-1\right) < \log A < n\left(A^{\frac{1}{n}}-1\right); \qquad A > 0. \tag{2}$$

V těchto nerovninách netřeba již požadovati, aby (kladné) číslo A bylo větší než 1. Neboť předpokládajíce $A_1 < 1$, můžeme do nich dosadit $A = \frac{1}{A_1}$; po snadné úpravě dostaneme nerovniny stejné, pouze místo A jest v nich A_1. Rovněž netřeba požadovati na levé straně, aby $n > \log A$; neboť levá strana strana s rostoucím n roste,*) platna-li je tedy nerovnost pro $n > \log A$, tím spíše bude platna pro $n \leqq \log A$.

Označme pro krátkost

$$w_n = n\left(A^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

---

*) K důkazu toho postačí ukázati, že $-n\left(A^{-\frac{1}{n}}-1\right) < -n'\left(A^{-\frac{1}{n'}}-1\right)$ pro $A > 1$ a pro $n' > n$. Klademe-li v této nerovnině $A^{-\frac{1}{nn'}} = b$, jest $b < 1$, a nerovnina obdrží po jednoduché úpravě tvar

$$\frac{1-b^{n'}}{n'} < \frac{1-b^n}{n}$$

aneb

$$\frac{1+b+b^2 \ldots + b^{n'-1}}{n'} < \frac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{n},$$

ve kterémž jest téměř samozřejma (při $0 < b < 1$ a $n' > n$). Třeba jenom uvážiti, že na pravé straně jest arithmetický střed n čísel, na levé straně pak střed n' čísel; potom vzájemný vztah těchto dvou skupin číselných.

Pak jest — buď opět pro okamžik $A > 1$, $\log A > 0$ —

$$\frac{w_n}{w_{-n}} = A^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{w_n}{w_{-n}} - 1 = A^{\frac{1}{n}} - 1,$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{w_n}{w_{-n}} - 1\right) = \lim_{n=\infty} \left(A^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0.$$

Má-li však podíl

$$\frac{w_n - w_{-n}}{w_{-n}}$$

za limitu nullu, musí nutně čitatel míti limitu rovnou nulle, jelikož jmenovatel jest číslo kladné menší než $\log A > 0$. Avšak čitatel jest součet dvou kladných čísel $w_n - \log A$, $\log A - w_{-n}$, musí tudíž i každé z těchto dvou čísel míti limitu rovnou nulle; t. j.

$$\lim_{n=\infty} n\left(A^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \log A, \quad \lim_{n=\infty} - n\left(A^{-\frac{1}{n}} - 1\right) = \log A,^{*)} \qquad \text{(I)}$$

čímž vyjádřen přirozený logarithmus čísla A ve tvaru limitním; výsledek odvozený pro $A > 1$ rozšíří se snadno (podobně jako platnost nerovniny (2)) i pro $0 < A < 1$.

Z nerovnin (2), klademe-li tam $n = 1$, $A = 1 + \xi$, dostaneme

$$\frac{\xi}{1+\xi} < \log(1 + \xi) < \xi. \qquad (3)$$

Klademe-li ve (2) $n = 2$, $A = 1 + \xi$ a uvážíme-li zároveň, že při $|\xi| < 1$ jest

$$1 + \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{12}\xi^2 > (1 + \xi)^{\frac{1}{2}},$$

jakž snadno umocňováním se dokáže, obdržíme

$$\xi - \frac{5}{6}\frac{\xi^2}{1+\xi} < \log(1 + \xi) < \xi - \tfrac{1}{6}\xi^2 \quad \text{pro} \quad |\xi| < 1.$$

Omezíme-li při tom ξ na intervall ještě užší $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, můžeme psáti

$$\log(1 + \xi) = \xi - \Theta\xi^2, \quad \tfrac{1}{6} < \Theta < \tfrac{5}{3}, \quad |\xi| < \tfrac{1}{2}, \qquad (4)$$

kterýžto vztah nám později bude užitečný. Pro Θ docílíme později jinými prostředky hranice ještě užší.

Úkol. Dokažte vycházejíce z (I) fundamentální vlastnost logarithmu ($\log AB = \log A + \log B$).

---

*) Kdybychom chtěli předpokládati v důsledku předch. poznámky pod čarou, že w_{-n} má limitu jakožto veličina s n rostoucí, mohli bychom k tomuto výsledku mnohem rychleji dospěti.

37. Výsledky v odstavcích předcházejících odvozené nám dovolují stanoviti některé limity. Z (t) pro $n = 1$ máme nerovnost

$$1 + x < e^x < 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Tyto nerovnosti vyžadují $x > 0$ a menší než 1; přejdeme-li však od nich k převratným hodnotám, dostáváme

$$1 - x < e^{-x} < \frac{1}{1+x},$$

což jsou nerovnosti identické s předcházejícími až na záměnu x v $-x$. Jsou tedy nerovniny

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

platny pro každé x, pro něž $|x| < 1$. Tedy jest též stále při $x < 1$

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x} \text{ pro } x > 0 \text{ a } 1 > \frac{e^x - 1}{x} > \frac{1}{1-x} \text{ pro } x < 0.$$

Je-li tedy δ_1, δ_2, δ_3, ... libovolná řada čísel mající za limitu nullu, jest

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\delta_n} - 1}{\delta_n} = 1 \quad \text{pro} \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0. \tag{5}$$

Z (3) odst. 36. vyplývá stejně

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(1+\delta_n)}{\delta_n} = 1 \quad \text{pro} \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0. \tag{6}$$

Limity tyto lze však také snadno jednu na základě druhé vypočítati, což doporučuji čtenáři.

Uvážíme-li, že (při $a \neq 1$ a $\delta_n \neq 0$)

$$\frac{a^{\delta_n} - 1}{\delta_n} = \frac{e^{\delta_n \log a} - 1}{\delta_n \log a} \cdot \log a = \frac{e^{\delta'_n} - 1}{\delta'_n} \log a,$$

jest ihned patrno

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^{\delta_n} - 1}{\delta_n} = \log a \quad \text{pro} \quad \lim \delta_n = 0. \tag{7}$$

Podobně jest

$$\frac{(1+\delta_n)^\mu - 1}{\delta_n} = \frac{e^{\mu \log(1+\delta_n)} - 1}{\mu \log(1+\delta_n)} \cdot \frac{\log(1+\delta_n)}{\delta_n} \cdot \mu =$$

$$= \frac{e^{\delta''_n} - 1}{\delta''_n} \cdot \frac{\log(1+\delta_n)}{\delta_n} \cdot \mu.$$

a tedy (neboť $\lim \delta''_n = 0$, je-li $\delta''_n = \mu \log(1+\delta_n)$)

$$\lim \frac{(1+\delta_n)^\mu - 1}{\delta_n} = \mu. \tag{8}$$

38. Zabývejme se ještě řadami $a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$, kde

$$a_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{k} - \log k$$

$$b_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{k} - \log(k+1).$$

Je pak $a_k - b_k = \log(k+1) - \log k$, tedy $a_k > b_k$. Dále jest

$$a_{k+1} - a_k = -\log(k+1) + \log k + \frac{1}{k+1} = -\log\left(1+\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k+1}.$$

Avšak (odst. 36., (3))

$$\log(1+x) > \frac{x}{1+x}, \text{ tedy } \log\left(1+\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{1+k},$$

odkudž $a_{k+1} - a_k < 0$ a $a_{k+1} < a_k$. Obdobně (odst. 36., (3))

$$b_k - b_{k-1} = \frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k = \frac{1}{k} - \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

a $b_k > b_{k-1}$. Jest tudíž řada čísel a_k řadou klesající, řada b_k stoupající; prvá jest z dola ohraničena $a_k > b_k > b_1$, druhá s hora $b_k < a_1$ a mají obě limitu. Limity tyto jsou stejné; jest totiž

$$\lim_{n=\infty} a_n - \lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} \log \frac{n+1}{n} = 0,$$

číslo pak jimi stanovené sluje Eulerova konstanta označovaná písmenem C. Jest tedy

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \\ &= \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right). \end{aligned} \tag{u}$$

Dokažme z tohoto výsledku, že

$$\log 2 = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right). \tag{z}$$

Utvoříme-li výraz $a_{2n} - \frac{1}{2} a_n$ a přejdeme-li k limitě pro $\lim n = \infty$, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\tfrac{1}{2} C + \log 2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2} \log n \right);$$

přímo pak z (u) následuje

$$\tfrac{1}{2} C = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} - \tfrac{1}{2} \log n \right).$$

III. Součty nekonečných řad, nekonečné součiny.

39. Budiž dána řada $u_1, u_2, u_3, \ldots$ o nekonečném počtu členů a utvořme součet prvých k členů této řady

$$s_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k. \tag{1}$$

Volíme-li za k postupně všechna čísla 1, 2, 3, ... (při čemž $s_1 = u_1$), dostaneme novou řadu $s_1, s_2, s_3, \ldots$ rovněž o nekonečném počtu členů; *má-li pak tato řada limitu rovnou číslu* s *pro* $\lim n = \infty$, t. j. *jestliže*

$$\lim_{n=\infty} s_n = s, \tag{2}$$

říkáme, že **nekonečná řada**

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \tag{3}$$

konverguje a že její součet jest s. *Neexistuje-li* $\lim s_n$ *pro* $n = \infty$, *říkáme, že nekonečná řada* (3) *diverguje.* Řady nekonečné, které konvergují, slují krátce řady *konvergentní*; ty, které divergují, *divergentní.*

Rovnici (2) píšeme též často ve tvaru

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \tag{4}$$

Příklady. 1. Řada nekonečná

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

diverguje. Neboť $s_n = \frac{1}{2} n (n+1)$ roste s n nade všecky meze.

2. Řada

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots$$

~~diverguje~~, neboť $s_{2k} = 0$, $s_{2k+1} = 1$; součty s_n mají střídavě hodnoty 0, 1; nemají tudíž limitu.

3. Řada

$$\sqrt{1} + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) + \ldots$$

diverguje, neboť $s_k = \sqrt{k}$, $\lim s_n = \infty$ pro $n = \infty$, nemá tudíž řada čísel s_n limitu. Řadu tuto můžeme psát též ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} + \ldots$$