ODDÍL 4.

MNOŽSTVÍ BODOVÁ.

1. CARTÉZSKÉ PROSTORY.

Dosud jsme se zabývali množstvími bez ohledu na povahu jejich prvků; nyní pojednáme specielně o množstvích, jejichž prvky jsou *body* v jedno-, dvoj-, troj-,..., k-rozměrném prostoru, čili **o množstvích bodových** (Punktmengen, ensembles de points). Při tom omezíme se na množství bodová v t. zv. „k-rozměrném cartézském prostoru“, jenž jest definován takto:

Budiž k celé kladné číslo; bodem v k-rozměrném cartézském prostoru nazývám systém k reálných čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$;*) *při tom pořadí těch čísel podstatné, t. j. dva body* $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ *a* $[y_1, y_2, \ldots, y_k]$ *pokládáme za totožné tehdy a jen tehdy, je-li* $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_k = y_k$. *Vzdáleností dvou takových bodů* $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ *a* $[y_1, y_2, \ldots, y_k]$ *nazýváme číslo***)

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2}$$

Množství všech bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *(kde tedy* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *probíhají nezávisle na sobě všechna reálná čísla) nazýváme k-rozměrným cartézským prostorem (a značíme tento prostor značkou* R_k*).*

Bod v R_k budu také často označovati — hlavně když nezáleží na explicitním udání jeho souřadnic — jediným (velikým nebo malým) písmenem; formule $P = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ znamená, že bod P jest bod o souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Jsou-li body P a Q totožné, píšeme $P = Q$, v opačném případě $P \neq Q$. Vzdálenost bodů P, Q označujeme znakem $r(P, Q)$.

*) Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ můžeme nazvati souřadnicemi toho bodu.

**) Odmocninu bereme zde i v následujícím vždy nezáporně.

Vzdálenost $r(P, Q)$ hoví vztahu

$$r(P, R) \leqq r(P, Q) + r(Q, R).$$

(Tato nerovnost nazývá se „trojúhelníková nerovnost" a vyjadřuje — geometricky řečeno — že strana trojúhelníku není nikdy větší než součet druhých dvou stran.) Dokažme ji. Jsou-li $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_k$ reálná čísla, potom kvadratická forma

$$\sum_{n=1}^{k} (u_n x + v_n y)^2 = x^2 \sum_{n=1}^{k} u_n^2 + 2xy \sum_{n=1}^{k} u_n v_n + y^2 \sum_{n=1}^{k} v_n^2$$

nenabývá nikdy záporných hodnot: pro její determinant platí tedy

$$\left(\sum_{n=1}^{k} u_n v_n\right)^2 \leqq \sum_{n=1}^{k} u_n^2 \sum_{n=1}^{k} v_n^2$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{k} (u_n + v_n)^2 = \sum_{n=1}^{k} u_n^2 + 2\sum_{n=1}^{k} u_n v_n + \sum_{n=1}^{k} v_n^2 \leqq \sum_{n=1}^{k} u_n^2 + 2\sqrt{\sum_{n=1}^{k} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{k} v_n^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k} v_n^2 = \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{k} u_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{k} v_n^2}\right)^2,$$

a tedy

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{k} (u_n + v_n)^2} \leqq \sqrt{\sum_{n=1}^{k} u_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{k} v_n^2}. \tag{1}$$

Buďte nyní $P = [x_1, \ldots, x_k]$, $Q = [y_1, \ldots, y_k]$, $R = [z_1 \ldots, z_k]$ tři body; dosaďme do (1) $u_n = x_n - y_n$, $v_n = y_n - z_n$ a tedy $u_n + v_n = x_n - z_n$ dostaneme okamžitě

$$r(P, R) \leqq r(P, Q) + r(Q, R).$$

Specielně pro $k = 1$ je bod v R_1 dán jedním reálným číslem; nebudu proto v dalším rozlišovati mezi reálným číslem a bodem v R_1; tedy R_1 je pro nás prostě množství všech reálných čísel nebo osa číselná; vzdálenost dvou bodů (čísel) x, y v R_1 je podle naší definice rovná číslu

$$\sqrt{(x - y)^2} = |x - y|.$$

2. MNOŽSTVÍ ČÍSELNÁ.

Připomenu zde některé základní definice a poučky o množstvích bodových v R_1, t. j. o množstvích reálných čísel (krátce se říká „množství číselná"). Buďiž M číselné množství; existuje-li číslo L takové, že všechna čísla z M jsou menší než L, říkáme, že množství M je *shora ohraničeno*; existuje-li číslo l tak, že všechna čísla z M jsou větší než l, říkáme, že množství M je *zdola ohraničeno.* Množství číselné, jež je ohraničeno shora i zdola, nazýváme krátce *ohraničeným* (beschränkt, borné).*

Je-li M číselné množství neprázdné shora ohraničené, existuje jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti:

1. žádné číslo z M není větší než G;
2. je-li však ε libovolné číslo kladné, potom existuje v M aspoň jedno číslo, jež je větší než $G - \varepsilon$.

Toto číslo G nazývá se *horní hranicí* množství M (obere Grenze, borne supérieure).

Obdobně: Je-li M číselné množství neprázdné zdola ohraničené, existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto dvě vlastnosti:

1. žádné číslo z M není menší než g;
2. je-li však ε libovolné číslo kladné, potom existuje v M aspoň jedno číslo, jež je menší než $g + \varepsilon$.

Toto číslo g nazývá se **dolní hranicí** množství M (untere Grenze, borne inférieure).**)

Je-li a nějaký bod v R_1, potom nazývám **okolím** (Umgebung, voisinage) bodu a každý otevřený interval (konečný), jenž obsahuje bod a, t. j. každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon')$, kde $\varepsilon, \varepsilon'$ jsou jakákoliv čísla kladná.***)

Budiž M množství číselné, a libovolné reálné číslo. *Jestliže v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho bodů z M, říkáme, že bod a je* **bodem zhuštění** (Häufungspunkt, point limite) *množství M.*

PŘÍKLADY. Množství všech čísel $1/n$ (n celé kladné) má jediný bod zhuštění, totiž nulu: tento bod zhuštění k tomu množství nepatří. Interval $(0, 1)$ (t. j. množství všech čísel x, pro něž $0 < x < 1$) má za body zhuštění všechny body uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$; tedy všechny body zhuštění patří k intervalu $(0, 1)$, vyjma ty dva koncové body 0 a 1.

Definici bodu zhuštění lze vysloviti též takto: bod a je bodem zhuštění množství M, jestliže v každém okolí bodu a existuje aspoň jeden bod z M, různý od a.

---

*) Množství prázdné počítám mezi množství ohraničená.

**) Důkaz viz DP 24.

***) V DP 23 zavádí se okolí trochu jinak: především se vylučuje z něho bod a sám, za druhé se bere *uzavřený* interval. V této kapitole budeme však užívati okolí takových, jaká jsem právě definoval; proto jsem trochu pozměnil pojmenování.

Neboť především, existuje-li v každém okolí bodu a nekonečně mnoho bodů z M, existuje v každém okolí bodu a zřejmě aspoň jeden (dokonce nekonečně mnoho) bod z M, různý od a. Za druhé, jestliže existuje okolí $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$, v němž leží jen konečný počet bodů (nebo žádný bod) z M, jest zřejmě možno voliti $\varepsilon'' > 0$ tak malé, že v $(a-\varepsilon'', a+\varepsilon'')$ neleží už žádný bod z M, různý od a (stačí voliti ε'' rovno vzdálenosti bodu a od nejbližšího bodu z M, různého od a).

3. ZÁKLADNÍ POJMY PRO MNOŽSTVÍ V R_k.

Zobecníme nyní některé z uvedených pojmů pro k-rozměrný cartézský prostor. *Množství M v R_k nazýváme* **ohraničeným,** *existuje-li číslo L, jež je větší než vzdálenost kteréhokoliv bodu z M od počátku* (počátkem nazývám bod $[0, 0, \ldots, 0]$; značka O); to lze zřejmě říci také takto: M nazýváme ohraničeným, jsou-li prosté hodnoty souřadnic všech bodů z M menší než jisté číslo L'. Množství prázdné počítáme též mezi množství ohraničená; pro $k=1$ je naše definice zřejmě ve shodě s definicí předešlého odstavce. Zavedeme si nyní dva nové pojmy. Budiž M neprázdné množství ohraničené v R_k; uvažujme vzdálenost $r(P, Q)$ dvou libovolných bodů P, Q z množství M. Probíhají-li body P a Q nezávisle na sobě množství M, probíhá číslo $r(P, Q)$ jisté ohraničené množství číselné; horní hranici tohoto množství nazýváme **průměrem** množství M (značka $d(M)$).

PŘÍKLADY. Množství, složené z jediného bodu P, má průměr rovný nule: neboť jediná vzdálenost přicházející v úvahu je $r(P, P)=0$. Interval (a, b) v R_1 (a též interval $\langle a, b\rangle$) má průměr $b-a$. Množství všech bodů na kružnici (nebo množství všech bodů uvnitř kružnice nebo množství všech bodů uvnitř a na obvodě kružnice nebo konečně množství, skládající se ze všech bodů na kružnici a některých bodů uvnitř kružnice) v R_2 má průměr rovný průměru té kružnice (ve smyslu v elementární geometrii obvyklém). Množství všech bodů uvnitř krychle (nebo množství všech bodů uvnitř a na povrchu krychle nebo množství všech bodů na povrchu krychle) v R_3 má průměr rovný délce tělesné úhlopříčky. Množství v R_4, složené z bodů $[0, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[1, 0, 1, 1]$ má za průměr největší z čísel $\sqrt{0^2+1^2+0^2+0^2}$, $\sqrt{1^2+0^2+1^2+1^2}$, $\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+1^2}$, t. j. číslo 2.

Cvičení. 1. Dokažte: mají-li ohraničená množství M a N aspoň jeden společný bod, je $d(M+N) \leqq d(M)+d(N)$.

2. Budiž dáno ohraničené množství N a množství ohraničená M_i (v konečném nebo nekonečném počtu). Nechť dále každé množství M_i má aspoň jeden společný bod s množstvím N a nechť existuje číslo δ takové, že $d(M_i) < \delta$ pro všechna množství M_i; potom jest

$$d(N+\sum_i M_i) \leqq d(N)+2\delta.$$

(Návod: Oba příklady se řeší pomocí trojúhelníkové nerovnosti.)

Buďtež nyní M, N dvě neprázdná množství v R_k; sestrojme výraz $r(P, Q)$, kde nechť bod P probíhá všechny body z M, bod Q pak všechny body z N. Číslo $r(P, Q)$ probíhá potom jisté množství čísel nezáporných; dolní hranici toho množství nazýváme **vzdáleností** množství M a N; značka $r(M, N)$.

Je-li množství N složeno z jediného bodu P, potom místo „vzdálenost množství $\{P\}$ a množství M" říkáme prostě „vzdálenost bodu P od množství M" a píšeme $r(M, P)$. Definice je zřejmě symetrická, tedy $r(M, N) = r(N, M)$; zřejmě je $r(M, N) = 0$, mají-li množství M a N aspoň jeden společný bod. Ale i jindy může být $r(M, N) = 0$; na příklad je-li M množství všech racionálních čísel, N množství všech iracionálních čísel, je $r(M, N) = 0$, neboť ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézti racionální číslo a a iracionální číslo α tak, že $r(a, \alpha) = |a - \alpha| < \varepsilon$.

Cvičení. Dokažte, že pro libovolná tři neprázdná množství v R_k platí

$$r(M_1, M_3) \leqq r(M_1, M_2) + r(M_2, M_3) + d(M_2)$$

(M_2 předpokládám ohraničené).

Zaveďme nyní pojem intervalu v R_k. Budiž dáno $2k$ reálných čísel $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots, a_k < b_k$; potom množství všech bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, jež hoví vztahům

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \ldots, \quad a_k < x_k < b_k,$$

nazýváme **otevřeným intervalem** a značíme je $(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k)$; obdobně množství všech bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, jež hoví vztahům

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \quad \ldots, \quad a_k \leqq x_k \leqq b_k,$$

nazýváme **uzavřeným intervalem** a značíme je $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$. Pro $k = 1$ je naše nová definice v souhlasu s dřívější definicí (oddíl I, odstavec 1, příklad 3): pro $k = 2$ je interval obdélník, jehož strany jsou rovnoběžny s osami souřadnými, pro $k = 3$ je interval přímý čtyřboký hranol, jehož hrany jsou rovnoběžny s osami souřadnými, atd.

Máme-li dva otevřené intervaly

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k); \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k; d_1, d_2, \ldots, d_k),$$

potom druhý z těchto intervalů je částí prvého tehdy a jen tehdy, když

$$a_1 \leqq c_1 < d_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq c_2 < d_2 \leqq b_2, \quad \ldots, \quad a_k \leqq c_k < d_k \leqq b_k.$$

Táž podmínka platí pro dva uzavřené intervaly.

Průměr intervalu $(a_1, a_2, \ldots, a_k : b_1, b_2, \ldots, b_k)$ je zřejmě roven

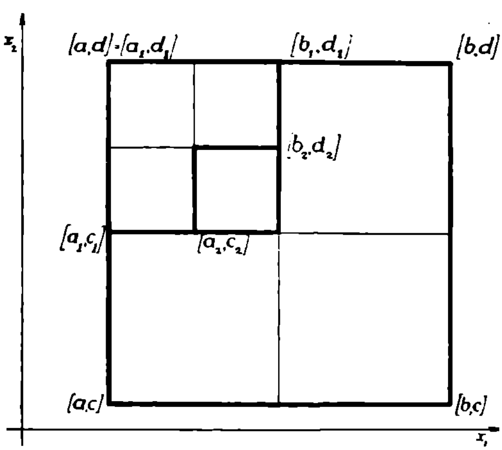
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)^2}$$

a rovná se průměru příslušného uzavřeného intervalu. **Okolím** bodu p nazývám každý otevřený interval, jenž obsahuje bod p.*) Jestliže v každém okolí bodu p leží nekonečně mnoho bodů množství M, nazýváme bod p **bodem zhuštění** množství M. Podobně jako v R_1 (viz odstavec 2) můžeme tuto definici vysloviti také takto: bod p nazýváme bodem zhuštění množství M, jestliže v každém okolí bodu p leží aspoň jeden bod množství M, různý od p. (Důkaz ekvivalence těchto dvou definic vede se stejně jako v odstavci 2 pro R_1.)

Platí pak tato důležitá věta:

Každé nekonečné ohraničené množství v R_k má aspoň jeden bod zhuštění.

Důkaz byl proveden v DP 181: provedeme zde důkaz poněkud jiným způsobem: při tom omezím se na případ $k = 2$,



abych se vyhnul zbytečnému psaní indexů; čtenář jistě bez potíží zobecní tento důkaz pro libovolné k.

Budiž tedy M nekonečné ohraničené množství v R_2 (t. j. v rovině). Existuje tedy uzavřený interval (třeba jest možno

*) V DP 177 a DP 187 se definují okolí poněkud jinak: předně se k nim nepočítá bod p, za druhé se berou jen okolí „krychlová“ o středu p (mimo to se tam připouštějí také okolí kulová a ještě jeden druh okolí krychlových s jinou polohou hran). Pro náš účel je výhodno, zavésti definici poněkud jinou.

zvoliti čtverec) $\langle a, b; c, d\rangle$, jenž obsahuje *všechny* body z M.*) Rozdělme tento čtverec středními příčkami na čtyři uzavřené intervaly (čtverce); aspoň jeden z těchto čtyř čtverců obsahuje nekonečně mnoho bodů z M; označme jej $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$.**) Rozdělme tento čtverec opět středními příčkami na čtyři uzavřené čtverce; ten z těchto čtyř čtverců, jenž obsahuje nekonečně mnoho bodů z M, označme $\langle a_2, b_2; c_2, d_2\rangle$ atd. Tak dostávám posloupnost uzavřených intervalů (čtverců)

(2) $$\langle a, b; c, d\rangle, \langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle, \langle a_2, b_2; c_2, d_2\rangle, \ldots,$$

jež mají tyto vlastnosti:

a) Každý z těchto čtverců obsahuje nekonečně mnoho bodů z M.

b) n-tý čtverec této posloupnosti je obsažen v $(n-1)$-vém; t. j. $a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$; $c \geqq c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots$; $b \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots$; $d \geqq d_1 \geqq \geqq d_2 \geqq \ldots$

c) $$c_n - a_n = \frac{c-a}{2^n}, \quad d_n - b_n = \frac{d-b}{2^n}.$$

Podle *b)* jest posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ neklesající a zřejmě je shora ohraničená, neboť $a_n \leqq c$; tedy existuje

$$\lim_{n=\infty} a_n = \alpha;$$

podle *c)* jest pak také

$$\lim_{n=\infty} c_n = \alpha,$$

a platí

$$a_n \leqq \alpha \leqq c_n$$

(neboť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost neklesající, $c_1, c_2, \ldots$ nerostoucí).

Obdobně vyplývá, že existuje

$$\lim_{n=\infty} b_n = \beta$$

a že jest

$$\lim_{n=\infty} d_n = \beta, \qquad b_n \leqq \beta \leqq d_n.$$

Jestliže nyní jest I libovolné okolí bodu $[\alpha, \beta]$, potom jest jasno, že všechny intervaly $\langle a_n, b_n; c_n, d_n\rangle$ od jistého n počínaje jsou obsaženy v I; tedy obsahuje I nekonečně mnoho bodů z M; t. j. bod $[\alpha, \beta]$ je bodem zhuštění množství M.

*) Viz obrazec, na němž jsou čtverce $\langle a, b; c, d\rangle$, $\langle a_1, b_1; c_1, d_1\rangle$, $\langle a_2, b_2; c_2, d_2\rangle$ silněji vyznačeny. (Na obrázku jsou omylem vesměs zaměněna písmena b, c; na př. místo $[a_1, c_1]$ má tedy býti $[a_1, b_1]$ atd.)

**) Může se ovšem státi, že *několik* těch čtverců má tu vlastnost, že obsahují nekonečně mnoho bodů z M; potom si z nich jeden vybereme (třeba podle nějakého předpisu: vybereme si třeba ten čtverec (obsahující nekonečně mnoho bodů z M), jenž leží co nejdále nalevo a při tom co nejníže.

4. UZAVŘENÁ MNOŽSTVÍ.*)

Množství M v R_k nazýváme **uzavřeným** (abgeschlossen, fermé), jestliže všechny body zhuštění množství M patří k množství M (definici jest opět rozuměti ve smyslu záporném: množství M jest uzavřené, jestliže žádný bod zhuštění množství M neleží mimo množství M; tedy každé množství v R_k, jež nemá vůbec žádného bodu zhuštění, jest uzavřené).

Příklady uzavřených množství: množství prázdné; množství konečná; množství R_k (t j. množství *všech* bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$); množství všech celých čísel kladných (v R_1); uzavřený interval v R_k.

I. *Spojení konečného počtu uzavřených množství v R_k je opět uzavřené množství.*

Důkaz: Buďte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ uzavřená množství; budiž p bod zhuštění množství $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$; mám dokázati, že bod p patří ke spojení $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$. Já tvrdím: Bod p je bodem zhuštění aspoň jednoho množství M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; neboť kdyby bod p nebyl bodem zhustění ani množství M_1 ani množství $M_2 \ldots$ ani množství M_n, potom by existovalo okolí I_1 bodu p, jež by obsahovalo jen konečný počet bodů z M_1, dále by existovalo okolí I_2 bodu p, jež by obsahovalo jen konečný počet bodů z M_2, atd.; stačilo by pak sestrojiti okolí I bodu p, jež je obsaženo v průniku okolí $I_1, I_2, \ldots, I_n$; v tomto okolí I by pak ležel nejvýše konečný počet bodů z M_1, z $M_2, \ldots$, z M_n a tedy též nejvýše konečný počet bodů ze spojení $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$, což je nemožno, ježto p je bodem zhuštění množství $M_1 + M_2 + \ldots$ $\ldots + M_n$. Tedy je p bodem zhuštění aspoň jednoho množství M_i, tedy patří p k množství M_i (neboť M_i je uzavřené) a tedy tím spíše patří p ke spojení $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$.

Předpoklad, že jde o spojení *konečného* počtu množství uzavřených, je podstatný. Příklad v R_1: Budiž $M_n = \langle 1/n, 1 \rangle$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$; spojení těchto množství je neuzavřené:

$$\sum_{n=2}^{\infty} M_n = (0, 1 \rangle.$$

Zato pro průnik platí zcela obecně:

II. *Průnik libovolného množství uzavřených množství je opět uzavřené množství.*

*) Místo „množství bodová v R_k" budu často — pokud bude vyloučeno nedorozumění — říkati krátce „množství".

Důkaz: Jestliže p je bod zhuštění průniku ΠM_n, tedy je p tím spíše bodem zhuštění každého množství M_n (neboť $\Pi M_n \subset M_n$) a tedy (jsou-li M_n uzavřená) patří p ke všem množstvím M_n a tedy patří p k průniku ΠM_n.

Dokážeme si nyní tuto důležitou větu:

III. *Budiž dána „nerostoucí" posloupnost uzavřených ohraničených množství neprázdných:*

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots;$$

potom průnik $\prod\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *není prázdný.*

Důkaz: Zvolme si v každém množství M_n jeden bod p_n; pro posloupnost $p_1, p_2, p_3, \ldots$ jsou pak možny dva případy:

a) Buď vystupuje v této posloupnosti jen konečný počet od sebe různých bodů; potom musí jeden z těchto bodů, řekněme bod p^*, patřiti k nekonečně mnoha množstvím M_n.

b) Nebo vystupuje v posloupnosti $p_1, p_2, \ldots$ nekonečně mnoho různých bodů.

Případ *a)*. Tvrdím, že bod p^* patří ke *všem* množstvím M_n: neboť, je-li n libovolné celé číslo, musí existovati číslo $m > n$ tak, že p^* patří k M_m: tedy patří p^* tím spíše k M_n (neboť $M_n \supset M_m$). Patří tedy bod p^* jistě k průniku $\prod\limits_{n=1}^{\infty} M_n$.

Případ *b)*. Ježto body $p_1, p_2, \ldots$ (mezi nimiž ovšem některé mohou vystupovati vícekráte) tvoří v tomto případě množství nekonečné ohraničené (neboť všechny ty body leží v M_1), existuje podle věty odstavce 3 aspoň jeden bod zhuštění q tohoto množství. Bod q je ovšem též bodem zhuštění množství bodů $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$, ať je n jakékoliv celé kladné číslo; tyto body však leží všechny v M_n (neboť p_{n+k} leží v M_{n+k} a $M_{n+k} \subset M_n$); q je tedy bodem zhuštění každého množství M_n, tedy (ježto M_n jsou uzavřená) q patří ke všem M_n, tedy patří q k průniku $\prod\limits_{n=1}^{\infty} M_n$.

Důležitý důsledek této věty je následující:

Věta IV. Je-li dána „nerostoucí" posloupnost uzavřených intervalů

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

jejichž průměry konvergují k nule:

$$\lim_{n=\infty} d(I_n) = 0,$$

potom existuje jeden a jen jeden bod, jenž je obsažen ve všech těchto intervalech.

Důkaz: Podle poslední věty není průnik $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$ prázdný; kdyby obsahoval dva různé body p, q, musilo by pro každé n platiti $r(p, q) \leqq d(I_n)$ (neboť p, q leží v I_n); tedy by musilo býti $r(p, q) = 0$, t. j. $p = q$, proti předpokladu.

Mějme nějaké množství M v R_k; existují v R_k množství uzavřená, jež obsahují M; na příklad prostor R_k sám. Utvořme průnik všech uzavřených množství v R_k, jež obsahují množství M; podle věty II jest tento průnik — označme jej M^0 — uzavřené množství; zřejmě je $M \subset M^0$ a za druhé jest M^0 „nejmenší" uzavřené množství, jež obsahuje množství M; t. j. je-li N množství uzavřené a platí-li $M \subset N$, jest $M^0 \subset N$. Množství M^0 nazývá se **„uzavřeným obalem"** množství M (abgeschlossene Hülle).

Dokažme ještě větu:

VI. *Jsou-li M, N dvě množství uzavřená v R_k, z nichž aspoň jedno je ohraničené a jež nemají společných bodů* (t. j. MN je množství prázdné), *potom je $r(M, N) > 0$.* Dokážeme napřed: Je-li M uzavřené a neleží-li bod q v množství M, jest $r(q, M) > 0$. Neboť, kdyby bylo $r(q, M) = 0$, potom by ke každému celému číslu $n > 0$ bylo možno nalézti bod p_n z M tak, že $r(q, p_n) < 1/n$. V posloupnosti $p_1, p_2, \ldots$ nemůže se žádný bod p vyskytovati nekonečně mnohokráte; neboť potom by bylo $r(q, p) < 1/n$ pro nekonečně mnoho hodnot n, t. j. $r(q, p) = 0$, t. j. $q = p$, t. j. bod q by patřil k M. Tedy množství všech bodů, obsažených v posloupnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots$, by musilo býti nekonečné, a ježto

$$\lim_{n=\infty} r(q, p_n) = 0,$$

byl by bod q zřejmě bodem zhuštění uzavřeného množství M, t. j. musil by patřiti k M, což je proti předpokladu. Tedy jest $r(q, M) > 0$.

Buďte nyní M, N dvě množství uzavřená, z nichž aspoň jedno je ohraničené, bez společných bodů, a předpokládejme, že $r(M, N) = 0$. Potom tedy ke každému celému číslu $n > 0$ existuje bod p_n z M a bod q_n z N tak, že $r(p_n, q_n) < 1/n$. Posloupnost $p_1, p_2, \ldots$ nemůže obsahovati žádný bod p nekonečně mnohokrát, neboť pak by bylo nutně $r(p, N) = 0$, což je nemožné, ježto p leží v M a tedy neleží v N. Z téhož důvodu také posloupnost $q_1, q_2, \ldots$ nemůže obsahovati žádný bod nekonečně mnohokrát.

Množství všech bodů z posloupnosti $p_1, p_2, \ldots$ je tedy nekonečné a ovšem ohraničené (ježto leží v M) a má tedy aspoň jeden bod zhuštění p; ježto však $r(p_n, q_n) < 1/n$, je zřejmě bod p také bodem zhuštění bodů $q_1, q_2, \ldots$ Tedy bod p je bodem zhuštění obou uzavřených množství M a N, patří tedy k M i k N, což je proti předpokladu.

POZNÁMKA. Předpoklad ohraničenosti je podstatný; čtenář to pozná na tomto příkladě: Budiž v rovině, opatřené pravoúhlými osami x, y, množství M hyperbola $xy = 1$, množství N přímka $y = 0$; ta dvě množství jsou uzavřená (ovšem neohraničená) a jejich vzdálenost $r(M, N) = 0$. (Čtenář nechť si uvědomí, že R_2 je množství všech bodů $|x, y|$, kde x a y jsou reálná čísla; nějaké „nevlastní body" nepadají podle naší definice prostoru R_k v úvahu.)

5. OTEVŘENÁ MNOŽSTVÍ.

Je-li M nějaké množství v R_k, potom množství komplementární k množství M vzhledem k R_k je podle definice v oddílu 1, odstavci 2 množství $R_k - M$; poněvadž v dalším nebude se třeba obávati nedorozumění, budu přídavek „vzhledem k R_k" vynechávati. Množství komplementární k množství uzavřenému nazývá se **otevřeným***) (offen, ouvert). Tedy na příklad množství prázdné (komplementární k R_k) je otevřené, prostor R_k sám (komplementární k množství prázdnému) je otevřený.

Budiž dáno nějaké množství bodové M a nějaký bod p z M; bod p nazveme **vnitřním** bodem množství M, existuje-li okolí bodu p, jehož všechny body patří k M.

Tvrdím nyní: I. *Neprázdné množství M je tehdy a jen tehdy otevřené, je-li každý bod množství M vnitřním bodem množství M.*

Důkaz: Množství M je otevřené tehdy a jen tehdy, jestliže komplementární množství $R_k - M$ je uzavřené, t. j. jestliže všechny body zhuštění množství $R_k - M$ patří k $R_k - M$, t. j. jestliže žádný bod z M není bodem zhuštění množství $R_k - M$. To však znamená (podle druhé definice bodu zhuštění, odstavec 3), že ke každému bodu p z M existuje okolí, jež neobsahuje žádný bod z $R_k - M$ (přídavek „různý od p" mohu vynechati, ježto bod p nepatří k $R_k - M$), t. j. že ke každému bodu p z M existuje okolí, jehož všechny body patří k M, t. j. že každý bod z M je vnitřním bodem množství M.

---

*) Podle názvosloví DP 189 by se takové množství nazývalo „plně otevřeným".

Platí:

II. *Průnik konečného počtu otevřených množství $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots M_n$ je množství otevřené.*

Důkaz: Každý bod p toho průniku je vnitřním bodem všech množství $M_1, M_2, \ldots, M_n$; t. j. existují okolí $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tak, že všechny body z I_m patří k M_m; sestrojím-li okolí I bodu p, jež je obsaženo ve všech okolích $I_1, I_2, \ldots, I_n$ (což zřejmě je možno), bude každý bod z I patřiti k průniku $M_1 M_2 \ldots M_n$, t. j. p je vnitřním bodem průniku $M_1 M_2 \ldots M_n$.

III. *Spojení otevřených množství* (v konečném nebo nekonečném počtu) *je otevřené.*

Důkaz: Každý bod toho spojení je bodem — a tedy vnitřním bodem — jednoho ze „sčítanců" a tedy je tím spíše vnitřním bodem spojení.

Cvičení. 1. Dokažte poslední dvě věty na základě obdobných vět o uzavřených množstvích (t. j. přechodem ke komplementárním množstvím pomocí duality vytčené v oddíle 1, odstavci 2 na konci).

2. Dokažte: Je-li M libovolné množství v R_k, potom existuje mezi otevřenými množstvími, obsaženými v M, jedno „největší"; to se nazývá „otevřeným jádrem" (offener Kern) množství M. Dvojí důkaz: buď z věty III nebo přechodem ke komplementárním množstvím z uzavřeného obalu.

6. DERIVOVANÉ MNOŽSTVÍ.

Budiž M libovolné množství; znakem M^1 značíme množství všech bodů zhuštění toho množství M; M^1 se nazývá **derivovaným množstvím** nebo **derivací** (Ableitung, ensemble dérivé) množství M.

I. *Derivace je vždy uzavřené množství.*

Důkaz: Budiž M libovolné množství, M^1 jeho derivace; budiž p libovolný bod zhuštění množství M^1. Sestrojme libovolné okolí I bodu p, t. j. libovolný otevřený interval, obsahující bod p. V I leží aspoň jeden bod q z M^1; ježto otevřený interval I obsahuje bod q, je I také okolím bodu q. Ježto q patří k M^1, t. j. ježto q je bodem zhuštění množství M, leží v I nekonečně mnoho bodů z M. Tedy je p bodem zhuštění množství M, t. j. p patří k M^1, jak bylo dokázati.

Je-li $M \subset N$, je zřejmě $M^1 \subset N^1$.

II. *Jestliže je dán konečný počet množství $M_1, M_2, \ldots, M_n$, je derivace spojení $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ rovna spojení derivací $M_1{}^1$, $M_2{}^1, \ldots, M_n{}^1$.* Neboť předně je zřejmě $M_i{}^1 \subset (M_1 + M_2 + \ldots + M_n)^1$ a tedy $M_1{}^1 + M_2{}^1 + \ldots + M_n{}^1 \subset (M_1 + M_2 + \ldots + M_n)^1$: za druhé každý bod zhuštění množství $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ je zřejmě bodem zhuštění aspoň jednoho množství M_i;*) tedy $(M_1 + M_2 + \ldots$ $\ldots + M_n)^1 \subset M_1^1 + M_2^1 + \ldots + M_n^1$.

Pro spojení nekonečného počtu množství tato věta nemusí platit; čtenář nechť si sám sestrojí příklady.

III. *Množství M je uzavřené tehdy a jen tehdy*, jestliže každý bod zhuštění množství M patří k M, t. j. *jestliže $M^1 \subset M$.*

IV. *Uzavřený obal množství M jest dán tímto spojením:* $M^0 = M + M^1$.

Neboť každé množství uzavřené N, jež obsahuje množství M, musí obsahovati i všechny body zhuštění množství M; tedy je jistě $N \supset M + M^1$. Za druhé je množství $M + M^1$ uzavřené; neboť jeho derivace $(M + M^1)^1$ rovná se spojení derivace množství M a derivace množství M^1; derivace množství M je pak M^1 a derivace množství M^1 je obsažena v M^1, ježto M^1 je uzavřené; tedy $(M + M^1)^1 \subset M^1$ a tím spíše tedy $(M + M^1)^1 \subset M + M^1$; t. j. $M + M^1$ je uzavřené množství, jež je obsaženo v každém jiném uzavřeném množství, obsahujícím množství M, t. j. $M + M^1$ je právě hledaný uzavřený obal M^0.

V. *Derivace množství M je totožna s derivací uzavřeného obalu M^0.*

Důkaz: $M^0 = M + M^1$; tedy $(M^0)^1 = (M + M^1)^1 = M^1 + (M^1)^1$; ale M^1 je uzavřené, tedy $(M^1)^1 \subset M^1$; tedy $(M^0)^1 = M^1$.

7. MNOŽSTVÍ V SOBĚ HUSTÁ

(insichdicht, dense en soi); **množství hustá** (dicht, dense) **v intervalu; množství nehustá** (nirgends dicht, non dense) **v intervalu.**

Množství uzavřené M je charakterisováno vztahem $M^1 \subset M$ (podle předešlého odstavce). Druhý krajní případ je $M \subset M^1$; takové množství M nazývá se **„v sobě husté“.** Množství M je tedy v sobě husté, je-li každý bod množství M bodem zhuštění množství M. Příklady: množství všech racionálních čísel v R_1; interval (otevřený nebo uzavřený) v R_k.

Množství M nazýváme **hustým** v intervalu**) I, jestliže každý bod intervalu I je bodem zhuštění množství M, t. j. jestliže

*) Podrobné odůvodnění přenechávám čtenáři.

**) Je jedno, mluvím-li o uzavřeném nebo otevřeném intervalu; neboť je-li každý vnitřní bod intervalu bodem zhuštění množství M, je patrně také každý bod na „hranici“ intervalu bodem zhuštění množství M.

$I \subset M^1$. Příklady: množství všech racionálních čísel v R_1 je husté v každém intervalu; interval v R_k je hustý v každém svém částečném intervalu.

Je-li množství M husté v každém intervalu, říkáme, že M je **všude husté.**

Druhý extrémní případ je tento: Budiž dáno množství M a interval I; jestliže množství M není husté v žádném intervalu, obsaženém v intervalu I, říkáme, že množství M je **nehusté v intervalu** I.

To znamená tedy: V každém intervalu K (obsaženém v I) existuje aspoň jeden bod p, jenž není bodem zhuštění množství M; existuje tedy okolí I_1 bodu p, jež obsahuje nejvýše jeden bod množství M; zřejmě existuje tedy interval L, obsažený v I_1, jenž neobsahuje žádný bod z M; L můžeme zřejmě zvolit tak, aby bylo L obsaženo v K. Tedy: *Je-li M množství nehusté v intervalu I, potom v každém intervalu K, obsaženém v I, lze nalézti interval L, jenž neobsahuje žádný bod množství M. A zřejmě též naopak:* každé množství M, jež má tuto vlastnost, je nehusté v intervalu I; neboť žádný vnitřní bod z L není bodem zhuštění množství M, t. j. množství M není husté v intervalu K, t. j. množství M není husté v žádném intervalu, obsaženém v I. Množství, jež je nehusté v každém intervalu, budeme krátce nazývati **nehustým.** Nehusté množství je tedy takové, jež není husté v žádném intervalu, čili (podle poslední věty) *množství M je nehusté tehdy a jen tehdy, jestliže v každém intervalu K existuje částečný interval L, neobsahující žádný bod z M.*

8. MNOŽSTVÍ DOKONALÁ.

Množství uzavřené je charakterisováno vztahem $M^1 \subset M$; množství v sobě husté je charakterisováno vztahem $M \subset M^1$; množství, jež hoví oběma těmto vztahům současně, nazývají se **dokonalá** čili **perfektní** (perfekt, parfait). Množství M je tedy dokonalé, je-li uzavřené a v sobě husté, čili je-li $M = M^1$.

PŘÍKLAD: Uzavřený interval. Spojení konečného počtu dokonalých množství $M_1, M_2, \ldots, M_n$ je opět množství dokonalé. Neboť podle odstavce 6 je $(M_1 + M_2 + \ldots + M_n)^1 = M_1^1 + M_2^1 + \ldots + M_n^1$; a ježto $M_i^1 = M_i$, tedy $(M_1 + M_2 + \ldots + M_n)^1 = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$.

I. *Neprázdné množství dokonalé jest nespočetné.*

Důkaz: Neprázdné množství dokonalé nemůže býti konečné, neboť konečné množství má prázdnou derivaci. Zbývá dokázati, že množství dokonalé nemůže býti spočetné. My to dokážeme tak, že ukážeme: spočetné množství v sobě husté nemůže býti uzavřené. Budiž tedy $M = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ spočetné množství v sobě husté; zvolme si „krychlový“ interval*) uzavřený I, jehož hrany mají délku 1 a jenž obsahuje aspoň jeden bod z M jako vnitřní bod. Ježto každý bod z M je bodem zhuštění množství M, tedy existuje uvnitř intervalu I nekonečně mnoho bodů z M; vezměme jeden z těch bodů q_1, různý od p_1, a sestrojme uzavřený krychlový interval I_1, obsažený v I, jenž má střed v q_1, jenž má hranu menší než $\frac{1}{2}$ a jenž neobsahuje bod p_1. Interval I_1 obsahuje uvnitř**) nekonečně mnoho bodů z M; vyberme si z těch bodů nějaký bod q_2, různý od p_2. Kolem bodu q_2 jako středu sestrojme uzavřený krychlový interval I_2, obsažený v I_1, jenž má hranu menší než $(\frac{1}{2})^2$ a jenž neobsahuje p_2. Interval I_2 obsahuje uvnitř nekonečně mnoho bodů z M; vyberme si z těch bodů nějaký bod q_3, různý od p_3. Kolem bodu q_3 jako středu sestrojme uzavřený krychlový interval I_3, obsažený v I_2, jenž má hranu menší než $(\frac{1}{2})^3$ a jenž neobsahuje bod p_3. Atd. Tak dostáváme posloupnost uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, při čemž $\lim_{n=\infty} d(I_n) = 0$. Podle věty IV odst. 4 existuje jeden a jen jeden bod r, jenž leží ve všech těchto intervalech. Ježto interval I_n neobsahuje bod p_n, jest bod r různý ode všech bodů $p_1, p_2, p_3, \ldots$, t. j. r nepatří k M. Ježto však každý interval I_n obsahuje nekonečně mnoho bodů z M a ježto $\lim_{n=\infty} d(I_n) = 0$, jest r bodem zhuštění množství M. Tedy množství M není uzavřené, jak bylo dokázati.

9. KONDENSAČNÍ BODY.

Bod p nazýváme **kondensačním bodem** množství M, jestliže v každém okolí bodu p leží nespočetné množství bodů z M. Bod kondensační je tedy vždy bodem zhuštění (naopak ovšem bod zhuštění nemusí býti bodem kondensačním; na příklad každé spočetné ohraničené množství má aspoň jeden bod zhuštění, nemůže však — ježto je spočetné — míti bodu kondensačního).

K dalším úvahám potřebuji intervaly a okolí zvláštního druhu. Otevřený interval $(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k)$ nazvu **racio-**

*) Tím chci říci, že všechny jeho hrany jsou stejně dlouhé.

**) Říkám, že uzavřený interval I obsahuje bod p uvnitř, jestliže p jest vnitřním bodem intervalu I, t. j. jestliže p leží v otevřeném intervalu, jenž vznikne z I vynecháním jeho „hranice“.

nálním intervalem, jsou-li všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ racionální (pod racionálním intervalem budu rozuměti vždy otevřený interval — jiné nebudu potřebovati). Racionální okolí bodu p je potom libovolný racionální interval, jenž obsahuje bod p. Samozřejmě existují ke každému bodu p racionální okolí libovolně malá (t. j. o libovolně malém průměru). Množství všech racionálních intervalů v R_k je zřejmě spočetné.*)

I. *Každé množství nespočetné obsahuje aspoň jeden bod kondensační.* (T. j.: Každé nespočetné množství M má aspoň jeden bod kondensační a aspoň jeden z těchto bodů kondensačních patří k množství M).

Důkaz: Budiž M množství, jež neobsahuje žádný bod kondensační. Potom můžeme ke každému bodu p z M sestrojiti okolí — a tedy také racionální okolí — jež obsahuje nejvýše spočetné množství bodů z M. Přiřaďme každému bodu z M jedno takové racionální okolí; buďtež $I_1, I_2, I_3, \ldots$ ona racionální okolí, jichž jsme při tom použili; je jich nejvýše spočetné množství (neboť všech racionálních intervalů je spočetné množství). Každý bod z M je obsažen aspoň v jednom z těch intervalů $I_1, I_2, \ldots$ t. j. $M = MI_1 + MI_2 + \ldots$; každý interval I_n obsahuje nejvýše spočetné množství bodů z M, t. j. množství MI_n je nejvýše spočetné. Tedy též množství M, jakožto spojení nejvýše spočetného množství nejvýše spočetných množství, jest nejvýše spočetné.

II. *Budiž nyní M nějaké množství a budiž N množství všech bodů kondensačních množství M. Tvrdím: N je dokonalé množství.*

Důkaz: Budiž p bod zhuštění množství N; v každém okolí I bodu p leží tedy aspoň jeden bod z N t. j. aspoň jeden bod q, jenž je kondensačním bodem množství M. Interval I jest také okolím bodu q; tedy leží v I nespočetné množství bodů z M; tedy je p kondensačním bodem množství M, t. j. p patří k N. Tedy je N uzavřené množství.

Budiž za druhé p nějaký bod z N; budiž I libovolné okolí bodu p; ježto p je kondensačním bodem množství M, je průnik MI nespočetné množství; tedy i množství $M(I - \{p\})$**) jen espočetné; obsahuje tedy aspoň jeden kondensační bod. Tento kondensační bod leží tedy v I a je různý od p; a je ovšem tím

*) Intervalu racionálnímu $(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k)$ přiřadíme bod $[a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k]$ v R_{2k}; množství všech bodů v R_l s racionálními souřadnicemi je spočetné; pro R_2 bylo to dokázáno v oddílu 1., odstavci 4., příkladu 3; pro obecné l dokáže to čtenář snadno indukcí.

**) T. j. množství všech bodů z M, jež leží v I a jsou různé od p.

spíše kondensačním bodem množství M, t. j. patří k množství N. Tedy: v libovolném okolí bodu p leží aspoň jeden bod z N, různý od p; t. j. bod p je bodem zhuštění množství N, množství N je tedy v sobě husté.

Tím je důkaz proveden.

Věta III **(Cantor-Bendixsonova).** *Každé uzavřené množství M lze psáti jako spojení $M = A + P$, kde A, P jsou dvě množství bez společných bodů, A nejvýše spočetné a P dokonalé* (ovšem ve specielních případech může býti A nebo P prázdné).

Důkaz: Budiž P množství všech bodů kondensačních množství M; P je podle poslední věty dokonalé; ježto M je uzavřené, je $P \subset M$. Položme $A = M - P$; kdyby existoval kondensační bod množství A, byl by ovšem tím spíše kondensačním bodem množství M a tedy by patřil k P a nepatřil by k A. Množství A neobsahuje tedy žádný svůj bod kondensační a je tedy podle věty I nejvýše spočetné;*) zřejmě pak jest AP prázdné množství, $M = A + P$, čímž věta je dokázána.

10. MNOŽSTVÍ UZAVŘENÁ A OTEVŘENÁ V R_1.

Uzavřená a otevřená množství v R_1 (t. j. uzavřená a otevřená množství na ose číselné) mají zvlášť jednoduchou strukturu, kterou se budeme nyní zabývati. Dokažme napřed: *Je-li na ose číselné dáno nějaké množství $\mathfrak{M}$ otevřených intervalů, z nichž žádné dva nemají společných bodů, potom je těchto intervalů nejvýše spočetné množství.*

Mezi otevřené intervaly budu v této větě vedle konečných intervalů (a, b) počítati i nekonečné intervaly $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$.

Důkaz: Předpokládejme napřed, že všechny ty intervaly leží v nějakém konečném intervalu (A, B). Potom těch intervalů z $\mathfrak{M}$, jež mají délku větší než $(B - A)/2^n$ (n je libovolné celé kladné číslo), je konečný počet, totiž nejvýše 2^n (neboť více takových intervalů bez společných bodů se do intervalu (A, B) nevejde). Označme znakem $\mathfrak{M}_n$ množství všech intervalů z $\mathfrak{M}$, jejichž délka je větší než $(B - A)/2^n$, není však větší než $(B - A)/2^{n-1}$; každý interval z $\mathfrak{M}$ je prvkem jednoho množství $\mathfrak{M}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; každé množství $\mathfrak{M}_n$ je konečné, jak jsme právě ukázali; tedy je množství $\mathfrak{M}$ nejvýše spočetné.**)

---

*) A tedy nemá ovšem vůbec kondensačního bodu.

**) Používám stále věty, že spojení nejvýše spočetného množství nejvýše spočetných množství je množství nejvýše spočetné.

Odstraňme nyní předpoklad, že intervaly z množství $\mathfrak{M}$ leží všechny v nějakém konečném intervalu (A, B); označme znakem $\mathfrak{P}_n$ množství všech intervalů z $\mathfrak{M}$, jež leží celé v intervalu $(-n, n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$; množství $\mathfrak{P}_n$, jak jsme právě ukázali, je nejvýše spočetné; každý konečný interval z $\mathfrak{M}$ je prvkem aspoň jednoho množství $\mathfrak{P}_n$; tedy všech konečných intervalů z $\mathfrak{M}$ je nejvýše spočetné množství. Mimo to obsahuje $\mathfrak{M}$ ještě nejvýše dva nekonečné intervaly; tedy je $\mathfrak{M}$ nejvýše spočetné.

Cvičení. Dokažte, že tato věta platí též v R_k pro libovolné k. (Připouštějte také „nekonečné intervaly" $(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_k)$, kde místo některých čísel a_i může stát symbol $-\infty$ resp. místo některých b_i symbol $+\infty$; jak odstraníte potíž s nekonečnými intervaly, jichž může být nekonečně mnoho?)

I. *Každé otevřené množství v R_1 dá se vyjádřiti jakožto spojení nejvýše spočetného množství otevřených intervalů, z nichž žádné dva nemají společných bodů.*

Důkaz: K libovolnému bodu a daného otevřeného množství M přiřadíme jistý otevřený interval I_a takto: Ježto a je vnitřním bodem množství M, existují čísla $a' > a$ taková, že všechny body intervalu $\langle a, a')$ patří k M. Budiž α' horní hranice čísel a', pro něž všechny body intervalu $\langle a, a')$ patří k M. Obdobně budiž α'' dolní hranice všech čísel $a'' < a$, pro něž všechny body intervalu $(a'', a\rangle$ patří k M; položíme pak $I_a = (\alpha'', \alpha')$.*) Tím je každému bodu a z M přiřazen jistý otevřený interval I_a; zřejmě všechny body z I_a patří k M. Koncové body α'', α' však nepatří k M neboť kdyby na příklad bod α' patřil k otevřenému množství M, potom by α' byl vnitřním bodem množství M a tedy by existovalo okolí $(\alpha' - \varepsilon, \alpha' + \varepsilon')$ $(\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0)$, jehož všechny body by patřily k M. Potom by však všechny body intervalu $\langle a, \alpha' + \varepsilon')$ patřily k množství M, což je ve sporu s definicí čísla α'. Interval I_a lze tedy charakterisovati také jako největší otevřený interval, jenž obsahuje bod a a jehož všechny body patří k M. Z toho je okamžitě vidět, že dva intervaly I_a, I_b, přiřazené dvěma bodům a, b množství M, buď nemají vůbec společných bodů nebo jsou totožné (podrobné odůvodění zajisté mohu přenechati čtenáři). Nechám-li bod a probíhati celé množství M, potom spojení příslušných intervalů I_a je zřejmě rovno M (neboť: každý bod a z M je obsažen v jednom z těch intervalů, totiž právě v intervalu I_a a za druhé každý interval I_a obsahuje jen

*) Může se ovšem státi, že na příklad všechna čísla a', jež jsou větší než a, patří k M; potom ovšem místo α' klademe symbol ∞; obdobně, jestliže všechna čísla $< a$ patří k M, klademe místo α'' symbol $-\infty$.

body z M). Libovolné dva intervaly I_a, I_b, jež nejsou totožné, jsou bez společných bodů; tedy mezi intervaly I_a (kde a probíhá všechny body z M) jest podle předešlé věty nejvýše spočetné množství intervalů navzájem různých; spojení tohoto nejvýše spočetného množství intervalů jest pak právě množství M, jak bylo dokázati.

Cvičení. Dokažte, že rozklad množství otevřeného v R_1 na otevřemé intervaly bez společných bodů je možno provésti jen jedním způsobem.

Ovšem též naopak, každé spojení libovolného (konečného nebo nekonečného) počtu otevřených intervalů je množství otevřené, podle věty III, odstavce 5.

Uzavřené množství je komplementární množství k otevřenému (a naopak); z věty I tedy plyne: II. *Každé množství uzavřené M v R_1 dá se vytvořiti tak, že z množství R_1* (t. j. z celé osy číselné) *odstraníme nejvýše spočetné množství otevřených intervalů, jež nemají po dvou společných bodů.*

Podle posledního cvičení jsou tyto intervaly jednoznačně určeny; říká se jim **styčné intervaly množství** M (komplementäre Intervalle, intervalles contigus).

Všimněme si ještě, jak vypadají specielně styčné intervaly množství dokonalých. Dva libovolné styčné intervaly nemají společných bodů; mohou však (jsouce otevřené) míti společný koncový bod. Mají-li dva styčné intervaly množství M společný koncový bod, buďte to třeba intervaly (a, b), (b, c), potom bod b je zřejmě isolovaným bodem*) množství M (neboť v intervalu (a, c) jediný bod b patří k M); naopak, má-li uzavřené množství M nějaký isolovaný bod p, potom existuje otevřený interval $(p - \varepsilon, p + \varepsilon')$ $(\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0)$, jenž neobsahuje žádného bodu z M, vyjma bod p; je jasno (čtenář nechť si všimne konstrukce intervalů I_a v důkazu věty I), že existuje potom styčný interval (a, p) a rovněž tak styčný interval (p, b) (kdež $a < p$, $b > p$). Tedy: uzavřené množství M v R_1 obsahuje tehdy a jen tehdy aspoň jeden isolovaný bod (t. j. není dokonalé), jestliže existují dva styčné intervaly množství M, jež mají společný koncový bod. Nebo naopak:

III. *Uzavřené množství v R_1 je dokonalé tehdy a jen tehdy, jestliže žádné dva z jeho styčných intervalů nemají společný koncový bod.*

*) Bod, patřící k množství M, jenž není bodem zhuštění množství M, nazývá se **isolovaným bodem** množství M.

Touto větou získáváme předpis ke konstrukci dokonalých množství v R_1; užijeme této konstrukce k sestrojení známého příkladu Cantorova. Nejjednodušší dokonalé množství v R_1 jest uzavřený interval $\langle a, b\rangle$. Toto množství není nehusté (neboť je husté na příklad v intervalu $\langle a, b\rangle$ a rovněž v každém částečném intervalu). Také spojení konečného počtu uzavřených intervalů jest množství dokonalé, jež není nehusté. Ukážeme nyní na příkladě, pocházejícím od G. Cantora, že existují v R_1 množství dokonalá nehustá (t. j. množství, jež jsou uzavřená a v sobě hustá, přes to však nejsou hustá v žádném intervalu).

Cantorův příklad jest tento:

Odstraňme z R_1, t. j. z osy číselné, intervaly $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$; zbude tedy interval uzavřený $\langle 0, 1\rangle$. Odstraňme z tohoto intervalu prostřední třetinu, t. j. otevřený interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ („první krok“); zbudou uzavřené intervaly $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$; z každého z nich odstraňme prostřední třetinu, t. j. odstraňme otevřené intervaly $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ („druhý krok“); zbudou intervaly $\langle 0, \frac{1}{9}\rangle$, $\langle \frac{2}{9}, \frac{3}{9}\rangle$, $\langle \frac{6}{9}, \frac{7}{9}\rangle$, $\langle \frac{8}{9}, 1\rangle$; odstraňme z nich opět intervaly $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ („třetí krok“); atd. do nekonečna. [Tedy na příklad po n-tém kroku zbudou uzavřené intervaly o délce $(\frac{1}{3})^n$, v počtu 2^n; $(n+1)$-vý krok spočívá v tom, že z každého z těchto intervalů $\langle a, b\rangle$ odstraním prostřední (otevřenou) třetinu, t. j. interval $(\frac{1}{3}(2a+b), \frac{1}{3}(a+2b))$.]

Množství, které zbude z R_1 po provedení všech kroků (t. j. po odstranění všech těch otevřených intervalů) je ovšem neprázdné a uzavřené; jeho styčné intervaly jsou právě ty intervaly odstraněné; označme to množství P. Za druhé je P dokonalé, neboť žádné dva z těch styčných intervalů nemají společného koncového bodu. Za třetí je P nehusté; po n-tém kroku zbudou totiž v R_1 už jenom uzavřené intervaly (od sebe oddělené) o délce $(\frac{1}{3})^n$; každý interval delší než $(\frac{1}{3})^n$ obsahuje tedy aspoň jeden bod, jenž nepatří k P. Ježto však n je libovolné (libovolně veliké), je viděti, že vůbec každý interval I obsahuje aspoň jeden bod z $R_1 - P$. Ježto však $R_1 - P$ jest otevřené množství, je každý bod z $R_1 - P$ vnitřním bodem množství $R_1 - P$ a tedy každý interval I obsahuje nějaký interval L, v němž neleží žádný bod z P, t. j. P je nehusté.

Cvičení. Dokažte, že P jest totožné s množstvím všech čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jež se dají v trojkové soustavě psáti ve tvaru $0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{9}a_2 + \frac{1}{27}a_3 + \ldots$, kde žádná „decimála“ a_i není rovna 1. (K těmto číslům patří na příklad též číslo $\frac{1}{3} = 0{\cdot}10000\ldots$, neboť se dá psáti též ve tvaru $\frac{1}{3} = 0{\cdot}02222\ldots$).

11. VYŠŠÍ DERIVACE BODOVÉHO MNOŽSTVÍ.

Budiž M množství bodové; znakem M^0 jsme označili jeho uzavřený obal, znakem M^1 derivaci množství M; jak víme, je M^1 též derivací toho uzavřeného obalu (odstavec 6, věta V): $(M^0)^1 = M^1$. Zavedeme nyní vyšší derivace takto: derivaci množství M^1 označme M^2, tedy $M^2 = (M^1)^1$; derivaci množství M^2 označme M^3, tedy $M^3 = (M^2)^1$; obecně: derivaci množství M^n označme M^{n+1}; tím jsou definována množství M^n pro všechna celá čísla $n \geqq 0$ (nebo též můžeme říci: pro všechna pořadová čísla první třídy). Nezastavíme se však zde, nýbrž budeme pokračovati k číslům pořadovým druhé třídy takto: průnik $\prod\limits_{n=1}^{\infty} M^n$ označím M^ω: derivaci množství M^ω označíme $M^{\omega+1}$; derivaci množství $M^{\omega+1}$ označíme $M^{\omega+2}$; tak definuji obecně $M^{\omega+n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; průnik všech množství M^α, kde $\alpha < \omega . 2$ (t. j. průnik všech množství M^n a $M^{\omega+n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) označím $M^{\omega . 2}$ atd. Tímto způsobem definuji M^α pro všechna pořadová α čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$; a sice obecně zní ten předpis takto:

1. *M^0 budiž uzavřený obal množství M.*

2. *Je-li $\alpha > 0$ pořadové číslo prvního druhu, t. j. existuje-li číslo β takové, že $\alpha = \beta + 1$, budiž M^α rovno derivaci množství M^β, t. j. $M^\alpha = M^{\beta+1} = (M^\beta)^1$.*

3. *Je-li α pořadové číslo druhého druhu, čili limitní číslo, potom budiž M^α rovno průniku všech množství M^β, kde β probíhá všechna pořadová čísla menší než α, t. j. $M^\alpha = \prod\limits_{\beta<\alpha} M^\beta$.*

Tvrdím, že tímto předpisem jest definováno množství M^α pro každé pořadové číslo α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Neboť vskutku, především jest definováno M^0 jakožto uzavřený obal množství M. Je-li za druhé $\alpha > 0$ a jsou-li definována množství M^β pro všechna $\beta < \alpha$, je definováno též množství M^α; neboť buď je α číslo pořadové prvního druhu a potom existuje číslo bezprostředně předcházející γ (t. j. $\gamma + 1 = \alpha$) a podle předpisu 2. je M^α definováno vztahem $M^\alpha = (M^\gamma)^1$; nebo je α číslo pořadové druhého druhu, a potom je podle předpisu 3. definováno množství M^α vztahem $M^\alpha = \prod\limits_{\beta<\alpha} M^\beta$. Tedy pomocí transfinitní indukce (oddíl 3, odstavec 5, věta D) je množství M^α definováno pro každé α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Množství M^α nazýváme **α-tou derivací** množství M.

POZNÁMKA (pro kritického čtenáře). Lze právem namítnouti, že tento způsob usuzování je poněkud ukvapený. Uvažovali jsme totiž výrok „množství M^α jest definováno" a ukázali jsme, že 1. tento výrok je správný pro $\alpha=0$ a že 2. je-li tento výrok správný pro všechna β, jež jsou menší než α, je tento výrok správný i pro číslo α. Tedy podle věty D (oddíl 3, odstavec 5) jest ten výrok správný pro všechna α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$, t. j. množství M^α jest definováno pro všechna α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$. Ovšem výrok „množství M^α jest definováno" musí mít pro každé α sám o sobě smysl; musí být jasno, že pro každé α jest tento výrok (sám o sobě) buď správný nebo nesprávný.*) To však není zcela jasno; neboť náš předpis má rekurentní charakter, a tudíž můžeme mluviti o tom, zda množství M^α je nebo není definováno, teprve tehdy, jestliže jsou již definována množství M^β pro všechna $\beta<\alpha$. Musíme tudíž, abychom si zjednali úplně jasno, analysovati tu definici trochu podrobněji. Naše definice se skládá vlastně ze dvou částí; první její část je vlastně tato věta:

Věta E. Je-li dáno libovolné množství bodové M, existuje jeden a jen jeden systém množství bodových

$$M^0, M^1, M^2, \ldots, M^\alpha, \ldots$$

(v němž každému číslu α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ je přiřazeno určité množství M^α),**) *jenž hoví těmto třem požadavkům:*

1. *M^0 jest uzavřený obal množství M;*

2. *je-li $\alpha>0$ číslo prvního druhu, jest M^α derivací množství M^β, kdež β je číslo bezprostředně předcházející před α;*

3. *je-li α číslo druhého druhu, jest*

$$M^\alpha=\prod_{\beta<\alpha} M^\beta.$$

Po této větě následuje teprve vlastní definice (pojmenování): *Množství M^α nazýváme α-tou derivací množství M.*

Jde tedy o důkaz věty E, který provedeme takto: Množství bodové M budiž dáno. Budiž α číslo ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$; budeme říkati, že číslo α má vlastnost (A), jestliže existuje aspoň jeden systém množství

$$M_\alpha^0, M_\alpha^1, M_\alpha^2, \ldots, M_\alpha^\alpha \tag{1}$$

(kde tedy každému číslu $\beta\leqq\alpha$ je přiřazeno určité množství M_α^β), jenž má tyto vlastnosti:

1^α. M_α^0 jest uzavřený obal množství M;

2^α. je-li γ číslo prvního druhu, $0<\gamma\leqq\alpha$, jest M_α^γ derivací množství M_α^β, kde β je číslo bezprostředně předcházející před γ;

3^α. je-li γ číslo druhého druhu, $\gamma\leqq\alpha$, jest

$$M_\alpha^\gamma=\prod_{\beta<\gamma} M_\alpha^\beta.\text{***)}$$

*) Neboť v důkazu věty D se sestrojuje množství oněch čísel α, pro něž výrok $f(\alpha)$ je správný.

**) Nepožaduji, aby různým číslům α příslušela různá množství M^α.

***) Je vidět, že výrok „číslo α má vlastnost (A)" má již zcela určitý smysl; pro každé číslo α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ je tento výrok buď správný nebo nesprávný.

Tvrdím nyní: ke každému číslu α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ existuje nejvýše jeden systém (1), mající vlastnosti 1^α, 2^α, 3^α. Neboť kdyby vedle systému (1) existoval ještě jiný takový systém

$$(2) \qquad N_\alpha^0, N_\alpha^1, N_\alpha^2, \ldots, N_\alpha^\alpha,$$

potom by mezi čísly $0, 1, 2, \ldots, \alpha$ existovalo aspoň jedno číslo β, pro něž $M_\alpha^\beta \neq N_\alpha^\beta$; nejmenší z takových čísel β označme γ; bylo by $\gamma > 0$ (neboť $M_\alpha^0 = N_\alpha^0$ podle 1^α); pro $\beta < \gamma$ bylo by $M_\alpha^\beta = M_\alpha^\beta$, tedy podle 2^α nebo podle 3^α by bylo též $M_\alpha^\gamma = N_\alpha^\gamma$, proti předpokladu. Onen jednoznačně stanovený systém (1), jenž je přiřazen číslu α, majícímu vlastnost (A), označme $\mathfrak{S}^\alpha$.

Za druhé dokážeme: Je-li $\alpha \leqq \delta$ a má-li číslo δ vlastnost (A), má i číslo α vlastnost (A) a systém $\mathfrak{S}^\alpha$ dostanu, vezmu-li všechny členy systému $\mathfrak{S}^\delta$, jejichž horní index jest nejvýše roven α; t. j. systém $\mathfrak{S}^\alpha$ je tento systém

$$(3) \qquad M_\delta^0, M_\delta^1, \ldots, M_\delta^\alpha.$$

To je jasné; neboť systém $\mathfrak{S}^\delta$ hoví požadavkům 1^δ, 2^δ, 3^δ (vztahujícím se na všechna čísla $\gamma \leqq \delta$); tedy tím spíše hoví ta jeho množství, jejichž horní index je $\leqq \alpha$, požadavkům 1^α, 2^α, 3^α (vztahujícím se k číslům $\gamma \leqq \alpha$); prosím čtenáře, aby si podrobnosti sám promyslil. Ježto pak existuje nejvýše jeden systém $\mathfrak{S}^\alpha$, je jasno, že (3) je právě ten systém $\mathfrak{S}^\alpha$; tedy pro každé $\beta \leqq \alpha$ jest $M_\alpha^\beta = M_\delta^\beta$; t. j.: množství M_α^β, jež je definováno při pevném β pro všechna čísla $\alpha \geqq \beta$, mající vlastnost (A), jest nezávislé na tom dolním indexu α, závisí tedy pouze na β a můžeme je označiti znakem M^β. Každému číslu β, k němuž existuje nějaké číslo $\alpha \geqq \beta$, mající vlastnost (A), je přiřazeno určité množství M^β; my jsme však ukázali: má-li číslo α vlastnost (A), má i každé číslo $\beta \leqq \alpha$ vlastnost (A); tedy lze výsledek právě vyslovený vysloviti v ekvivalentní formě též takto: Každému číslu β, majícímu vlastnost (A), jest přiřazeno jednoznačně jisté množství M^β. Jestliže pak nějaké číslo α má vlastnost (A), potom systém

$$M^0, M^1, M^2, \ldots, M^\alpha$$

(kde tedy index probíhá všechna čísla $\beta \leqq \alpha$) jest právě systém $\mathfrak{S}^\alpha$ (neboť $M^\beta = M_\alpha^\beta$ pro $\beta \leqq \alpha$).

Tvrdím nyní: každé číslo ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ má vlastnost (A). Důkaz provedu transfinitní indukcí. Především číslo 0 má vlastnost (A): neboť systém $\mathfrak{S}^0$, (skládající se z jediného množství, totiž z uzavřeného obalu množství M, má zřejmě vlastnosti 1^α, 2^α, 3^α pro $\alpha = 0$. Zbývá tedy ještě dokázati:

Je-li $\alpha > 0$ číslo ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$, a mají-li všechna čísla $< \alpha$ vlastnost (A), má i číslo α vlastnost (A). Při důkazu rozlišujme dva případy:

a) Budiž α číslo prvního druhu; budiž δ číslo bezprostředně předcházející, t. j. $\alpha = \delta + 1$; potom existuje podle předpokladu systém $\mathfrak{S}^\delta$:

$$M^0, M^1, \ldots, M^\delta;$$

připojme k tomuto systému ještě na konec derivaci množství M^δ; dostaneme systém

$$(4) \qquad M^0, M^1, \ldots, M^\delta, (M^\delta)^1$$

(na α-tém místě stojí tedy $(M^\delta)^1$); já tvrdím, že tento systém má vlastnosti 1^α, 2^α, 3^α. To je jasno; neboť systém (4) bez posledního členu je právě systém $\mathfrak{S}^\delta$

a poslední člen $(M^\delta)^1$ byl volen právě tak, aby hověl požadavku 2^α pro $\gamma = \alpha$ podrobnosti nechť si čtenář laskavě promyslí). Tedy má číslo α vlastnost (A).

b) Budiž α číslo druhého druhu. Podle předpokladu každé číslo $\beta < \alpha$ má vlastnost (A), tedy je každému číslu $\beta < \alpha$ přiřazeno určité množství M^β. Utvořme systém

$$M^0, M^1, M^2, \ldots, M^\beta, \ldots$$

(kde β probíhá všechna čísla menší než α) a připojme k tomuto systému na konec (t. j. na α-té místo) průnik $\prod_{\beta<\alpha} M^\beta$; tak dostanu systém

$$M^0, M^1, M^2, \ldots, M^\beta, \ldots, \prod_{\beta<\alpha} M^\beta, \tag{5}$$

jenž má opět zřejmě vlastnosti $1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha$; neboť, chceme-li verifikovati vlastnosti 2^α, 3^α pro nějaké číslo $\gamma < \alpha$, tu stačí vzíti v úvahu systém

$$M^0, M^1, \ldots, M^\gamma,$$

který je právě systémem $\mathfrak{S}^\gamma$; pro $\gamma = \alpha$ je však vlastnost 3^α rovněž splněna, neboť poslední člen $\prod_{\beta<\alpha} M^\beta$ byl právě volen jakožto průnik všech předcházejících. Tedy číslo α má vlastnost (A).

Podle transfinitní indukce tedy má každé číslo ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ vlastnost (A). Každému číslu α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je tedy přiřazeno jisté množství M^α; tvrdím, že systém

$$M^0, M^1 M^2, \ldots, M^\alpha, \ldots$$

(kde α probíhá všechna čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$) má vlastnosti 1, 2, 3, požadované ve větě E. Vlastnost 1. je jasná (neboť M^0 je právě systém $\mathfrak{S}^0$); je-li pak dáno nějaké číslo $\alpha > 0$, potom množství

$$M^0, M^1, \ldots, M^\alpha$$

tvoří systém $\mathfrak{S}^\alpha$ a tedy podle 2^α a 3^α (kamž dosadím $\gamma = \alpha$) platí: je-li α prvního druhu, je M^α derivací bezprostředně předcházejícího množství; je-li α druhého druhu, je M^α průnikem všech předcházejících množství. Tedy i vlastnosti 2. a 3. jsou splněny. Existuje tedy systém množství bodových, mající vlastnosti požadované ve větě E. Zbývá ukázati, že existuje (při daném M) jen jeden takový systém. Kdyby existovaly dva různé takové systémy

$$M^0, M^1, \ldots, M^\alpha, \ldots;$$
$$\mathbf{M}^0, \mathbf{M}^1, \ldots, \mathbf{M}^\alpha, \ldots,$$

potom by aspoň pro jedno číslo α bylo $M^\alpha \neq \mathbf{M}^\alpha$. To je však nemožno: neboť v důsledku vlastností 1, 2, 3 by systémy

$$M^0, M^1, \ldots, M^\alpha$$
$$\mathbf{M}^0, \mathbf{M}^1, \ldots, \mathbf{M}^\alpha$$

(končící u indexu α) měly zřejmě vlastnosti $1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha$; my však víme, že k danému číslu α existuje nejvýše jeden systém, mající vlastnosti $1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha$. Tím je věta E úplně dokázána a definice po ní následující je tedy oprávněna.

Věta I: Všechna množství M^α jsou uzavřená.

Důkaz provedu transfinitní indukcí. Předně množství M^0 (uzavřený obal množství M) je uzavřené. Budiž za druhé $\alpha > 0$ a nechť všechna množství M^β, pro všechna $\beta < \alpha$, jsou uzavřená; tvrdím, že M^α je také uzavřené. Neboť buď je α číslo prvního druhu, a tedy je M^α derivací množství M^δ, kde δ je číslo bezprostředně předcházející před α; derivace libovolného množství je však množství uzavřené (odstavec 6, věta I). Nebo je α číslo druhého druhu, potom je $M^\alpha = \prod_{\beta<\alpha} M^\beta$, t. j. M^α je průnikem množství uzavřených a tedy je M^α množství uzavřené (odstavec 4, věta II). Podle transfinitní indukce je tedy M^α uzavřené pro každé α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$.

Věta II: Je-li $\beta \leqq \alpha$, *je* $M^\beta \supset M^\alpha$.

Důkaz: Budeme říkati, že číslo α má vlastnost (A), jestliže jest $M^\beta \supset M^\alpha$ pro všechna $\beta \leqq \alpha$. Číslo 0 má zřejmě vlastnost (A), neboť pro $\beta = \alpha = 0$ je $M^\beta = M^\alpha$ a tedy $M^\beta \supset M^\alpha$. Budiž za druhé $\alpha > 0$ a nechť všechna čísla $\beta < \alpha$ mají vlastnost (A). Buď je α prvního druhu; budiž δ bezprostředně předcházející číslo; potom je pro $\beta \leqq \delta$ (t. j. pro $\beta < \alpha$) $M^\beta \supset M^\delta$; za druhé je M^α derivací uzavřeného množství M^δ, a tedy $M^\delta \supset M^\alpha$. Tedy je pro $\beta \leqq \delta$ (t. j. pro $\beta < \alpha$) $M^\beta \supset M^\alpha$ a týž vztah platí zřejmě i pro $\beta = \alpha$. Tedy má číslo α vlastnost (A). Nebo je α druhého druhu; potom je $M^\alpha = \prod_{\beta<\alpha} M^\beta$ a tedy $M^\beta \supset M^\alpha$ pro $\beta \leqq \alpha$, t. j. číslo α má vlastnost (A). Podle transfinitní indukce má tedy každé číslo α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ vlastnost (A), t. j. je-li α libovolné číslo ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ a $\beta \leqq \alpha$, jest $M^\beta \supset M^\alpha$, jak bylo dokázati.

12. NOVÝ DŮKAZ VĚTY CANTOR-BENDIXSONOVY. MNOŽSTVÍ REDUCIBILNÍ.

Dokážeme především tuto větu:

Věta I: Systém množství $M^0, M^1, M^2, \ldots, M^\alpha, \ldots$ *obsahuje aspoň jedno množství dokonalé.**)

Důkaz: Předpokládejme naopak, že žádné množství toho systému není dokonalé. Potom tedy pro každé α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ platí $M^\alpha \neq M^{\alpha+1}$; ježto dále $M^\alpha \supset M^{\alpha+1}$ (podle odstavce 11, věty I), je $M^{\alpha+1}$ pravou částí množství M^α; každému číslu α jest tedy možno přiřaditi bod p_α, jenž patří k M^α, nikoliv však k $M^{\alpha+1}$.

*) Vzpomeňme, že množství N je dokonalé tehdy a jen tehdy, je-li $N = N^1$. Množství prázdné patří tedy podle této úmluvy mezi množství dokonalá.

Bod p_α nepatří k uzavřenému množství $M^{\alpha+1}$, tedy bod p_α není ani bodem zhuštění množství $M^{\alpha+1}$; lze tedy nalézti racionální okolí I_α bodu p_α, jež neobsahuje vůbec žádný bod z $M^{\alpha+1}$. Každému číslu α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ je tak přiřazen jistý racionální interval I_α, jenž obsahuje aspoň jeden bod množství M^α, ale neobsahuje žádný bod z množství $M^{\alpha+1}$. Tvrdím, že dvěma různým číslům α a β odpovídající intervaly I_α, I_β jsou různé. Neboť budiž na příklad $\alpha<\beta$, tedy $\alpha+1\leqq\beta$; podle věty II odstavce 11 je pak $M^\beta\subset M^{\alpha+1}$; interval I_α neobsahuje žádný bod množství $M^{\alpha+1}$, tedy tím spíše žádný bod množství M^β, kdežto I_β obsahuje aspoň jeden bod z množství M^β; tedy je $I_\alpha\neq I_\beta$. Intervaly I_α jsou tedy vzájemně jednoznačně přiřazeny číslům ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$, tedy jich je nespočetné množství (oddíl 3, odstavec 3, věta III). To však je nemožno, neboť *všech* racionálních intervalů je jen spočetné množství; tím je věta dokázána.*)

Cvičení. Dokažte: je-li M^α dokonalé, je $M^\beta=M^\alpha$ pro všechna $\beta\geqq\alpha$ (důkaz transfinitní indukcí, jež ovšem v tomto případě počíná u indexu α).

Množství N v R_k nazveme **isolovaným**, jestliže neobsahuje žádný svůj bod zhuštění (t. j. jestliže všechny body zhuštění množství N — pokud vůbec existují — patří k R_k-N). Množství isolované je ovšem nejvýše spočetné, neboť každé množství nespočetné obsahuje aspoň jeden bod kondensační (odstavec 9, věta I) a tedy tím spíše aspoň jeden bod zhuštění.

Věta II. Množství $M^\alpha-M^{\alpha+1}$ je (pro každé α ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$) *isolované a tedy nejvýše spočetné.*

Důkaz: Každý bod zhuštění množství $M^\alpha-M^{\alpha+1}$ je tím spíše bodem zhuštění množství M^α a tedy leží v množství $M^{\alpha+1}$ a tedy neleží v $M^\alpha-M^{\alpha+1}$.

Věta III. Budiž $\alpha>0$ libovolné číslo ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$; potom jest

$$M^0=\sum_{0\leqq\beta<\alpha}(M^\beta-M^{\beta+1})+M^\alpha. \tag{6}$$

Důkaz: Každý sčítanec napravo je částí množství M^0 (neboť $M^\gamma\subset M^0$ pro $\gamma\geqq0$). Budiž za druhé p libovolný bod z M^0; potom buď je p bodem množství M^α nebo není p bodem množství M^α. Není-li p bodem množství M^α, potom v množství čísel β, hovících nerovnostem $0\leqq\beta\leqq\alpha$, existuje jisté *nejmenší* číslo γ takové, že p není bodem množství M^γ (tedy jest p bodem všech množství

*) Existuje dokonce aspoň jedno množství dokonalé M^α, pro něž $\alpha>0$; neboť, jestliže nám náhodou vyjde množství M^0 jakožto dokonalé, potom i $M^1=M^0$ je dokonalé; tuto poznámku potřebujeme k důkazu věty IV.).

M^β, kde $\beta < \gamma$). Jest $\gamma > 0$, neboť p jest bodem množství M^0. Za druhé jest γ číslem prvního druhu; neboť kdyby γ bylo číslem druhého druhu, bylo by $M^\gamma = \prod_{\beta<\gamma} M^\beta$, a ježto pak všechna množství M^β ($\beta < \gamma$) obsahují bod p, patřil by bod p též k množství M^γ, proti předpokladu. Existuje tedy číslo δ, jež je bezprostředně předcházející k číslu γ, t. j. $\gamma = \delta + 1$ ($0 \leqq \delta < \alpha$). Bod p tedy patří k M^δ, nepatří však k $M^{\delta+1} = M^\gamma$, tedy bod p patří k množství $M^\delta - M^{\delta+1}$, t. j. k jednomu „sčítanci“ na pravé straně rovnice (6). Tím jest důkaz proveden. Věty I, II, III dovolují nám podati nový důkaz věty **Cantor-Bendixsonovy** (viz odstavec 9, větu III): Budiž M uzavřené množství, tedy $M = M^0$. Podle věty I existuje aspoň jeden index α_0 tak, že M^{α_0} jest dokonalé; formule (6) tedy dává

$$M = \sum_{0 \leqq \beta < \alpha_0} (M^\beta - M^{\beta+1}) + M^{\alpha_0};$$

množství $\sum_{0 \leqq \beta < \alpha_0} (M^\beta - M^{\beta+1})$ a M^{α_0} nemají společných bodů; neboť bod, jenž patří k množství $M^\beta - M^{\beta+1}$ pro nějaké $\beta < \alpha_0$, nepatří k $M^{\beta+1}$ a tedy nepatří ani k M^{α_0} (neboť $\alpha_0 \geqq \beta + 1$ a tedy $M^{\alpha_0} \subset M^{\beta+1}$). Za druhé každé množství $M^\beta - M^{\beta+1}$ jest podle věty II nejvýše spočetné; množství všech čísel $\beta < \alpha_0$ jest podle odd. 3, odst. 3, věty I nejvýše spočetné a tedy i spojení $\sum_{0 \leqq \beta < \alpha_0} (M^\beta - M^{\beta+1})$ je nejvýše spočetné (podle oddílu 1, odstavce 4). Tím je věta Cantor-Bendixsonova dokázána, zároveň však ještě ten rozklad do jisté míry explicitně proveden. Budiž M libovolné množství bodové v R_k; množství M nazveme **reducibilním,** jestliže existuje číslo α_0 ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ tak, že množství M^{α_0} je prázdné. Pro takové množství M platí pak podle (6)

$$M^0 = \sum_{0 \leqq \beta < \alpha_0} (M^\beta - M^{\beta+1}); \tag{7}$$

tedy je M^0 (a tím spíše množství M^1) nejvýše spočetné*) (neboť těch „sčítanců“ je nejvýše spočetné množství (oddíl 3, odstavec 3, věta I) a každý z nich je nejvýše spočetný). Naopak, předpokládejme, že M^1 je nejvýše spočetné; podle věty I (a podle poznámky pod čarou k této větě) existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že M^α je dokonalé. Ale $\alpha \geqq 1$, tedy $M^\alpha \subset M^1$, tedy je i M^α nejvýše

---

*) Ježto $M \subset M^0$, platí: Každé množství reducibilní je nejvýše spočetné. To je věta, uvedená v odstavci 63, str. 150, řádek 11 zdola.

spočetné a současně dokonalé. Podle věty I, odstavce 8 je tedy M^{α} množství prázdné; t. j. M je reducibilní. Tím jsme tedy dokázali větu:

Věta IV. Množství M v R_k je reducibilní tehdy a jen tehdy, je-li jeho derivace nejvýše spočetná.

Cvičení. 1. Dokažte: Je-li množství M reducibilní a ohraničené a je-li M^{α} první derivace prázdná, je α číslo prvního druhu. (Návod: Kdyby α bylo druhého druhu, šlo by psáti $\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$; zjistí se pak, že $M^{\alpha} = M^{\alpha_1} M^{\alpha_2} M^{\alpha_3} \ldots$, z čehož podle věty III, odstavce 4 plyne spor.)

2. Dokažte: Spojení konečného počtu množství reducibilních je množství reducibilní; důkaz z věty II odstavce 6 a z věty IV.