ČÁST PRVÁ.

INTEGRÁLY NEURČITÉ (FUNKCE PRIMITIVNÍ).

I. ÚVOD.

1. ZÁKLADNÍ DEFINICE A POJMENOVÁNÍ.

1. V diferenciálním počtu (DP 101, str. 113*) nazývá se funkce $F(x)$, mající v intervalu (a, b) stále derivaci, jež jest rovna funkci $f(x)$, **primitivní funkcí** k $f(x)$ v *intervalu* (a, b). Jest tedy mezi $F(x)$ a $f(x)$ tento vztah

$$F'(x) = f(x) \quad \text{aneb} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{aneb konečně} \quad dF(x) = f(x)\,dx \qquad (1)$$

platný v intervalu (a, b). Má tudíž $F(x)$ v intervalu (a, b) za diferenciál $f(x)\,dx$ (DP 129).

Vedle pojmenování „primitivní funkce" užívá se pro $F(x)$ — a to ještě častěji — pojmenování **integrál;** říkáme pak mluvíce obšírně, *že* $F(x)$ *jest v intervalu* (a, b) *integrálem výrazu* $f(x)\,dx$ (*diferenciálu* $f(x)\,dx$) anebo stručněji se vyjadřujíce, že $F(x)$ *jest v* (a, b) *integrálem funkce* $f(x)$ [též *z funkce* $f(x)$ anebo *integrálem příslušným k funkci* $f(x)$].

Současně s $F(x)$ jest též integrálem $F(x) + k$, kde k jest jakékoli číslo na x nezávislé (konstanta) a naopak podle věty (DP 107, str. 151), že dvě funkce mající pro všecky hodnoty neodvisle proměnné stejné derivace mají rozdíl konstantní, jsou *všecky* integrály funkce $f(x)$ obsaženy ve výrazu $F(x) + k$.

*) Citáty s DP vztahují se na Diferenciální počet autorův vydaný J.Č.M. a F., číslo za DP uvedené značí odstavec té knihy.

Zavádíme pak pro integrál diferenciálu $f(x)\,dx$ označení

$$\int f(x)\,dx \tag{2}$$

a můžeme tudíž psáti (se zřetelem k (1))

$$F(x)+k=\int f(x)\,dx; \qquad a \leq x \leq b \tag{3}$$

(čte se: $F(x)+k$ rovná se integrálu z $f(x)\,dx$).

Rovnice (1) a (3) jsou tedy úplně ekvivalentní. Integrál (2) sluje **integrál neurčitý diferenciálu** $f(x)\,dx$ anebo stručněji z **funkce** $f(x)$ (také k funkci $f(x)$); neboť funkce, které se podle (3) integrál ten obecně rovná, obsahuje neurčenou konstantu. Této konstantě se říká *integrační konstanta.*

Na př. rovnice

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

má význam tehdy, když $-1<x<1$. Jest tedy $\arcsin x$ integrálem k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ v intervalu $(-1, 1)$ s vyloučením hranic intervalu. V označení integrálním jest

$$\arcsin x + k = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1<x<1. \tag{I}$$

Obdobně jest rovnice

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

splněna toliko pro $x>0$, neboť $\log x$ jest definován jenom pro kladná x a jest tedy

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + k \qquad \text{pro } x>0$$

a rovněž

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + k \qquad \text{pro } x<0.$$

Jest účelno podržeti vedle pojmenování integrál i nadále pojmenování primitivní funkce; neboť pojem integrálu připouští ještě jiné — obecnější — definice, jež nestanoví pojem integrálu jakožto ekvivalentní pojmu primitivní funkce. Tyto definice však teprve později budou vyloženy.

POZNÁMKA 1. Značka $\int$ sluje integrální znaménko, vznikla proměnou z písmene S značícího součet (summa). O vztazích tohoto značení k jiné definici integrálu bude učiněna zmínka na příslušném místě.

POZNÁMKA 2. Z rovnice (1) a (3) následuje

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \int dF(x) = F(x) + k,$$

odkudž jest patrno, že operace vyjádřené znaky d, $\int$ — diferenciace a integrace — jsou operace inversní (t. j. vzájemně se rušící, nehledě ovšem ke konstantě k, jež přistupuje v rovnici druhé).

POZNÁMKA 3. Velmi často se při rovnicích tvaru (3), které udávají integrál neurčitý k nějaké dané funkci, nevypisuje interval, pro který rovnice jest platna; zvláště pak ne tenkráte, je-li interval ten v důsledku známých vlastností funkcí bezprostředně patrný.

2. Úkolem integrálního počtu jest především rozhodnouti, za jakých podmínek k dané funkci přísluší integrál, t. j. za jakých podmínek existuje funkce, jejíž derivace rovna jest (v určitém intervalu) dané funkci. V tom pak případě, že integrál k dané funkci přísluší, má počet integrální další a hlavní úkol, poskytnouti prostředky k jeho vyčíslení, po případě pomůcky k vyšetření vlastností toho integrálu.

Řešení těchto úkolů dosti obecné bude podáno v části druhé. V této části budou vyloženy důsledky vyplývající jednoduše ze vztahů a vět odvozených v počtu diferenciálním. Získáme tak metody pro výpočet integrálů z dosti obsáhlých skupin funkcí (a to funkcí často se vyskytujících), jakož i četné věty pro integrály neurčité připínající se úzce ku příslušným větám počtu diferenciálního.

3. Nejprve lze z formulí počtu diferenciálního, udávajících derivace elementárních funkcí, rázem získati vzorce udávající integrály některých jednoduchých funkcí. Tak na př. z rovnice

$$(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n \quad \text{aneb jinak} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

při $n \gtrless -1$ platné vyplývá ihned

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k. \qquad n \gtrless -1.$$

Podobně máme

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + k, \qquad \text{když } x - a > 0,$$
$$= \log(a-x) + k, \qquad \text{když } x - a < 0.$$

Obě tyto rovnice shrnouti lze patrně v jedinou tvaru

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + k,$$

platnou pro každý interval neobsahující bod a.

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + k, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + k,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + k, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k,$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + k, \qquad \int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + k,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + k, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + k.$$

4. Jestliže a jest konstantní, jest současně s rovnicí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{anebo jinak} \qquad F(x) = \int f(x)\,dx$$

splněna rovnice

$$[aF(x)]' = af(x) \qquad \text{anebo jinak} \qquad aF(x) = \int af(x)\,dx,$$

odkudž porovnáním obou rovnic na pravé straně

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$

při čemž jest jenom poznamenati, že v tomto vztahu mezi dvěma integrály toliko v jednom integrálu můžeme svobodně voliti integrační konstantu. (Poznámka tato jest v platnosti pro další vztahy mezi neurčitými integrály.)

2. RŮZNÉ METODY PRO VÝPOČET NEURČITÝCH INTEGRÁLŮ.

5. Metoda rozkladu ve sčítance. Buďtež $u, v, w \ldots$ funkce v konečném počtu proměnné x mající derivace; pak jest

$$(u + v + w + \cdots)' = u' + v' + w' + \cdots \qquad \text{(DP 98).} \qquad (p)$$

Označme funkce $u', v', w' \ldots$ písmeny $U, V, W \ldots$, čímž klademe zároveň

$$u = \int U\,dx + C_1, \qquad v = \int V\,dx + C_2, \qquad w = \int W\,dx + C_3 \ldots,$$

kde $C_1, C_2, C_3 \ldots$ jsou integrační konstanty. V novém označení bude rovnice (p)

$$\left(\int U\,dx + \int V\,dx + \int W\,dx + \cdots + C\right)' = U + V + W + \cdots,$$

ze kteréžto na základě definice neurčitého integrálu

$$\int (U + V + W + \cdots)\,dx = \int U\,dx + \int V\,dx + \int W\,dx + \cdots + C. \qquad (1)$$

Integrační konstantu na pravé straně můžeme vynechati se zřetelem k poznámce odstavce 4.

PŘÍKLAD 1. $\int(3x^2+2x+1)\,dx=\int 3x^2\,dx+\int 2x\,dx+\int 1\,.\,dx=$

$$=3\int x^2\,dx+2\int x\,dx+\int dx=x^3+x^2+x+C.$$

Podobně lze integrovati každý polynom; jest obecně

$$\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)=$$

$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\frac{a_2}{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_n\,x+C,$$

n celé, kladné.

PŘÍKLAD 2. Abychom vypočetli integrál

$$\int\frac{dx}{x^2-1}$$

rozložíme zlomek za integračním znaménkem se vyskytující v součet zlomků o jmenovatelích $x+1$, $x-1$. Jest, jak snadno se přesvědčíme,

$$\frac{1}{x^2-1}=-\tfrac12\,\frac{1}{x+1}+\tfrac12\,\frac{1}{x-1},$$

a tedy

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=-\tfrac12\int\frac{dx}{x+1}+\tfrac12\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\tfrac12\log|x+1|+\tfrac12\log|x-1|+C=\tfrac12\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

PŘÍKLAD 3. K výpočtu integrálu z funkce $\sin^2 x$ stačí tuto funkci psáti ve tvaru $\frac12(1-\cos 2x)$, i máme

$$\int\sin^2 x\,dx=\tfrac12\int(1-\cos 2x)\,dx=\tfrac12\int dx-\tfrac12\int\cos 2x\,dx=$$

$$=\tfrac12 x-\tfrac14\sin 2x+k.$$

Podobně jest

$$\int\cos^2 x\,dx=\tfrac12 x+\tfrac14\sin 2x+k.$$

6. Jakožto rozšíření této metody by bylo lze uvésti věty vztahující se k integraci nekonečných řad. Jelikož však tyto věty teprve zavedením pojmu určitého integrálu nabývají náležité jednoduchosti, upozorním toliko na větu pro počátek nám postačující a bezprostředně vyplývající z věty o derivování potenčních řad (DP 144).

Integrál potenční řady

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_k(x-a)^k+\cdots,$$

která konverguje pro $|x-a|<R$, jest dán v tomto intervalu $|x-a|<R$ řadou potenční

$$C+A_0(x-a)+\tfrac12 A_1(x-a)^2+\tfrac13 A_2(x-a)^3+\cdots+\frac{1}{k+1}A_k(x-a)^{k+1}+\cdots$$

(konvergující v témž intervalu).

Z této věty vyplývá, že *ke každé funkci, kterou lze v některém intervalu rozvinouti v řadu potenční, přísluší integrál v tom intervalu.* Tím jest dána velmi rozsáhlá skupina funkcí, o nichž víme, že k nim přísluší integrál; jsou to zejména funkce racionální, algebraické, goniometrické, exponenciální a pod., jakož i funkce z nich odvozené operacemi racionálními jakožto funkce funkcí atd.

7. Metoda částečné (parcielní) integrace. Z formule pro derivaci součinu
$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{(DP 98)}$$
vyplývá ihned podle definice integrálu při vhodné volbě integračních konstant
$$uv = \int uv'\,dx + \int u'v\,dx$$
anebo jinak
$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx. \qquad \text{(II)}$$

Tato formule převádí integrál součinu dvou funkcí $u.v'$, kde druhý činitel jest derivací známé funkce v, na integrál z výrazu $u'v$. Dovedeme-li integrál z $u'v$ stanoviti, dovedeme tudíž i stanoviti integrál z uv'.

PŘÍKLAD 1. Vypočísti jest $\int \log x\,dx$.

Klademe tu $u = \log x$, $v' = 1$ tedy $v = x$, $u' = 1/x$ a podle (II)
$$\int \log x\,dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x \log x - x + C.$$

PŘÍKLAD 2. Vypočísti jest integrál $\int e^{ax} \cos bx\,dx$. Nejprve volíme $u = e^{ax}$, $v' = \cos bx$; pak jest $u' = a\,e^{ax}$, $v = \frac{1}{b} \sin bx$. I máme
$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\,dx.$$
Potom volíme $u = \cos bx$, $v' = e^{ax}$; $u' = -b \sin bx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$. Za této volby následuje z (II)
$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\,dx.$$
Z obou rovnic postačí vyloučiti integrál na pravé straně se nacházející, abychom dostali hledaný integrál. Máme tak ihned
$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

PŘÍKLAD 3. $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$. Tu položíme
$$u = \sqrt{1 - x^2}, \quad v' = 1; \quad u' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad v = x.$$
Pak jest
$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx =$$
$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx + \arcsin x,$$

odkudž
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + C.$$

PŘÍKLAD 4. $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$. Ke stanovení tohoto integrálu klademe
$$u = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{\cos x}, \qquad v' = \sin x,$$
odkudž snadným počtem
$$u' = \frac{(n-1)\,\mathrm{tg}^{n-2} x}{\cos x} + \frac{n\,\mathrm{tg}^n x}{\cos x}, \qquad v = -\cos x,$$
takže jest
$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx = -\mathrm{tg}^{n-1} x + (n-1)\int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx + n\int \mathrm{tg}^n x\,dx$$
a tedy
$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx; \qquad n \gtrless 1. \qquad (m)$$

Touto formulí převádí se integrál daný na integrál stejného tvaru a lišící se jenom tím, že místo exponentu n vyskytuje se v něm mocnitel $n-2$. Získaným vzorcem přijdeme postupně, když n jest celé kladné, na integrál, kde n jest rovno buď 0 (n sudé) anebo 1 (n liché). Máme téměř bezprostředně
$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\mathrm{tg}^{n-3} x}{n-3} + \cdots \pm \frac{\mathrm{tg}\, x}{1} \mp x + C, \qquad n \text{ sudé};$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\mathrm{tg}^{n-3} x}{n-3} + \cdots \pm \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} \mp \int \mathrm{tg}\, x\,dx, \qquad n \text{ liché}.$$

POZNÁMKA. Rovnice (m) převádí integrál z $\mathrm{tg}^n x$ na integrál z $\mathrm{tg}^{n-2} x$ (anebo též integrál z $\mathrm{tg}^{n-2} x$ na integrál z $\mathrm{tg}^n x$). Ať jest n jakékoli číslo reálné, lze jejím postupným použitím převésti integrál z $\mathrm{tg}^n x$ na integrál z $\mathrm{tg}^n x$, kde však n jest číslo reálné intervalu $(0, 2-0)$. Takovým formulím, jež se vztahují k integrálům z funkcí závislých jednak na vlastní proměnné, jednak na parametru (jako ku př. $\mathrm{tg}^n x$ závisí jednak na x, jednak na parametru n) a jež převádějí integrál daný na integrál z téže funkce, avšak s jinou hodnotou parametru, slují **formule redukční.** Rovnice (m) jest jednoduchý takový typ redukční formule; jí se převádí integrál z funkce závislé na n na integrál z téže funkce, kde však místo n jest $n-2$, kde je tedy parametr zmenšen o 2. Jiná jednoduchá taková formule redukční jest
$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx, \qquad \text{(částečnou integrací)}$$
ve které hodnota n se zmenšuje o 1.

8. Metoda substituce. Tato metoda jest nejčastěji používána v integrálním počtu a vyplývá rovněž jednoduše ze známých vět počtu diferenciálního. Budiž $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$, t. j. budiž
$$F'(x) = f(x) \qquad \text{anebo jinak} \qquad F(x) + C = \int f(x)\,dx.$$

Kladme $x = \varphi(t)$, kde $\varphi(t)$ jest funkce proměnné t mající derivaci (v jistém intervalu). Derivujme $F(x)$ podle t, máme ihned podle pravidla o derivaci funkce funkce (DP 138)

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x) \,.\, \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \,.\, \varphi'(t)$$

anebo jinak psáno $\quad F(x) + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad$ (III)

a naopak z této rovnice, derivujeme-li ji podle t za suposic, že $x = \varphi(t)$ a že v příslušných intervalech proměnné x existuje derivace funkce $F(x)$, vyplývá pro všecka x, k nimž příslušné $\varphi'(t)$ není rovno nule, $F'(x) = f(x)$.

Dovedeme-li stanoviti $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ jakožto funkci proměnné t, stačí do výsledku místo proměnné t zavésti pomocí rovnice $x = \varphi(t)$ proměnnou x, abychom znali integrál $\int f(x)\,dx$. Běží při tom hlavně o vhodnou volbu funkce $\varphi(t)$, aby výraz $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ byl jednoduchou funkcí proměnné t.

POZNÁMKA. V předcházejícím odvodili jsme rovnost

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad \text{(III')}$$

jakožto důsledek vztahu $x = \varphi(t)$. Přechod od integrálu prvého k druhému velmi snadno se pamatuje a provádí se na základě označení diferenciálního. Z rovnice $x = \varphi(t)$ vyplývá totiž rovnost mezi diferenciály $\quad dx = \varphi'(t)\,dt$

a jest patrno, že od prvého integrálu dospějeme k druhému, nahradíme-li proměnnou a její diferenciál výrazy proměnné, resp. diferenciálu se rovnajícími (t. j. výrazy $\varphi(t)$, $\varphi'(t)\,dt$).

PŘÍKLAD 1. $\int \frac{dx}{ax+b}$. Učiníme $ax + b = t$, $x = \frac{t-b}{a}$, $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a}$, takže dostáváme

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\log|t| + C = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C.$$

Obecněji vyplývá touže substitucí

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

PŘÍKLAD 2. Budiž $b \neq 0$ a počítejme integrál $\int \frac{dt}{t^2+b}$. Kladme $t = u\sqrt{\pm b}$, kde znaménko $\pm$ jest tak voliti, aby $\pm b$ bylo číslem kladným. I jest (viz příklad 2, odst. 5)

1. pro $b > 0$, $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+b} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg} u + k = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{b}} + k.$

2. pro $b < 0$, $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+b} = \frac{1}{\sqrt{-b}}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{-b}}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + k =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-b}}\log\left|\frac{t-\sqrt{-b}}{t+\sqrt{-b}}\right| + k.$$

Provedeme-li v těchto rovnicích ještě substituci $t = x\sqrt{a}$ za předpokladu, že $a > 0$, obdržíme formule často užívané

$$\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + k, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log\left|\frac{x\sqrt{a} - \sqrt{-b}}{x\sqrt{a} + \sqrt{-b}}\right| + k. \qquad a > 0,\ b < 0.$$

Pro integrály tyto lze psáti ještě poněkud obecněji

$$\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{ax}{\sqrt{ab}} + k, \qquad \text{je-li } ab > 0,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log\left|\frac{ax - \sqrt{-ab}}{ax + \sqrt{-ab}}\right| + k, \qquad \text{je-li } ab < 0.$$

PŘÍKLAD 3. K výpočtu integrálu $\int \frac{dx}{\sin x}$ pišme integrál ve tvaru

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{1}{2}x},$$

ze kteréhož tvaru jest ihned patrna účelnost substituce

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = t, \quad \frac{dx}{2\cos^2\frac{1}{2}x} = dt;$$

dostáváme tak ihned

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x| + C.$$

Integrál $\int \frac{dx}{\cos x}$ převede se na předcházející substitucí

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - x';$$

obdržíme

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log|\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)| + C.$$

PŘÍKLAD 4. Integrál

$$\int \frac{G'(x)}{G(x)} dx$$

převede se snadno na známý substitucí

$$G(x) = t, \qquad G'(x)\, dx = dt.$$

Jest tedy

$$\int \frac{G'(x)}{G(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + k = \log|G(x)| + k.$$

Na př.

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log|\sin x| + k$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log|\cos x| + k.$$

PŘÍKLAD 5. Abychom integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ převedli na známý, provedeme substituci (budiž $a > 0$)

$$x = a \operatorname{cotg} t,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{\sin^2 t}, \quad x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\sin^2 t}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\sin t}.$$

Se zřetelem k tomu, že $\sqrt{x^2+a^2}$ bereme kladně, postačí při nové proměnné t omeziti se na interval $(0,\pi)$. Dosadivše obdržíme (viz příklad 3)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t + C = \log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t + C.$$

Avšak řešením rovnice

$$x = a\operatorname{cotg} t = a\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}t}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}$$

dostáváme

$$a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t = -x + \sqrt{x^2+a^2},\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

odkudž konečně

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C'.$$

Tento výsledek lze psáti též ve tvaru (píšeme-li A za a^2)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log|x+\sqrt{x^2+A}| + k.$$

Vztah tento pak jest platný pro každé A *od nuly různé*, jak snadno derivováním se můžeme přesvědčiti. Je-li ovšem A záporné, musí $|x| > |A|^{\frac{1}{2}}$.

Jednodušeji přijdeme k cíli při integrálu daném, užijeme-li substituce

$$x = a\,.\operatorname{Sh} t = a\frac{e^t-e^{-t}}{2}\ . \qquad \text{(DP 90)}$$

Tu jest

$$dx = a\,.\operatorname{Ch} t\,dt = a\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt, \sqrt{x^2+a^2} = a\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

a tedy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dt = t + k\,.$$

Z rovnice

$$a\frac{e^t-e^{-t}}{2} = x \text{ následuje řešením } e^t = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

$$t = \log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\ ;$$

pro integrál daný pak plyne výraz v podstatě shodný s výrazem svrchu odvozeným.

Rovnici právě řešenou lze nahraditi, užíváme-li označení již svrchu užitého pro hyperbolický sinus (DP 90), rovnicí

$$a\,.\operatorname{Sh} t = x \qquad \text{aneb} \qquad \operatorname{Sh} t = \frac{x}{a};$$

t. j. hodnota řešením rovnice daná jest hodnota **funkce inversní k hyperbolickému sinu** pro argument $\frac{x}{a}$, *již značiti budeme* $\arg\operatorname{Sh}\frac{x}{a}$, takže můžeme též psáti

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \arg\operatorname{Sh}\frac{x}{a} + k.$$

Porovnáme-li rovnici tuto s rovnicí

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+a^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + k,$$

jež plyne z rovnice (l) odst. 1 substitucí $x = x'/a$, vidíme poznovu úzkou příbuznost obou funkcí $\sin x$, $\operatorname{Sh} x$ a funkcí k nim inversních.

PŘÍKLAD 6. $\int \frac{dx}{(x-a)^m (x-b)^n}$. Učiňme

$$\frac{x-a}{x-b} = t, \quad \text{tedy } x = \frac{a-bt}{1-t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a-b}{(1-t)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m (x-b)^n} = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt.$$

Jsou-li m, n čísla celá kladná, převádí se učiněnou substitucí daný integrál na integrál z mnohočlenu. Ku př.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 (x-b)^3} = \frac{1}{(a-b)^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^4} \int \left(\frac{1}{t^2} - 3\frac{1}{t} + 3 - t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^4} \left[-\frac{x-b}{x-a} - 3 \log \left|\frac{x-a}{x-b}\right| + 3\frac{x-a}{x-b} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 \right].$$

Táž substituce by vedla k téže výhodě při obecnějším integrálu

$$\int \frac{P(x)\, dx}{(x-a)^m (x-b)^n}, \qquad m, n \text{ celá kladná čísla};$$

$P(x)$ polynom stupně nejvýše $m + n - 2$.

PŘÍKLAD 7. $\int \frac{dx}{(1 + a \cos x)^n}$. Buď nejprve $|a| < 1$; tu ke zjednodušení integrálu položíme

$$\cos t = \frac{a + \cos x}{1 + a \cos x} \quad \text{a} \quad \sin t = \frac{\sqrt{1-a^2} \sin x}{1 + a \cos x},$$

odkudž

$$\cos x = \frac{\cos t - a}{1 - a \cos t}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{1-a^2} \sin t}{1 - a \cos t}, \quad 1 + a \cos x = \frac{1-a^2}{1 - a \cos t},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1 - a \cos t}.$$

Tím dostaneme

$$\int \frac{dx}{(1 + a \cos x)^n} = \frac{1}{(1-a^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int (1 - a \cos t)^{n-1} dt.$$

Dostali jsme tak v případě, že n jest celé číslo kladné, integrál z mnohočlenu v $\cos t$, tedy integrál z výrazu podstatně jednoduššího. Tak na př.

$$\text{pro } n = 1, \quad \int \frac{dx}{1 + a \cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \int dt = \frac{t}{\sqrt{1-a^2}} + k,$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-a^2}} \arccos \frac{a + \cos x}{1 + a \cos x} + k,$$

kde $\varepsilon = \pm 1$, takže $\varepsilon . \sin x$ jest číslo kladné;

$$\text{pro } n = 2, \quad \int \frac{dx}{(1 + a \cos x)^2} = \frac{1}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} (t - a \sin t) + k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} \arccos \frac{a + \cos x}{1 + a \cos x} - \frac{a}{1-a^2} \frac{\sin x}{1 + a \cos x} + k.$$

Je-li $|a| > 1$, klademe obdobně

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{a + \cos x}{1 + a\cos x}, \quad \text{a} \quad \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{\sin x \sqrt{a^2 - 1}}{1 + a\cos x},$$

kteréžto rovnice nejsou v odporu a předpokládají jenom, že se při x omezujeme na interval, ve kterém pravá strana prvé rovnice jest kladná. Z nich následuje

$$\cos x = \frac{e^t + e^{-t} - 2a}{2 - a(e^t + e^{-t})}, \quad \sin x = \frac{(e^t - e^{-t})\sqrt{a^2 - 1}}{a(e^t + e^{-t}) - 2},$$

$$1 + a\cos x = \frac{2(a^2 - 1)}{a(e^t + e^{-t}) - 2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{a^2 - 1}}{a(e^t + e^{-t}) - 2},$$

tudíž $$\int \frac{dx}{(1 + a\cos x)^n} = \frac{1}{2^{n-1}(a^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}} \int [a(e^t + e^{-t}) - 2]^{n-1}\, dt.$$

Pro $n = 1$ máme na př.

$$\int \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \log \frac{a + \cos x + \sin x\sqrt{a^2 - 1}}{a + \cos x - \sin x\sqrt{a^2 - 1}} + k$$

anebo též $$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arg\,Ch} \frac{a + \cos x}{1 + a\cos x} + k',$$

užíváme-li snadno srozumitelného označení pro *inversní funkci k hyperbolickému kosinu*. (Viz závěr př. 5, kde zavedeno označení inversní funkce k hyperbolickému sinu.) Tím docílíme větší shody mezi výrazy pro hodnotu integrálu, když $|a| < 1$ a když $|a| > 1$. Při tom $\varepsilon = \pm 1$, takže $\varepsilon a \,.\, \sin x$ jest číslo kladné ($\geqq 0$).

Substituce užité vedou rovněž bezprostředně ke zjednodušení integrálů obecnějších

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{(1 + a\cos x)^n}\, dx, \qquad |a| \gtrless 1, \quad n \text{ celé kladné},$$

kde $P(\sin x, \cos x)$ jest polynom v $\cos x$, $\sin x$ stupně v obou těchto proměnných nejvýše $n - 1$.

Bylo by snadno udati substituce v případě poněkud obecnějším, kde ve jmenovateli místo výrazu $1 + a\cos x$ jest výraz $a + b\cos x + c\sin x$.

9. Metoda derivace podle parametru. Buď dána funkce $f(x, \alpha)$, jež vedle proměnné x závisí ještě od proměnné α (neodvislé od x), jíž říkejme krátce parametr. Nechť jest dále $F(x, \alpha)$ primitivní funkce k $f(x, \alpha)$ vzhledem ku proměnné x, t. j. nechť jest

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha) \quad \text{anebo jinak} \quad F(x, \alpha) = \int f(x, \alpha)\, dx + k, \tag{1}$$

když x jest v intervalu (x_0, x_1) a pro všecka α v (α_0, α_1): nechť mají také $F(x, \alpha)$ a $f(x, \alpha)$ derivaci podle α, jsou-li x, α ve vytčených intervalech.

Derivujíce (1) podle α na obou stranách, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Je-li však derivace $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ funkcí spojitou obou proměnných x, α (stále ve zmíněných intervalech pro x, α), můžeme (DP 198) v rovnici poslední pořad derivací obrátiti a psáti

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha},$$

t. j. na základě označení integrálního

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx, \tag{2}$$

t. j. *je-li $F(x,\alpha)$ primitivní funkce k $f(x,\alpha)$, má-li dále derivaci podle α, a funkce $f(x,\alpha)$ derivaci spojitou podle α, a to vše, když x jest v intervalu (x_0, x_1) a α v intervalu (α_0, α_1), pak jest derivace funkce $F(x,\alpha)$ podle α primitivní funkcí k $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ v intervalu (x_0, x_1).*

Existují-li derivace vyšší (až do n-té včetně) podle α u funkce $f(x,\alpha)$ a jsou-li spojité funkce obou proměnných, můžeme psáti na základě postupného použití rovnice (2)

$$\frac{\partial^n F(x,\alpha)}{\partial \alpha^n} = \int \frac{\partial^n f(x,\alpha)}{\partial \alpha^n}\, dx, \tag{3}$$

existuje-li ovšem zároveň v příslušných intervalech derivace nacházející se na levé straně.

PŘÍKLAD 1. K výpočtu integrálu (a, b, kladná)

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2}$$

derivujeme rovnici v odst. 8, př. 2 podle b a dostaneme ihned

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{1}{2b\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2b}\frac{x}{ax^2+b}.$$

PŘÍKLAD 2. Z rovnice $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$ následuje z (2) ihned (derivováním podle a)

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + k$$

a z (3)

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{d^n}{da^n}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) =$$

$$= \frac{x^n}{a}e^{ax} - \binom{n}{1}\frac{1!\,x^{n-1}}{a^2}e^{ax} + \binom{n}{2}\frac{2!\,x^{n-2}}{a^3}e^{ax} - \binom{n}{3}\frac{3!\,x^{n-3}}{a^4}e^{ax} + \cdots +$$

$$+ (-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}e^{ax} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^{n+1}}\,[(ax)^n - n\,(ax)^{n-1} + n\,(n-1)\,(ax)^{n-2} -$$

$$- n\,(n-1)\,(n-2)\,(ax)^{n-3} + \cdots + (-1)^n n!].$$

PŘÍKLAD 3. Pro integrál
$$\int \frac{dx}{(x^2+A)\sqrt{x^2+A}}$$
dostáváme z 8, př. 5 snadno
$$\int \frac{dx}{(x^2+A)\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{A\sqrt{x^2+A}} + \text{konst.}$$

10. V předcházejícím naznačeny byly hlavní metody pro výpočet neurčitých integrálů. V následujícím použijeme jich na některé důležité skupiny funkcí, které se v analysi a v jejich aplikacích často vyskytují a při nichž ty metody nám umožňují buď vypočísti příslušné primitivní funkce nebo alespoň nám poskytují různá zjednodušení toho úkolu.

CVIČENÍ. V příkladech, které následují, jest x omezeno na interval, pro který odmocnina — vyskytuje-li se vůbec v nich — jest reálná.

1. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{|a+bx^2|} + k$; substituce $x^2 = t$ anebo ještě lépe $x^2 = \frac{1}{u}$.

2. $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} b\sqrt{\frac{x}{ab}} + k$, mají-li a, b znaménko stejné,
$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \left| \frac{b\sqrt{x} - \sqrt{-ab}}{b\sqrt{x} + \sqrt{-ab}} \right| + k, \text{ mají-li } a, b \text{ znaménka opačná.}$$
Substitucí $x = t^2$ převádí se na integrál odst. 8, př. 2.

3. $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{a_1+b_1x}} = \frac{2}{\sqrt{b(ab_1)}} \operatorname{arc\,tg} b\sqrt{\frac{a_1+b_1x}{b(ab_1)}} + k$, je-li $b(ab_1) > 0$,
$$= \frac{1}{\sqrt{-b(ab_1)}} \log \left| \frac{b\sqrt{a_1+b_1x} - \sqrt{-b(ab_1)}}{b\sqrt{a_1+b_1x} + \sqrt{-b(ab_1)}} \right|, \quad \text{je-li } b(ab_1) < 0.$$
Při tom značí $(ab_1) = ab_1 - a_1b$. Následuje ihned z příkladu předcházejícího. Stanovte též vzorce pro integrál, který vznikne v 2. příkladě, je-li tam $\sqrt{-x}$ místo $\sqrt{x}$!

4. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)}$, (rozkladem).

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{|x|} + k = \sqrt{x^2-1} + \arcsin \frac{1}{|x|} + k'$, $\left(\text{subst. } x = \frac{1}{t}\right)$.

6. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + k$ (rozkladem).

7. Podle příkladu předcházejícího pomocí lineární substituce tvaru $x = \alpha + \beta x'$ vypočítejte integrál ($\varepsilon = \pm 1 = \operatorname{sign}(ax+b)$)
$$\varepsilon \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\, dx = \frac{ad-bc}{-2c\sqrt{-ac}} \arcsin \frac{+2acx+ad+bc}{|ad-bc|} + \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} + k$$
za předpokladu $ac < 0$! Odvoďte dále nejjednodušší výraz, když $ac > 0$!

8. $\int \frac{\varepsilon\,dx}{(x-b)\sqrt{\pm(x-a)(x-b)}} = \frac{2}{a-b}\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}} + k$, $\varepsilon = \operatorname{sign}(x-a)$ (př. 6, odst. 8).

9. $\int \frac{\varepsilon\, dx}{(x-b)^2\sqrt{\pm(x-a)(x-b)}} = \frac{2}{(a-b)^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2x+a-3b}{x-b} \sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}} + k.$ (př. 6, odst. 8).

10. $\int \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + k \quad , \quad x > 0.$

Rozkladem $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ a potom substitucí (v druhém integrálu $x = 1/t$). Výsledek lze též psát (viz př. 7, odst. 8) ve tvaru $-\arg \mathrm{Ch}\, 1/x - \arcsin x + k$.

11. $\int \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \arg \mathrm{Ch}\, x + \arcsin \frac{1}{x} + k \quad , \quad x > 0.$

Viz příklad předch., ze kterého lze též výsledek vypsaný odvoditi snadnou substitucí.

12. $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ lze vypočítati z integrálu funkce $1/x'\sqrt{1-x'^2}$, pro jehož výpočet v př. 10 byl dán návod, provedeme-li substituci

$$\frac{x-a}{x-b} = -\frac{c-a}{c-b}\,\frac{x'-1}{x'+1},$$

což jest lineární substituce mezi x a x' přiřazující hodnotám a, b, c proměnné x po řadě hodnoty $1, -1, 0$ proměnné x'. Ostatně integrál ten vypočteme později (cvičení za odst. 26, př. 3) ještě jiným způsobem.

13. $\int \frac{dx}{a + b\, \mathrm{tg}\, x} = \frac{ax + b \log |a \cos x + b \sin x|}{a^2 + b^2} + k.$

Rozkladem $\frac{1}{a + b\,\mathrm{tg}\, x} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \frac{-a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x}$. Viz př. 4, odst. 8.

14. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x\, dx = e^x \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} + k.$

15. $\int \sin(\log x)\, dx = \frac{1}{2} x\, [\sin(\log x) - \cos(\log x)] + k,$ (integrací částečnou).

16. $\int \cos(\log x)\, dx = \frac{1}{2} x\, [\sin(\log x) + \cos(\log x)] + k,$ „ „

17. $\int x \arcsin x\, dx = -\frac{1}{2}(1-x^2) \arcsin x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\, dx,$ (viz dále př. 3, odst. 7).

Integrací částečnou, při které klademe $v' = x$, $v = -\frac{1}{2}(1-x^2)$.

18. Substituce, které zjednodušují integrál v příkladě 7. odst. 8, je-li v něm $a + b\cos x + c\sin x$ místo $1 + a\cos x$, jsou

$$a - (b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} \cos t = \frac{a^2-b^2-c^2}{a + b\cos x + c\sin x},$$

$$\text{resp.}\quad a - (b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{Ch}\, t = \frac{a^2-b^2-c^2}{a + b\cos x + c\sin x},$$

podle toho, je-li $a^2 - b^2 - c^2 > 0$ aneb $a^2 - b^2 - c^2 < 0$. Čtenář nechť na podkladě těchto substitucí zjednoduší zmíněné integrály.