10. PŘÍKLADY

10.1. Nechť P_1 je normálně uspořádaná (viz definici v **T 3.6**) množina mohutnosti $\aleph_1$ s topologií danou uspořádáním. Podle **T 6.1.7** prostor P_1 je dědičně normální; snadno se zjistí, že P_1 je spočetně kompaktní. Uvedeme nyní některé další vlastnosti prostoru P_1.

(a) Pro $x \in P_1$ položme $V(x) = \mathscr{E}_y\,[y \in P_1, y > x]$. Snadno se zjistí, že pro každé $a \in P_1$ vhodné okolí bodu a protíná nejvýš spočetně mnoho množin $V(x)$; soubor $\{V(x); x \in P_1\}$ však není σ-bodově konečný (to je příklad k poznámkám v **1.2** a **1.3**). Skutečně, je-li $P_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pak některá A_n je nekonečná a tedy existuje $b \in P_1$ tak, že $A_n - V(b)$ je nekonečná; zřejmě pak b leží v nekonečně mnoha členech souboru $\{V(x); x \in A_n\}$.

(b) Pro $x \in P_1$ položme $U(x) = \mathscr{E}_y\,[y \in P_1, y < x]$. Potom otevřené pokrytí $\{U(x); x \in P_1\}$ není normální (příklad k poznámce v **5.1**). Skutečně, kdyby toto pokrytí bylo normální, pak by podle **4.10** existovalo lokálně konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ jemnější než $\{U(x)\}$. Z toho, že P_1 je spočetně kompaktní, vyplývá ihned, že soubor $\{G_\alpha\}$ je konečný; to však je spor s tím, že každá množina G_α je nejvýš spočetná.

(c) Jak již uvedeno, P_1 je spočetně kompaktní dědičně normální; snadno se zjistí, že P_1 je lokálně kompaktní; z (b) vyplývá, že P_1 není plně normální; P_1 má tedy vlastnosti, o kterých je zmínka v **5.15**, **5.16**, **6.1**.

(d) Prostor P_1 není metrisovatelný (to plyne např. z **5.3**, neboť P_1 není plně normální); P_1 je však lokálně metrisovatelný (sr. **7.21**), neboť každý podprostor $U(x)$ má nejvýš spočetnou otevřenou basi a je tedy metrisovatelný (např. podle **5.21**).

(e) Je-li f spojitá funkce v P_1, pak f je omezená a existuje $a \in P_1$ a číslo α takové, že $x \in P_1$, $x \geqq a \Rightarrow f(x) = \alpha$. Především, f nemůže být neomezená, neboť jinak pro vhodné $a \in P$ by byla neomezená již funkce $f|U(a)$, což je ve sporu s tím, že podprostor $U(a) \cup (a)$ je zřejmě kompaktní. Položme nyní (pro každé $x \in P_1$) $g(x) = \sup f(V(x))$, $h(x) = \inf f(V(x))$. Kdyby $g(x) > h(x)$ pro všechna $x \in P_1$, pak by zřejmě existovalo $\varepsilon > 0$ takové, že $g(x) < h(x) + \varepsilon$ pro každé $x \in P_1$. Snadno se nyní sestrojí prvky $x_k \in P$ takové, že $x_k < x_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$, $f(x_k) > g(x) - \frac{1}{3}\varepsilon$ pro k liché, $f(x_k) > h(x) + \frac{1}{3}\varepsilon$ pro k sudé. Buď x^* nejmenší $x \in P_1$ takové, že $x_k < x^*$ pro $k = 1, 2, \ldots$ Je zřejmé, že ke každému okolí G bodu x^* existuje p takové, že $x_k \in G$ pro $k \geqq p$. Z toho však ihned plyne spor se spojitostí funkce f. Tedy existuje $a \in P_1$ takové, že $g(a) = h(a)$, a tedy zřejmě též $f(x) = g(a) = h(a)$ pro $x \geqq a$.

10.2. P_2 nechť je uspořádaný prostor, který vzniká z P_1 přidáním jednoho dalšího bodu (označme jej ω_1), při čemž $x < \omega_1$ pro každé $x \in P_1$. Snadno se zjistí, že P_2 je kompaktní a tím spíše plně normální; podle **T 6.1.7** je dědičně normální, z **10.1**, (c) však plyne, že není dědičně plně normální.

10.3. Dokážeme některá tvrzení, která budeme potřebovat pro další příklad.

A. Nechť $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ jsou nekonečné mohutnosti, $\mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{n}$. Potom základní kvádr dimense $\mathfrak{m}$ obsahuje hustou část mohutnosti $\leqq \mathfrak{n}$.

Důkaz. Zřejmě postačí dokázat: je-li $\mathfrak{n}$ nekonečná mohutnost, pak základní kvádr dimense $\exp \mathfrak{n}$ obsahuje hustou část mohutnosti $\mathfrak{n}$. Buď N množina mohutnosti $\mathfrak{n}$. Pro každou konečnou $K \subset N$ označme Φ_K množinu zobrazení f množiny $\exp N$ do $\langle 0, 1 \rangle$ takových, že platí: (1) je-li $M_1 \in \exp N$, $M_2 \in \exp N$, $M_1 \cap K = M_2 \cap K$, pak $f(M_1) = f(M_2)$; (2) každé $f(M)$, $M \in \exp N$, je racionální. Snadno se zjistí, že každá množina Φ_K je spočetná.

Dokážeme nyní, že platí: když $M_i \in \exp N$, $i = 1, \ldots, n$, jsou navzájem různé, $G_i \subset \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, jsou otevřené neprázdné, pak existuje konečná $K \subset N$ a $f \in \Phi_K$ taková, že $f(M_i) \in G_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pro $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, zvolme, je-li $M_i - M_j \neq \emptyset$, bod $a_{ij} \in M_i - M_j$; buď K množina všech těchto a_{ij}. Množiny $M_i \cap K$ jsou zřejmě navzájem různé. Zvolme racionální $\xi_i \in G_i$ a libovolné racionální $\xi_0 \in \langle 0, 1 \rangle$

a pro $M \in \exp N$ položme $f(M) = \xi_i$, když $M \cap K = M_i \cap K$ pro některé $i = 1, \ldots, n$, a $f(M) = \xi_0$, když $M \cap K \neq M_i \cap K$, $i = 1, \ldots, n$. Pak zřejmě $f \in \Phi_K$, $f(M_i) \in G_i$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Množina Φ všech zobrazení $\exp N$ do $\langle 0, 1 \rangle$, v níž zavedeme topologii tak, že za otevřenou basi prohlásíme soustavu všech množin tvaru $\mathscr{E}_f$ $[f \in \Phi, f(M_i) \in G_i, i = 1, \ldots, p]$, kde $M_i \in \exp N$, G_i jsou otevřené v $\langle 0, 1 \rangle$, je však právě základní kvádr dimense $\exp \mathfrak{n}$. Sjednocení všech Φ_K, kde $K \subset N$ je konečná, je v ní husté podle toho, co jsme právě dokázali, a zřejmě má mohutnost $\mathfrak{n}$.

B. Nechť $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ jsou nekonečné mohutnosti, $\mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{n}$. Potom základní kvádr dimense $\mathfrak{m}$ obsahuje hustou část mohutnosti $\leqq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$, jejíž průnik s každou neprázdnou G_δ-množinou je nespočetný.

Důkaz je podobný důkazu tvrzení A. Snadno se zjistí, že (mají-li N a Φ stejný význam jako v důkazu A) stačí dokázat: existuje množina $\Phi^* \subset \Phi$ mohutnosti $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$ taková, že pro navzájem různá $M_i \in \exp N$ a libovolná $\xi_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, \ldots$ existuje $f \in \Phi^*$, pro niž $f(M_i) = \xi_i$. Pro každou spočetnou $S \subset N$ a každou prostou posloupnost $\mathfrak{A} = \{A_n\}$ částí S označme $\Phi(S, \mathfrak{A})$ množinu všech $f \in \Phi$ takových, že platí: když $M \in \exp N$, $M' \in \exp N$ a buď pro některé i je $M \cap S = A_i = M' \cap S$ anebo pro všechna i platí $M \cap S \neq A_i \neq M' \cap S$, pak $f(M) = f(M')$. Označme Φ^* sjednocení všech $\Phi(S, \mathfrak{A})$. Snadno se zjistí, že každá $\Phi(S, \mathfrak{A})$ má mohutnost $\exp \aleph_0$. Pro každou spočetnou $S \subset N$ množina všech prostých posloupností $\mathfrak{A} = \{A_n\}$ částí S má zřejmě mohutnost $\exp \aleph_0$; konečně, množina všech spočetných $S \subset N$ má mohutnost $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$. Z toho plyne ihned, že Φ^* má mohutnost $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$. Nechť nyní jsou dána navzájem různá $M_i \in \exp N$ a body $\xi_i \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro $i \neq j$ zvolme, je-li $M_i - M_j \neq \emptyset$, prvek $a_{ij} \in M_i - M_j$, označme S množinu všech a_{ij} a položme $A_i = M_i \cap S$.

Zřejmě A_i jsou navzájem různé; klademe $\mathfrak{A} = \{A_i\}$. Zvolme dále libovolné $\xi' \in \langle 0, 1 \rangle$ různé od všech ξ_i; pro $M \in \exp N$ položme $f(M) = \xi_i$, je-li $M \cap S = A_i$, $f(M) = \xi'$, když $M \cap S \neq A_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Zřejmě pak $f \in \Phi(S, \mathfrak{A}) \subset \Phi^*$. Tím je důkaz proveden.

C. Každá nespočetná soustava otevřených částí základního kvádru (libovolné dimense) má nespočetnou podsoustavu, jejíž průnik je neprázdný.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{m}$ je dimense uvažovaného základního kvádru R. Nechť $\mathfrak{G}$ je daná nespočetná soustava otevřených částí R.

I. Jestliže $\mathfrak{m} \leqq \exp \aleph_0$, pak podle A existuje spočetná $S \subset R$ hustá v R. Jestliže $\mathfrak{G}$ nemá požadovanou vlastnost, pak zřejmě pro každé $x \in R$ soustava $\mathfrak{G}_x$ těch $G \in \mathfrak{G}$, pro něž $x \in G$, je spočetná. Zřejmě však $\mathfrak{G} = \bigcup_{x \in S} \mathfrak{G}_x$; to dává spor.

II. Nechť nyní $\mathfrak{m} > \exp \aleph_0$. Potom $R = \mathfrak{P} X_\mu$, kde M má mohutnost $\mathfrak{m}$, $X_\mu = \langle 0, 1 \rangle$ pro každé μ. Zvolme nyní soustavu $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ tak, aby měla mohutnost $\aleph_1$ a neobsahovala jako svůj prvek množinu $\emptyset$; pro každé $G \in \mathfrak{G}'$ zvolme neprázdnou otevřenou $G^* \subset G$ tvaru $G^* = \mathcal{E}_x [x = \{x_\mu\} \in R,\ x_\mu \in H_\mu$ pro $\mu \in K]$, kde $K \subset M$ je konečná, $H_\mu \subset \langle 0, 1 \rangle$ jsou otevřené (neprázdné), $H_\mu \neq \langle 0, 1 \rangle$. Je zřejmé, že pro každou G^* zmíněného tvaru jsou množiny $K \subset M$, $H_\mu \subset \langle 0, 1 \rangle$ jednoznačně určeny požadavky, které jsme právě uvedli. Buď nyní M' sjednocení všech těchto K; zřejmě M' má mohutnost $\leqq \aleph_1$. Buď $R' = \mathfrak{P}_{\mu \in M'} X_\mu$; buď φ zobrazení R na R', které prvku $x = \{x_\mu;\ \mu \in M\} \in R$ přiřazuje $\varphi(x) = x' = \{x_\mu;\ \mu \in M'\} \in R'$. Zobrazení φ je zřejmě spojité, $\varphi^1(G^*)$ jsou otevřené v R', $\varphi^{-1}(\varphi^1(G^*)) = G^*$. Z toho a z části I důkazu plyne ihned, že existuje $x \in R$, které leží v nespočetně mnoha množinách G^*. Tím je důkaz tvrzení proveden.

D. Nechť P je normální prostor nekonečné mohutnosti. Nechť $\mathfrak{n}$ je mohutnost taková, že pro vhodný normální prostor $Q \supset P$ množina $Q - P$ je otevřená hustá v Q a má mohutnost $\mathfrak{n}$ (to je splněno zejména tehdy, když P obsahuje hustou část mohutnosti $\mathfrak{n}$).

Potom

(a) existuje normální prostor $S \supset P$ takový, že P je uzavřená G_δ-množina v S; $S - P$ je hustá v S, podprostor $S - P$ je diskrétní, $S - P$ má mohutnost $\mathfrak{n}$; každá disjunktní soustava otevřených částí S protínajících P je spočetná;

(*b*) existuje normální prostor $T \supset P$ takový, že P je uzavřená G_δ-množina v T; $T - P$ je hustá v T, podprostor $T - P$ je diskrétní, $T - P$ má mohutnost $\leqq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$; každá nespočetná soustava otevřených částí T protínajících P má nekonečnou podsoustavu, jejíž průnik je neprázdný.

Důkaz. I. Dokážeme, že předpoklady věty jsou splněny, je-li P normální a obsahuje hustou část H nekonečné mohutnosti $\mathfrak{n}$. Položme $Q = P \cup (H \times \mathbf{N})$ a zaveďme v Q topologii tak, že za otevřenou basi vezmeme soustavu všech (y), $y \in H \times \mathbf{N}$, a všech $G \cup ((G \cap H) \times \mathbf{N}_p)$, kde $G \subset P$ je otevřená, $\mathbf{N}_p$ značí množinu přirozených čísel $n \geqq p$. Je zřejmé, že prostor P je vnořen do prostoru Q, $Q - P$ je otevřená hustá v Q, $Q - P$ má mohutnost $\mathfrak{n}$. Jsou-li $F_1 \subset Q$, $F_2 \subset Q$ uzavřené disjunktní, pak též $F_1 \cap P$, $F_2 \cap P$ jsou uzavřené, tedy existují otevřené v P disjunktní množiny $G_1 \supset F_1 \cap P$, $G_2 \supset F_2 \cap P$. Položme nyní $U_1 = F_1 \cup G_1 \cup ((G_1 \cap H) \times \mathbf{N}) - F_2$, $U_2 = F_2 \cup G_2 \cup ((G_2 \cap H) \times \mathbf{N}) - F_1$. Snadno se zjistí, že U_1, U_2 jsou disjunktní otevřené v Q. Prostor Q je tedy normální.

II. Nechť pro prostor P jsou (pro určité Q, $\mathfrak{n}$) splněny předpoklady uvedené ve větě. Potom, jak vyplývá z **T 8.4.14**, můžeme předpokládat $\beta(P) \subset \beta(Q)$; z toho, že Q obsahuje hustou část mohutnosti $\mathfrak{n}$, plyne však snadno, že totální charakter $\beta(Q)$ a tím spíše totální charakter $\mathfrak{m}$ prostoru $\beta(P)$ nepřevyšuje $\exp \mathfrak{n}$. Podle **T 8.4.5** prostor $\beta(P)$ je homeomorfní s podmnožinou základního kvádru R dimense $\mathfrak{m}$. Pro jednodušší vyjadřování budeme dále předpokládat (což je zřejmě možné), že máme přímo $P \subset \beta(P) \subset R$. Z **T 8.4.11** pak vyplývá: když F_1, F_2 jsou uzavřené v P, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, pak jejich uzávěry v R jsou disjunktní.

III. Podle A existuje množina $H^{(1)} \subset R$ taková, že $\overline{H^{(1)}} = R$, moh $H^{(1)} = \mathfrak{n}$; podle B existuje množina $H^{(2)} \subset R$ taková, že moh $H^{(2)} = \mathfrak{n}^{\aleph_0}$ a průnik $H^{(2)}$ s každou neprázdnou G_δ-podmožinou prostoru R je neprázdný (dokonce nespočetný). Pro $i = 1, 2$ označme Z_i prostor, který se sestrojí na základě prostoru R a množiny $H^{(i)}$ stejným způsobem, jakým v části I tohoto důkazu byl sestrojen prostor Q na základě prostoru P a množiny H. Stejně jako v I se zjistí, že R je vnořen do Z_i, Z_i je normální, $Z_i - R$ je hustá otevřená v Z_i a je diskrétním prostorem; snadno se též zjistí, že R je G_δ-množina v Z_i. Nechť $\mathfrak{S}$ je nespočetná soustava otevřených částí prostoru Z_i a nechť $G \cap R \neq \emptyset$ pro každé $G \in \mathfrak{G}$; dokážeme, že v případě $i = 1$ existuje bod $y \in Z_i - R$, který náleží aspoň do dvou různých $G \in \mathfrak{G}$, a že v případě $i = 2$ existuje bod $y \in Z_i - R$, který náleží do nekonečně mnoha množin $G \in \mathfrak{G}$.

Pro každé $G \in \mathfrak{G}$ zvolme číslo $p = p(G)$ a otevřenou v P množinu $G^* \neq \emptyset$ tak, aby $G^* \cup ((G^* \cap H^{(i)}) \times \mathbf{N}_p) \subset G$, kde $\mathbf{N}_p$ má význam z I. Je zřejmé, že pro některé n soustava $\mathfrak{G}_n$ těch $G \in \mathfrak{G}$, pro něž $p(G) = n$, je nespočetná. Jak vyplývá z C, existuje nekonečná spočetná $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}_n$ taková, že průnik všech G^*, $G \in \mathfrak{G}'$, je neprázdný. V případě $i = 1$ zvolme $G_1 \in \mathfrak{G}'$, $G_2 \in \mathfrak{G}'$, $G_1 \neq G_2$; zřejmě pak existuje $x \in H^{(1)}$ takové, že $x \in G_1^* \cap G_2^*$, a tedy $y = (x, n) \in G_1 \cap G_2$, takže $\mathfrak{G}'$ není disjunktní. V případě $i = 2$ označme X průnik všech G^*, $G \in \mathfrak{G}'$; máme pak $X \cap H^{(2)} \neq \emptyset$. Jestliže $x \in X \cap H^{(2)}$, pak zřejmě $(x, n) \in G$ pro každou $G \in \mathfrak{G}'$.

IV. Položme nyní $S = Z_1 - (R - P)$, $T = Z_2 - (R - P)$. Z toho, že pro disjunktní uzavřené v P množiny F_1, F_2 je vždy $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \emptyset$ (viz konec části II tohoto důkazu), snadno vyplývá, že S a T jsou normální. Snadno se též ověří, že S a T mají i ostatní vlastnosti, požadované ve větě.

10.4.*) Použijeme-li tvrzení **10.3**, D, (*a*) na diskrétní prostor nespočetné mohutnosti $\mathfrak{n}$, dostáváme ihned normální prostor (označíme jej P_4) mohutnosti $\mathfrak{n}$, v němž existuje uzavřená množina F taková, že $P_4 = \overline{P_4 - F}$, podprostory F a $P_4 - F$ mají oba mohutnost $\mathfrak{n}$ a jsou diskrétní, F je G_δ-množina v P_4 (a tedy, jak se snadno zjistí, P_4 je dokonale normální), každá disjunktní soustava otevřených množin protínajících F je spočetná. Udáme nyní některé další vlastnosti prostoru P_4.

(*a*) Prostor P_4 nemá vlastnost, uvedenou v **5.17**; soubor $\{(x); x \in F\}$ je totiž lokálně konečný, avšak neexistují otevřené v P množiny G_x takové, aby $\{G_x\}$ byl lokálně konečný, $x \in G_x$. Skutečně, kdyby takové množiny existovaly, položme nejprve $H_x = G_x - (F - (x))$; pak H_x jsou otevřené, $x \in H_x \subset G_x$; zvolme dále otevřené U_x tak, aby $x \in U_x$, $\overline{U}_x \subset H_x$, a položme konečně $V_x = U_x - \bigcup_{y \neq x} \overline{U}_y$. Potom V_x jsou otevřené, $x \in V_x$, $\{V_x\}$ je disjunktní, což je spor.

*) K tomuto příkladu viz R. H. Bing, Metrization of topological spaces, Canadian Journal of Mathematics, 1951, *3*, 175—186.

(b) Z předcházejícího tvrzení a z **5.17** vyplývá, že P_4 není plně normální.

(c) Je-li f spojité zobrazení P_4 do metrického prostoru, pak $f^1(F)$ je separabilní. Kdyby totiž $f^1(F)$ nebylo separabilní, pak by, jak se snadno zjistí, existovala nespočetná disjunktní soustava $\mathfrak{G}$ otevřených částí prostoru $f^1(P_4)$ taková, že $G \in \mathfrak{G} \Rightarrow G \cap f^1(F) \neq \emptyset$. Soustava všech $f^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}$, je pak nespočetná disjunktní a je vždy $f^{-1}(G) \cap F \neq \emptyset$, což dává spor.

(d) Z (c) vyplývá snadno, že existuje spojitá pseudometrika ϱ^* v F taková, že žádná spojitá pseudometrika ϱ v P_4 se neshoduje na F s ϱ^* (stačí zvolit ϱ^* tak, aby $\varrho^*(x, y) = 1$ pro $x \neq y$).

10.5. Použijeme-li nyní na diskrétní prostor nespočetné mohutnosti $\mathfrak{n}$ tvrzení **10.3**, D, (b), dostáváme dokonale normální prostor P_5 s těmito vlastnostmi: existuje uzavřená $F \subset P_5$ mohutnosti $\mathfrak{n}$ taková, že $P_5 = \overline{P_5 - F}$, podprostory F a $P_5 - F$ jsou diskrétní, $P_5 - F$ má mohutnost $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$, každá bodově konečná soustava otevřených množin protínajících F je spočetná. Udáme nyní některé další vlastnosti prostoru P_5.

(a) Soubor $\{(x); x \in F\}$ je lokálně konečný; je zřejmé, že jsou-li G_x otevřené, $x \in G_x$, pak $\{G_x\}$ není lokálně konečný (dokonce ani není σ-bodově konečný). Tím spíše (jak vyplývá z **5.17**) prostor P_5 není plně normální.

(b) Je-li $\{G_\alpha\}$ bodově konečné otevřené pokrytí P_5, pak existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}$ takové, že $\overline{U}_\alpha \subset G_\alpha$. — To vyplývá z **8.2**, (1), neboť každý bodově konečný soubor otevřených částí P_5 je nejvýš spočetný a prostor P_5 je dokonale normální, tedy podle **8.9** spočetně plně normální.

(c) Je-li $\{G_\alpha\}$ lokálně konečný soubor otevřených částí P_5, pak existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\beta\}$ prostoru P_5 takové, že pro každé β je $U_\beta \cap G_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho α. Skutečně, $\{G_\alpha\}$ je nutně nejvýš spočetný, takže z **8.2**, (4) vyplývá, že existují otevřené $H_\alpha \supset \overline{G}_\alpha$ takové, že $\{H_\alpha\}$ je lokálně konečný. Z **2.6** nyní vyplývá existence $\{U_\beta\}$ s žádanými vlastnostmi.

10.6. Buď $P_6 = P_5 \cup (F \times \mathbf{N})$, při čemž body z $P_6 - F$ jsou isolované a pro každý bod $x \in P$ množiny $G \cup ((x) \times \mathbf{N}_p)$, kde $G \subset P_5$ je otevřené, tvoří úplnou soustavu okolí; F má zde význam z **10.5**, $\boldsymbol{N}_p$ význam z **10.3**. Snadno se zjistí, že P_6 je dokonale normální.

Dokážeme (sr. **2.6**), že existuje lokálně konečný soubor $\{G_\alpha\}$ otevřených částí P_6 takový, že platí: je-li $\{U_\beta\}$ lokálně konečné otevřené pokrytí P_6, pak pro vhodné β je $U_\beta \cap G_\alpha \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho α. — Stačí vzít za $\{G_\alpha\}$ soubor $\{(x) \times \boldsymbol{N};\ x \in F\}$. Je-li $\{U_\beta;\ \beta \in B\}$ lokálně konečné otevřené pokrytí, buď C množina těch β, pro něž $U_\beta \cap F \neq \emptyset$. Pak C je spočetná. Zřejmě $\bigcup\limits_{\beta \in C} U_\beta \supset F$, takže některá $U_\beta \cap F$ je nespočetná, tedy $U_\beta \cap ((x) \times \boldsymbol{N}) \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho x.

10.7. Prvky prostoru P_7 nechť jsou všechna reálná čísla; otevřenou basi P_7 nechť tvoří všechny množiny $\mathscr{E}_x\, [a \leqq x < b]$, kde a, b jsou reálná čísla. Je zřejmé, že P_7 je zobecněný uspořádaný prostor (viz **T 6.1.3**); je tedy podle **T 6.1.7** dědičně normální.

Dokážeme, že P_7 má Lindelöfovu vlastnost. K tomu podle **T 8.1.20** a **T 8.1.19** stačí dokázat, že pro libovolnou nespočetnou $X \subset P_7$ existuje bod $x_0 \in P_7$, jehož každé okolí má s X nespočetný průnik. Je-li $X \subset P_7$ nespočetné, pak zřejmě existují reálná a, b taková, že $\mathscr{E}_x\, [x \in X,\ a < x < b]$ je nespočetná. Buď nyní Y množina $y > a$ takových, že $\mathscr{E}_x\, [x \in X,\ a < x < y]$ je nespočetná; buď x_0 infimum množiny Y. Pak zřejmě $y > x_0 \Rightarrow y \in Y$; zřejmě $x_0 - p^{-1}$ non $\in Y$ pro $p = 1, 2, \ldots$, tudíž množiny $\mathscr{E}_x\, [x \in X,\ a < x < x_0 - p^{-1}]$ jsou nejvýš spočetné, a tedy též $\mathscr{E}_x\, [x \in X,\ a < x < x_0]$ je nejvýš spočetná. Z toho plyne ihned, že pro každé $y > x_0$ množina $\mathscr{E}_x\, [x_0 \leqq x < y]$ má s X nespočetný průnik.

Ježto P má Lindelöfovu vlastnost, je podle **5.11** plně normální, podle **T 8.1.29** pak je dokonale normální.

Dokážeme konečně, že prostor $R = P_7 \times P_7$ není ani normální (přesto, že P_7 je dokonale normální plně normální). Označme S množinu $(x, y) \in R$ takových, že $x + y = 0$. Snadno se zjistí, že S je uzavřená v R, S je diskrétní prostor. Množina všech spojitých funkcí v S má zřejmě mohutnost $\exp \exp \aleph_0$. Předpokládejme, že R je normální; pak množina všech spojitých funkcí v R má mohutnost $\geqq \exp \exp \aleph_0$; to však je spor, neboť R obsahuje hustou spočetnou množinu (např. množinu všech (x, y) s racionálními x, y) a tedy množina všech spojitých funkcí v R má mohutnost $\exp \aleph_0$.

10.1. Sestrojte pseudokompaktní (viz **4.4**) úplně regulární prostor, který není spočetně kompaktní. [Tuto vlastnost mají např. vhodné podprostory prostoru $P_2 \times Q$, kde Q je metrisovatelný a není diskrétní, P_2 je prostor z **10.2.**]

10.2. Sestrojte příklad kompaktního FH-prostoru P takového, že pro vhodné uzavřené $S \subset P$ existuje konečné otevřené pokrytí $\{H_k\}$ podprostoru S, které nemá kombinatoricky podobné přesné otevřené prodloužení. [Za P lze vzít prostor $P_2 \times Q$, kde P_2 je prostor z **10.2**, Q je kompaktní metrisovatelný nekonečný prostor.]

10.3. V prostoru P_1 (viz **10.1**) netvoří ani F_σ-množiny ani G_δ-množiny lokálně určenou soustavu. [Pro F_σ-množiny uvažte množinu X všech isolovaných $x \in P_1$, pro G_δ-množiny pak množinu $P_1 - X$.]

10.4. Existuje dědičně plně normální prostor P, v němž ani F_σ-množiny, ani dokonalé G_δ-množiny, ani dokonalé F_σ-množiny netvoří vnitřně lokálně určenou soustavu (srovnej s tím **7.12**). [Za P lze vzít nespočetný kompaktní FH-prostor s jediným neisolovaným bodem.]

10.5. Sestrojte úplně regulární σ-diskrétní prostor, který není normální. [Lze např. použít vlastností prostoru $\beta(\mathbf{N})$.]

10.6. Nechť $\xi \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$, $\eta \in \beta(\mathbf{N}) - \mathbf{N}$, $z = (\xi, \eta)$, $P = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $S = P \cup (z)$ je prostor vnořený do $\beta(\mathbf{N}) \times \beta(\mathbf{N})$. Pro $X \subset P$, $Y \subset P$ položme $X \tau Y$ právě když $\overline{X} \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ (uzávěry v prostoru S). Dokažte: (1) τ je δ-relace na P; (2) neexistuje nejjemnější ze všech uniformit, které vytvářejí (viz **4.33**) δ-relaci τ. [I. Pro $x = (m_1, m_2) \in P$, $y = (n_1, n_2) \in P$ klademe $\sigma_i(x, y) = 0$, když $m_i = n_i$, $\sigma_i(x, y) = 1$, když $m_i \neq n_i$. Buď Φ množina všech omezených spojitých funkcí na S, $\mathfrak{M}_i$ množina všech pseudometrik na P tvaru $\varrho(x, y) = |f(x) - f(y)| + \sigma_i(x, y)$, kde $f \in \Phi$, $\mathfrak{U}_i$ uniformita, vytvořená $\mathfrak{M}_i$ (viz **3.1**). II. Nechť $X \subset P$, $Y \subset P$, $z \in \overline{X} \cap \overline{Y}$; nechť $\varepsilon > 0$, $\varrho_k \in \mathfrak{M}_1$, $k = 1, \ldots, p$, $\varrho_k(x, y) = |f_k(x) - f_k(y)| + \sigma_1(x, y)$. Existují okolí U, V bodů ξ, η v $\beta(\mathbf{N})$ tak, že $x \in W \Rightarrow |f_k(x) - f_k(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, kde $W = (U \times V) \cap (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. Označme A resp. B množinu $m \in \mathbf{N}$ takových, že pro vhodné $n \in \mathbf{N}$ platí $(m, n) \in X \cap W$ resp. $(m, n) \in Y \cap W$. Pak $\xi \in \overline{A}$, $\xi \in \overline{B}$ (v prostoru $\beta(\mathbf{N})$), tedy (viz **T 8.4.12**) $A \cap B \neq \emptyset$, takže existují m, n, n' z $\mathbf{N}$, pro něž $x = (m, n) \in X \cap W$, $y = (m, n') \in Y \cap W$, tedy $\varrho_k(x, y) < \varepsilon$. III. Pomocí II snadno dokážeme, že $\mathfrak{U}_i$ vytvářejí δ-relaci τ. Nechť uniformita $\mathfrak{V}$ je jemnější než $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ a vytváří δ-relaci τ^*. Pak pseudometrika $\sigma_1 + \sigma_2$ je stejnoměrně spojitá vzhledem k $\mathfrak{V}$. Z toho plyne $X \tau^* Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$, takže $\tau^* \neq \tau$.]

P o z n á m k a. Do nedávna nebylo známo, zda existuje δ-relace s vlastností (2). Viz k tomu Časopis pro pěstování matematiky, 1957, *81*, str. 367.