CHAPITRE VIII.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

37. **Les pangéodésiques et le cône de Segre.** — Nous appellerons *pangéodésiques* les courbes de la surface, qui annulent la variation de l'intégrale de l'élément linéaire projectif $F_3 : F_2 = \varphi_3 : \varphi_2$. Elles satisfont à l'équation

$$\delta\int\frac{F_3}{F_2} = \delta\int\frac{\varphi_3}{\varphi_2} = 0, \tag{1}$$

qui, développée, se réduit à la suivante :

$$\begin{aligned} &2(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)(dv\,d^2u - du\,d^2v) \\ &\quad = (\gamma_v\,dv^4 - \beta_u\,du^4)\,du\,dv + 2(\gamma_u\,dv^2 - \beta_v\,du^2)\,du^2\,dv^2. \end{aligned} \tag{1$_1$}$$

En faisant usage des équations fondamentales, on démontre que cette équation est équivalente à l'équation de Čech

$$(x\,dx\,d^2x\,d^3x) = (\xi\,d\xi\,d^2\xi\,d^3\xi), \tag{1$_2$}$$

laquelle est seulement en apparence du troisième ordre. (Si les asymptotiques ne sont pas réelles, il faut multiplier par ε un des deux déterminants précédents.) On en déduit une simple propriété géométrique des pangéodésiques, dont on pourrait même partir pour les définir. *Si* A *est un point d'une pangéodésique d'une suface* S, et si α est son plan osculateur en A, si A, A′, A″, A‴ sont quatre points infiniment voisins (non sur la pangéodésique, mais) *sur l'intersection de α et de la surface* S *les plans tangents à* S *en* A, A′, A″, A‴ *passent par un même point.*

Les plans osculateurs en A aux pangéodésiques de S sortant de A enveloppent un *cône*, que C. Segre avait trouvé par une autre méthode. Pour l'étude de ce cône nous renvoyons à la *G.P.D.* (§ 16, 22, 24) et à une Note de M. Sannia [7], qui en a fait usage pour étudier les propriétés projectives du voisinage d'un point A de S.

38. Sur certaines cubiques rationnelles et sur les cônes correspondants. — Soient x_0, x_1, x_2 des coordonnées homogènes d'un point du plan. Une équation

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 x_1 x_2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + g x_2^3 = 0 \\ (a,\ b,\ c,\ g = \text{const.}) \end{cases}$$

définit une cubique C, qui a en O ($x_1 = x_2 = 0$) un point double et est par conséquent rationnelle. Les droites $x_1 = 0, x_2 = 0$ sont les deux tangentes en O. La cubique a trois points *d'inflexion*, qui sont ses intersections avec la droite r (*droite d'inflexion*),

$$(3)\qquad x_0 + b x_1 + c x_2 = 0.$$

Si $a = g = 0$ la cubique se réduit à cette droite et aux deux tangentes citées. Si seulement un des coefficients a, g est nul, si par exemple $a = 0$, $g \neq 0$, alors la cubique se réduit à la droite $x_2 = 0$ et à la conique C′ définie par

$$(2_1)\qquad x_1(x_0 + b x_1 + c x_2) + g x_2^2 = 0.$$

Les tangentes à C′ dans ses intersections avec la droite $x_2 = 0$ sont la droite $x_1 = 0$ et la droite (35) d'inflexion. En indiquant par t un paramètre variable, les équations

$$(2_2)\qquad \begin{cases} x_0 = 1, \qquad x_1 = -g\dfrac{t^2}{P(t)}, \qquad x_2 = \dfrac{t}{P(t)} \\ [P(t) = -ag^2t^3 + bgt^2 - ct + 1] \end{cases}$$

peuvent être considérées (si $g \neq 0$) comme les équations paramétriques de la cubique C, ou, si $a = 0$, de la conique C′. Chaque point de la cubique définit la valeur correspondante de t; le point double correspond aux valeurs $t = 0$, $t = \infty$. Considérons la branche de C, correspondant aux valeurs petites de t. Pour $t = 0$ on a

$$(2_3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} = 0, \qquad \dfrac{dx_2}{dt} = 1; \qquad \dfrac{d^2x_0}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -2g, \qquad \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = 2c \qquad (t = 0). \end{cases}$$

Soit maintenant O un point x d'une surface S; soient $x_u, x_v, \ldots$ les valeurs de ces mêmes quantités en O. Si *pour un point x' du plan* *tangent en* O, nous posons

$$x' = x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v, \tag{4}$$

nous pouvons considérer les x_i comme les coordonnées (locales) du point x'. Nous supposerons que les u, v soient des coordonnées asymptotiques. D'après les équations (2_3) et (4), on aura en O

$$x' = x, \qquad \frac{dx'}{dt} = x_v, \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = -2g x_u + 2c x_v.$$

Pour un point x'' de l'asymptotique $u = \text{const.}$, sortant de O, on a en O :

$$x'' = x, \qquad \frac{\partial x''}{\partial v} = x_v, \qquad \frac{\partial^2 x''}{\partial v^2} = \theta_v x_v + \gamma x_u + p_{22} x.$$

L'invariant j_1 (§ 7 et 11) *de contact de ces deux courbes en* O *est par conséquent* $-2g : \gamma$ (si $\gamma \neq 0$ en O). Par la même méthode *on démontre que l'invariant de contact en* O *de l'autre branche de la cubique* C *et de l'autre asymptotique sortant de* O *est* $-2a : \beta$ (si $\beta \neq 0$ en O). *Les équations*

$$2g = -\gamma j_1, \qquad 2a = -\beta j_2 \tag{5}$$

nous donnent la signification géométrique des coefficients a, g *de l'équation* (2). Les *coefficients* b, c *définissent la droite* r *d'inflexion* (3); cette droite, d'après l'équation (4), joint les points $x_u - bx$ et $x_v - cx$; elle est donc la droite qui correspond à la différentielle (*intrinsèque*) $b\,du + c\,dv$, selon la méthode que nous avons développée au paragraphe 31, c'est-à-dire est *la droite lieu des points* $dx - (b\,du + c\,dv)x$.

Si la droite (3) est donnée, et si l'on change les coordonnées homogènes x, en leur substituant les coordonnées proportionnelles $\bar{x} = \sigma x$, on devra substituer à la différentielle $b\,du + c\,dv$ l'autre différentielle

$$\bar{b}\,du + \bar{c}\,dv = b\,du + c\,dv + d\log\sigma.$$

Voilà trouvée aussi l'interprétation des coefficients b, c. On pourrait aussi dire que la cubique C est définie par la différentielle $b\,du + c\,dv$ et par le rapport

$$\frac{1}{\beta\gamma}\,\frac{a\,du^3 + g\,dv^3}{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3} \text{ (au moins si } \beta\gamma \neq 0),$$

ou par les $b\,du + c\,dv$, $a\,du^3 + g\,dv^3$.

Nous indiquerons la cubique (z) par $C(j_1, j_2; r)$; les invariants j_i définissent les coefficients a, g; la droite r définit les autres coefficients b, c. Les points d'inflexion de C sont sur les tangentes de Darboux si $j_1 = j_2$, sur celles de Segre si $j_1 + j_2 = 0$. Si $j_1 = 0$ ou $j_2 = 0$, la cubique se réduit à une conique (¹).

Corrélativement nous considérerons comme coordonnées (locales) d'un plan passant par O

$$(4_1) \qquad \xi' = \xi_0 \xi + \xi_1 \xi_u + \xi_2 \xi_v$$

les ξ_0, ξ_1, ξ_2. Une équation

$$(2_3) \qquad \xi_0 \xi_1 \xi_2 + a\xi_1^3 + b\xi_1^2\xi_2 + c\xi_1\xi_2^2 + g\xi_2^3 = 0$$

définit un cône Γ (correspondant à la cubique C dans la polarité fondamentale), de troisième classe qui a le plan tangent en O à S comme plan double, et a pour génératrices les tangentes asymptotiques; aux points d'inflexion de C correspondent trois génératrices *de rebroussement* sur Γ. Les plans tangents à Γ le long de ces génératrices passent par une même droite ρ (la droite de *rebroussement*), polaire de la droite d'inflexion dans la polarité fondamentale. Nous appellerons ce cône le cône $\Gamma(j_1, j_2; \rho)$, en ayant posé

$$(5_1) \qquad 2g = \gamma j_1, \qquad 2a = \beta j_2.$$

On a changé le signe des seconds membres, en remarquant qu'une corrélation change x, β, γ en ξ, $-\beta$, $-\gamma$. *Dans la polarité fondamentale le cône* $\Gamma(j_1, j_2; \rho)$ *correspond à la cubique* $C(-j_1, -j_2; r)$, *où r est la droite polaire de ρ.*

39. **Quelques correspondances remarquables.** — Donnons aux invariants j_1, j_2 des valeurs quelconques, mais *déterminées*, pendant que nous considérerons les b, c comme des paramètres variables. Nous trouverons alors une correspondance entre les différentielles $b\,du + c\,dv$, les droites $r = (x_u - bx, x_v - cx)$ du plan tangent, les droites polaires ρ sortant de O, les cubiques $C(j_1, j_2; r)$ et les cônes $\Gamma(j_1, j_2; \rho)$, qui dans la polarité fondamentale correspondent aux cubiques $C(-j_1, -j_2; r)$.

(¹) Sur chaque tangente sortant de O, le point O et les intersections de cette droite avec les coniques $C(2j_1, 0; r)$, $C(0, 2j_2; r)$ et la cubique $C(j_1, j_2; r)$ forment un groupe harmonique. Les points d'intersection de ces deux coniques appartiennent à la cubique.

Étudions par exemple la correspondance entre les droites r et les cônes Γ. Aux droites r passant par un même point $y_0 x + y_1 x_u + y_2 x_v$ (c'est-à-dire aux droites r, pour lesquelles $y_0 + b y_1 + c y_2 = 0$) correspondent des cônes Γ, qui sont tous tangents au plan $\eta_0 \xi + \eta_1 \xi_u + \eta_2 \xi_v$, où

$$(6) \quad \eta_0 = 2 y_0 y_1 y_2 - (\beta j_2 y_1^3 + \gamma j_1 y_2^3), \qquad \eta_1 = 2 y_1^2 y_2, \qquad \eta_2 = 2 y_1 y_2^2,$$

d'où l'on déduit

$$(6_1) \quad y_0 = 2 \eta_0 \eta_1 \eta_2 + (\beta j_2 \eta_1^3 + \gamma j_1 \eta_2^3), \qquad y_1 = 2 \eta_1^2 \eta_2, \qquad y_2 = 2 \eta_1 \eta_2^2.$$

(On doit se rappeler que les y_i et les η_i sont des coordonnées homogènes et par conséquent déterminées seulement à moins d'un facteur.)

Nous avons de cette manière défini une correspondance entre les points $y_0 x + y_1 x_u + y_2 x_v$ du plan tangent en O et les plans $\eta_0 \xi + \eta_1 \xi_u + \eta_2 \xi_v$ sortant de O. A la droite $y_0 + b y_1 + c y_2 = 0$ du plan tangent correspond le cône $\Gamma\,(j_1, j_2; \rho)$ défini par l'équation

$$2 \eta_0 \eta_1 \eta_2 + (\beta j_2 \eta_1^3 + 2 b \eta_1^2 \eta_2 + 2 c \eta_1 \eta_2^2 + \gamma j_1 \eta_2^3) = 0,$$

et aux plans $\eta_0 \xi + \eta_1 \xi_u + \eta_2 \xi_v$ passant par la droite

$$\rho = (\xi_u - b\xi, \xi_v - c\xi)$$

correspond la cubique $C\,(j_1, j_2; r)$

$$2 y_0 y_1 y_2 + (-\beta j_2 y_1^3 + 2 b y_1^2 y_2 + 2 c y_1 y_2^2 - \gamma j_1 y_2^3) = 0,$$

qui, dans la polarité fondamentale, correspond au cône $\Gamma\,(-j_1, -j_2; \rho)$.

39 A. *La correspondance de Segre.* — Pour une surface S les coordonnées x d'un point et les coordonnées ξ d'un plan tangent sont fonctions de deux coordonnées curvilignes u, v. Si l'on pose une équation $v = \varphi\,(u)$, les points x correspondants engendrent une ligne L, et les plans ξ enveloppent une développable Λ. Chaque valeur de u, par exemple $u = u_0$, définira un point A de L et le plan *osculateur* à L en A, et définira aussi un plan α de Λ et son point de *rebroussement*. Nous les appellerons le *plan osculateur* et le *point de rebroussement* à la $v = \varphi(u)$ en $u = u_0$. Ils sont déterminés, si l'on connaît, pour $u = u_0$, les valeurs de φ, φ', φ''. Le plan osculateur

est le plan des points

$$x, \quad dx,$$

$$\begin{aligned} d^2x = \quad & x_u(d^2u + \theta_u\,du^2 + \gamma\,dv^2) \\ & + x_v(d^2v + \theta_v\,dv^2 + \beta\,du^2) + 2x_{uv}\,du\,dv. \end{aligned}$$

En remarquant que (§ 16)

$$\begin{aligned} a_{12}\xi &= \omega(x, x_u, x_v), \\ a_{12}\xi_u &= \omega(x, x_u, x_{uv}), \\ a_{12}\xi_v &= \omega(x, x_{uv}, x_v) \\ & (\omega = \pm 1), \end{aligned}$$

on démontre que ce plan est le plan

$$\begin{aligned} &(du\,d^2v - dv\,d^2u + \beta\,du^3 - \gamma\,dv^3 + \theta_v\,dv^2\,du - \theta_u\,dv\,du^2)\xi \\ &+ 2\xi_u\,du^2\,dv - 2\xi_v\,du\,dv^2. \end{aligned}$$

Par la même méthode, on trouve que le point de rebroussement est le point

$$\begin{aligned} &(du\,d^2v - dv\,d^2u - \beta\,du^3 + \gamma\,dv^3 + \theta_v\,dv^2\,du - \theta_u\,dv\,du^2)x \\ &+ 2x_u\,du^2\,dv - 2x_v\,du\,dv^2. \end{aligned}$$

La correspondance entre ce point et ce plan est la correspondance de Segre. Si l'on a donné le plan sortant de O, et si O, O′, O″ sont des points infiniment voisins sur l'intersection du plan et de la surface S, le point correspondant est l'intersection des trois plans, tangents à S en O, O′, O″. Si $\eta_0\xi + \eta_1\xi_u + \eta_2\xi_v$ et $y_0x + y_1x_u + y_2x_v$ sont un plan et un point, qui se correspondent, alors

$$(7) \qquad y_0 = \eta_0\eta_1\eta_2 + \beta\eta_1^3 + \gamma\eta_2^3, \qquad y_1 = \eta_1^2\eta_2, \qquad y_2 = \eta_1\eta_2^2.$$

Cette correspondance est un cas particulier de la précédente : le cas où $j_1 = j_2 = 2$.

Seulement si $\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3 = 0$, c'est-à-dire *si l'on a considéré une ligne qui a pour tangente une des tangentes de Segre, plan osculateur et point de rebroussement se correspondent même dans la polarité fondamentale.* On pourrait partir de cette propriété pour définir les lignes de Segre. Pour d'autres propriétés, nous renvoyons à la *G. P. D.* (p. 133).

39 B. *La correspondance de Moutard.* — Moutard a donné le

théorème suivant, qui est analogue (dans la géométrie *projective*) au théorème de Meusnier (pour la courbure *métrique* des courbes d'une surface).

Si A *est un point d'une surface* S_1 *et* r *est une tangente à* S *sortant de* A, *les intersections* Γ *de* S *avec les plans passant par* r *ont en* A *des coniques osculatrices* C *qui appartiennent à une même quadrique* Q.

Ici nous nous bornerons à démontrer seulement une partie de ce théorème (en renvoyant à la *G. P. D.* pour la démonstration complète).

Si B *est un point de* r, *les droites polaires de* B *par rapport aux coniques* C *appartiennent à un même plan* (qui, d'après le théorème de Moutard, est le plan polaire de B par rapport à Q). Remarquons d'abord que :

Si le point (x, y, z, t) est un point d'une courbe plane Γ, et si $(\xi', \eta', \zeta', \tau')$ est un plan choisi à volonté entre les plans tangents à Γ en x, alors le plan $l\xi' + m\,d\xi' + n\,d^2\xi'$ contient la polaire du point $lx + m\,dx + n\,d^2x$ par rapport à la conique C osculatrice à Γ en x, si

$$\text{(7)} \qquad S(dx\, d^2\xi' - d\xi'\, d^2x) = 0.$$

Ce théorème se réduit au théorème du paragraphe 6 si le plan de Γ est un plan du tétraèdre de référence; mais il est évidemment indépendant de la position de ce tétraèdre; et par conséquent il est tout à fait général.

Si Γ est la section de S avec un plan passant par r, le plan ξ tangent à S en A est aussi tangent à Γ. Nous chercherons un facteur ρ de manière que, si l'on note $\xi' = \rho\xi$, l'équation (7) soit satisfaite. On trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= S(dx\, d^2\xi' - d\xi'\, d^2x) = \rho(S\, dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x) + 3\, d\rho\, S\, dx\, d\xi \\ &= 2\rho F_3 - 3F_2\, d\rho. \end{aligned}$$

Nous devrons poser, par conséquent,

$$\xi' = \rho\xi, \qquad \text{où } \rho = e^{\frac{2}{3}\int\frac{F_3}{F_2}}.$$

La polaire du point $x + m\,dx$ de la droite r par rapport à C appartiendra par conséquent au plan $\rho\xi + m\,d(\rho\xi)$, c'est-à-dire au plan

$$3F_2(\xi + m\,d\xi) + 2m\xi F_3,$$

qui est le même pour toutes les sections de S avec un plan passant par r. En posant $m\,du = y_1 : y_0$, $m\,dv = y_2 : y_0$, on peut aussi dire qu'*au point* $y_0 x + y_1 x_u + y_2 x_v$ *nous avons fait correspondre le plan*

$$3(y_0\xi + y_1\xi_u + y_2\xi_v)\sum_1^2 a_{rs} y_r y_s + 2\xi \sum a_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t$$

ou, en coordonnées u, v asymptotiques, le plan

$$\eta_0\xi + \eta_1\xi_u + \eta_2\xi_v,$$

où

$$(8)\qquad \eta_0 = y_0 y_1 y_2 + 2(\beta y_1^3 + \gamma y_2^3),\qquad \eta_1 = y_1^2 y_2,\qquad \eta_2 = y_1 y_2^2.$$

Cette correspondance coïncide avec celle de nos correspondances, pour laquelle $j_1 = j_2 = -\frac{2}{3}$. Seulement pour un point *d'une tangente de Darboux* $(\beta y_1^3 + \gamma y_2^3 = 0)$, le plan correspondant coïncide avec le plan polaire dans la polarité fondamentale.

40. Sur les géodésiques projectives et sur certaines équations différentielles du second ordre. — Posons $F_2 = ds^2$, et considérons ds comme égal à la *distance* (dans une géométrie métrique déterminée par cette définition) de deux points (u, v) et $(u + du, v + dv)$. Les *géodésiques* seront définies par la

$$\delta\int\sqrt{F_2} = 0,$$

qui, développée, devient

$$(9)\qquad du(d^2v + \theta_v\,dv^2) - dv(d^2u + \theta_u\,dv^2) = 0.$$

Nous les appellerons *géodésiques normales*, si $F_2 = \varphi_2$ est normale. L'étude de toutes ces géodésiques est un cas particulier de l'étude des lignes définies par une équation

$$(10)\qquad \begin{aligned} &du(d^2v + \theta_v\,dv^2) - dv(d^2u + \theta_u\,du^2)\\ &\quad = B\,du^3 - C\,dv^3 - 2(l_1\,du - l_2\,dv)\,du\,dv.\end{aligned}$$

Ces lignes sont *intrinsèques* (indépendantes du choix des paramètres

u, v) seulement si les formes

$$a_{12}(B\,du^3 - C\,dv^3) \quad \text{et} \quad l_1\,du - l_2\,dv$$

sont intrinsèques. Elles sont *invariantes* (pour une transformation homographique) si, en posant $x = \rho x'$ et par conséquent

$$\theta = \theta' + 2 \log |\rho|,$$

l'équation précédente reste transformée en elle-même. Pour cela il faut et il suffit que les quantités B, C, $2l_1 - \theta_u$, $2l_2 - \theta_v$ restent transformées en elles-mêmes, c'est-à-dire que

$$B' = B, \qquad C' = C, \qquad l'_1 = l_1 - \frac{\rho_u}{\rho}, \qquad l'_2 = l_2 - \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Les géodésiques normales (d'une surface non réglée) *sont intrinsèques et invariantes.* Le plan osculateur et le point de rebroussement d'une ligne satisfaisant à l'équation (10) sont

$$\begin{aligned}&\xi[(B+\beta)\,du^3 - (C+\gamma)\,dv^3 - 2(l_1\,du - l_2\,dv)\,du\,dv]\\ &\quad + 2\xi_u\,du^2\,dv - 2\xi_v\,du\,dv^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&x[(B-\beta)\,du^3 - (C-\gamma)\,dv^3 - 2(l_1\,du - l_2\,dv)\,du\,dv]\\ &\quad + 2x_u\,du^2\,dv - 2x_v\,du\,dv^2.\end{aligned}$$

En faisant varier $du : dv$, on déduit que :

Les lignes satisfaisant à une équation (10) *et sortant d'un point de la surface ont des plans osculateurs qui enveloppent un de nos cônes rationnels de troisième classe, pendant que leurs points de rebroussement engendrent une des précédentes cubiques rationnelles.*

Ce cône et cette cubique ont les équations :

$$2\eta_0\eta_1\eta_2 + [(B+\beta)\eta_1^3 + (C+\gamma)\eta_2^3 + 2\eta_1\eta_2(l_1\eta_1 + l_2\eta_2)] = 0,$$
$$2y_0y_1y_2 + [(B-\beta)y_1^3 + (C-\gamma)y_2^3 + 2y_1y_2(l_1y_1 + l_2y_2)] = 0.$$

La droite de rebroussement du cône et la droite d'inflexion de la cubique sont les droites $\eta_0 + l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = 0$ et $y_0 + l_1y_1 + l_2y_2 = 0$, polaires dans la polarité fondamentale, qui sont définies par la différentielle $l_1\,du + l_2\,dv$.

Le cône se réduit à un faisceau de plans seulement si

$B + \beta = C + \gamma = 0$: *le faisceau est engendré par les plans passant par la droite de rebroussement* (on néglige les faisceaux engendrés par les plans passant par une tangente asymptotique). On remarque aussi que *les plans osculateurs des trois lignes satisfaisant à l'équation* (10) *et tangentes à une des trois directions définies par la*

$$(B + \beta)\, du^3 = (C + \gamma)\, dv^3$$

passent par la même droite. En particulier (si $B = C = l_1 = l_2 = 0$) *les plans osculateurs aux trois géodésiques* (dans la géométrie définie par $ds^2 = F_2$) *tangentes aux trois lignes de Segre passent par une même droite.* Pour une surface non réglée de l'équation $\beta\, du^3 = \gamma\, dv^3$ des lignes de Segre on déduit :

$$(d^2 v + \theta_v\, dv^2)\, du - (d^2 u + \theta_u\, du^2)\, dv$$
$$= \frac{1}{3}(d \log \beta - d \log \gamma + \theta_v\, dv - \theta_u\, du)\, du\, dv,$$

qui est un cas particulier de l'équation (10). On en déduit *que même les plans osculateurs aux trois lignes de Segre sortant d'un point* O *de la surface passent par une même droite.* C'est l'*axe* dont nous avons parlé dans le paragraphe 35. On peut aussi énoncer des théorèmes corrélatifs aux précédents.

Les géodésiques normales (définies par la $\delta \int \sqrt{\varphi_2} = 0$ *définissent un de nos cônes de troisième classe; ce cône a pour droite de rebroussement précisément la normale projective.* Ce théorème est l'analogue du théorème bien connu de la géométrie métrique :

Les géodésiques (métriques) *d'une surface* S, *qui sortent d'un point* O *de* S *ont des plans osculateurs qui passent par la normale* (métrique) *à* S *en* O.

Une remarque. — Le voisinage du premier ordre d'un point d'une surface définit le plan tangent, le voisinage du second ordre définit les directions asymptotiques, le voisinage de troisième ordre les directions de Darboux et de Segre. Les droites les plus remarquables définies par le voisinage du quatrième ordre sont les droites *canoniques.* De plus nous avons défini d'autres éléments géométriques : la quadrique de Lie et plus généralement les quadriques de Darboux, le cône de Segre, les géodésiques et les pangéodésiques, les correspondances de Segre, Moutard, etc., une géométrie métrique ($ds^2 = \varphi_2 + dw^2$) déterminée par notre surface, etc. Il y a là une configuration géométrique que l'on peut étudier; nous ne nous en occupons pas; nous nous sommes bornés au développement de la partie fondamentale de cette théorie.

41. Les congruences de droites tangentes à une surface donnée. — Un système de ∞^2 droites (congruence) est engendré *en général* par les droites tangentes à deux surfaces S, S′, qui sont les *nappes focales* de la congruence. Chaque droite de la congruence a deux points focaux, l'un qui engendre S, l'autre qui engendre S′. Supposons que soit donnée une nappe focale S de la congruence; de chaque point $x(u, v)$ de S sortira une droite de la congruence tangente à S; la direction de cette droite soit définie par l'équation

$$\frac{du}{A(u, v)} = \frac{dv}{B(u, v)}, \tag{11}$$

où A, B sont des fonctions de u, v. Les lignes de S satisfaisant à l'équation (11) seront les lignes enveloppées sur S par les droites de la congruence. Si x' est le second point focal de la droite considérée, nous pourrons déterminer une fonction μ des u, v de manière que

$$x' = \mu x + 2(A x_u + B x_v). \tag{12}$$

On déterminera μ par la condition que la droite (x, x') soit tangente à la surface S′ engendrée par le point x', c'est-à-dire par l'équation

$$(x'_u, x'_v, x', x) = 0. \tag{13}$$

Nous supposerons que u, v soient sur S des coordonnées asymptotiques. D'après les équations fondamentales on trouve, en différentiant l'équation (12),

$$\left\{\begin{aligned} x'_u &= (\mu + 2A_u + 2A\theta_u)x_u + (2B_u + 2A\beta)x_v + 2Bx_{uv} + \rho x, \\ x'_v &= (2A_v + 2B\gamma)x_u + (\mu + 2B_v + 2B\theta_v)x_v + 2Ax_{uv} + \sigma x, \end{aligned}\right. \tag{12_1}$$

où les valeurs de ρ, σ ne nous intéressent pas.

L'équation (13) devient, d'après les équations (12), (12_1) :

$$\begin{vmatrix} \mu + 2A_u + 2A\theta_u & 2(B_u + A\beta) & B \\ 2(A_v + B\gamma) & \mu + 2B_v + 2B\theta_v & A \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(14) \qquad \mu = -(A_u + A\theta_u + B_v + B\theta_v) + A\frac{B_u + A\beta}{B} + B\frac{A_v + B\gamma}{A}.$$

On a exclu le cas où $AB = 0$; c'est le cas des congruences engendrées par les tangentes à un système d'asymptotiques de S. Ce cas n'est pas intéressant; en effet, dans ce cas, la seconde nappe focale S' coïncide avec la première S. Et nous le négligeons complètement. De même le plan

$$\xi' = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v)$$

(qui, pour toute valeur de λ, passe par les points x et x') sera le plan tangent en x' à S' si

$$(15) \qquad \lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v + A\frac{B_u + A\beta}{B} - B\frac{A_v + B\gamma}{A}.$$

Et l'on trouve que

$$(16) \qquad (\xi, \xi') = (x, x').$$

On peut arriver aux mêmes équations par une autre méthode. Soient S, S' deux surfaces, l'une engendrée par un point $x(u, v)$, l'autre enveloppée par un plan $\xi'(u, v)$. Supposons que ce point et ce plan s'appartiennent, c'est-à-dire que

$$(17) \qquad S\xi' x = 0.$$

On pourra alors trouver des fonctions λ, A, B des u, v de manière que

$$\xi' = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v).$$

On en déduit

$$S\xi'\,dx = 2(B\,du - A\,dv)a_{12},$$

$$\begin{aligned} S\,d\xi'\,dx = {} & 2(B\,du - A\,dv)a_{12}\left(\frac{A_v + B\gamma}{A}dv + \frac{B_u + A\beta}{B}du\right) \\ & - 2a_{12}\,du\,dv\Big[\lambda + A_u + A\theta_u - B_v \\ & \qquad - B\theta_v + B\frac{A_v + B\gamma}{A} - A\frac{B_u + A\beta}{B}\Big]. \end{aligned}$$

Seulement, si λ est donné par l'équation (15), *la* $\mathrm{S}\,d\xi'\,dx$ *est divisible par* $\mathrm{S}\xi'\,dx$*; et l'on a, dans ce cas,*

$$\mathrm{S}\,d\xi'\,dx : \mathrm{S}\,\xi'\,dx = \frac{\mathrm{A}_v + \mathrm{B}\gamma}{\mathrm{A}}\,dv + \frac{\mathrm{B}_u + \mathrm{A}\beta}{\mathrm{B}}\,du. \tag{18}$$

La droite joignant deux points homologues des surfaces S, S′ *engendre une congruence, dont les nappes focales sont* S, S′*; et* $\mathrm{S}\xi'\,dx = 0$ *est l'équation d'un système de développables de la congruence.*

Une partie de ce théorème est indépendante du choix des coordonnées curvilignes u, v. En effet, on peut énoncer le résultat : si $\mathrm{S}\,\xi' x = 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* S *et* S′ *soient les nappes focales de la congruence engendrée par les droites joignant deux points homologues de* S, S′, *est que* $\mathrm{S}\,d\xi'\,dx$ *soit divisible par* $\mathrm{S}\,\xi'\,dx$*; et, dans ce cas,* $\mathrm{S}\xi'\,dx = 0$ *est l'équation d'un système de développables de la congruence.* On pouvait prévoir ce résultat par des considérations géométriques [1]. Nous renvoyons à la *G. P. D.* pour les applications de ce théorème au problème de la déformation infiniment petite des surfaces dans la géométrie métrique. Si nous multiplions les x pour un facteur ρ et les ξ' par un facteur σ, on a, d'après l'équation (17),

$$\frac{\mathrm{S}\,d(\sigma\xi')\,d(\rho x)}{\mathrm{S}\,\sigma\xi'\,d(\rho x)} = \frac{\mathrm{S}\,d\xi'\,dx}{\mathrm{S}\,\xi'\,dx} + d\log\frac{\sigma}{\rho}.$$

---

[1] Si II est une congruence de droites, elle a deux systèmes de développables. Soint L et L'_1 les arêtes de rebroussement de ces développables. Les lignes L engendrent une nappe focale S, les lignes L'_1 l'autre nappe focale S′. Les droites de la congruenee définissent une correspondance entre les points de S, S′. Aux lignes L de S correspondent sur S′ des lignes L′ conjuguées aux lignes L'_1 ; de même aux lignes L'_1 de S′ correspondent sur S des lignes L_1 conjuguées aux lignes L. Soient A, A′ deux points correspondants de S, S′. Le plan osculateur à la ligne L sortant de A est tangent à la développable correspondante et par conséquent est tangent à S′ en A′. On aura donc

$$\mathrm{S}\,\xi' x = \mathrm{S}\,\xi' dx = \mathrm{S}\,\xi' d^2 x = 0,$$

où les différentielles ont été calculées le long des lignes L. Ces lignes seront par conséquent définies par l'équation $\mathrm{S}\,\xi'\,dx = 0$; et, puisqu'elles satisfont aussi à la $\mathrm{S}\,\xi'\,d^2x = 0$, elles satisferont aussi à l'équation

$$0 = d\mathrm{S}\,\xi'\,dx - \mathrm{S}\,\xi'\,d^2x = \mathrm{S}\,d\xi'\,dx.$$

On déduit que l'équation $\mathrm{S}d\xi'\,dx = 0$ doit être une conséquence de l'équation $\mathrm{S}\xi'\,dx = 0$; par conséquent $\mathrm{S}d\xi'\,dx$ est divisible par $\mathrm{S}\,\xi'\,dx$.

Par un changement des coordonnées homogènes ξ', x le rapport $S\,d\xi'\,dx : S\xi'\,dx$ peut changer; la différence entre deux valeurs quelconques de ce rapport est *une différentielle exacte* $d\log(\sigma : \rho)$, *que l'on peut choisir à volonté*. Si par exemple le rapport considéré est *une différentielle exacte*, alors il sera une différentielle exacte pour tout choix des coordonnées x et ξ'; et l'on pourra choisir les facteurs ρ, σ de manière que le rapport devienne égal à zéro. Pour que (18) soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que

$$(19)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{A_v + B\gamma}{A} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{B_u + A\beta}{B}$$

ou

$$(19_1)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{A}{B} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A}\gamma\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B}\beta\right).$$

Si cette équation est satisfaite, on pourra (en multipliant A, B, λ par un même facteur) rendre nulle la différentielle (18); de manière que l'on ait

$$(20)\qquad A_v = -B\gamma, \qquad B_u = -A\beta.$$

L'équation (19) a une remarquable signification géométrique. En effet, cette équation est équivalente à l'une ou à l'autre des équations

$$(x', x'_u, x'_v, x'_{uu}) = 0, \qquad (x', x'_u, x'_v, x'_{vv}) = 0.$$

Dans ce cas les $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont des coordonnées asymptotiques même pour la surface S'; c'est-à-dire *sur les deux nappes focales de la congruence se correspondent les lignes asymptotiques; on dit alors que la congruence est* W.

Étudions le cas le plus général. Nous pourrons choisir comme coordonnées d'une droite de la congruence les

$$r = \frac{1}{2}(x, x') = A(x, x_u) + B(x, x_v).$$

Par de simples dérivations on calcule r_u, r_v, r_{uv} et l'on trouve que

$$\begin{aligned} r_{uv} &- \frac{A_u + A\theta_u}{A}r_v - \frac{B_v + B\theta_v}{B}r_u \\ &- \left[\theta_{uv} + \beta\gamma - \frac{(A_u + A\theta_u)(B_v + B\theta_v)}{AB}\right]r \\ = {}& A(xx_u)\left[\left(\frac{B\gamma}{A}\right)_u + \frac{\partial^2\log A}{\partial u\,\partial v}\right] \\ &+ B(xx_v)\left[\left(\frac{A\beta}{B}\right)_v + \frac{\partial^2\log B}{\partial u\,\partial v}\right]. \end{aligned}$$

On déduit facilement que les r *satisfont toutes à une même équation linéaire du second ordre* (de Laplace) *seulement si l'équation* (19) *est satisfaite, c'est-à-dire si la congruence est* W.

Nous pouvons nous demander si *cette équation de Laplace peut avoir les invariants égaux*. Cela arrive si l'équation (19) et l'équation

$$\frac{\partial^2 \log(A : B)}{\partial u\, \partial v} = 0 \tag{21}$$

sont satisfaites toutes les deux. On pourra alors changer les paramètres des asymptotiques de manière que $A = B$; et nous pouvons aussi supposer que les équations (20) soient aussi satisfaites. On aura par conséquent

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} = -\gamma, \qquad \frac{\partial \log A}{\partial u} = -\beta,$$

d'où l'on déduit

$$\beta_v = \gamma_u. \tag{22}$$

Et, si cette équation est satisfaite, on pourra déterminer la congruence W, qui a S pour nappe focale, et qui est engendrée par des droites, dont les coordonnées satisfont à une équation de Laplace à invariants égaux. Ces droites sont les tangentes aux lignes $u - v = \text{const.}$ de la surface S. Cette équation détermine un système de développables de la congruence. L'autre système est déterminé par l'équation $u + v = \text{const.}$ Les courbes de S définies par cette équation sont les courbes conjuguées à celles qui sont définies par la $u - v = \text{const.}$ Les considérations suivantes nous démontrent que même les tangentes aux lignes $u + v = \text{const.}$ engendrent une congruence du même type. Pour cela, proposons-nous la question suivante :

Est-ce possible que sur une surface S *existent deux systèmes de* ∞^1 *courbes, conjugués entre eux, de manière que les droites tangentes à chacun de ces deux systèmes forment une congruence* W ?

Dans ces hypothèses, si les deux systèmes de courbes sont définis par les équations

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B} \quad \text{et} \quad \frac{du}{A'} = \frac{dv}{B'},$$

$$dv : du = \rho \quad \text{et} \quad dv : du = \rho'$$

$$[\rho = B : A,\ \rho' = B' : A'],$$

on aura $\rho' = -\rho$. Écrivons l'équation (19_1), et celle que l'on obtient en substituant A′, B′ aux A, B. On trouvera

$$(\log\rho)_{uv} = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\rho = \quad \frac{\partial}{\partial u}(\rho\gamma) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{\rho}\right),$$

$$(\log\rho)_{uv} = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\rho = -\frac{\partial}{\partial u}(\rho\gamma) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{\rho}\right).$$

On en déduit que $(\log\rho)_{uv} = 0$, c'est-à-dire nous trouvons la même équation (20) que nous avons trouvée précédemment.

Nous avons démontré (§ 29) que les surfaces non réglées projectivement déformables, ou sont des surfaces R_0, que nous avons déjà étudiées dans le paragraphe 35, ou sont des surfaces R. Remarquons que ces dernières sont précisément les surfaces pour lesquelles on peut choisir les paramètres des asymptotiques de manière que l'équation (22) soit satisfaite.

Les précédents résultats nous donnent de très simples propriétés géométriques, qui caractérisent les plus importantes surfaces projectivement déformables : les surfaces R. Le système conjugué formé par les $u+v=$ const., $u-v=$ const. est appelé un réseau R.

42. Sur une transformation des surfaces R. — Si S est une surface R, les coefficients β, γ des équations fondamentales

$$(23) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma\; x_u + \theta_v x_v + p_{22} x \end{cases}$$

satisfont à l'équation $\beta_v = \gamma_u$. Si l'on change les p_{ii} en $p_{ii}+c$ (où $c=$ const.), on obtient un nouveau système d'équations différentielles

$$(24) \qquad \begin{cases} y_{uu} = \theta_u y_u + \beta y_v + (p_{11}+c)y, \\ y_{vv} = \gamma\; y_u + \theta_v y_v + (p_{22}+c)y, \end{cases}$$

qui est aussi complètement intégrable, et qui définit une nouvelle surface S′ projectivement applicable sur S. (Nous indiquons ici par x une coordonnée quelconque d'un point de S et par y une coordonnée quelconque d'un point de S′.) Si x, y sont deux points correspondants de S, S′, nous pourrons faire correspondre à un point $\lambda x + \mu x_u + \nu x_v$ (de coordonnées locales λ, μ, ν par rapport à un point x de S) le point $\lambda y + \mu y_u + \nu y_v$ (de coordonnées locales λ, μ, ν

par rapport au point homologue y de S'). Aux points

$$z=\left(\frac{x}{\sigma}\right)_u-\left(\frac{x}{\sigma}\right)_v \quad \text{et} \quad z'=\left(\frac{x}{\sigma}\right)_u+\left(\frac{x}{\sigma}\right)_v,$$

qui appartiennent à la tangente à une courbe $u+v=$ const., ou $u-v=$ const. sur la première surface correspondront les points

$$t=\left(\frac{y}{\sigma}\right)_u-\left(\frac{y}{\sigma}\right)_v \quad \text{et} \quad t'=\left(\frac{y}{\sigma}\right)_u+\left(\frac{y}{\sigma}\right)\cdot$$

Ici σ est une fonction quelconque des u, v. Si l'on pose σ égal à une combinaison linéaire homogène à coefficients constants des coordonnées du point y, alors les points t et t' appartiendront à un plan fixe (le plan $\sigma=0$). Cela n'arrivera pas pour les points z et z'; nous allons démontrer que ces deux points engendrent deux réseaux et seront les points focaux de la droite (zz') pour la congruence engendrée par cette même droite. Nous démontrerons aussi que cette congruence est *complètement harmonique* à la surface S, c'est-à-dire que les asymptotiques de cette surface correspondent aux asymptotiques des surfaces (z) et (z') engendrées par le point z, et par le point z'. Pour cette démonstration, nous multiplierons les x, y par un même facteur, de manière que $\sigma=1$ (c'est-à-dire nous substituerons les $\frac{x}{\sigma}$, $\frac{y}{\sigma}$ aux x, y). Alors on trouve [en remarquant que $y=\sigma$ est une solution des équations (24)] que

$$p_{11}=p_{22}=-c, \qquad z=x_u-x_v, \qquad z'=x_u+x_v.$$

En dérivant on trouve, par exemple :

$$\begin{aligned} z_u &= \theta_u x_u+\beta x_v-(cx+x_{uv}),\\ z_v &= -\theta_v x_v-\gamma x_u+(cx+x_{uv}),\\ z_{uu} &= \lambda x_u+\mu x_v+(\beta-\theta_u)(cx+x_{uv}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= \theta_{uu}+\theta_u^2-c-\theta_{uv}-\beta\gamma,\\ \mu &= \beta(\theta_u-\theta_v)+\beta_u-\beta_v+c. \end{aligned}$$

Pour démontrer par exemple que les $u=$ const. sont des asymptotiques même pour la surface (z), il suffit de remarquer que z, z_u, z_v, z_{uu} sont des combinaisons linéaires des x_u, x_v, $x_{uv}+cx$, et que par conséquent $(z, z_u, z_v, z_{uu})=0$. De même on démontre qu'aussi le $v=$ const. sont des asymptotiques pour cette surface, et que les

$u =$ const., $v =$ const. sont aussi des asymptotiques pour la surface lieu du point z'.

En remarquant que

$$\begin{aligned} z'_u - z'_v = z_u + z_v &= (\theta_u - \gamma)x_u + (\beta - \theta_v)x_v \\ &= \frac{1}{2}(\theta_u + \theta_v - \beta - \gamma)z + \frac{1}{2}z'(\theta_u - \theta_v - \gamma + \beta)z' \end{aligned}$$

est une combinaison linéaire de z, z', on déduit que z et z' sont les points focaux de la droite (z, z') pour la congruence engendrée par ces mêmes droites. Mais de la $\beta_v = \gamma_u$ et des équations précédentes on peut déduire encore un autre résultat, c'est-à-dire que

$$z_{uu} = \mathrm{A} z_u + \mathrm{B} z_v + \mathrm{P} z,$$

où les valeurs de A, P n'ont aucune importance pour nous, et où

$$\mathrm{B} = \beta + \frac{\partial}{\partial u}\log(\theta_u - \theta_v + \beta - \gamma).$$

Pour pouvoir écrire cette équation, il faut démontrer que

$$\theta_u - \theta_v + \beta - \gamma \neq 0;$$

en effet, si cette quantité était nulle, alors

$$z_u + z_v = (\theta_u - \gamma)z,$$

et le point z n'engendrerait point une surface, comme nous l'avons supposé dans ce paragraphe.

Par la même méthode on démontre que

$$z_{vv} = \mathrm{C} z_u + \mathrm{D} z_v + \mathrm{Q} z,$$

où les valeurs de D, Q ne nous intéressent pas, et où

$$\mathrm{C} = \gamma + \frac{\partial}{\partial v}\log(\theta_u - \theta_v + \beta - \gamma).$$

On a par conséquent $\mathrm{B}_v = \mathrm{C}_u$, qui est une équation analogue à l'autre : $\beta_v = \gamma_u$. On en déduit que *la surface lieu du point z est elle-même une surface* R, *et que les $u \pm v$* const. *définissent même sur cette surface un réseau* R.

Par des considérations corrélatives, on pourra définir les congruences *complètement conjuguées à une surface et donner une* *nouvelle méthode pour déduire d'un réseau* R *connu d'autres réseaux* R.

Nous avons défini une transformation des réseaux R; en partant d'un réseau R connu, on déduit ∞^1 nouveaux réseaux : un des réseaux transformés est défini par le choix d'un plan $\sigma = 0$ et de la constante c. Donnons à cette constante une valeur fixe et faisons varier le plan σ; soient σ_1, σ_2 deux combinaisons linéaires homogènes des y à coefficients constants, que nous substituerons à la σ dans les considérations précédentes. Nous trouverons alors deux congruences engendrées par les droites (z_1, z'_1) et (Z_1, Z'_1) complètement harmoniques au réseau x donné. Soit X le point d'intersection de deux droites homologues de ces congruences. On peut démontrer ([1]) que *le réseau engendré par* X *est lui-même complètement conjugué à ces deux congruences* et que *les droites* (x, X) *engendrent une congruence* W, *pour laquelle les points* x *et* X *sont les points focaux de la droite* (x, X). *Non seulement la surface lieu du point* x, *mais aussi la surface lieu du point* X *est une surface* R. Cette transformation (de Jonas) des surfaces R peut être obtenue comme le produit de deux des transformations précédentes (dues à M. Fubini). Ce dernier a donné aussi une simple définition géométrique des transformations de Jonas.

Soit S *une surface* R, *et soit* S' *une surface projectivement applicable sur* S; *considérons la congruence des droites, tangentes à* S, *qui rencontrent une droite fixe* r. (La droite r sera une des nappes focales de la congruence : la surface S est l'autre nappe focale.) *A cette congruence correspond une autre congruence, pour laquelle* S' *est une nappe focale* (deux droites correspondantes des deux congruences sont tangentes à deux lignes correspondantes de S et S' en des points homologues).

L'autre nappe focale de la dernière congruence est une nouvelle surface R, *transformée de Jonas de la surface* S.

On peut définir des transformations semblables pour d'autres classes de surface (par exemple pour les surfaces F ou isothermo-asymptotiques). Mais, pour les démonstrations et pour les développements de la théorie, nous renvoyons à la *G. P. D.*

([1]) B. SEGRE, *C. R. Acad. Sc.*, séance du 7 juin 1927.

Le cône de Segre a été introduit par C. Segre [6]; *voir* aussi Čech [6], [13]. Les pangéodésiques ont été étudiées par MM. Fubini [23], Čech [17], Bompiani [30]. La correspondance de Segre a été étudiée par C. Segre [6], Wilczynski [37], Čech [1], [13], Kloboučck [1]; celle de Moutard et d'autres correspondances analogues par Čech [1], [13] et Lane [6]. Pour le théorème de Moutard, *voir* Darboux [1], Čech [5], [6], [13], Bompiani [23]. Les géodésiques projectives et les autres courbes analogues ont été étudiées par MM. Fubini [8], Wilczynski [37], Bompiani [24], [32]; l'usage de l'invariant de contact est dû à Čech.

La théorie des congruences W suivant la méthode indiquée au texte est due à M. Fubini [11], [16], [19], [20], [21], [22]; *voir* aussi Jonas [4]. Une autre théorie projective remarquable des congruences W est due à M. Tzitzéica (*voir* son traité); pour la comparaison des deux théories, *voir* Terracini [8].

Pour les surfaces R et leurs transformations, *voir* Tzitzéica [14], [15], [16], Demoulin [6], [7], Cartan [5], Jonas [4], Eisenhardt [14], Kanitani [2], Fubini [24], [25], [27], [33], Mentré [8], [9], B. Segre [3], [6], Calapso [2], [3], Finikoff [1], [3]. Cf. *G. P. D.*, § 17 C, 52, 54, 68. Un cas particulier remarquable des réseaux R est formé par un réseau tel que les courbes de chacune de ses deux familles appartiennent respectivement à un complexe linéaire fixe, ce cas a été étudié par M. Wilczynski [20], [27], cf. *G. P. D.*, § 46; *voir* aussi Guichard [6], Jacques [1], [2], [3], Finikoff [5]. Ces derniers réseaux sont un cas particulier des réseaux dont toutes les courbes appartiennent à un complexe quadratique fixe; *voir* Guichard [4], [5], Rouyer [1], Terracini [23]. M. Jonas [6] a considéré une classe remarquable de réseaux analogues aux réseaux R; cf. *G. P. D.*, § 17 B et 53; *voir* aussi Terracini [8], Čech [28].

On trouve un assez ample développement de cette théorie dans la *G. P. D.* (Chap. V).