X

PROJEKTIVNÍ PROSTOR

69. LINEÁRNÍ KOMBINACE BODŮ V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU.

Prostor $\mathbf{E}_m$ se skládá z *bodů*; avšak v prvním svazku jsme prováděli aritmetisaci geometrie tak, že zpravidla jsme nepočítali s *body*, nýbrž s *vektory*. Základní pojem, který se vyskytoval znovu a znovu, byl pojem *lineární kombinace vektorů*. Budeme nyní zkoumat, jak lze do výpočtů zavést lineární kombinace bodů.

Je-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ zvolen určitý bod P jako *počátek*, můžeme postupovat takto. Přiřadíme každému bodu X vektor $X - P$, čímž dostaneme vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou $\mathbf{E}_m$ všech bodů a množinou $\mathbf{V}_m$ všech vektorů, při kterém počátku P odpovídá nulový vektor $\mathbf{o}$. Jsou-li nyní X, X', ... dané body (v konečném počtu) a jsou-li c, c', ... daná reálná čísla, pokusíme se najít účelný smysl pro lineární kombinaci

$$cX + c'X' + \ldots \tag{69.1}$$

Za tím účelem nahraďme každý z daných bodů X, X', ... příslušným vektorem $X - P$, $X' - P'$, ...; dostaneme místo (69.1) lineární kombinaci vektorů

$$c(X - P) + c'(X' - P) + \ldots, \tag{69.2}$$

která podle definic prvého svazku znamená určitý vektor $\mathbf{u}$. Můžeme potom buďto zkusit tu dohodu, že bychom pod lineární kombinací (69.1) rozuměli vektor $\mathbf{u}$, nebo zkusit tu dohodu, že bychom pod lineární kombinací (69.1) rozuměli bod $P + \mathbf{u}$. Taková dohoda je však účelná pouze tehdy, jestliže je nezávislá na volbě počátku P.

Jestliže nyní místo počátku P zavedeme jiný počátek Q, potom místo vektoru (69.2) budeme mít nový vektor

$$c(X - Q) + c'(X' - Q) + \ldots \tag{69.2'}$$

Znamená-li $\mathbf{u}$ vektor (69.2), $\mathbf{v}$ vektor (69.2'), potom je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (c + c' + \ldots)(P - Q)$$

a tudíž

$$Q + \mathbf{v} = (P + \mathbf{u}) + (c + c' + \ldots - 1)(P - Q) .$$

Tím jsme vedeni k následujícím dvěma definicím, nezávislým na volbě počátku P. *Jestliže předně*

$$c + c' + \ldots = 0 , \tag{69.3}$$

potom lineární kombinace bodů (69.1) *znamená vektor* (69.2); *jestliže za druhé*

$$c + c' + \ldots = 1 , \tag{69.4}$$

potom lineární kombinace bodů (69.1) *znamená bod*

$$P + c(X - P) + c'(X' - P) + \ldots$$

Jestliže však neplatí ani (69.3), ani (69.4), potom lineární kombinaci bodů (69.1) prozatím nedáváme žádný smysl.

Všimněme si, že v prvém svazku se vyskytly definice, které jsou zvláštními případy definic nyní zaváděných. Je to předně definice vektoru $X - X'$, která spadá pod případ (69.3), za druhé pak definice středu dvojice bodů $\frac{1}{2}(X + X')$, která spadá pod případ (69.4).

Dále si všimněme, že je-li prostor $\mathbf{E}_k$ vnořen do prostoru $\mathbf{E}_m$ a jsou-li X , X', ... body prostoru $\mathbf{E}_k$, potom jak v případě (69.3), tak i v případě (69.4) smysl výrazu (69.1) zůstává týž, ať už jej uvažujeme v prostoru $\mathbf{E}_k$ či v prostoru $\mathbf{E}_m$.

Posléze poznamenejme toto. Jsou-li

$$A_0 , A_1 , \ldots , A_k \tag{69.5}$$

body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom podle definice vyslovené ke konci článku 18 body (69.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé v tom případě, že totéž platí o vektorech

$$A_1 - A_0 , \ldots , A_k - A_0 , \tag{69.6}$$

což znamená, že rovnice

$$x_1(A_1 - A_0) + \ldots + x_k(A_k - A_0) = \mathbf{o}$$

platí pouze pro $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Této definici můžeme nyní dát jiný tvar. Jsou-li dána libovolně čísla $x_1 , \ldots , x_k$, určíme číslo x_0 z rovnice

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_k = 0 . \tag{69.7}$$

Potom je

$$(69.8) \qquad x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = x_1(A_1 - A_0) + \\ + \ldots + x_k(A_k - A_0)\,.$$

Neboť za předpokladu (69.7) levá strana v (69.8) znamená vektor

$$x_0(A_0 - P) + x_1(A_1 - P) + \ldots + x_k(A_k - P)$$

nezávislý na volbě počátku P, a je patrné, že pro $P = A_0$ rovnice (69.8) je správná. Z toho plyne nový tvar definice lineární nezávislosti bodů: *Body* (69.5) *jsou mezi sebou lineárně nezávislé, právě když*[1]) *za předpokladu* (69.7) *rovnice platí pouze pro*

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_k = 0\,.$$

Fakt, ke kterému jsme v článku 18 dospěli jen nepřímo, že totiž pojem lineární nezávislosti bodů má smysl nezávislý na pořadí daných bodů, je z nové definice bezprostředně patrný.

Jestliže body (69.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, potom, jak víme, určují lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ dimense k prostoru $\mathbf{E}_m$. Při tom $\mathbf{E}_k$ podle článku 18 je množina všech bodů tvaru

$$(69.9) \qquad A_0 + x_1(A_1 - A_0) + \ldots + x_k(A_k - A_0)\,.$$

Jsou-li však $x_1, \ldots, x_k$ libovolně daná čísla a definujeme-li číslo x_0 rovnicí

$$(69.10) \qquad x_0 + x_1 + \ldots + x_k = 1\,,$$

potom bod (69.9) splyne s bodem

$$(69.11) \qquad x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_kA_k\,.$$

Neboť že tomu tak je, volíme-li počátek $P = A_0$, je jasné; na druhé straně bod (69.11) za předpokladu (69.10) je nezávislý na volbě počátku P. Tím je dokázáno, že *lineární podprostor* $\mathbf{E}_k$ *prostoru* $\mathbf{E}_m$ *určený lineárně nezávislými body* (69.5) *je množina všech bodů tvaru* (69.11), *kde čísla* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *jsou podrobena pouze podmínce* (69.10). Vyjádření (69.11) má proti vyjádření (69.9) tu přednost, že je z něho přímo patrné, že lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ je nezávislý na pořadí bodů (69.5). Čtenář sám snadno dokáže, že *zaměření* $\mathbf{V}_k$ *prostoru* $\mathbf{E}_k$ *je množina*

---

[1]) V prvém svazku jsem psal v obdobných případech „tehdy a jenom tehdy, jestliže“. Výstižný výraz „právě když“ zavedl K. Rychlík.

všech vektorů tvaru (69.11), *kde čísla* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *jsou podrobena pouze podmínce* (69.7).

Formulujme ještě znovu výsledek ve zvláštním případě $k = 1$. *Jsou-li* A, B *dva různé body, potom přímka* AB *je množina všech bodů tvaru*

$$xA + yB\,, \quad \text{kde} \quad x + y = 1\,. \tag{69.12}$$

Čtenář snadno prokáže správnost tohoto důležitého doplňku: Úsečka AB je množina všech těch bodů tvaru (69.12), ve kterých x, y jsou nezáporná čísla; vnitřek úsečky AB je množina všech těch bodů tvaru (69.12), ve kterých x, y jsou kladná čísla.

V předcházejícím jsme uvažovali lineární kombinace bodů. Snadný je přechod k lineárním kombinacím *bodů a vektorů* tvaru

$$cX + c'X' + \ldots + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots \tag{69.13}$$

Takové lineární kombinaci dáme smysl v případech (69.3) a (69.4); v obou případech nechť $\mathbf{u}$ znamená vektor (69.2). Potom za předpokladu (69.3) znamená (69.13) *vektor* $\mathbf{u} + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots$; za předpokladu (69.4) znamená (69.13) *bod* $P + \mathbf{u} + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots$

70. ARITMETICKÉ BODY EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Měli bychom nyní zkoumat početní pravidla platná pro výrazy tvaru (69.1) a pro obecnější výrazy tvaru (69.13) vztahující se na ty případy, v nichž jsme těmto výrazům dali určitý geometrický smysl. Odvozování takových nových pravidel je však zbytečné, neboť jak se ukáže, jsou zahrnuta ve známých nám pravidlech o počítání s vektory.

Zaveďme nejprve několik definic. Dvojici (A, k) složenou z bodu A a z čísla k *různého od nuly* nazveme *vlastním aritmetickým bodem* (zkráceně vl. ar. bodem). Body v dosavadním smyslu nazveme pro jasnost *eukleidovskými body* (zkráceně e. body). *Polohou* vl. ar. bodu (A, k) nazveme e. bod A, *koeficientem* téhož vl. ar. bodu nazveme číslo k. Všimněme si, že podle naší definice koeficient vlastního ar. bodu je vždy různý od nuly. *Vl. ar. bod* $(A, 1)$, *jehož koeficient je roven jedné, považujeme za totožný s e. bodem* A.

Nevlastní aritmetický bod (zkráceně n. ar. bod) budiž prostě nový název pro vektor; *koeficientem* každého n. ar. bodu rozumíme číslo nula. *Polohou* n. ar. bodu $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ rozumíme směr $\{\mathbf{u}\}$; *nulový vektor* *nemá žádnou polohu.* Označme $\mathbf{W}_{m+1}$ množinu všech, vlastních i nevlastních, ar. bodů.

Předpokládejme, že v prostoru $\mathbf{E}_m$ je zavedena lineární soustava souřadnic

$$\langle P\,;\mathbf{e}_1\,,\,\ldots\,,\mathbf{e}_m\rangle\,. \tag{70.1}$$

Přiřadíme každému ar. bodu $m + 1$ čísel, která nazveme jeho *souřadnicemi* a které rozlišíme jako

nultou, první, ... , m-tou

souřadnici. Při tom nultou souřadnicí každého ar. bodu α bude jeho koeficient. Pokud se týče ostatních souřadnic, rozeznávejme dva případy podle toho, zda α je vl. ar. bod či vektor. Jestliže předně

$$\alpha = (a_1\,,\,\ldots\,,a_m) \tag{70.2}$$

je vektor, potom první až m-tou souřadnicí budou táž čísla $a_1\,,\,\ldots\,,a_m$, která nesla tento název dosud; nultou souřadnicí je číslo 0 a píšeme

$$\alpha = (0\,,a_1\,,\,\ldots\,,a_m)\,,$$

což tedy znamená totéž jako (70.2). Jestliže za druhé $\alpha = (A\,,k)$ je vlastní ar. bod, potom jeho první až m-tou souřadnicí rozumíme součin čísla k s první až m-tou souřadnicí e. bodu A; nultou souřadnicí ar. bodu α, jak bylo již poznamenáno, je koeficient k. Je-li $\alpha = (A\,,k)$, kde

$$A = [a_1\,,\,\ldots\,,a_m]\,, \tag{70.3}$$

píšeme

$$\alpha = (k\,,ka_1\,,\,\ldots\,,ka_m)\,.$$

Ježto podle předcházejícího ar. bod $(A\,,1)$ s koeficientem rovným jedné považujeme za totožný s e. bodem A, znamená

$$A = (1\,,a_1\,,\,\ldots\,,a_m)$$

totéž jako (70.3).

Tedy po zavedení lineární soustavy souřadnic (70.1) každý ar. bod má určitou nultou, první až m-tou souřadnici. Obráceně, jsou-li dána libovolně reálná čísla $a_0\,,a_1\,,\,\ldots\,,a_m$, existuje právě jeden ar. bod

$$(a_0\,,a_1\,,\,\ldots\,,a_m)\,,$$

který je vlastní pro $a_0 \neq 0$, nevlastní pro $a_0 = 0$. Jsou-li nyní

$$\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_m); \qquad \beta = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

libovolné dva ar. body, položíme

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \tag{70.4}$$

a je-li c libovolné reálné číslo, položíme

$$c\alpha = (ca_0, ca_1, \ldots, ca_m). \tag{70.5}$$

Na základě těchto definic *množina* $\boldsymbol{W}_{m+1}$ *všech ar. bodů je vektorový prostor dimense* $m + 1$; množina $\boldsymbol{V}_m$ všech vektorů (neboli n. ar. bodů) je ve $\boldsymbol{W}_{m+1}$ obsažená lineární soustava dimense m. Množina $\boldsymbol{E}_m$ všech e. bodů se skládá z těch ar. bodů, jejichž nultá souřadnice je rovna jedné; $\boldsymbol{E}_m$ *netvoří* lineární soustavu ve $\boldsymbol{W}_{m+1}$. E. bod P spolu s lineárně nezávislými vektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ tvoří basi vektorového prostoru $\boldsymbol{W}_{m+1}$; je to speciální base splňující tu podmínku, že nultá souřadnice je rovna jedné pro první prvek base a rovna nule pro ostatní prvky base.

Jsou-li nyní $X, X', \ldots$ libovolně dané e. body a jsou-li $c, c', \ldots$ libovolně daná reálná čísla, potom podle právě formulovaných definic výraz (69.1) znamená v každém případě určitý ar. bod a snadno se zjistí, že v případech (69.3) a (69.4) nově definovaný smysl výrazu (69.1) splývá s dříve definovaným jeho smyslem. Tím je zároveň potvrzeno, že skutečně, jak jsme uvedli na počátku tohoto článku, není třeba zkoumat početní pravidla pro výrazy tvaru (69.1), ježto tato pravidla jsou zahrnuta ve známých nám pravidlech pro počítání s vektory. Poznamenejme ještě, že definice součtu $A + \boldsymbol{u}$ bodu A s vektorem $\boldsymbol{u}$, podaná v prvním svazku, je zvláštním případem definice (70.4). Rovněž tak i dřívější popis smyslu výrazu (69.13), platný tehdy, platí-li (69.3) a (69.4), je zřejmě v souladu s nynějšími definicemi (70.4) a (70.5).

Důležité je dokázat, že definice (70.4) a (70.5) jsou nezávislé na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1). Především je zřejmé, že jestliže α je vektor, potom součin $c\alpha$ definovaný v (70.5) má týž smysl jako součin $c\alpha$ definovaný v prvém svazku. Jestliže v (70.5) je $\alpha = (A, k)$ vl. ar. bod, je patrné, že $c\alpha = \boldsymbol{o}$ v případě $c = 0$, $c\alpha = (A, ck)$ v případě $c \neq 0$. Tedy smysl součinu (70.5) je ve všech případech nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1). Přistupme k součtu (70.4). Jsou-li předně α, β vektory, potom součet $\alpha + \beta$ definovaný v (70.4) má týž smysl jako součet $\alpha + \beta$ definovaný v prvém svazku. Jestliže v (70.4) je $\alpha = (A, k)$ vl. ar. bod, $\beta = \mathbf{v}$ vektor, zjistí se snadno, že

$$\alpha + \beta = \left(A + \frac{1}{k}\mathbf{v}, k\right),$$

kde pravá strana je nezávislá na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1); podobně tomu je, jestliže α je vektor, β vl. ar. bod. Zbývá případ, že

$$\alpha = (A, k); \qquad \beta = (B, h)$$

jsou vl. ar. body. Zde jsou dvě možnosti. Jestliže předně $h + k = 0$, je patrné, že součet $\alpha + \beta$ znamená vektor $k(A - B)$. Jestliže za druhé $h + k \neq 0$, potom se snadno zjistí, že $\alpha + \beta$ znamená vl. ar. bod $(C, h + k)$, kde e. bod C je dán výrazem

$$C = \frac{k}{h + k}A + \frac{h}{h + k}B$$

se součtem koeficientů napravo rovným jedné. Tím je prokázáno, že smysl součtu (70.4) je ve všech případech nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1).

Z právě provedených úvah, které daly definicím (70.4) a (70.5) tvar nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic, bezprostředně plyne důležitý výsledek. Je-li prostor $\mathbf{E}_k$ vnořen do prostoru $\mathbf{E}_m$ a znamená-li $\mathbf{W}_{k+1}$ množinu všech ar. bodů prostoru $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{W}_{m+1}$ množinu všech ar. bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, potom jsou-li α, β prvky množiny $\mathbf{W}_{k+1}$, mají operace $\alpha + \beta$, $c\alpha$ týž význam v prostoru $\mathbf{W}_{k+1}$ jako v prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$. Z toho plyne, že $\mathbf{W}_{k+1}$ *je lineární soustava vektorového prostoru* $\mathbf{W}_{m+1}$. Totéž plyne ostatně i přímo z původních definic (70.4) a (70.5), volíme-li lineární soustavu souřadnic (70.1) v $\mathbf{E}_m$ tak, aby bylo

$$\mathbf{E}_k = \{P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}.$$

Poznamenejme ještě, že ježto jsme vl. bod $(A, 1)$ ztotožnili s e. bodem A, plyne z definice (70.5) pro libovolný vl. ar. bod (A, k), že

(70.6) $$(A\,,\,k) = kA\,.$$

V dalším tudíž označení $(A\,,\,k)$ pro vl. ar. bod je nepotřebné.

71. POJEM PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Úvahy předcházejících dvou článků jsou početním podkladem pro zavedení pojmu projektivního prostoru, který hrál velmi důležitou úlohu v historii geometrie. Ačkoli pojem projektivního prostoru dávno ztratil své někdejší dominující postavení, je stále ještě beze sporu jedním z nejvýznamnějších geometrických pojmů.

Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$. Nazveme *projektivním rozšířením* prostoru $\mathbf{E}_m$ a označíme $\overline{\mathbf{E}}_m$ množinu složenou jednak z bodů *prostoru* $\mathbf{E}_m$, které jako v předcházejícím článku nazveme *eukleidovskými body* (e. body), jednak ze *směrů prostoru* $\mathbf{E}_m$, t. j. z lineárních soustav dimense 1 obsažených v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, které nazveme *úběžné body*. Společný název, který zavedeme pro eukleidovské i pro úběžné body, tedy pro všecky prvky prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$, bude *geometrické body* (zkráceně g. body). Často se také říká e. bodům *body v konečnu*, úběžným bodům *body v nekonečnu*. Posléze jsou v literatuře běžné také tyto názvy: *vlastní geometrický* bod (zkráceně vl. g. bod) místo e. bod, *nevlastní geometrický bod* (zkráceně n. g. bod) místo úběžný bod.

Tyto poslední názvy naznačují souvislost s úvahami předcházejícího článku, kde jsme zavedli vlastní i nevlastní *aritmetické* body; nechť opět $\mathbf{W}_{m+1}$ znamená množinu všech (vlastních i nevlastních) ar. bodů. Z našich definic plyne ihned, že *poloha každého vl. ar. bodu je vl. g. bod*; obráceně pak každý vl. g. bod je polohou nekonečně mnoha vl. ar. bodů, které se navzájem liší pouze svými koeficienty; je-li A jeden z těchto vl. ar. bodů, potom všecky mají tvar cA, kde c probíhá všechna reálná čísla různá od nuly. Podobně poloha každého n. ar. bodu neboli vektoru, s výjimkou nulového vektoru, který nemá žádnou polohu, je n. g. bod; obráceně každý n. g. bod je polohou nekonečně mnoha n. ar. bodů (nenulových vektorů); je-li $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ jeden z nich, potom všecky mají tvar $c\,.\,\mathbf{v}$, kde c opět probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. Každý aritmetický bod (ať vlastní či nevlastní), jehož polohou je určitý geometrický bod, nazveme *aritmetickým zástupcem* (ar. zástupcem) tohoto g. bodu. Početní důkazy geometrických vět se provádějí tak, že každý g. bod nahradíme nějakým jeho ar. zástupcem (voleným zpravidla libovolně, ale někdy je výhodná nějaká speciální volba ar. zástupce).

Je však velmi účelné zaujmout abstraktnější stanovisko. Budiž dán vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ konečné dimense $m + 1$ s nulovým vektorem $\mathbf{o}$, při čemž $m \geq 1$; prvky prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ nazveme *aritmetické body* (ar. body). Nazveme *projektivním prostorem dimense m* nebo *m-rozměrným projektivním prostorem* a označíme $\mathbf{P}_m$ množinu prvků, které nazveme *geometrické body* (zkráceně g. body) a které jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny lineárním soustavám $\{X\}$ dimense jedna obsaženým ve $\mathbf{W}_{m+1}$; zpravidla můžeme přímo ztotožnit g. body s takovými lineárními soustavami $\{X\}$. Každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$ jednoznačně určuje g. bod $\{X\}$, který nazveme *polohou* ar. bodu $X \neq \mathbf{o}$. Tedy $\mathbf{o}$ nemá žádnou polohu, kdežto každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$ má určitou polohu. Je-li g. bod polohou ar. bodu X, takže $X \neq \mathbf{o}$, nazveme ar. bod X *aritmetickým zástupcem* (ar. zástupcem) tohoto g. bodu. Tedy každý g. bod $\{X\}$ má nekonečně mnoho ar. zástupců; je-li X jeden z nich, mají všichni tvar cX, kde c probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. *Velmi často pro stručnost mluvíme o g. bodu* X, čímž míníme g. bod, jehož ar. zástupcem je daný ar. bod $X \neq \mathbf{o}$. Je-li tedy $c \neq 0$ reálné číslo, potom g. bod X je totožný s g. bodem cX, ačkoli ar. bod X je různý od ar. bodu cX.

Mluvíme-li stručně o *bodě* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, máme ovšem na mysli g. bod náležející do $\mathbf{P}_m$.

Podle našich definic projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ m-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ je příkladem m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. V tomto případě máme dvoje g. body, vlastní a nevlastní; v obecném případě projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ rozlišování g. bodů na vlastní a nevlastní odpadá. Poznamenejme ještě, že v naší terminologii dimense projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ není rovna dimensi vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, nýbrž je o jedničku menší. Vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ nazveme *aritmetickým základem* (zkráceně ar. základem) projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$.

Projektivní přímkou nazveme jednorozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_1$, *projektivní rovinou* dvojrozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_2$; pro určitost nazveme přímku $\mathbf{E}_1$ a rovinu $\mathbf{E}_2$ ve smyslu prvního svazku *eukleidovskou přímkou* a *eukleidovskou rovinou*.

Basi vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, který je aritmetickým základem projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, nazveme *aritmetickou basí* (ar. basí) prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ar. base, je v označení prvého svazku

$$\mathbf{W}_{m+1} = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}.$$

Budeme psát

$$\mathbf{P}_m = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}_g ; \tag{71.1}$$

index g naznačuje, že $\mathbf{P}_m$ (na rozdíl od $\mathbf{W}_{m+1}$) se skládá z geometrických bodů.

Je-li dána určitá ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, potom každý ar. bod má tvar

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

s jednoznačně určenými čísly $x_0, x_1, \ldots, x_m$, jež jsou *souřadnicemi* ar. bodu X (vzhledem k dané ar. basi); píšeme

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_m).$$

Táž čísla $x_0, x_1, \ldots, x_m$ jsou také souřadnicemi *geometrického* bodu $\{X\}$ a nazývají se *homogenními souřadnicemi* tohoto g. bodu. G. bod je ovšem určen jednoznačně svými homogenními souřadnicemi, jež jsou podrobeny pouze té podmínce, že nejsou všecky současně rovny nule. Avšak g. bod nemá jednoznačně určené homogenní souřadnice, neboť *zároveň s čísly* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *jsou při libovolně zvoleném* $c \neq 0$ *také čísla* $cx_0, cx_1, \ldots, cx_m$ *homogenními souřadnicemi téhož g. bodu.*

O dimensi m projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ jsme předpokládali, že $m \geqq 1$; dimense ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ je $m + 1 \geqq 2$. Prostor $\mathbf{P}_m$ se podle definice skládá ze všech lineárních soustav dimense jedna obsažených ve $\mathbf{W}_{m+1}$ (= g. bodů). Někdy je účelné nevylučovat případy $m = 0$ a $m = -1$; chceme-li zahrnout tyto případy, mluvíme o *projektivním prostoru v širším smyslu.* Pro $m = 0$ máme projektivní prostor v širším smyslu $\mathbf{P}_0$, který obsahuje *jediný g. bod*; jeho ar. základ $\mathbf{W}_1$ je vektorový prostor dimense 1. Pro $m = -1$ máme projektivní prostor v širším smyslu $\mathbf{P}_{-1}$, což je prostě *prázdná množina* (neobsahuje vůbec žádný g. bod); ar. základ $\mathbf{W}_0$ obsahuje pouze nulový vektor.

72. LINEÁRNÍ PODPROSTORY PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ dimense m a budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ jeho ar. základ. Je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ lineární soustava dimense $k + 1 \geqq 2$ obsažená ve $\mathbf{W}_{m+1}$, je $\mathbf{W}_{k+1}$ vektorovým prostorem dimense $k + 1$ a tudíž $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem projektivního prostoru $\mathbf{P}_k$ dimense k, který je částí projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Pravíme, že projektivní prostor $\mathbf{P}_k$ je *vnořen* do projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ nebo že $\mathbf{P}_k$ je *lineární podprostor* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Podle věty 13.2 je $k \leqq m$, při čemž rovnost nastane pouze tehdy, je-li $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_{m+1}$, t. j. pouze tehdy, je-li $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_m$. Někdy je účelné nevylučovat případy $k = 0$ a $k = -1$; nevylučujeme-li tyto případy, mluvíme o lineárním podprostoru *v širším smyslu* dimense k. Lineárním podprostorem v širším smyslu dimense 0 je každý jednotlivý g. bod prostoru $\mathbf{P}_m$; lineární podprostor v širším smyslu dimense -1 je prázdná množina. Důležitý je případ $k = m - 1$; lineární podprostor dimense $m - 1$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ se nazývá *nadrovina* prostoru $\mathbf{P}_m$. Pro $m = 1$ nadrovina projektivní přímky $\mathbf{P}_1$ není nic jiného než g. bod přímky $\mathbf{P}_1$; pro $m = 2$ nadrovina projektivní roviny $\mathbf{P}_2$ není nic jiného než projektivní přímka vnořená do $\mathbf{P}_2$; pro $m = 3$ nadrovina projektivního prostoru $\mathbf{P}_3$ není nic jiného než projektivní rovina vnořená do $\mathbf{P}_3$.

Lineární nezávislost g. bodů projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ definujeme tak, že znamená lineární nezávislost jejich ar. zástupců ve vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž je patrné, že na bližší volbě těchto ar. zástupců nezáleží. Lineární nezávislost e. bodů definovaná v článku 18 je, jak se snadno dokáže, zvláštním případem lineární nezávislosti v právě definovaném smyslu. V projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$ nelze udat více než $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů; danými $k + 1$ $(1 \leqq k \leqq m)$ lineárně nezávislými g. body prochází právě jeden lineární podprostor dimense k (a žádný lineární podprostor nižší dimense); je to [viz (71.1)] lineární podprostor

$$\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}_g,$$

kde A_r $(0 \leqq r \leqq k)$ jsou libovolně volení ar. zástupci daných g. bodů.

Předpokládejme nyní, že vyšetřovaný projektivní prostor $\mathbf{P}_m = \overline{\mathbf{E}}_m$ je projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Je patrné, že množina všech úběžných bodů prostoru $\bar{E}_m$ je nadrovina prostoru $\bar{E}_m$, kterou nazveme *úběžnou nadrovinou* prostoru $\bar{E}_m$. Často je účelné nazvat úběžnou nadrovinu projektivního rozšíření $\bar{E}_m$ eukleidovského prostoru E_m stručně úběžnou nadrovinou eukleidovského prostoru E_m. Pro $m = 1$ úběžnou nadrovinou (v širším smyslu) eukleidovské přímky E_1 je jediný úběžný bod náležející do projektivního rozšíření eukleidovské přímky E_1; tento úběžný bod není ničím jiným nežli *směrem* e. přímky E_1. Pro $m = 2$ úběžná nadrovina e. roviny E_2 je její *úběžnou přímkou*; pro $m = 3$ úběžná nadrovina obyčejného prostoru E_3 je jeho *úběžnou rovinou.*

Projektivní rozšíření $\bar{E}_m$ eukleidovského prostoru E_m je důležitým příkladem projektivního prostoru dimense m. Jiným neméně důležitým příkladem projektivního prostoru dimense m je úběžná nadrovina eukleidovského prostoru E_{m+1}; tento příklad projektivního prostoru je pozoruhodný tím, že zde odpadá rozlišování g. bodů na „vlastní" a „nevlastní"; všecky g. body tohoto prostoru mají stejnou strukturu. V dalším poznáme řadu jiných důležitých projektivních prostorů a lépe si uvědomíme důležitost tohoto pojmu.

Budiž opět dán eukleidovský m-rozměrný prostor E_m a budiž dán jeho k-rozměrný lineární podprostor $(1 \leq k < m)$ ve smyslu článku 18. Zvolíme-li libovolně e. bod P náležející do E_k a basi $\{u_1, \ldots, u_k\}$ pro zaměření e. prostoru E_k, jest

$$E_k = \{P; u_1, \ldots, u_k\}.$$

V důsledku předcházejících definic je

$$\bar{E}_k = \{P, u_1, \ldots, u_k\}_g;$$

projektivní rozšíření $\bar{E}_k$ e. prostoru E_k vnořeného do e. prostoru E_m je tedy projektivním prostorem vnořeným do projektivního prostoru $\bar{E}_m$. G. body prostoru $\bar{E}_k$ jsou tedy jednak g. body prostoru E_k (vlastní g. body prostoru $\bar{E}_k$), jednak směry obsažené v E_k (nevlastní g. body prostoru $\bar{E}_k$). Tedy projektivní rozšíření $\bar{E}_k$ lineárního podprostoru E_k eukleidovského prostoru E_m je lineárním podprostorem projektivního prostoru $\bar{E}_m$. Takovéto lineární podprostory prostoru $\bar{E}_m$ nazveme *vlastními lineárními podprostory* prostoru $\bar{E}_m$.

Nevlastní lineární podprostor prostoru $\bar{E}_m$ je lineární podprostor úběžné nadroviny prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$. Je-li $\mathbf{V}_h$ $(2 \leq h \leq m)$ lineární soustava dimense h obsažená v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, je $\mathbf{V}_h$ ar. základem určitého nevlastního lineárního podprostoru dimense $h - 1$ prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ a každý nevlastní lineární podprostor prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ vznikne tímto způsobem.

Je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, může se stát, že $\mathbf{P}_k$ obsahuje pouze nevlastní g. body; v tomto případě $\mathbf{P}_k$ je zřejmě nevlastním lineárním podprostorem ve smyslu právě definovaném. V opačném případě zvolme libovolně e. bod P obsažený v $\mathbf{P}_k$; podle věty 13.1 je možné k P připojit dalších k ar. bodů Q_r $(1 \leq r \leq k)$ tak, že vznikne ar. base $P, Q_1, \ldots, Q_k$ pro P_k. Je-li c_r $(1 \leq r \leq k)$ koeficient ar. bodu Q_r, je patrné, že ar. bod $\mathbf{u}_r = Q_r - c_r P$ má koeficient nula, t. j. že $\mathbf{u}_r$ je vektor; zároveň je patrné, že $P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je nová ar. base pro $\mathbf{P}_k$. Z toho však snadno plyne, že $\mathbf{P}_k$ je projektivní rozšíření lineárního podprostoru

$$\mathbf{E}_k = \{P\,;\, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Tudíž $\mathbf{P}_k$ je vlastní lineární podprostor prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ ve smyslu definovaném výše.

Tím je zjištěno, jaké jsou lineární podprostory projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Jsou to jednak lineární podprostory úběžné nadroviny prostoru $\mathbf{E}_m$, které obsahují pouze úběžné body, jednak to jsou projektivní rozšíření lineárních podprostorů eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$.

73. SPOJENÍ A PRŮNIK DVOU LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Buďtež nyní $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ dva lineární podprostory projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ s dimensemi h, k, kde $1 \leq h < m$, $1 \leq k < m$, tedy $m \geq 2$. Buďtež $\mathbf{W}'_{h+1}$, $\mathbf{W}''_{k+1}$, $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základy projektivních prostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$, $\mathbf{P}_m$. $\mathbf{W}'_{h+1}$, $\mathbf{W}''_{k+1}$ jsou lineární soustavy vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$; dimense $\mathbf{W}'_{h+1}$, $\mathbf{W}''_{k+1}$, $\mathbf{W}_{m+1}$ jsou po řadě $h + 1$, $k + 1$, $m + 1$. V článku 24 jsme zavedli pojem průniku a spojení lineárních soustav: průnik lineárních soustav $\mathbf{W}'_{h+1}$, $\mathbf{W}''_{k+1}$ označme T_a, spojení S_a; jsou to lineární soustavy obsažené ve $\mathbf{W}_{m+1}$. Označme ještě T_g *průnik lineárních podprostorů* $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ prostoru $\mathbf{P}_m$, t. j. množinu všech g. bodů náležejících jak do $\mathbf{P}'_h$, tak i do $\mathbf{P}''_k$, dále S_g *spojení lineárních podprostorů* $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ prostoru $\mathbf{P}_m$; S_g je nejmenší lineární podprostor obsahující jako část jak $\mathbf{P}'_h$, tak i $\mathbf{P}''_k$. Při tom S_a je ar. základ projektivního prostoru S_g; má-li S_g dimensi s, má S_a dimensi $s + 1$. Podobně T_a je ar. základ pro T_g; má-li T_g dimensi t, má T_a dimensi $t + 1$. Na rozdíl od S_g můžeme o T_g tvrdit pouze, že je to lineární podprostor *v širším smyslu* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$: může býti $t = -1$, t. j. průnik T_g lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ může být prázdný; také může být $t = 0$, t. j. průnik T_g lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ může obsahovat jediný bod.

Čísla s, t vedle zřejmých nerovností

$$-1 \leqq t \leqq \min(h, k), \tag{73.1}$$

$$\max(h, k) \leqq s \leqq m \tag{73.2}$$

podle článku 24 splňují důležitou rovnost

$$t + s = h + k. \tag{73.3}$$

Při tom rovnosti $t = \min(h, k)$, $s = \max(h, k)$ buďto platí obě nebo neplatí žádná; platí pak, právě když jeden z obou lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ je částí druhého.

Budiž zejména $k = m - 1$, t. j. $\mathbf{P}''_k = \mathbf{P}''_{m-1}$ budiž nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$. Potom $s \geqq m - 1$, a jestliže prostor $\mathbf{P}'_h$ není obsažen v $\mathbf{P}''_{m-1}$, nemůže být $s = m - 1$, takže musí být $s = m$, načež podle (73.3) je $t = h - 1$. Tedy: *Přímka* $\mathbf{P}'_1$, *která neleží v nadrovině* $\mathbf{P}''_{m-1}$, *má s touto nadrovinou právě jeden společný bod. Lineární podprostor* $\mathbf{P}'_h$ *dimense* $h \geqq 2$, *který neleží v nadrovině* $\mathbf{P}''_{m-1}$, *protne tuto nadrovinu v lineárním podprostoru dimense* $h - 1$. Jednoduchý příklad na tyto věty dostaneme, je-li $\mathbf{P}_m$ projektivním rozšířením $\overline{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru a je-li $\mathbf{P}''_{m-1}$ úběžnou nadrovinou. Potom naše věty se redukují na známý fakt, že eukleidovská přímka má právě jeden úběžný bod a že úběžné body eukleidovského lineárního podprostoru $\mathbf{E}_h$ dimense $h \geqq 2$ tvoří v $\overline{\mathbf{E}}_m$ nevlastní lineární podprostor dimense $h - 1$. V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ přímka $\mathbf{E}'_1$, která neleží v nadrovině $\mathbf{E}''_{m-1}$, může mít k $\mathbf{E}''_{m-1}$ dvojí vzájemnou polohu: buďto je $\mathbf{E}'_1$ rovnoběžná s $\mathbf{E}''_{m-1}$ a nemá s $\mathbf{E}''_{m-1}$ žádný společný bod, nebo $\mathbf{E}'_1$ má s $\mathbf{E}''_{m-1}$ právě jeden společný bod. V obou případech má projektivní rozšíření $\overline{\mathbf{E}}'_1$ s projektivním rozšířením $\overline{\mathbf{E}}''_{m-1}$ právě jeden společný bod, který v prvém případě je úběžný, ve druhém eukleidovský. Podobně tomu je i když místo přímky $\mathbf{E}'_1$ uvažujeme lineární podprostor $\mathbf{E}'_h$ dimense $h \geqq 2$. Vidíme, že jestliže nerozlišujeme mezi eukleidovskými a úběžnými body, chová se projektivní prostor $\bar{\mathbf{E}}_m$ jednodušeji než eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$; to platí nejen při studiu otázky vzájemné polohy nadroviny k jinému lineárnímu podprostoru, nýbrž i při studiu obecnější otázky vzájemné polohy dvou lineárních podprostorů. Čtenář nechť znovu odvodí výsledky článku 25 o vzájemné poloze lineárních podprostorů $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ eukleidovského $\mathbf{E}_m$ na základě výsledku (73.1) až (73.3) týkajícího se projektivních rozšíření $\bar{\mathbf{E}}'_h$, $\bar{\mathbf{E}}''_k$. Při tom jest třeba rozeznávat dva případy podle toho, zda průnik T_a projektivních prostorů $\bar{\mathbf{E}}'_h$, $\bar{\mathbf{E}}''_k$ je či není obsažen v úběžné nadrovině prostoru $\mathbf{E}_m$.

Zde si všimněme pouze ještě případu $h = k = 1$, t. j. vzájemné polohy dvou přímek $\mathbf{P}'_1$, $\mathbf{P}''_1$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Zde je $t \leqq 1$ a je-li $\mathbf{P}'_1 \neq \mathbf{P}''_1$, je $t < 1$, t. j. buďto $t = 0$ nebo $t = -1$; podle (73.3) je v prvém případě $s = 2$, ve druhém $s = 3$. Tedy *dvě různé přímky projektivního prostoru leží vždy obě v trojrozměrném lineárním podprostoru; právě když mají společný bod* (jistě jediný), *leží obě přímky v téže rovině.* V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ dvě různé přímky ležící v téže rovině buďto byly rovnoběžné nebo měly společný bod; po přechodu k $\bar{\mathbf{E}}_m$ máme společný bod v obojím případě, v prvém případě úběžný, ve druhém eukleidovský.

74. PRINCIP DUALITY. Poznali jsme dosud v podstatě dva konkretní případy m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, totiž předně projektivní rozšíření eukleidovského m-rozměrného prostoru $\mathbf{E}_m$ skládající se jednak z bodů, jednak ze směrů prostoru $\mathbf{E}_m$, za druhé pak úběžnou nadrovinu eukleidovského $(m + 1)$-rozměrného prostoru $\mathbf{E}_{m+1}$ skládající se ze směrů prostoru $\mathbf{E}_{m+1}$. Již na str. 16 jsme poznamenali, že existuje řada jiných významných příkladů projektivních prostorů, s nimiž se později seznámíme. V tomto článku učiníme prvý velmi důležitý krok v tomto směru. Dokážeme totiž, že je-li dán libovolný m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$, potom množina všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, kterou označíme $\tilde{\mathbf{P}}_m$, tvoří nový m-rozměrný projektivní prostor, který nazveme *duálním* k původnímu projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$. To je velmi důležitá věc. Dokážeme-li totiž jakoukoli větu správnou pro každý m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$, můžeme tuto větu aplikovat na duální prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$; tím vznikne nová věta, zvaná *duální větou* k větě původní, kterou už není třeba zvlášť dokazovat, protože její důkaz je už obsažen v důkaze původní věty. V tom spočívá t.zv. *princip duality*, který velmi zjednodušuje vyšetřování projektivních prostorů.

Náš cíl je tedy dokázat, že množina všech nadrovin m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ tvoří nový m-rozměrný projektivní prostor. Pro $m = 1$ je to zřejmé, neboť pro $m = 1$ pojem nadroviny splývá s pojmem bodu, takže duální prostor $\tilde{\mathbf{P}}_1$ je prostě totožný s prostorem $\mathbf{P}_1$. Přes to následující úvahy platí i pro $m = 1$, nedávají ovšem pro $m = 1$ nic podstatně nového.

V článku 46 jsme zavedli lineární funkce vektoru a odvodili jsme jejich základní vlastnosti. Při tom jsme sice měli na mysli speciální vektorový prostor, který je zaměřením eukleidovského prostoru, ježto však dva vektorové prostory téže dimense jsou (viz článek 14) navzájem isomorfní, je patrné, že věty článku 46 jsou správné pro každý vektorový prostor konečné dimense. Užijeme jich nyní na vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ dimense $m + 1$, který je ar. základem projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ dimense m. Místo názvu lineární funkce vektoru zavedeme název *lineární forma*, což tedy je pravidlo f, které každému ar. bodu X přiřazuje reálné číslo $f(X)$, při čemž jednak

$$(74.1) \qquad f(X + Y) = f(X) + f(Y)$$

pro libovolné dva ar. body X, Y, jednak

$$(74.2) \qquad f(cX) = cf(X)$$

pro libovolný ar. bod X a pro libovolné reálné číslo c. Je-li ve $\mathbf{W}_{m+1}$ zavedena určitá base $A_0, A_1, \ldots, A_m$, potom pro

$$(74.3) \qquad X = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$$

máme

$$(74.4) \qquad f(X) = a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m .$$

Při tom jsou $a_0, a_1, \ldots, a_m$ určitá reálná čísla, zvaná *koeficienty* lineární formy. V algebře nazýváme lineární formou speciální funkci proměnných $x_0, x_1, \ldots, x_m$ tvaru $a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_m$ jsou dané konstanty. V geometrii je však výhodnější definovat lineární formu vlastnostmi (74.1) a (74.2) nezávislými na volbě base vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$.

Jako v článku 46 definujeme způsobem zcela na snadě ležícím součet dvou lineárních forem a součin reálného čísla s lineární formou. V důsledku těchto definic množina všech lineárních forem, kterou označíme $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, je vektorovým prostorem téže dimense $m + 1$, kterou má původní vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$. Nulovým vektorem ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ je ta lineární forma, která každému ar. bodu přiřazuje číslo 0 (neboli ta lineární forma, která při jedné a tudíž při kterékoli volbě base má všecky koeficienty rovné nule); označíme ji $\tilde{\mathbf{o}}$.

Poznámka. V článku 46 i v článku 49 v prvém svazku jsme užívali vodorovného pruhu (psali jsme $\bar{\mathbf{o}}$ místo $\tilde{\mathbf{o}}$). Ježto však nyní vodorovného pruhu jsme užili pro projektivní rozšíření eukleidovského prostoru, užíváme pro dualitu raději vlnitého pruhu.

Z věty 46.1 plyne, že je-li $f \neq \tilde{\mathbf{o}}$ lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$, existuje nadrovina ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ tak, že g. bod $\{X\}$ leží v ϱ, právě když ar. bod X splňuje rovnici $f(X) = 0$. Pravíme, že $f(X) = 0$ je *rovnice nadroviny* ϱ v projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$. Obráceně podle věty 46.1 ke každé nadrovině ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ existují lineární formy, které jsou v právě popsaném vztahu k ϱ; je-li f jedna z nich, jsou všecky tvaru $c \,.\, f$, kde c probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. A z toho právě plyne už správnost výše formulované základní věty, že *nadroviny prostoru* $\mathbf{P}_m$ *můžeme považovat za body nového projektivního prostoru*, který označíme $\tilde{\mathbf{P}}_m$, který nezveme *duálním prostorem* k $\mathbf{P}_m$ a který má touž dimensi jako původní prostor $\mathbf{P}_m$. Mimo to je patrné, že výše definovaná množina $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ všech lineárních forem ve $\mathbf{W}_{m+1}$ je ar. základem duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. V důsledku toho je účelné dát název *aritmetické nadroviny* (zkráceně ar. nadroviny) lineárním formám ve $\mathbf{W}_{m+1}$; pro jasnost budeme, je-li toho třeba, mluvit o *geometrických nadrovinách* (zkráceně g. nadrovinách), máme-li na mysli nadroviny prostoru $\mathbf{P}_m$ neboli body (g. body) duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Nazýváme tedy:

ar. body prvky množiny $\mathbf{W}_{m+1}$;
g. body prvky množiny $\mathbf{P}_m$;
ar. nadroviny prvky množiny $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$;
g. nadroviny prvky množiny $\tilde{\mathbf{P}}_m$.

Pro $m = 2$ mluvíme o ar. a g. *přímkách*, pro $m = 3$ o ar. a g. rovinách.

V předcházejícím jsme ar. nadroviny, t. j. prvky vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, úplně ztotožnili s lineárními formami ve $\mathbf{W}_{m+1}$. To však není podstatné a můžeme pod ar. nadrovinami rozumět také jiné objekty než lineární formy ve $\mathbf{W}_{m+1}$, jen když jsou tyto objekty vzájemně jednoznačně přiřazeny lineárním formám ve $\mathbf{W}_{m+1}$. Této poznámky můžeme užít k tomu, abychom vztah mezi oběma vektorovými prostory $\mathbf{W}_{m+1}$ a $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ a tudíž i vztah mezi oběma projektivními prostory $\mathbf{P}_m$ a $\tilde{\mathbf{P}}_m$ vyjádřili v takovém tvaru, aby v něm oba uvažované prostory vystupovaly úplně symetricky.

Předpokládejme nejprve, že byla zvolena nějaká base $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ a označme ar. bod (74.3) místo (74.3) určitěji

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_m)_b, \tag{74,3'}$$

kde index b naznačuje, že X je ar. *bod*, t. j. prvek prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$. Přiřadíme nyní uvažované basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ určitou basi vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ takto. Prostor $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ se skládá z lineárních forem ve $\mathbf{W}_{m+1}$ (nebo z jiných prvků vzájemně jednoznačně přiřazených takovým lineárním formám); lineární forma f ve $\mathbf{W}_{m+1}$ má však tvar (74.4) a je jednoznačně určena svými koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_m$; můžeme ji označit

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m)_r, \tag{74.5}$$

kde index r naznačuje, že běží o ar. *nadrovinu*, t. j. o prvek prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. Označme $f_0, f_1, \ldots, f_m$ ty lineární formy ve $\mathbf{W}_{m+1}$, které v ar. bodě (74.3') nabývají hodnot

$$f_0(X) = x_0, \qquad f_1(X) = x_1, \ldots, \qquad f_m(X) = x_m;$$

je patrné, že lineární formy $f_0, f_1, \ldots, f_m$ tvoří basi vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, kterou nazveme duální k dané basi prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, a že lineární forma (74.5) má tvar

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m.$$

Máme tedy dánu určitou basi jak ve vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{m-1}$, tak i ve vektorovém prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. Je-li

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_m)_b \tag{74.6}$$

libovolný prvek prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ a je-li

$$(74.7) \qquad \tilde{Y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m)_r$$

libovolný prvek ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, položíme

$$(74.8) \qquad d(X, \tilde{Y}) = x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_my_m .$$

Pomocí výrazu $d(X, \tilde{Y})$ je vztah mezi $\mathbf{W}_{m+1}$ a $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ vyjádřen způsobem naprosto souměrným vzhledem k oběma vektorovým prostorům. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi ar. nadrovinami (prvky vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$) a mezi lineárními formami v prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž ar. nadrovině

$$\tilde{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)_r$$

odpovídá ta lineární forma, která libovolnému prvku (74.6) prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ přiřazuje číslo

$$d(X, \tilde{A}) = a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m .$$

Stejně však také existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi ar. body (prvky vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$) a mezi lineárními formami v prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, při čemž ar. bodu

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_m)_b$$

odpovídá ta lineární forma, která libovolnému prvku (74.7) prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ přiřazuje číslo

$$d(A, \tilde{Y}) = a_0y_0 + a_1y_1 + \ldots + a_my_m .$$

Vztah mezi oběma vektorovými prostory $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, který jsme právě popsali užívajíce určité base pro $\mathbf{W}_{m+1}$ a base k ní duální pro $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, byl popsán způsobem nezávislým na volbě basí v článku 49. Charakteristické vlastnosti základního výrazu $d(X, \tilde{Y})$ jsou popsány ve (49.1) až (49.6), při čemž máme pouze ten formální rozdíl, že tehdy jsme užívali vodorovného pruhu, který jsme nyní nahradili vlnitým pruhem. Mimo to oba navzájem *duálně sdružené vektorové* prostory tehdy byly označeny $\mathbf{V}_m$, $\overline{\mathbf{V}}_m$, nyní $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$; jejich společná dimense tehdy byla označena m, nyní pak je $m + 1$. Připomeňme si, že věta 49.3 praví, že ke každé basi prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ máme právě jednu *duální basi* prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ tak, že platí (74.8).

75. LINEÁRNÍ PODPROSTORY DUÁLNÍHO PROSTORU. Budiž dán m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{P}}_m$ projektivní prostor k němu duální. Jako dosud ponecháme název bod (určitěji g. bod) pro prvky původního prostoru $\mathbf{P}_m$; prvky duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ jsou, jak víme, nadrovinami (určitěji g. nadrovinami) prostoru $\mathbf{P}_m$. Ponecháváme název nadrovina pro nadroviny prostoru $\mathbf{P}_m$, ale ovšem máme také nadroviny prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, které jsou prvky projektivního prostoru duálního k prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Ježto podle předcházejícího jsou prostory $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}_m$ *navzájem* duální, musí nadroviny prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ být ve vzájemně jednoznačném vztahu s body původního prostoru $\mathbf{P}_m$. Tento vzájemně jednoznačný vztah je nadmíru jednoduchý: ukazuje se, že nadrovina prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je prostě množina všech těch nadrovin původního prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí určitým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$, a že také obráceně, zvolíme-li v $\mathbf{P}_m$ libovolně bod, potom množina všech nadrovin (prostoru $\mathbf{P}_m$) procházejících zvoleným bodem tvoří nadrovinu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Tento výsledek je zvláštním případem $h = 0$ následujícího obecnějšího výsledku.

Budiž $-1 \leqq h \leqq m$ a budiž

$$h + k = m - 1 , \tag{75.1}$$

takže také $-1 \leqq k \leqq m$. Označme $\tilde{\mathbf{P}}_h$ libovolný lineární podprostor v širším smyslu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ dimense h; jako obvykle znamená $\mathbf{P}_k$ libovolný lineární podprostor v širším smyslu prostoru $\mathbf{P}_m$ dimense k. Dokážeme, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi všemi $\tilde{\mathbf{P}}_h$ na jedné straně a všemi $\mathbf{P}_k$ na straně druhé tak, že libovolně daný $\tilde{\mathbf{P}}_h$ je množina všech nadrovin (prostoru $\mathbf{P}_m$) procházejících každým bodem příslušného $\mathbf{P}_k$, a že také obráceně pro libovolně daný $\mathbf{P}_k$ množina všech nadrovin (prostoru $\mathbf{P}_m$) procházejících každým jeho bodem tvoří $\tilde{\mathbf{P}}_h$.

Pro

$$h = -1 \quad \text{je} \quad k = m , \quad \text{tedy} \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_m ;$$

$\tilde{\mathbf{P}}_{-1}$ znamená prázdnou množinu a skutečně množina všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ procházejících každým bodem tohoto prostoru $\mathbf{P}_m$ je prázdná. Pro $h = m$ je $k = -1$, $\tilde{\mathbf{P}}_h = \tilde{\mathbf{P}}_m$; $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je množina obsahující *každou* nadrovinu prostoru $\mathbf{P}_m$ a skutečně můžeme tvrdit, že zcela libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$ prochází všemi body prostoru $\mathbf{P}_k$, neboť $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{-1}$ je prázdná množina, která vůbec žádných bodů nemá.

Budiž tedy $0 \leqq h \leqq m - 1$, takže také $0 \leqq k \leqq m - 1$. Budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ ar. základ prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, takže $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ jsou dva duálně sdružené vektorové prostory společné dimense $m + 1$. Podle předcházejícího máme pro každý prvek X prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ (ar. bod) a pro každý prvek $\tilde{Y}$ prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ (ar. nadrovinu) definováno číslo $d(X, \tilde{Y})$, při čemž z úvah článku 74 je snadno patrný ten základní fakt, že pro $X \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \tilde{\mathbf{o}}$ je $d(X, \tilde{Y}) = 0$, *právě když bod* $\{X\}$ *leží v nadrovině* $\{\tilde{Y}\}$ neboli, což je totéž, *právě když nadrovina* $\{\tilde{Y}\}$ *prochází bodem* $\{X\}$.

Nyní podle článku 72 každý $\mathbf{P}_k$ má za ar. basi určitou lineární soustavu $\mathbf{W}_{k+1}$ dimense $k + 1$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ a obráceně každá taková lineární soustava je ar. basí určitého $\mathbf{P}_k$. Podobně ovšem i každý $\tilde{\mathbf{P}}_h$ má za ar. basi určitou lineární soustavu $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ dimense $h + 1$ vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ a obráceně každá taková lineární soustava je ar. basí určitého $\tilde{\mathbf{P}}_h$. Avšak z vět 49.5 a 49.6 (ve kterých ovšem číslo m musíme nyní nahradit číslem $m + 1$) vyplývá, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi všemi $\mathbf{W}_{k+1}$ na jedné straně a všemi $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ na straně druhé tak, že při daném $\mathbf{W}_{k+1}$ je $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ množinou všech těch ar. nadrovin $\tilde{Y}$, pro něž $d(X, \tilde{Y}) = 0$ platí pro všecky ar. body X náležející do $\mathbf{W}_{k+1}$, a obráceně při daném $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ je $\mathbf{W}_{k+1}$ množinou všech těch ar. bodů X, pro něž $d(X, \tilde{Y}) = 0$ platí pro všecky ar. nadroviny $\tilde{Y}$ náležející do $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$. Stačí nyní si připomenout význam rovnice $d(X, \tilde{Y}) = 0$, abychom si uvědomili, že v tom je obsažen důkaz výše formulovaného vzájemně jednoznačného vztahu mezi všemi $\mathbf{P}_k$ na jedné straně a všemi $\tilde{\mathbf{P}}_h$ na straně druhé.

Lineární podprostor (v širším smyslu) projektivního ptostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k danému projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *duálním podprostorem* (v širším smyslu) prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy každý duální podprostor v širším smyslu $\tilde{\mathbf{P}}_h$ dimense h prostoru $\mathbf{P}_m$ je množina všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí určitým lineárním podprostorem v širším smyslu $\mathbf{P}_{m-h-1}$ dimense $m - h - 1$ prostoru $\mathbf{P}_m$; pravíme, že $\mathbf{P}_{m-h-1}$ je *vrcholem* duálního podprostoru $\tilde{\mathbf{P}}_h$, při čemž obráceně každý $\mathbf{P}_{m-h-1}$ je vrcholem právě jednoho $\tilde{\mathbf{P}}_h$. Jsou-li $\mathbf{P}'$,

$\mathbf{P}''$ dva lineární podprostory v širším smyslu prostoru $\mathbf{P}_m$ a jsou-li $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$ ty lineární podprostory duálního prostoru $\tilde{P}_m$, jejichž vrcholy jsou $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, je patrné, že $\tilde{\mathbf{P}}'$ je částí $\tilde{\mathbf{P}}''$, právě když $\mathbf{P}''$ je částí $\mathbf{P}'$; mimo to, jestliže dim znamená dimensi, je $\dim\tilde{\mathbf{P}}' \leqq \dim\tilde{\mathbf{P}}''$, právě když $\dim\mathbf{P}' \geqq \dim\mathbf{P}''$.

Buďtež nyní dány dva lineární podprostory $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$ prostoru $\mathbf{P}_m$; označme S spojení a T průnik podprostorů $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, takže také S, T jsou lineární podprostory (v širším smyslu) prostoru $\mathbf{P}_m$. Buďtež $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ ty duální podprostory (v širším smyslu), jejichž vrcholy jsou $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, S, T. Potom platí, že $\tilde{T}$ je spojení a že $\tilde{S}$ je průnik duálních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$. Neboť S je lineární podprostor nejvyšší dimense mezi těmi lineárními podprostory, které obsahují jako část jak $\mathbf{P}'$, tak i $\mathbf{P}''$. Podle předcházejícího tedy $\tilde{S}$ má nejvyšší dimensi mezi všemi těmi duálními podprostory v širším smyslu, které jsou obsaženy jako část jak v $\tilde{\mathbf{P}}'$, tak i v $\tilde{\mathbf{P}}''$, a to právě znamená, že $\tilde{S}$ je průnikem duálních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$. Že $\tilde{T}$ je jejich spojením, dokáže se úvahou zcela stejného typu.

76. DVOJPOMĚR. V tomto článku budeme vyšetřovat projektivní přímku $\mathbf{P}_1$. Nazveme stručně *čtveřicí* na přímce $\mathbf{P}_1$ čtyři v určitém pořadí dané a *navzájem různé* g. body přímky $\mathbf{P}_1$ a přiřadíme každé takové čtveřici určité reálné číslo, které označíme $(ABCD)$ a které nazveme *dvojpoměrem* čtveřice. Body čtveřice buďtež dány svými ar. zástupci A, B, C, D. Ježto $\{A\} \neq \{B\}$, jsou ar. body A, B lineárně nezávislé a tvoří tudíž ar. basi pro $\mathbf{P}_1$, takže existují reálná čísla u_1, u_2, v_1, v_2 tak, že

$$(76.1) \qquad C = u_1A + u_2B\,, \qquad D = v_1A + v_2B\,.$$

Podmínka, že g. body čtveřice jsou navzájem různé, je vyjádřena jednak lineární nezávislostí ar. bodů A, B, jednak ještě nerovnostmi

$$(76.2) \qquad u_1u_2v_1v_2 \neq 0\,, \qquad u_1v_2 \neq u_2v_1\,.$$

Můžeme tudíž položit

$$(76.3) \qquad (ABCD) = \frac{u_2v_1}{u_1v_2}$$

a máme

$$(76.4) \qquad 0 \neq (ABCD) \neq 1\,.$$

Snadno zjistíme, že číslo (76.3) se nezmění, jestliže u některého z daných čtyř g. bodů změníme jeho ar. zástupce. Neboť místo

$$u_1\,,\quad u_2\,,\quad v_1\,,\quad v_2 \tag{76.5}$$

máme

$$u_1 : k\,,\quad u_2\,,\quad v_1 : k\,,\quad v_2\,,$$

jestliže místo A zvolíme kA. Podobně jestliže místo B zvolíme kB, potom místo (76.5) máme

$$u_1\,,\quad u_2 : k\,,\quad v_1\,,\quad v_2 : k\,.$$

Jestliže místo C zvolíme kC, potom místo (76.5) máme

$$ku_1\,,\quad ku_2\,,\quad v_1\,,\quad v_2\,.$$

Jestliže místo D zvolíme kD, potom místo (76.5) máme

$$u_1\,,\quad u_2\,,\quad kv_1\,,\quad kv_2\,.$$

Je patrné, že při kterékoli z těchto čtyř změn číslo (76.3) zůstává nezměněno. Je tedy toto číslo jednoznačně určeno danou čtveřicí; bylo již řečeno, že je nazýváme dvojpoměrem čtveřice.

Víme, že pro dvojpoměr platí nerovnosti (76.4). Obráceně platí:

VĚTA 76.1. *Budtež dány na projektivní přímce* $\mathbf{P}_1$ *tři různé g. body* A, B, C *a budiž dáno reálné číslo* λ tak, že

$$0 \neq \lambda \neq 1\,. \tag{76.6}$$

Potom existuje na $\mathbf{P}_1$ *právě jeden g. bod* D *různý od všech tří daných g. bodů, pro který dvojpoměr* $(ABCD)$ *je roven* λ.

DŮKAZ. Zvolme libovolně ar. zástupce A, B, C. Ar. body A, B tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_1$ a existují čísla $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ tak, že $C = u_1A + u_2B$. Běží o to, určit čísla v_1, v_2 tak, aby platily nerovnosti (76.2) a aby bylo $u_2v_1 = \lambda u_1v_2$. Je patrné, že $v_2 \neq 0$ můžeme libovolně zvolit, načež $v_1 \neq 0$ je jednoznačně určeno; (76.2) platí podle (76.6). Píšeme-li $D = v_1A + v_2B$, platí (76.3), při čemž není sice jednoznačně určen ar. bod D, je však jednoznačně určen g. bod D.

Poznámka. V předcházejícím jsme volili ar. zástupce A, B, C libovolně. Je však patrné, že je můžeme volit tak, že

$$C = A + B\,, \tag{76.7}$$

načež $(ABCD) = \lambda$ pro

$$D = \lambda A + B\,. \tag{76.8}$$

Z definice dvojpoměru plyne snadno:

VĚTA 76.2. *Je-li A, B, C, D, E pět různých g. bodů na projektivní přímce, potom pro jejich dvojpoměry platí*

$$(ABCD) \,.\, (ABDE) = (ABCE)\,.$$

Dvojpoměr čtveřice je závislý na pořadí bodů, ze kterých se skládá čtveřice. Z definice je přímo patrné, že

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)}\,, \tag{76.9}$$

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}\,. \tag{76.10}$$

Dále uvažme, že ze (76.1) plyne

$$B = -\frac{u_1}{u_2} A + \frac{1}{u_2} C\,, \qquad D = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2} A + \frac{v_2}{u_2} C\,,$$

takže

$$(ACBD) = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 v_2}\,.$$

Porovnáme-li se (76.3), máme

$$(ACBD) = 1 - (ABCD)\,. \tag{76.11}$$

Vzorce (76.9) až (76.11) ukazují, jak se změní dvojpoměr čtveřice, jestliže vyměníme třetí bod se čtvrtým, nebo první s druhým, nebo druhý se třetím. Je-li $(ABCD) = \lambda$, dospějeme opětovným užitím těchto vzorců posléze k výsledku:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda\,, \tag{76.12}$$

$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \lambda\,, \tag{76.13}$$

$$(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{\lambda}\,, \tag{76.14}$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-\lambda}\,, \tag{76.15}$$

$$(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\,, \tag{76.16}$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,. \tag{76.17}$$

Je-li tedy λ hodnota dvojpoměru při určitém pořadí bodů, z nichž se skládá čtveřice, potom při všech možných 24 pořadích máme 6 zpravidla navzájem různých hodnot dvojpoměru:

$$(76.18) \qquad \lambda\,,\ 1-\lambda\,,\ \frac{1}{\lambda}\,,\ \frac{1}{1-\lambda}\,,\ \frac{\lambda-1}{\lambda}\,,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\,.$$

Při tom každá ze 6 hodnot (76.18) odpovídá čtyřem různým pořadím bodů ve čtveřici. Všimněme si těch čtyř pořadí (76.12), ve kterých dvojpoměr je roven λ. Všecka tato čtyři pořadí mají to společné, že čtveřice A, B, C, D je rozdělena na dvě dvojice:

$$(76.19) \qquad A\,,B\,;\quad C\,,D\,.$$

Při tom můžeme obě dvojice (77.19) mezi sebou vyměnit beze změny hodnoty dvojpoměru, t. j. na vzájemném pořadí obou dvojic nezáleží. Naproti tomu záleží na pořadí bodů uvnitř jednotlivé dvojice, a to tak, že beze změny hodnoty dvojpoměru můžeme v obou dvojicích zároveň změnit pořadí bodů, ze kterých se dvojice skládá.

Při tom jsme předpokládali, že všecka čísla (76.18) jsou navzájem různá. Ježto $0 \neq \lambda \neq 1$, zjistíme snadno, že některá z čísel (76.18) mohou splynout pouze tak, že buďto λ je rovné jednomu ze tří čísel

$$(76.20) \qquad -1\,,\quad 2\,,\quad \tfrac{1}{2}$$

nebo je

$$(76.21) \qquad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0\,.$$

Avšak rovnice (76.21) nemá reálné kořeny a ježto vyšetřujeme pouze reálné hodnoty, máme ten výsledek, že při všech možných změnách pořadí bodů ve čtveřici nabude dvojpoměr méně než 6 různých hodnot, právě když při některém pořadí je dvojpoměr roven jednomu ze tří čísel (76.20). Je-li tomu tak, je dvojpoměr roven jednomu ze tří čísel (76.20) při *každém* pořadí bodů čtveřice, a to tak, že každá z hodnot (76.20) platí právě pro osm různých pořadí. Zvláště důležitá jsou ta pořadí, u kterých dvojpoměr je roven -1. Je-li

$$(76.22) \qquad (ABCD) = -1\,,$$

pravíme, že g. body A, B, C, D tvoří *harmonickou čtveřici*. Pojem harmonické čtveřice je tedy závislý na pořadí bodů, ze kterých se čtveřice skládá. Je-li čtveřice harmonická při některém pořadí, je harmonická při právě osmi ze všech 24 možných pořadí bodů ve čtveřici. Společné všem těmto pořadím je to, že daná čtveřice je určitým způsobem rozdělena na dvě dvojice (76.19). Naproti tomu nezáleží na vzájemném pořadí bodů uvnitř některé dvojice, ani na vzájemném pořadí obou dvojic. V důsledku toho zavádíme pro (76.22) ještě jiný způsob vyjadřování: pravíme, že body C, D jsou *harmonicky sdruženy* vzhledem k bodům A, B nebo že bod D je harmonicky sdružen s bodem C vzhledem k bodům A, B. Správnost tohoto rčení zůstane tedy nedotčena, jestliže vyměníme mezi sebou body A, B, nebo jestliže vyměníme mezi sebou body C, D, nebo jestliže vyměníme mezi sebou obě dvojice (76.19).

Budiž nyní dána *eukleidovská* přímka E_1 a na ní tři různé e. body A, B, C. Potom existuje číslo t tak, že

$$A = C + t(B - C)$$

a je $0 \neq t \neq 1$. Vektor $\boldsymbol{u} = B - C$ je ar. zástupcem úběžného bodu na $\bar{\mathsf{E}}_1$. Je $B = C + \boldsymbol{u}$, $A = C + t\boldsymbol{u}$, takže podle definice dvojpoměru $(C\boldsymbol{u}AB) = t$ neboli podle (76.12): $(ABC\boldsymbol{u}) = t$, takže podle článku 27 je

$$(ABC\boldsymbol{u}) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}. \tag{76.23}$$

Jsou-li A, B, C, D čtyři různé e. body na e. přímce E_1, potom vedle (76.23) máme též

$$(ABD\boldsymbol{u}) = \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}},$$

takže podle věty (76.2) je

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{DA}}. \tag{76.24}$$

Zavedeme-li do (76.23) značku pro dělící poměr [viz (27.7)], máme

$$(ABC\boldsymbol{u}) = (C\,;A\,,B) \tag{76.23'}$$

a (76.24) zní

$$(ABCD) = \frac{(C\,;A\,,B)}{(D\,;A\,,B)}. \tag{76.24'}$$

Dvojpoměr čtveřice e. bodů je tudíž poměrem dvou dělících poměrů; to je důvodem pro název dvojpoměr.

Je-li C střed dvojice A, B, potom (76.23) dává $(ABC\mathbf{u}) = -1$. Platí tedy:

VĚTA 76.3. *Úběžný bod e. přímky AB a střed dvojice A, B jsou harmonicky sdruženy vzhledem k e. bodům A, B.*

77. ORIENTACE PROJEKTIVNÍ PŘÍMKY. V článcích 29 a 30 jsme zavedli pojem orientace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ tak, že tato orientace byla závislá pouze na *zaměření* $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Při tom bylo podstatné pouze to, že $\mathbf{V}_m$ je vektorový prostor dimense m, takže můžeme obecněji mluvit o orientaci libovolného netriviálního vektorového prostoru konečné dimense. Nyní ar. základ $\mathbf{W}_{m+1}$ m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ je vektorový prostor dimense $m+1$. V souhlase s citovanými články můžeme tedy zavést tyto definice. Jsou-li

$$(77.1) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_m; \qquad B_0, B_1, \ldots, B_m$$

dvě base prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ (neboli dvě ar. base prostoru $\mathbf{P}_m$), existují reálná čísla a_{rs} $(0 \leqq r, s \leqq m)$ tak, že

$$B_r = a_{r0}A_0 + a_{r1}A_1 + \ldots + a_{rm}A_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m .$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

je vždy různý od nuly; nazývá se *determinantem přechodu* od prvé ke druhé z ar. basí (77.1). O determinantech přechodu platí věty článku 29. Všecky ar. base prostoru $\mathbf{P}_m$ můžeme rozdělit na dvě třídy (viz počátek článku 30) tak, že dvě ar. base téže třídy jsou vždy *souhlasné*, t. j. determinant přechodu od jedné ke druhé ar. basi je kladný, kdežto dvě ar. base různých tříd jsou vždy *nesouhlasné*, t. j. determinant přechodu od jedné ke druhé ar. basi je záporný.

V souhlase s obdobnou definicí článku 30 je nasnadě definovat, že orientovat prostor $\mathbf{P}_m$ znamená vybrat jednu z obou právě zmíněných tříd, ar. base této třídy nazvat *kladné* a ar. base druhé třídy nazvat *záporné*. Naznačíme si důvod, proč taková orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ při sudém m není účelná. Přechodu od ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ k ar. basi $B_0, B_1, \ldots, B_m$ můžeme přiřadit transformaci vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, která ar. bod

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

převádí v ar. bod

$$X' = x_0B_0 + x_1B_1 + \ldots + x_mB_m .$$

S touto transformací vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ je sdružena transformace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, která g. bod $\{X\}$ převádí v g. bod $\{X'\}$; taková transformace prostoru $\mathbf{P}_m$ se jmenuje kolineace. Kolineace budeme podrobně studovat v následující kapitole. Nyní přechodu od ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ k ar. basi $-A_0, -A_1, \ldots, -A_m$ odpovídající kolineace není nic jiného než identická transformace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, ačkoli takový přechod při sudém m znamená změnu orientace. Pro lichá m naproti tomu se ukazuje, že naznačená definice orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ je účelná, a také jí užijeme v článku 83; ale pro liché $m > 1$ popis geometrického významu orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ přesahuje rámec této knihy a při studiu geometrického významu orientace se proto v následujícím omezíme na případ $m = 1$ projektivní přímky.

Budiž dána *orientovaná projektivní přímka* $\mathbf{P}_1$, což podle předcházejícího znamená, že ar. base přímky $\mathbf{P}_1$ jsou rozděleny na kladné a záporné tak, že je-li A_0, A_1 kladná ar. base, potom druhá ar. base

$$B_0 = aA_0 + bA_1 , \qquad B_1 = cA_0 + dA_1$$

je kladná, právě když determinant přechodu $ad - bc$ je kladný.

Jsou-li nyní na naší orientované přímce $\mathbf{P}_1$ dány tři g. body $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ (v určitém pořadí), definujeme *znamení* trojice $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, které označíme

$$\operatorname{sgn}(ABC) , \tag{77.2}$$

takto. Jestliže předně $\{A\} = \{B\}$, je číslo (77.2) rovné nule. Jestliže za druhé $\{A\} \neq \{B\}$, potom ar. body A, B tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_1$, o které můžeme předpokládati, že je kladná. Potom existují reálná čísla x, y tak, že $C = xA + yB$. Volíme-li jiné ar. zástupce αA,

βB , γC , kde ovšem $\alpha\beta\gamma \neq 0$ a mimo to $\alpha\beta > 0$, aby také ar. base αA , βB byla kladná, potom místo čísel x , y budeme mít čísla $\gamma x : \alpha$, $\gamma y : \beta$ a tedy místo součinu xy bude $k . xy$, kde číslo $k = \gamma^2 : \alpha\beta$ je kladné. Můžeme tedy definovat zcela jednoznačně, že číslo (77.2) je rovné: nule pro $xy = 0$, jedné pro $xy < 0$, minus jedné pro $xy > 0$. Z definice plyne:

VĚTA 77.1. *Splynou-li některé dva z g. bodů A , B , C , je číslo* (77.1) *rovné nule. Jsou-li g. body A , B , C navzájem různé, je číslo* (77.1) *rovné* ± 1.

Zřejmě je vždy

$$\operatorname{sgn}(BAC) = -\operatorname{sgn}(ABC) . \tag{77.3}$$

Dále je

$$\operatorname{sgn}(ACB) = -\operatorname{sgn}(ABC) , \tag{77.4}$$

což vyžaduje důkazu pouze pro ten případ, že g. body A , B , C jsou navzájem různé. Volme ar. body A , B tak, aby tvořily kladnou ar. basi a volme ar. bod C tak, aby bylo $C = xA + B$, takže také ar. body A , C tvoří kladnou ar. basi. Potom je $\operatorname{sgn}(ABC)$ rovné 1 pro $x < 0$, rovné -1 pro $x > 0$. Avšak $B = -xA + C$, takže $\operatorname{sgn}(ACB)$ je rovné 1 pro $x > 0$, rovné -1 pro $x < 0$. Z toho je patrná platnost (77.4). Ze (77.3) a (77.4) se zjistí postupně, že

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(ABC) = \operatorname{sgn}(BCA) = \operatorname{sgn}(CAB) = \\ &= -\operatorname{sgn}(ACB) = -\operatorname{sgn}(BAC) = -\operatorname{sgn}(CBA) . \end{aligned} \tag{77.5}$$

Porovnáme-li definici dvojpoměru s definicí čísla (77.2), vidíme ihned, že platí:

VĚTA 77.2. *Jsou-li A , B , C , D čtyři různé g. body přímky $\mathbf{P}_1$, je* $\operatorname{sgn}(ABC) = \operatorname{sgn}(ABD)$, *je-li dvojpoměr* $(ABCD)$ *kladný*, $\operatorname{sgn}(ABC) = -\operatorname{sgn}(ABD)$, je-li dvojpoměr $(ABCD)$ záporný.

Dále platí:

VĚTA 77.3. *Jsou-li A , B , C , D čtyři g. body přímky $\mathbf{P}_1$ a je-li* $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$, $\operatorname{sgn}(BCD) = 1$, *je také* $\operatorname{sgn}(ACD) = 1$.

DŮKAZ. Ježto $\operatorname{sgn}(ABD) \neq 0$, jsou g. body A , B , D navzájem různé. Ježto $\operatorname{sgn}(BCD) \neq 0$, je g. bod C různý od B i od D , je však také různý od A , neboť podle (77.3) je $\operatorname{sgn}(CBD) = -\operatorname{sgn}(BCD)$, takže $\operatorname{sgn}(ABD) \neq \operatorname{sgn}(CBD)$. Jsou tedy g. body A, B, C, D navzájem různé. Podle (77.5) je $\operatorname{sgn}(BDA) = 1$, $\operatorname{sgn}(BDC) = -1$, takže podle věty 77.2 dvojpoměr $(BDAC)$ je záporný. Podle (76.12) a (76.13) je $(CDAB) = 1 - (BDAC)$, takže $(CDAB) > 0$ a podle věty 77.2 je $\operatorname{sgn}(CDA) = \operatorname{sgn}(CDB)$. Podle (77.5) je však $\operatorname{sgn}(CDA) = \operatorname{sgn}(ACD)$, $\operatorname{sgn}(CDB) = \operatorname{sgn}(BCD)$ a ježto $\operatorname{sgn}(BCD) = 1$, je $\operatorname{sgn}(CDA) = 1$. Čtenář ostatně snadno dokáže větu 77.3 přímo bez užití věty 77.2.

Z definice plyne:

VĚTA 77.4. *Při změně orientace projektivní přímky číslo* (77.2) *se znásobí číslem* -1.

Budiž nyní dána *eukleidovská* přímka $\mathbf{E}_1$. Orientovat $\mathbf{E}_1$ ve smyslu článku 27 znamená rozdělit její nenulové vektory na kladné a na záporné tak, že je-li $\mathbf{u}$ kladný, je $x\mathbf{u}$ kladný, právě když $x > 0$. Předpokládejme, že $\mathbf{E}_1$ je orientována a zvolme na $\mathbf{E}_1$ e. bod A a kladný vektor $\mathbf{u}$. Potom dvojice ar. bodů A, $\mathbf{u}$ tvoří ar. basi pro projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_1$ naší e. přímky a prohlásíme-li tuto ar. basi za kladnou, je $\bar{\mathbf{E}}_1$ orientována. Tato orientace projektivní přímky $\bar{\mathbf{E}}_1$ je závislá pouze na dané orientaci eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, neboť vezmeme-li místo e. bodu A e. bod $B = A + z\mathbf{u}$ a místo kladného vektoru $\mathbf{u}$ kladný vektor $\mathbf{v} = x\mathbf{u}$, kde tedy $x > 0$, potom determinant přechodu od ar. base A, $\mathbf{u}$ k ar. basi B, $\mathbf{v}$ je roven x, je tedy kladný. Tedy dané orientaci $\mathbf{E}_1$ přísluší určitá orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ a je patrné, že obráceně orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ určuje orientaci $\mathbf{E}_1$, při které pro dva různé e. body vektor $B - A$ je kladný, právě když A, B je kladná ar. base pro $\bar{\mathbf{E}}_1$. Tedy orientace $\mathbf{E}_1$ a orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ si navzájem odpovídají a bez obavy z nedorozumění je můžeme ztotožnit.

78. PROJEKTIVNÍ INTERVALY. V tomto článku opět předpokládáme, že je dána projektivní přímka $\mathbf{P}_1$ a všecky vyšetřované body leží na $\mathbf{P}_1$.

Zvolme dva různé body $\{A\}$, $\{B\}$ a rozdělíme všecky ostatní body $\{X\}$ na dvě třídy tak, že do jedné třídy dáme všecky ty, pro něž ve vyjádření

$$X = x_1A + x_2B$$

obě čísla x_1, x_2 (různá od nuly, ježto g. bod X je různý od g. bodů A, B) mají totéž znamení, do druhé třídy pak ty, pro něž znamení čísel x_1, x_2 jsou navzájem opačná. Je zřejmé, že toto rozdělení na třídy je nezávislé na volbě ar. zástupců uvažovaných g. bodů. Jestliže body C, D náleží každý do jiné třídy, řekneme, že dvojice A, B *odděluje* bod C od bodu D. Z definice dvojpoměru je patrné, že platí:

VĚTA 78.1. *Dvojice A, B odděluje bod C od bodu D, právě když dvojpoměr* $(ABCD)$ je záporný.

Z věty 78.1 plyne podle (76.12):

VĚTA 78.2. *Jestliže dvojice A, B odděluje bod C od bodu D, potom dvojice C, D odděluje bod A od bodu B.*

Ze (76.12) až (76.17) plyne snadno:

VĚTA 78.3. *Čtyři různé body projektivní přímky lze právě jedním způsobem rozdělit na dvě dvojice tak, aby jedna* (podle věty 78.2 kterákoli) *dvojice oddělovala jeden od druhého body dvojice druhé.*

Porovnáme-li nynější definici oddělování s definicí oddělování na eukleidovské přímce vyslovenou v prvém svazku na str. 74, dostaneme:

VĚTA 78.4. *Jsou-li A, B, C tři různé body eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, potom bod C odděluje A od B na $\mathbf{E}_1$, právě když bod C spolu s úběžným bodem oddělují A od B na projektivním rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_1$.*

Jsou-li A, B dva různé g. body, nazveme *intervalem AB* množinu složenou z g. bodu A, z g. bodu B a ze všech těch dalších g. bodů přímky $\mathbf{P}_1$, které náležejí do jedné z obou tříd definovaných na počátku tohoto článku. Jsou tedy na projektivní přímce AB *dva* různé intervaly AB, které dohromady vyplní celou projektivní přímku a které mají společné pouze body A, B, jež nazýváme *krajními body* každého z obou intervalů AB. Každý jiný bod naší přímky náleží do jediného intervalu AB a pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.* Interval AB je jednoznačně určen teprve tehdy, jestliže vedle obou krajních bodů A, B je dán ještě jeden vnitřní bod C; můžeme nazvat *intervalem ACB* ten interval AB, jehož vnitřním bodem je bod C. Z věty 78.1 je patrné, že bod $\{X\} \neq \{C\}$ je vnitřním bodem intervalu ACB, právě když dvojpoměr $(ABCX)$ je kladný; je-li D bod přímky

$\mathbf{P}_1$, který nenáleží do intervalu ACB, potom X je vnitřním bodem tohoto intervalu, právě když dvojpoměr $(ABCX)$ je záporný.

Je-li C bod eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$ a je-li $\mathbf{u}$ úběžný bod téže přímky, plyne z věty 78.4, že intervaly $C\mathbf{u}$ na projektivní přímce $\overline{\mathbf{E}}_1$ vzniknou, jestliže polopřímky s počátkem C obsažené v přímce $\mathbf{E}_1$ rozšíříme o úběžný bod $\mathbf{u}$. Jsou-li A, B dva různé body eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, potom úsečka AB je jedním z obou intervalů AB. Neboť je-li $\mathbf{u}$ úběžný bod přímky $\mathbf{E}_1$ a je-li X e. bod různý od A i od B, potom podle (76.23) dvojpoměr $(ABX\mathbf{u})$ je záporný, právě když vektory $X - A$, $X - B$ jsou nesouhlasné, t. j. právě když X je vnitřním bodem úsečky AB.

Nyní si promluvíme o souvislosti pojmu intervalu s pojmem orientace projektivní přímky $\mathbf{P}_1$. Předpokládejme, že přímka $\mathbf{P}_1$ je orientována, takže pro každé tři body A, B, C je definováno znamení $\operatorname{sgn}(ABC)$. Je-li nyní D určitý bod přímky $\mathbf{P}_1$, označme $\mathbf{P}_1 - D$ množinu, která vznikne z množiny $\mathbf{P}_1$ odstraněním g. bodu D. Jsou-li X, Y dva body množiny $\mathbf{P}_1 - D$, položme

$$\operatorname{sgn}(X, Y) = \operatorname{sgn}(X, Y, D). \tag{78.1}$$

Z věty 77.3 plyne, že symbol $\operatorname{sgn}(X, Y)$ má vlastnosti (α), (β), (γ) vyslovené v článku 26, takže je jím určeno uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$, které nazveme *přirozeným uspořádáním* množiny $\mathbf{P}_1 - D$ příslušným dané orientaci přímky $\mathbf{P}_1$. Je patrné, že při změně orientace toto uspořádání přejde v uspořádání k němu opačné.

Všimněme si toho případu, že $\mathbf{P}_1 = \overline{\mathbf{E}}_1$ je projektivní rozšíření eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$ a že $D = \mathbf{u}$ je úběžný bod, takže $\mathbf{P}_1 - D = \mathbf{E}_1$. Víme (viz str. 34), že orientaci $\mathbf{P}_1$ odpovídá určitá orientace $\mathbf{E}_1$, které opět podle článku 27 odpovídá určité přirozené uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$. Dokážeme, že toto přirozené uspořádání splývá s přirozeným uspořádáním založeným na symbolu (77.2). Neboť nechť e. bod A leží před e. bodem B v přirozeném uspořádání ve smyslu článku 27. Můžeme předpokládat, že $\mathbf{u}$ je kladný vektor, takže $B = A + x\mathbf{u}$, kde $x > 0$. Avšak A, $\mathbf{u}$ je kladná ar. base pro $\mathbf{E}_1$, takže $\operatorname{sgn}(A\mathbf{u}B) = -1$ a tedy podle (77.4) $\operatorname{sgn}(AB\mathbf{u}) = 1$ neboli $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$,

t. j. A leží před B i ve smyslu přirozeného uspořádání definovaného pomocí (77.1).

Budiž nyní dán interval J na přímce $\mathbf{P}_1$. Ježto $\mathbf{P}_1$ je orientována, můžeme rozlišit krajní body intervalu J na *počáteční a koncový bod* tak, aby počáteční bod ležel před koncovým v přirozeném uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$, kde bod D zvolíme na přímce $\mathbf{P}_1$ tak, aby nenáležel do intervalu J. K této definici jsme oprávněni, neboť jsou-li D_1, D_2 dva různé body přímky $\mathbf{P}_1$, z nichž žádný nenáleží do intervalu J, a jsou-li A, B krajní body tohoto intervalu, potom podle definice intervalu dvojice A, B neodděluje bod D_1 od bodu D_2, takže podle věty 78.1 dvojpoměr (ABD_1D_2) je kladný, a tudíž podle věty 78.2 je $\operatorname{sgn}(ABD_1) = \operatorname{sgn}(ABD_2)$.

Jsou-li A, B dva různé body na přímce P_1, a jsou-li J_1, J_2 oba intervaly AB, zvolme vnitřní bod D_1 intervalu J_1 a vnitřní bod D_2 intervalu J_2. Podle definice intervalu dvojice A, B odděluje bod D_1 od bodu D_2, takže podle věty 78.1 dvojpoměr (ABD_1D_2) je záporný. Jestliže nyní na př. pro interval J_1 bod A je počátečním a bod B koncovým, je $\operatorname{sgn}(ABD_2) = 1$, ježto D_2 nenáleží do J_1. Podle věty 77.2 je potom $\operatorname{sgn}(ABD_1) = -1$, takže podle (77.3) je $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$ a ježto D_1 nenáleží do J_2, je pro interval J_2 bod A koncovým a bod B počátečním. Platí tedy

VĚTA 78.5. *Jsou-li A, B dva různé body orientované projektivní přímky $\mathbf{P}_1$, potom pro jeden z obou intervalů AB je A bodem počátečním, B bodem koncovým, pro druhý pak je obráceně A bodem koncovým, B bodem počátečním.*

Je-li D bod, který nenáleží do intervalu J, potom *přirozeným uspořádáním intervalu* J rozumíme to uspořádání, které je určeno přirozeným uspořádáním množiny $\mathbf{P}_1 - D$, jejíž částí je interval J. Především platí:

VĚTA 78.6. *V přirozeném uspořádání intervalu J je prvním jeho bod počáteční, posledním jeho bod koncový.*

Je ovšem třeba dokázat, že pojem přirozeného uspořádání intervalu J je nezávislý na volbě pomocného bodu D, že tedy smysl výroku „X je před Y“, kde X, Y jsou dva různé body intervalu J, je nezávislý na volbě bodu D. To plyne z věty 78.6 pro ten případ, že aspoň jeden z obou bodů X , Y je krajním bodem pro J ; případ, že oba body X , Y jsou vnitřními body intervalu J , je vyřízen následující větou.

VĚTA 78.7. *Budiž A počáteční, B koncový bod intervalu J na orientované projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Jsou-li C_1 , C_2 dva různé vnitřní body intervalu J , leží C_1 před C_2 v přirozeném uspořádání intervalu J , právě když dvojpoměr* (ABC_1C_2) je menší než 1.

Poznámka. Z věty 78.1 plyne, že dvojpoměr (ABC_1C_2) je kladný; podle (76.4) je $(ABC_1C_2) \neq 1$.

DŮKAZ. Přirozené uspořádání intervalu J je určeno přirozeným uspořádáním množiny $\mathbf{P}_1 - D$, kde D je bod zvolený mimo interval J . Při vhodné volbě ar. zástupců bude

$$D = A - B . \tag{78.2}$$

Ježto $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$, je při této volbě A , B kladná ar. base. Pro každý vnitřní bod C intervalu J je $\operatorname{sgn}(ABC) = -1$, takže při vhodné volbě ar. zástupce je $C = A + xB$, $x > 0$. Buďtež nyní

$$C_1 = A + x_1B , \qquad C_2 = A + x_2B \tag{78.3}$$

dva různé vnitřní body intervalu J , takže

$$x_1 > 0 , \qquad x_2 > 0 , \qquad x_1 \neq x_2 . \tag{78.4}$$

Podle definice dvojpoměru je

$$(ABC_1C_2) = x_1 : x_2 . \tag{78.5}$$

Nyní ze (78.2) a (78.3) plyne

$$(x_1 - x_2)D = -(1 + x_2)C_1 + (1 + x_1)C_2 ,$$

takže podle (78.4) číslo $\operatorname{sgn}(C_1C_2D)$ je rovné $+1$ nebo -1 podle toho, zda C_1 , C_2 je kladná či záporná ar. base. Avšak determinant přechodu od kladné ar. base A , B k ar. basi C_1 , C_2 podle (78.3) je $x_2 - x_1$, což podle (78.4) a (78.5) je kladné, právě když $(ABC_1C_2) < 1$. Tedy $\operatorname{sgn}(C_1C_2D) = 1$, právě když $(ABC_1C_2) < 1$, čímž je vše dokázáno.

VĚTA 78.8. *Budiž A počáteční a B koncový bod intervalu J na orientované projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Budiž D bod nenáležející do J . Potom bod C je vnitřním bodem pro J , právě když C leží mezi A a B ve smyslu přirozeného uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$.*

DŮKAZ. Volme opět ar. zástupce A, B, D tak, aby platilo (78.2), načež A, B je kladná ar. base, ježto $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$. Potom bod C různý od A i od B při vhodné volbě ar. zůstupce má tvar $C = A + xB$, kde $x \neq 0$. Bod C je vnitřním bodem pro J, právě když $\operatorname{sgn}(ABC) = -1$, t. j. právě když $x > 0$. Máme tedy dokázat, že $x > 0$, právě když zároveň $\operatorname{sgn}(ACD) = 1$, $\operatorname{sgn}(CBD) = 1$ neboli [viz (77.5)], právě když zároveň $\operatorname{sgn}(DAC) = 1$, $\operatorname{sgn}(DBC) = -1$. Ježto však $D = A - B$, $C = A + xB$, jsou D, A; D, B kladné ar. base. Mimo to

$$C = -xD + (1 + x)A = D + (1 + x)B,$$

takže skutečně $x > 0$, právě když zároveň $\operatorname{sgn}(DAC) = 1$, $\operatorname{sgn}(DBC) = -1$.

Z věty 78.8 plyne snadno:

VĚTA 78.9. *Budiž C vnitřní bod intervalu J s krajními body A, B na projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Potom existuje interval J_1 s krajními body A, C a interval J_2 s krajními body B, C tak, že J_1, J_2 dohromady tvoří interval J, při čemž je C jediný společný bod intervalů J_1, J_2.*