Kolmost

In: Eduard Čech (author): Základy analytické geometrie. I. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1951. pp. 86–99.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402525

V

KOLMOST

31. KOLMOST SMĚRŮ. Budiž dán prostor $\mathbf{E}_m$, $m \geqq 2$. O dvou směrech $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ pravíme, že jsou navzájem *kolmé*, je-li $\mathbf{uv} = 0$. K této definici jsme oprávněni, neboť je-li $\{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}'\} = \{\mathbf{v}\}$, jest $\mathbf{u}' = a\mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = b\mathbf{v}$, $\mathbf{u}'\mathbf{v}' = ab \,.\, \mathbf{uv}$, $ab \neq 0$, takže $\mathbf{u}'\mathbf{v}' = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{uv} = 0$. Zřejmě:

VĚTA 31.1. *Žádný směr není sám k sobě kolmý.*

Ze (7.4) a (8.9) plyne:

VĚTA 31.2. *Je-li směr* $\{\mathbf{v}\}$ *kolmý na každý ze směrů*

(31.1) $$\{\mathbf{u}_1\}, \ldots, \{\mathbf{u}_k\},$$

je $\{\mathbf{v}\}$ *také kolmý na každý směr obsažený v lineární soustavě* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

VĚTA 31.3. *Ke každému směru* $\{\mathbf{u}\}$ *existuje* $(m-1)$*-směr* $\mathbf{W}_{m-1}$ *tak, že směr* $\{\mathbf{v}\}$ *je kolmý na* $\{\mathbf{u}\}$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\mathbf{v}\}$ *je obsažen ve* $\mathbf{W}_{m-1}$. Tato věta je zvláštním případem věty následující.

VĚTA 31.4. *Jsou-li směry* (31.1) *lineárně nezávislé* $(1 \leqq k \leqq m-1)$, *potom množina všech směrů kolmých na každý ze směrů* (31.1) *tvoří* $(m-k)$*-směr.*

DŮKAZ. Podle věty 15.2 můžeme najít orthonormální vektory

(31.2) $$\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_k$$

tak, že

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_k\}.$$

Podle věty 31.2 směr $\{\mathbf{w}\}$ je kolmý na všecky směry (31.1) tehdy a jenom tehdy, jestliže

(31.3) $$\mathbf{wu}'_r = 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k.$$

Podle věty 15.3 můžeme najít vektory

$$(31.4) \qquad \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-k}$$

tak, že vektory (31.2) a (31.4) dohromady tvoří orthonormální basi pro $\mathbf{E}_m$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-k}$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé podle věty 15.1, takže stačí dokázati, že (31.3) platí tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{w}$ je lineární kombinací vektorů (31.4). Avšak ke každému vektoru $\mathbf{w}$ existují čísla $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{m-k}$ tak, že

$$(31.5) \qquad \mathbf{w} = a_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}'_k + b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{m-k}\mathbf{v}_{m-k}.$$

Ježto vektory (31.2) a (31.4) dohromady jsou orthonormální, plyne ze (31.5), že

$$\mathbf{w}\mathbf{u}'_r = a_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k,$$

čímž je vše dokázáno.

Z vět 31.2 a 31.4 plyne: *Ke každému k-směru $\mathbf{W}_k$ ($1 \leqq k \leqq m - 1$) existuje $(m - k)$-směr $\mathbf{W}'_{m-k}$ tak, že směr $\{\mathbf{v}\}$ je kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\{\mathbf{v}\}$ náleží do $\mathbf{W}'_{m-k}$.* Tento $(m - k)$-směr $\mathbf{W}'_{m-k}$ nazveme *totálně kolmý* na k-směr $\mathbf{W}_{m-k}$. Ježto $m - (m - k) = k$, máme k $\mathbf{W}'_{m-k}$ opět totálně kolmý $\mathbf{W}^*_k$. Jestliže však směr $\{\mathbf{v}\}$ je obsažen ve $\mathbf{W}_k$, je $\{\mathbf{v}\}$ kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}'_{m-k}$, t. j. $\mathbf{W}_k$ je částí $\mathbf{W}^*_k$ a podle věty 13.2 je $\mathbf{W}^*_k = \mathbf{W}_k$. Tedy:

Věta 31.5. *Je-li $(m - k)$-směr $\mathbf{W}'_{m-k}$ totálně kolmý na k-směr $\mathbf{W}_k$, je také obráceně $\mathbf{W}_k$ totálně kolmý na $\mathbf{W}'_{m-k}$.* Můžeme tedy říci, že $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_{m-k}$ jsou *navzájem* totálně kolmé.

Pravíme, že k-směr $\mathbf{W}_k$ a h-směr $\mathbf{W}'_h$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže jejich průnik obsahuje pouze $\mathbf{o}$; pravíme, že $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_k$ jsou *lineárně závislé*, jestliže jejich průnik má dimensi větší než 0, t. j. existuje-li aspoň jeden směr obsažený zároveň ve $\mathbf{W}_k$ i ve $\mathbf{W}'_k$. Speciálně k-směr $\mathbf{W}_k$ a směr $\{\mathbf{u}\}$ jsou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže $\{\mathbf{u}\}$ jest obsažen ve $\mathbf{W}_k$. Dva směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže splynou; tak jsme definovali již v článku 19 (str. 54). Podle článku 24 jsou k-směr $\mathbf{W}_k$ a h-směr $\mathbf{W}'_h$ lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, jestliže jejich spojení má dimensi $k + h$, takže v prostoru $\mathbf{E}_m$ může tento případ nastati pouze tehdy, jestliže $k + h \leqq m$. Z věty 31.1 plyne, že jsou-li $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_{m-k}$ totálně kolmé, jsou lineárně nezávislé.

V prostoru E_2 (v rovině) existuje ke každému směru $\{u\}$ právě jeden kolmý směr, který je zároveň totálně kolmý na $\{u\}$.

V prostoru E_3 existuje ke každému směru $\{u\}$ právě jeden totálně kolmý dvojsměr W_2, který obyčejně nazýváme stručně kolmý na $\{u\}$. Směr $\{v\}$ je kolmý na směr $\{u\}$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\{v\}$ obsažen ve dvojsměru W_2 (totálně) kolmém na $\{u\}$. K danému dvojsměru W_2 existuje jediný kolmý směr $\{u\}$, t. j. směr totálně kolmý na W_2. Pravíme, že dvojsměr W_2' je kolmý na dvojsměr W_2, jestliže směr $\{u\}$ kolmý na W_2 jest obsažen ve W_2', takže k danému dvojsměru W_2 existuje nekonečně mnoho dvojsměrů k němu kolmých. Jestliže dvojsměr W_2' je kolmý na dvojsměr W_2, potom je také obráceně W_2 kolmý na W_2'. Neboť podle předpokladu W_2' obsahuje směr $\{u\}$ totálně kolmý na W_2; máme dokázati, že směr $\{v\}$ totálně kolmý na W_2' jest obsažen ve W_2. To je však zřejmé, neboť směr $\{v\}$ je podle své definice kolmý na každý směr obsažený ve W_2', takže $\{v\}$ je zejména kolmý na $\{u\}$ a z toho plyne, že $\{v\}$ náleží do dvojsměru totálně kolmého na $\{u\}$, t. j. do W_2.

Vraťme se k případu libovolného m. Budiž dán k-směr W_k ($1 \leqq k \leqq m - 1$). Pravíme, že *směr* $\{u\}$ *je kolmý na* W_k, je-li $\{u\}$ kolmý na každý směr obsažený ve W_k, t. j. jestliže $\{u\}$ náleží do $(m - k)$-směru totálně kolmého na W_k. Je-li $1 \leqq h \leqq m - k$, pravíme, že *h-směr* W_h' *je kolmý na* W_k, jestliže každý směr obsažený ve W_h' je kolmý na W_k neboli jestliže W_h' je částí $(m - k)$-směru totálně kolmého na W_k. Je-li $h = m - k$, existuje k danému W_k jediný kolmý h-směr, totiž totálně kolmý W_{m-k}'; je-li však $h < m - k$, existuje k danému W_k nekonečně mnoho kolmých h-směrů: jsou to právě ty h-směry, které jsou obsaženy v totálně kolmém W_{m-k}'. V každém případě, je-li W_h' kolmý na W_k a je-li $h + k \leqq m$, ježto W_h' musí býti obsažen v $(m - k)$-směru totálně kolmém na W_k, je každý směr obsažený ve W_k kolmý na W_h', t. j. nejen W_h' je kolmý na W_k, nýbrž také W_k je kolmý na W_h', neboli právě definovaná kolmost je vztah vzájemný. Z definice plyne snadno, že jestliže W_k a W_h' jsou v prostoru E_m navzájem kolmé, při čemž $h + k \leqq m$, a jestliže E_m je vnořen do E_n (tedy $m \leqq n$), jsou W_k a W_h' navzájem kolmé také v prostoru E_n.

Budiž dán k-směr W_k ($1 \leqq k \leqq m - 1$), ale budiž nyní $h + k > m$. Pravíme, že *h-směr* W_h' *je kolmý na* W_k *v prostoru* E_m, jestliže každý směr $\{\mathbf{u}\}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ kolmý na $\mathbf{W}_k$ náleží do $\mathbf{W}'_h$, t. j. jestliže $\mathbf{W}'_h$ obsahuje celý $(m-k)$-směr $\mathbf{W}''_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{W}_k$. Je-li tomu tak a je-li $\{\mathbf{v}\}$ směr kolmý na $\mathbf{W}'_h$, potom $\{\mathbf{v}\}$ je kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}'_h$ a ježto $\mathbf{W}''_{m-k}$ je částí $\mathbf{W}'_h$, je $\{\mathbf{v}\}$ kolmý na $\mathbf{W}''_{m-k}$ a tedy $\{\mathbf{v}\}$ náleží do k-směru totálně kolmého na $\mathbf{W}''_{m-k}$, t. j. do $\mathbf{W}_k$. Tím je dokázáno, že každý směr $\{\mathbf{v}\}$ kolmý na $\mathbf{W}'_h$ náleží do $\mathbf{W}_k$, t. j. je-li $\mathbf{W}'_h$ kolmý na $\mathbf{W}_k$, je též $\mathbf{W}_k$ kolmý na $\mathbf{W}'_h$. Tedy také v případě $h + k > m$ kolmost mezi $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ je vztah vzájemný.

Jsou-li $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ navzájem kolmé v prostoru $\mathbf{E}_m$ a je-li $h + k > m$, potom $\mathbf{W}'_h$ obsahuje celý $(m-k)$-směr $\mathbf{W}''_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{W}_k$. Avšak $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}''_{m-k}$ jsou lineárně nezávislé, t. j. jejich průnik obsahuje pouze $\mathbf{o}$, takže jejich spojení má podle článku 24 dimensi m, což je ostatně patrné i z důkazu věty 31.4; tím spíše má spojení lineárních soustav $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ dimensi m, takže *průnik* $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ podle článku 24 *má dimensi* $h + k - m > 0$. Z toho plyne, že $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ jsou lineárně závislé.

Jsou-li $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ navzájem kolmé v prostoru $\mathbf{E}_m$ a je-li $h + k > m$, potom jestliže $\mathbf{E}_m$ je vnořen do $\mathbf{E}_n$ $(m < n)$, *nemohou býti* $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ *navzájem kolmé v prostoru* $\mathbf{E}_n$. Při důkaze rozeznávejme dva případy. Je-li předně $h + k \leq n$, nejsou $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ navzájem kolmé v prostoru $\mathbf{E}_n$ proto, že jsou lineárně závislé. Je-li za druhé $h + k > n$, uvažme, že průnik $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ má podle předcházejícího dimensi $h + k - m$, kdežto kdyby $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}'_h$ byly kolmé v $\mathbf{E}_n$, musil by tento průnik míti dimensi $h + k - n$.

32. KOLMOST PŘÍMEK. O dvou přímkách p, q pravíme, že jsou navzájem *kolmé*, jsou-li jejich směry navzájem kolmé. Ježto tedy kolmost přímek závisí pouze na jejich směrech, platí:

VĚTA 32.1. *Jsou-li přímky p, q navzájem kolmé, jsou-li p, p' rovnoběžky a jsou-li q, q' rovnoběžky, jsou také přímky p', q' navzájem kolmé.*

Z věty 31.1 plyne:

VĚTA 32.2. *Dvě přímky navzájem kolmé nemohou býti rovnoběžné a tedy nemohou splynout.*

Jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_h$ dva lineární podprostory eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a je-li $\mathbf{W}_k$ zaměření $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{W}'_h$ zaměření $\mathbf{E}'_h$, pravíme, že $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ jsou navzájem *kolmé v prostoru* $\mathbf{E}_m$, jestliže $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ jsou navzájem kolmé v prostoru $\mathbf{E}_m$ ve smyslu definic článku 31. V případě $k + h = m$ jsou $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_{m-k}$ totálně kolmé a pravíme také, že $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_{m-k}$ jsou *totálně kolmé.* Jsou-li lineární podprostory $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ navzájem kolmé v $\mathbf{E}_m$, potom jestliže $\mathbf{E}_m$ je vnořen do $\mathbf{E}_n$, jsou v případě $h + k \leqq m$ prostory $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ také v prostoru $\mathbf{E}_n$ navzájem kolmé, ale v případě $h + k > m$ nemohou $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ býti v prostoru $\mathbf{E}_n$ navzájem kolmé. Na př. dvě roviny ($h = k = 2$), které jsou navzájem kolmé v obyčejném prostoru $\mathbf{E}_3$, přestanou býti navzájem kolmé, vnoříme-li $\mathbf{E}_3$ do eukleidovského prostoru vyšší dimense.

V každém případě následuje z naší definice, že jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_h$ navzájem kolmé, jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}^*_k$, rovnoběžné a jsou-li $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}'^*_h$ rovnoběžné, jsou také $\mathbf{E}^*_k$, $\mathbf{E}'^*_h$ navzájem kolmé.

Je-li dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ a mimo to libovolný bod B, potom zřejmě bodem B prochází právě jeden lineární podprostor $\mathbf{E}'_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{E}_k$. Mimo tento $\mathbf{E}'_{m-k}$ procházejí bodem B ještě další lineární podprostory kolmé na $\mathbf{E}_k$: Předně všecky lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$ dimensí $h \geqq 1, h < m - k$ procházející bodem B a obsažené v $\mathbf{E}'_{m-k}$ (tyto podprostory odpadnou, je-li $k = m - 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ nadrovina). Za druhé všecky lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$ dimensí $h \leqq \leqq m - 1$, $h > m - k$ procházející bodem B a obsahující $\mathbf{E}'_{m-k}$ jako část (tyto podprostory odpadnou, je-li $k = 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ přímka, a tyto podprostory přestanou býti kolmé na $\mathbf{E}_k$, vnoříme-li $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_n$) ($m < n$).

Kolmost libovolných lineárních podprostorů se dá převésti na kolmost přímek. Je-li dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ ($1 \leqq k \leqq m - 1$), potom přímky kolmé na $\mathbf{E}_k$ jsou ty přímky, které jsou kolmé na každou přímku obsaženou v $\mathbf{E}_k$; ostatně každá přímka, která je kolmá na k lineárně nezávislých přímek obsažených v $\mathbf{E}_k$, je kolmá na $\mathbf{E}_k$. Je-li dán libovolný bod B, potom všecky přímky jdoucí bodem B a kolmé na $\mathbf{E}_k$ vyplní lineární podprostor $\mathbf{E}'_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{E}_k$. Lineární podprostor $\mathbf{E}'_h$ ($h \neq m - k$) jdoucí bodem B je kolmý na $\mathbf{E}_k$: (1) v případě $h < m - k$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\mathbf{E}'_h$ obsažen v $\mathbf{E}'_{m-k}$; (2) v případě $h > m - k$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\mathbf{E}'_{m-k}$ obsažen v $\mathbf{E}'_h$; v případě (2) se kolmost poruší, vnoříme-li $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_n$ ($m < n$).

33. VZDÁLENOST BODU OD LINEÁRNÍHO PODPROSTORU. Budiž $\{A; \boldsymbol{u}\}$ daná přímka p a budiž B daný bod v prostoru $\mathbf{E}_m$, $m \geqq 2$. Ke směru $\{\boldsymbol{u}\}$ přímky p máme v prostoru $\mathbf{E}_m$ totálně kolmý $(m - 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-1}$; vektor $\boldsymbol{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\boldsymbol{uv} = 0$. Přímka q jdoucí bodem B je kolmá na p tehdy a jenom tehdy, jestliže její směr $\{\boldsymbol{v}\}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$. Je-li $m = 2$, je směr $\{\boldsymbol{v}\}$ jednoznačně určen, bodem B prochází jediná přímka q kolmá na přímku p, která protíná přímku p v určitém bodě P, zvaném *pata kolmice*. (Leží-li bod B na přímce p, splyne bod P s bodem B.) Je-li $m \geqq 3$, potom bodem B prochází nekonečně mnoho přímek kolmých na přímku p, ale jestliže bod B neleží na přímce p, potom *jediná* z těchto přímek je různoběžná s přímkou p; o takové přímce pravíme, že *kolmo protíná* přímku p a její průsečík P s přímkou p opět nazveme *patou kolmice*. Abychom dokázali učiněná tvrzení, uvažme, že ježto p je přímka $\{A; \boldsymbol{u}\}$, musí býti

$$P = A + x\boldsymbol{u}.$$

Číslo x je třeba určiti tak, aby směr $\{B - P\}$ přímky q byl kolmý na směr $\{\boldsymbol{u}\}$. Avšak

$$B - P = B - A - x\boldsymbol{u}$$

a podmínka kolmosti zní podle (7.6)

$$\boldsymbol{u}(B - A) = x \,.\, |\boldsymbol{u}|^2,$$

čímž je číslo x jednoznačně určeno.

Předpokládejme opět, že bod B neleží na přímce p. Potom platí:

VĚTA 33.1. *Pata P kolmice na přímku p vedené bodem B má od bodu B menší vzdálenost než kterýkoli jiný bod přímky p.* Z tohoto důvodu se vzdálenost $\overline{BP}$ nazývá *vzdáleností bodu B od přímky p* (nebo přímky p od bodu B). Při důkaze můžeme předpokládati, že bod P splyne s bodem A (který jsme mohli na přímce p zvolit libovolně). Potom je $(B - A) \,.\, \boldsymbol{u} = 0$. Je-li nyní $C = A + x\boldsymbol{u}$ bod naší přímky různý od bodu A, takže $x \neq 0$, jest

$$|C - B|^2 = (B - A - x\boldsymbol{u})(B - A - x\boldsymbol{u}) = |B - A|^2 + |x\boldsymbol{u}|^2,$$

neboť $(B - A)\,\boldsymbol{u} = 0$. Ježto $x\boldsymbol{u} = C - A$, jest

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2, \tag{33.1}$$

při čemž $\overline{CA} > 0$, takže vskutku $\overline{BC} > \overline{BA}$. Rovnice (33.1) obsahuje známou *Pythagorovu větu.*

VĚTA 33.2. *Je-li d vzdálenost bodu B od přímky $\{A; \mathbf{u}\}$ a je-li $e > d$, potom existují na přímce $\{A; \mathbf{u}\}$ právě dva body C_1, C_2 ve vzdálenosti e od bodu B; pata kolmice vedené bodem B k přímce $\{A; \mathbf{u}\}$ je středem dvojice C_1, C_2.* Při důkaze můžeme opět předpokládati, že A je pata kolmice vedené bodem B k přímce $\{A; \mathbf{u}\}$, takže $d = \overline{AB}$; mimo to můžeme předpokládati, že $|\mathbf{u}| = 1$. Je-li $C = A + x\mathbf{u}$ bod naší přímky, je potom [viz (33.1)] $\overline{BC}^2 = d^2 + x^2$, takže ve vzdálenosti e od bodu B jsou na naší přímce body

$$C_1 = A + f\mathbf{u},\quad C_2 = A - f\mathbf{u},$$

kde $f = \sqrt{e^2 - d^2}$; zřejmě A je střed dvojice C_1, C_2. Dále platí:

VĚTA 33.3. *Nechť platí předpoklady a označení věty* 33.2. *Leží-li bod C uvnitř úsečky C_1C_2, jest $\overline{BC} < e$; jestliže však bod C přímky C_1C_2 nenáleží do úsečky C_1C_2, jest $\overline{BC} > e$.* Neboť pro $C = A + x\mathbf{u}$ je opět $\overline{BC}^2 = d^2 + x^2$; leží-li C uvnitř úsečky C_1C_2, je $|x| < f$, tedy $\overline{BC}^2 < d^2 + f^2 = e^2$; jestliže však C nenáleží do úsečky C_1C_2, je $|x| > f$, tedy $\overline{BC}^2 > e^2$.

Obecněji budiž dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ bod B a lineární podprostor $\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{W}_k\}$. Je-li nejprve $k = m - 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ nadrovina, potom existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jediný směr $\{\mathbf{v}\}$ kolmý na k-směr $\mathbf{W}_k$ a bodem B prochází jediná přímka $\{B; \mathbf{v}\}$ kolmá na $\mathbf{E}_k$, která podle konce článku 22 protne $\mathbf{E}_k$ v určitém bodě P zvaném *pata kolmice*. Je-li však $k \leq m - 2$, potom existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ nekonečně mnoho směrů kolmých na $\mathbf{W}_k$, které vyplní $(m - k)$-směr totálně kolmý na $\mathbf{W}_k$; je-li $\{\mathbf{v}\}$ kterýkoli z těchto směrů, potom přímka $\{B; \mathbf{v}\}$ prochází bodem B a je kolmá na $\mathbf{E}_k$. Jestliže bod B neleží v prostoru $\mathbf{E}_k$, potom všecky tyto přímky jsou mimoběžné s $\mathbf{E}_k$ až na jedinou z nich, která *kolmo protíná* prostor $\mathbf{E}_k$ v určitém bodě P zvaném opět *pata kolmice*. Abychom dokázali učiněné tvrzení, stačí uvážiti, že zřejmě existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jediný $\mathbf{E}_{k+1}$ obsahující jak daný $\mathbf{E}_k$ tak i bod B; tento $\mathbf{E}_{k+1}$ musí obsahovat každou přímku procházející bodem B a různoběžnou s $\mathbf{E}_k$, a v prostoru $\mathbf{E}_{k+1}$ leží jediná přímka procházející bodem B a kolmá na $\mathbf{E}_k$.

Je-li opět P pata kolmice na prostor $\mathbf{E}_k$ vedené bodem B, potom vzdálenost $\overline{BP}$ se jmenuje *vzdálenost bodu B od prostoru $\mathbf{E}_k$* (nebo prostoru $\mathbf{E}_k$ od bodu B), protože je-li Q kterýkoli jiný bod prostoru $\mathbf{E}_k$, je $\overline{BP} < \overline{BQ}$, neboť P je zřejmě pata kolmice na přímku PQ vedené bodem B.

Jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ dva různé rovnoběžné lineární podprostory téže dimense k (na př. dvě rovnoběžné přímky), potom vzdálenost kteréhokoli bodu prostoru $\mathbf{E}_k$ od prostoru $\mathbf{E}'_k$ a vzdálenost kteréhokoli bodu prostoru $\mathbf{E}'_k$ od prostoru $\mathbf{E}_k$ jsou si rovny; jejich společná hodnota se jmenuje *vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů* $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$. Budiž $\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{W}_k\}$, $\mathbf{E}'_k = \{B; \mathbf{W}_k\}$. Při libovolné volbě bodu A v prostoru $\mathbf{E}_k$ můžeme zvolit bod B v prostoru $\mathbf{E}'_k$ tak, že přímka AB je kolmá na $\mathbf{E}_k$ a tedy též na $\mathbf{E}'_k$. Je-li $\mathbf{u}$ libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}_k$, je potom $(B - A)\,\mathbf{u} = 0$. Avšak při libovolném x je

$$(B + x\mathbf{u}) - (A + x\mathbf{u}) = B - A,$$

tudíž také přímka, která spojuje bod $A + x\mathbf{u}$ s bodem $B + x\mathbf{u}$ je kolmá na $\mathbf{E}_k$ i na $\mathbf{E}'_k$, takže vzdálenost bodu $A + x\mathbf{u}$ od prostoru $\mathbf{E}'_k$ i vzdálenost bodu $B + x\mathbf{u}$ od prostoru $\mathbf{E}_k$ jsou rovny vzdálenosti $\overline{AB}$.

Buďtež nyní p, q dvě mimoběžky. Podle článku 20 jsou obě mimoběžky obsaženy v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_3$. Budiž $\{\mathbf{u}\}$ směr přímky p, $\{\mathbf{v}\}$ směr přímky q. Podle věty 31.4 existuje v prostoru $\mathbf{E}_3$ jediný směr $\{\mathbf{n}\}$ kolmý zároveň na $\{\mathbf{u}\}$ i na $\{\mathbf{v}\}$. Podle věty 21.1 existuje v $\mathbf{E}_3$ jediná příčka mimoběžek p, q se směrem $\{\mathbf{w}\}$; tato příčka se jmenuje *osa mimoběžek* p, q. Osa mimoběžek p, q protne p v bodě A, q v bodě B. Vzdálenost $\overline{AB}$ se jmenuje *vzdálenost mimoběžek* p, q, protože je menší než kterákoli jiná vzdálenost $\overline{XY}$, kde X leží na p, Y leží na q. Neboť budiž

$$X = A + x\mathbf{u},\ Y = B + y\mathbf{v}, \tag{33.2}$$

kde aspoň jedno z obou čísel x, y je různé od nuly. Ježto přímka AB je kolmá jak na p tak i na q, jest

$$(B - A)\,\mathbf{u} = 0,\ (B - A)\,\mathbf{v} = 0. \tag{33.3}$$

Podle (33.2) je však

$$Y - X = (B - A) - x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

takže podle (33.3)

$$\overline{XY}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 \,.\, |\mathbf{u}|^2 + y^2 \,.\, |\mathbf{v}|^2.$$

Ježto není zároveň $x = 0$, $y = 0$, jest $\overline{XY} > \overline{AB}$.

Čtenář sám nechť definuje a vyšetří vzdálenost libovolných dvou neprotínajících se lineárních podprostorů $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_h$ prostoru $\mathbf{E}_m$.

34. VNĚJŠÍ SOUČIN. Budiž dána base

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \tag{34.1}$$

prostoru $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$, kterou označíme $\mathbf{B}$. Jsou-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \tag{34.2}$$

libovolné vektory v počtu m, zavedli jsme v článku 29 číslo

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}}, \tag{34.3}$$

které je rovné determinantu

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1}, & \ldots, & u_{mm} \end{vmatrix}, \tag{34.4}$$

jestliže

$$\mathbf{u}_r = u_{r1}\mathbf{e}_1 + \ldots + u_{rm}\mathbf{e}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m. \tag{34.5}$$

Předpokládejme nyní, že base $\mathbf{B}$ je orthonormální. Potom je

$$\mathbf{u}_r\mathbf{u}_s = u_{r1}u_{s1} + \ldots + u_{rm}u_{sm} \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,\ 1 \leqq s \leqq m. \tag{34.6}$$

Užijme nyní věty o násobení determinantů podle řádků. (Tato věta vznikne z věty připomenuté v poznámce 2 na str. 81 překlopením determinantu (29.4) kolem hlavní diagonály, které, jak známo, nemá vlivu na hodnotu determinantu.) Podle této věty plyne ze (34.6), že druhá mocnina determinantu (34.4) je rovna determinantu

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{u}_m\mathbf{u}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_m\mathbf{u}_m \end{vmatrix}. \tag{34.7}$$

Tím je dokázáno, že *druhá mocnina čísla* (34.3) *má touž hodnotu pro všecky orthonormální base* $\mathbf{B}$.

Zvolme nyní *určitou orientaci prostoru* $\mathbf{E}_m$ a omezme $\mathbf{B}$ na *kladné orthonormální base.* Potom víme, že číslo (34.3) je rovné nule, jsou-li vektory (34.2) mezi sebou lineárně závislé, je kladné, tvoří-li vektory (34.2) kladnou basi pro $\mathbf{E}_m$, a je záporné, tvoří-li vektory (34.2) zápornou basí pro $\mathbf{E}_m$. Tedy za učiněných předpokladů je číslo (34.3) nezávislé na bližší volbě base $\mathbf{B}$ a proto je označíme jednodušeji

$$(34.8) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$$

a nazveme je *vnějším součinem* vektorů (34.2). Vnější součin má vlastnosti formulované ve větách 29.1 až 29.4, které si znovu vyslovíme:

VĚTA 34.1. *Jsou-li vektory* (34.2) *mezi sebou lineárně závislé, je vnější součin* (34.8) *roven nule a obráceně.*

VĚTA 34.2. *Při permutaci vektorů* (34.2) *vnější součin* (34.8) *zůstane nezměněn nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 34.3. *Jestliže jeden z vektorů* (34.2) *znásobíme číslem* a, *potom také vnější součin* (34.8) *se znásobí číslem* a.

VĚTA 34.4. *Budiž* $\mathbf{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ *jeden z vektorů* (34.2). *Je-li*

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r' + \mathbf{u}_r'' + \ldots,$$

potom vnější součin (34.8) *je roven součtu těch vnějších součinů, které z něho vzniknou, nahradíme-li vektor* $\mathbf{u}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{u}_r', \mathbf{u}_r'', \ldots$

VĚTA 34.5. *Vnější součin* (34.8) *je kladný, tvoří-li vektory* (34.2) *kladnou basi pro* $\mathbf{E}_m$, *záporný, tvoří-li vektory* (34.2) *zápornou basi pro* $\mathbf{E}_m$.

VĚTA 34.6. *Jest*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \cdot [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_1\mathbf{v}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{u}_m\mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_m\mathbf{v}_m \end{vmatrix}.$$

Tuto větu jsme dokázali pro $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m$. Obecný důkaz je však úplně stejný.

Jest míti na paměti, že vnější součin (34.8) je závislý na volbě orientace prostoru $\mathbf{E}_m$:

VĚTA 34.7. *Při změně orientace prostoru* $\mathbf{E}_m$ *každý vnější součin se znásobí číslem* -1.

Důkaz plyne snadno na př. z věty 29.5.

35. ORTHOGONÁLNÍ DOPLNĚK; VEKTOROVÝ SOUČIN. V orientovaném prostoru $\mathbf{E}_m$ ($m \geqq 2$) budiž dáno $m - 1$ vektorů

$$u_1, \ldots, u_{m-1}. \tag{35.1}$$

Předpokládáme-li na okamžik, že je v $\mathbf{E}_m$ dána kladná kartézská soustava souřadnic, ve které

$$u_r = (u_{r1}, \ldots, u_{rm}) \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$

potom podle známé Laplaceovy věty o determinantech existují čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ u_{m-1,1}, & \ldots, & u_{m-1,m} \\ x_1, & \ldots, & x_m \end{vmatrix} = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m \tag{35.2}$$

identicky v $x_1, \ldots, x_m$. Položme

$$a = (a_1, \ldots, a_m)$$

a nazveme vektor a *orthogonálním doplňkem* vektorů (35.1); budeme psáti

$$a = [u_1, \ldots, u_{m-1}]. \tag{35.3}$$

Definice vektoru a je pouze zdánlivě závislá na volbě soustavy souřadnic, neboť rovnice (35.2) můžeme napsat v invariantním tvaru

$$[u_1, \ldots, u_{m-1}x] = ax. \tag{35.2'}$$

Zřejmě však orthogonální doplněk a vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ je závislý na orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, neboť z věty 34.7 plyne podle (35.2′):

VĚTA 35.1. *Při změně orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ orthogonální doplněk vektorů* (35.1) *se znásobí číslem* -1.

Zřejmě platí:

VĚTA 35.2. *V prostoru $\mathbf{E}_2$ orthogonální doplněk vektoru (u_1, u_2) je vektor $(-u_2, u_1)$.*

VĚTA 35.3. *V prostoru $\mathbf{E}_3$ orthogonální doplněk vektorů (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) je vektor*

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Ve větách 35.2 a 35.3 se předpokládá kladná kartézská soustava souřadnic. Z věty 35.2 následuje:

VĚTA 35.4. *V prostoru* $\mathbf{E}_2$ *orthogonální doplněk orthogonálního doplňku vektoru* $\mathbf{u}$ *je vektor* $-\mathbf{u}$.

VĚTA 35.5. *Jsou-li vektory* (35.1) *mezi sebou lineárně závislé, je jejich orthogonální doplněk roven* $\mathbf{o}$ *a obráceně.*

DŮKAZ. Jsou-li vektory (35.1) mezi sebou lineárně závislé, potom podle věty 34.1 plyne ze (35.2′), že $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x}$, takže $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Jsou-li však vektory (35.1) mezi sebou lineárně nezávislé, lze k nim podle věty 13.1 připojit vektor $\mathbf{x}$ tak, že vznikne base pro $\mathbf{E}_m$, načež podle (35.2′) je $\mathbf{ax} \neq 0$, tedy $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$.

Následující tři věty plynou z vět 34.2 až 34.4:

VĚTA 35.6. *Při permutaci vektorů* (35.1) *orthogonální doplněk* (35.3) *zůstane nezměněn nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 35.7. *Jestliže jeden z vektorů* (35.1) *znásobíme číslem a, potom také orthogonální doplněk* (35.3) *se znásobí číslem a.*

VĚTA 35.8. *Budiž* $\mathbf{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m - 1)$ *jeden z vektorů* (35.1). *Je-li*

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r' + \mathbf{u}_r'' + \ldots,$$

potom orthogonální doplněk (35.3) *je roven součtu orthogonálních doplňků těch vektorů, které vzniknou ze* (35.1), *nahradíme-li vektor* $\mathbf{u}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{u}_r'$, $\mathbf{u}_r''$, ...

Dosadíme-li do (35.2′) za $\mathbf{x}$ jeden z vektorů (35.1), vyjde:

VĚTA 35.9. *Orthogonální doplněk vektorů* (35.1) *je orthogonální ke všem vektorům* (35.1), t. j.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r = 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m.$$

VĚTA 35.10. *Jsou-li vektory* (35.1) *mezi sebou lineárně nezávislé a je-li* $\mathbf{a}$ *jejich orthogonální doplněk, potom vektory*

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{a}$$

tvoří kladnou basi prostoru $\mathbf{E}_m$.

DŮKAZ. Dosadíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ do (35.2′), vyjde

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{a}] = |\mathbf{a}|^2 \tag{35.4}$$

a ježto $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ podle věty 35.5, jest $|\mathbf{a}|^2 > 0$.

VĚTA 35.11. *Leží-li vektory* (35.1) *v nadrovině* ϱ *prostoru* $\mathbf{E}_m$, *potom velikost jejich orthogonálního doplňku jest — až snad na znamení — rovna vnějšímu součinu vektorů* (35.1) *utvořenému v prostoru* ϱ.

DŮKAZ. Zvolme v $\mathbf{E}_m$ kladnou kartézskou soustavu souřadnic

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle$$

tak, aby

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{m-1} \rangle$$

byla kladná kartézská soustava souřadnic pro ϱ (což lze podle vět 15.2 a 15.3). Potom vektory (35.1) mají poslední souřadnici rovnou nule, vektor $\mathbf{a} = (0, \ldots, 0, a_m)$ má všecky souřadnice až na poslední rovny nule a (35.4) zní

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m-1,1}, & \ldots, & u_{m-1,m-1} \end{vmatrix} . a_m = a_m{}^2;$$

mimo to je $|\mathbf{a}| = \pm a_m$.

Orthogonální doplněk je — jak se snadno dokáže — jednoznačně charakterisován vlastnostmi vyslovenými ve větách 35.5, 35.9, 35.10 a 35.11.

V prostoru $\mathbf{E}_3$ máme orthogonální doplněk *dvou vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, jehož početní vyjádření v kladné kartézské soustavě souřadnic je popsáno ve větě 35.3. Pro orthogonální doplněk $[\mathbf{uv}]$ dvou vektorů v $\mathbf{E}_3$ zavedeme označení $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a název *vektorový součin* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Vyslovme znovu pro $m = 3$ vlastnosti výše formulované pro obecné m:

I. *Při změně orientace prostoru* $\mathbf{E}_3$ *vektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *změní znamení.*

II. *Jest* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou mezi sebou lineárně závislé.*

III. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *mezi sebou lineárně nezávislé, potom vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *tvoří kladnou basi prostoru* $\mathbf{E}_3$.

IV. *Leží-li vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *v rovině* ϱ *a je-li* c *jejich vnější součin vypočtený v rovině* ϱ, *jest*

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |c|.$$

$$(35.5)\qquad \mathbf{v}\times\mathbf{u} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v});$$

$$(35.6)\qquad (a\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(a\mathbf{v}) = a\,.\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v});$$

$$(35.7)\qquad \mathbf{u}\times(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_2);$$

$$(35.8)\qquad (\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\times\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1\times\mathbf{v})+(\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}).$$

Pro tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ prostoru $\mathbf{E}_3$ máme podle (35.2′):

$$(35.9)\qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.\,\mathbf{w} = [\mathbf{uvw}].$$

Dokažme ještě dva další vzorce (35.10) a (35.11):

$$(35.10)\qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{uw}\,.\,\mathbf{v} - \mathbf{vw}\,.\,\mathbf{u};$$

$$(35.11)\qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.\,(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}') = \begin{vmatrix} \mathbf{uu}', & \mathbf{uv}' \\ \mathbf{vu}', & \mathbf{vv}' \end{vmatrix}.$$

Oba vzorce jsou nezávislé na volbě kartézské soustavy souřadnic, pokud tato soustava je kladná. Můžeme ji zvolit tak, že

$$(35.12)\qquad \mathbf{u} = (u_1, 0, 0),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0),$$

načež podle věty 35.3 jest

$$(35.13)\qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v} = (0, 0, u_1v_2).$$

Opětným užitím věty 35.3 vyjde dále, že levá strana ve (35.10) je rovna

$$\begin{aligned} &(-u_1v_2w_2,\ u_1v_2w_1,\ 0) = \\ &= (u_1v_1w_1,\ u_1v_2w_1,\ 0) - (u_1v_1w_1 + u_1v_2w_2,\ 0,\ 0) = \\ &= u_1w_1\,.\,(v_1, v_2, 0) - (v_1w_1 + v_2w_2)\,.\,(u_1, 0, 0), \end{aligned}$$

což je rovné pravé straně ve (35.10), ježto podle (35.12)

$$\mathbf{uw} = u_1w_1,\quad \mathbf{vw} = v_1w_1 + v_2w_2.$$

Pravá strana ve (35.11) podle (35.12) je rovna

$$\begin{vmatrix} u_1u_1', & u_1v_1' \\ v_1u_1' + v_2u_2', & v_1v_1' + v_2v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1u_1', & u_1v_1' \\ v_2u_2', & v_2v_2' \end{vmatrix} =$$
$$= u_1u_1'v_2v_2' - u_1u_2'v_1'v_2 = u_1v_2(u_1'v_2' - u_2'v_1'),$$

což podle (35.13) je rovné levé straně ve (35.11), ježto podle věty 35.3 třetí souřadnice vektoru $\mathbf{u}'\times\mathbf{v}'$ je rovna $u_1'v_2' - u_2'v_1'$.