I

KARTÉZSKÁ FORMULE PRO VZDÁLENOST DVOU BODŮ

1. NÁZORNÝ POPIS KARTÉZSKÝCH SOUŘADNIC NA PŘÍMCE, V ROVINĚ A V PROSTORU. V analytické geometrii vyjadřujeme geometrické pojmy pomocí aritmetických pojmů a na tomto základě řešíme geometrické úlohy pomocí algebry. Výchozím základním pojmem bude pro nás pojem *vzdálenosti dvou bodů.* Body budeme značit velkými písmeny; vzdálenost bodů A, B budeme značit $\overline{AB}$. Jednou pro vždy budiž poznamenáno, že si myslíme zvolenu určitou *délkovou jednotku*, takže všecky vzdálenosti budeme vyjadřovat *nepojmenovanými čísly*.

Předpokládejme nejprve, že všecky vyšetřované body leží na určité přímce p. Zvolíme si na přímce p určitý bod, který nazveme *počátek.* Je-li X kterýkoli jiný bod na přímce p, je vzdálenost $\overline{PX}$ rovna určitému základnímu číslu ξ. Známe-li číslo ξ, není poloha bodu X určena jednoznačně, neboť pro každé kladné číslo ξ existují na přímce p *dva body* X takové, že $\overline{PX} = \xi$. Každému čtenáři je jistě známo, jak docílíme jednoznačnosti. Počátek P rozdělí naši přímku na dvě části (polopřímky); zvolíme jednu z obou částí a nazveme ji *kladnou* a druhou nazveme *zápornou.* Budiž nyní X libovolný bod přímky p různý od počátku P a budiž opět $\xi = \overline{PX}$. Leží-li bod X v kladné části přímky p, položíme $x = \xi$, leží-li však X v záporné části přímky p, položíme $x = -\xi$, v dosud vyloučeném případě, že bod X splyne s počátkem P, položíme $x = 0$. Bude tedy bez výjimky každému bodu X přiřazeno určité reálné číslo x tak, že

$$x = \pm \overline{PX}.$$

Číslo x se jmenuje *souřadnice* bodu X. Obráceně, zvolíme-li libovolné reálné číslo x, je na naší přímce p právě jeden bod, jehož souřadnice je rovna danému číslu x; tento bod označíme $[x]$ nebo X. Podobně na př. $[a]$ nebo A bude znamenat bod, jehož souřadnice je rovna reálnému číslu a, t. j. souřadnici bodu označíme malým písmenem a bod sám označíme buďto tak, že jeho souřadnici uzavřeme do lomené závorky nebo označíme bod příslušným velkým písmenem. Jsou-li

$$A = [a], \; B = [b]$$

kterékoli dva body naší přímky p, je jejich vzdálenost v každém případě dána známým vzorcem

$$\overline{AB} = |b - a|, \tag{1.1}$$

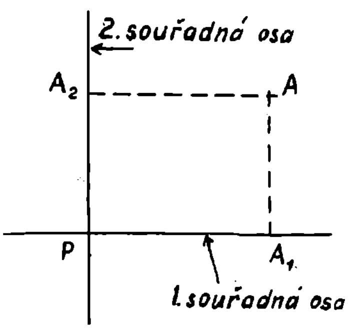
kde svislé příčky znamenají absolutní hodnotu. Právě popsaný způsob, který každému bodu X naší přímky p přiřazuje určitou souřadnici x; při čemž obráceně každé reálné číslo je souřadnicí právě jednoho bodu X a vzdálenost dvou bodů A, B je dána vzorcem (1.1), nazývá se *kartézská soustava souřadnic na přímce p.*

Dosud jsme předpokládali, že všecky vyšetřované body leží na určité přímce. Přistupme k případu, že všecky vyšetřované body leží v určité rovině ϱ. V rovině ϱ zvolíme dvě navzájem kolmé přímky, kterým říkáme *prvá a druhá osa souřadnic* a které se protnou v bodě P zvaném *počátek*. Každá osa souřadnic rozdělí rovinu ϱ na dvě části (poloroviny), z nichž jednu zvolíme za kladnou a druhou za zápornou. V praxi se obyčejně volí první osa souřadnic vodorovně, druhá svisle; vzhledem k vodorovné ose se za kladnou volívá ta část roviny, která je nahoře nad ní, vzhledem ke svislé ose ta část roviny, která je od ní napravo. Souřadnicemi bodu A jsou dvě reálná čísla a_1, a_2 určená takto (viz obr. 1). Bodem A vedeme kolmice na obě souřadnicové osy a jejich paty označíme A_1, A_2. Potom jest

$$a_1 = \pm \overline{PA_1}, \tag{1.2}$$

$$a_2 = \pm \overline{PA_2}. \tag{1.3}$$

Při tom ve vzorci (1.2) platí znamení plus nebo minus podle toho, zdali bod A (tedy také bod A_1) leží vzhledem ke druhé ose souřadnic v kladné



Obr. 1.

či záporné části roviny; leží-li bod A na druhé ose souřadnic, splyne bod A_1 s počátkem P, jest $a_1 = 0$ a na znamení v (1.2) nezáleží. Podobně ve vzorci (1.3) platí znamení plus nebo minus podle toho, zdali bod A (tedy také bod A_2) leží vzhledem k první ose souřadnic v kladné či záporné části roviny; leží-li bod A na první ose souřadnic, splyne bod A_2 s počátkem P, jest $a_2 = 0$ a na znamení v (1.3) nezáleží. Jestliže bod A splyne s počátkem P, splynou s P také oba body A_1, A_2 a jest $a_1 = 0$, $a_2 = 0$.

Obě právě definovaná reálná čísla a_1, a_2 jsou *souřadnice* bodu A a popsané pravidlo se jmenuje *kartézská soustava souřadnic v rovině* ϱ. Taková soustava souřadnic je tedy určena, zvolíme-li v rovině dvě navzájem kolmé přímky (první a druhou osu souřadnic) a vzhledem ke každé z nich kladnou část roviny. Každý bod A roviny ϱ má potom určité dvě souřadnice a_1, a_2, které označíme příslušným malým písmenem a navzájem rozlišíme indexy 1, 2. Obráceně jsou při zvolené kartézské soustavě souřadnic v rovině ϱ libovolná dvě reálná čísla a_1, a_2 souřadnicemi právě jednoho bodu A, který můžeme označit $[a_1, a_2]$, t. j. bod daný souřadnicemi zapíšeme tak, že obě souřadnice zapíšeme jednu po druhé a uzavřeme je do lomené závorky. Zejména máme tedy $P = [0, 0]$ pro počátek P. Jsou-li

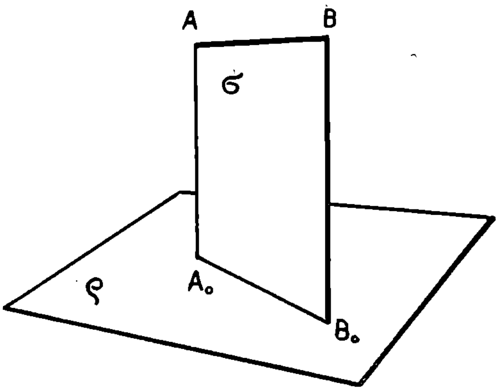
$$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$$

kterékoli dva body naší roviny ϱ, odvodí se snadno z Pythagorovy věty známý vzorec pro vzdálenost:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{1.4}$$

V prostoru má každý bod tři souřadnice, ke kterým se v elementárním vyučování dospívá takto. Nejprve se zvolí v prostoru určitá rovina ϱ, kterou můžeme nazvat *půdorysnou*. V půdorysně zvolíme právě popsaným způsobem kartézskou soustavu souřadnic složenou ze dvou navzájem kolmých os souřadnic, které se protnou v počátku P, a ze dvou znaménkových pravidel. Připojíme ještě třetí osu souřadnic, jíž je přímka vedená počátkem P kolmo na rovinu ϱ, takže všechny tři osy souřadnic jsou navzájem kolmé. Půdorysna rozdělí prostor na dvě části (poloprostory), z nichž jednu zvolíme za kladnou a druhou za zápornou. V praxi se obyčejně volí půdorysna ve vodorovné poloze a kladná část prostoru nad půdorysnou. Souřadnice a_1, a_2, a_3 libovolného bodu A jsou určeny takto (viz obr. 2). Bodem A vedeme přímku kolmou k půdorysně ϱ a její patu označíme A_0. Čísla a_1, a_2 jsou souřadnice bodu A_0 vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic zvolené v rovině ϱ. Mimo to je

$$a_3 = \pm \overline{AA_0}$$



Obr. 2.

se znamením plus, leží-li bod A v kladné části prostoru, se znamením mínus, leží-li bod A v záporné části prostoru; leží-li A v půdorysně ϱ, jest $a_3 = 0$. Opět jsou libovolná tři čísla a_1, a_2, a_3 souřadnicemi právě jednoho bodu A, který můžeme označit $[a_1, a_2, a_3]$. Jsou-li nyní dány dva body

$$A = [a_1, a_2, a_3], \; B = [b_1, b_2, b_3],$$

potom pro jejich vzdálenost platí vzorec:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}, \tag{1.5}$$

ke kterému můžeme dospěti takto (viz opět obr. 2). Přímkou AA_0 vedeme rovinu σ tak, aby procházela bodem B; rovina σ je kolmá na rovinu ϱ a obsahuje tudíž také kolmici k rovině ϱ vedenou bodem B i patu B_0 této kolmice. V rovině σ můžeme zavést kartézskou soustavu souřadnic s počátkem A_0 tak, že první osa souřadnic prochází bodem B_0, druhá bodem A, a se znaménkovými pravidly tak volenými, že bod A má v rovině σ souřadnice $0, a_3$, bod B souřadnice $\overline{A_0B_0}, b_3$. Podle vzorce (1.4) bude potom

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{A_0B_0}^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Podle téhož vzorce je však také

$$\overline{A_0B_0} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

takže dospíváme pro vzdálenost $\overline{AB}$ ke vzorci (1.5).

Vzorce (1.4) a (1.5) pro vzdálenost dvou bodů A, B v rovině a v prostoru jsou si velmi podobné; vzorec (1.1) pro vzdálenost dvou bodů na přímce má zdánlivě jiný tvar. Je to skutečně jenom zdánlivé, neboť vzorec (1.1) se dá psáti ve tvaru

$$\overline{AB} = \sqrt{(b - a)^2} \tag{1.6}$$

zcela obdobném vzorcům (1.4) a (1.5).

2. OBECNÝ POJEM EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. V článku 1 jsme zavedli na základě názoru pojem kartézské soustavy souřadnic na přímce, v rovině a v prostoru a připomenuli jsme známé vzorce (1.4), (1.5) a (1.6) pro vzdálenost dvou bodů daných svými souřadnicemi. Tyto vzorce pro vzdálenost mají pro nás fundamentální význam, neboť v následujícím se už nikde nebudeme opírat o názor, nýbrž zavedeme všecky základní pojmy elementární geometrie a odvodíme jejich základní vlastnosti algebraickou cestou opírajíce se výhradně o vzorec pro vzdálenost dvou bodů.

Analytická geometrie se tradičně dělí na tři části: analytickou geometrii na přímce (každý bod má jedinou souřadnici), analytickou geometrii v rovině (každý bod má dvě souřadnice), analytickou geometrii v prostoru (každý bod má tři souřadnice). Tyto tři části mají mnoho společného a bude účelné postupovati tak, aby to, co je všem částem společné, probíralo se společně. Při tom je výhodné míti pro společné pojmy také společné názvy, především tedy míti společný název pro přímku, rovinu a prostor. Slova prostor jsme v článku 1 užívali pro *obyčejný prostor* elementární geometrie. V této knize budeme užívati slova prostor v řadě rozmanitých významů. Obyčejný prostor budeme v dalším nazývat *trojrozměrný eukleidovský prostor* a budeme jej značit E_3. Rovinu budeme nazývat *dvojrozměrný eukleidovský prostor* a budeme ji značit E_2. Přímku budeme nazývat *jednorozměrný eukleidovský prostor* a budeme ji značit E_1. Ale všude, kde je to účelné, budeme i nadále užívat také obvyklých výrazů rovina a přímka a také budeme občas užívat názvu obyčejný prostor.

Shrňme si nyní v novém označení to, co víme z článku 1 o přímce, rovině a obyčejném prostoru. Víme, že E_m pro $m = 1$ znamená *přímku*, pro $m = 2$ *rovinu*, pro $m = 3$ *obyčejný prostor*. E_m se skládá z *bodů*; každým dvěma bodům A, B prostoru E_m je přiřazeno určité reálné číslo $\overline{AB}$, jejich *vzdálenost*. Podstatnou vlastností prostoru E_m jest, že v něm lze zavésti (a to rozmanitými způsoby) *kartézskou soustavu souřadnic*. Taková soustava přiřazuje každému bodu m reálných čísel, která se jmenují *souřadnice* tohoto bodu a to tak, že každá uspořádaná skupina m reálných čísel dává souřadnice určitého bodu. Body značíme velkými písmeny a jejich souřadnice příslušnými malými písmeny, při čemž jednotlivé souřadnice od sebe rozlišujeme indexy. Bod A bude tedy míti v prostoru E_1 jedinou souřadnici, kterou označíme a_1, v prostoru E_2 dvě souřadnice, které označíme a_1, a_2, v prostoru E_3 tři souřadnice, které označíme a_1, a_2, a_3. Je-li v prostoru E_m zavedena určitá kartézská soustava souřadnic, můžeme každý bod početně vyjádřiti tak, že zapíšeme po pořádku za sebou všecky jeho souřadnice a uzavřeme je do *lomené závorky*. Bude tedy

$$\begin{aligned} A &= [a_1] && \text{pro } m = 1, \\ A &= [a_1, a_2] && \text{pro } m = 2, \\ A &= [a_1, a_2, a_3] && \text{pro } m = 3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Znamení rovnosti má ten smysl, že oba symboly (nalevo i napravo od značky $=$) znamenají týž bod. Je-li B další bod, máme podobně

$$\begin{aligned} B &= [b_1] && \text{pro } m = 1, \\ B &= [b_1, b_2] && \text{pro } m = 2, \\ B &= [b_1, b_2, b_3] && \text{pro } m = 3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vzdálenost $\overline{AB}$ obou bodů A, B je podle článku 1 dána vzorcem

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2} && \text{pro } m = 1, \\ \overline{AB} &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} && \text{pro } m = 2, \\ \overline{AB} &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} && \text{pro } m = 3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Abychom mohli všecky tři případy $m = 1, m = 2, m = 3$ vyšetřovat najednou, učiníme dohodu o užívání teček. Často se nám vyskytnou výrazy složené z m členů, při čemž jednotlivé členy se budou od sebe lišit pouze indexem, který nabývá hodnot od 1 do m. V takových případech budeme občejně psát pouze první člen a ostatní členy naznačíme tečkou. Podle této dohody budeme tedy psáti

(2.1′) $$A = [a_1, \bullet]$$

místo (2.1),

(2.2′) $$B = [b_1, \bullet]$$

místo (2.2),

(2.3′) $$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \bullet}$$

místo (2.3).

Klasickým úkolem analytické geometrie jest nahradit geometrické problémy problémy početními a řešit takové problémy pomocí algebry. V tomto smyslu *aritmetisace geometrie* jest analytická geometrie matematickou naukou starou přes 300 let, která historicky znamenala velký pokrok ve výstavbě geometrie, protože umožnila využití výsledků jiných odvětví matematiky k řešení geometrických problémů, na které nestačily přímé geometrické úvahy, na př. k důkazu nemožnosti eukleidovské trisekce úhlu a eukleidovské kvadratury kruhu. Ve druhé polovině 19. století však počínala nabývat významu opačná tendence *geometrisace matematiky*, která je dnes jedním z nejvýznamnějších rysů moderní matematiky. Geometrisace matematiky spočívá v dalekosáhlém zobecnění pojmu prostoru. Název *prostor* se dnes dává množinám objektů nejrozmanitějšího druhu a název bod jednotlivým prvkům množiny. Tím se mnohdy docílí, že se výsledky jednoduchých názorných geometrických úvah dají přenést na velmi obecné kategorie důležitých matematických objektů, před tím studované mnohem složitějšími methodami. Tato kniha má za svůj hlavní cíl soustavné poučení o aritmetisaci geometrie, zároveň však má sloužit aspoň jako úvod k pochopení moderní geometrisace matematiky.

V duchu geometrisace matematiky rozumíme pro libovolné $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ výrazem *m-rozměrný eukleidovský prostor*, který značíme $\mathbf{E}_m$, množinu jakýchkoli matematických objektů, které nazýváme *body* prostoru E_m, předpokládajíce toto. Každým dvěma „bodům" prostoru E_m je podle nějakého pravidla přiřazeno určité reálné číslo zvané *vzdáleností* obou bodů. Při tom je možné zavésti do prostoru E_m *kartézskou soustavu souřadnic*, t. j. popsati každý bod

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$$

skupinou m reálných čísel, zvaných *souřadnicemi* bodu A, a to tak, že vzdálenost libovolných dvou bodů (2.1'), (2.2') je dána vzorcem (2.3'). Při tom se předpokládá, že libovolná skupina m reálných čísel a_1, $a_2, \ldots, a_m$ dává souřadnice právě jednoho bodu A. Je-li v prostoru E_m zavedena určitá kartézská soustava souřadnic, nazveme jejím *počátkem* a označíme P ten bod, jehož všecky souřadnice jsou rovny nule.

V následujících článcích studujeme eukleidovský prostor E_m pro libovolné m. Čtenář začátečník nechť z počátku provede každou úvahu zvlášť pro $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$. Brzy si uvědomí, že postup v textu, kde m zůstává libovolné, nikterak nekomplikuje úsudky a je přehlednější než kdybychom, omezujíce se na elementární případy $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, prováděli každou úvahu třikrát.

3. TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST. Jsou-li

$$A = [a_1, \bullet], \ B = [b_1, \bullet] \tag{3.1}$$

libovolné dva body prostoru E_m, je jejich vzdálenost dána vzorcem

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \bullet}. \tag{3.2}$$

Z tohoto základního vzorce okamžitě plynou tyto vlastnosti vzdálenosti libovolných dvou bodů:

$$\overline{AB} = \overline{BA}, \tag{3.3}$$

$$\overline{AB} = 0, \text{ jestliže } A = B, \tag{3.4}$$

$$\overline{AB} > 0, \text{ jestliže } A \neq B. \tag{3.5}$$

Je-li vedle bodů A, B dán ještě třetí bod

$$C = [c_1, \bullet], \tag{3.6}$$

potom platí důležitá nerovnost

$$\overline{AC} + \overline{BC} \geqq \overline{AB}, \tag{3.7}$$

která se jmenuje *trojúhelníková nerovnost*. Její důkaz je hlavním úkolem tohoto článku. Jestliže $A = B$, je správnost nerovnosti (3.7) zřejmá. Budiž tedy

$$A \neq B. \tag{3.8}$$

Určeme reálné číslo t z rovnice

$$t[(b_1 - a_1)^2 + \bullet] = (c_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet. \tag{3.9}$$

Koeficient při neznámé t v rovnici (3.9) je roven $\overline{AB^2}$, je tedy různý od nuly podle (3.5) a (3.8). Lze tudíž určiti t tak, aby platilo (3.9). Definujme nyní pomocný bod

$$D = [d_1, \bullet] \tag{3.10}$$

rovnicemi

$$d_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \bullet, \tag{3.11}$$

ze kterých plyne jednak

$$d_1 - a_1 = t(b_1 - a_1), \bullet, \tag{3.12}$$

jednak

$$d_1 - b_1 = -(1 - t)(b_1 - a_1), \bullet. \tag{3.13}$$

Ze (3.12) plyne

$$(d_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet = t[(b_1 - a_1)^2 + \bullet];$$

porovnáme-li se (3.9), dostaneme

$$(d_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet = (c_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet,$$

neboli

$$(c_1 - d_1)(b_1 - a_1) + \bullet = 0. \tag{3.14}$$

Ze (3.14) plyne jednak podle (3.12)

$$(c_1 - d_1)(d_1 - a_1) + \bullet = 0, \tag{3.15}$$

jednak podle (3.13)

$$(c_1 - d_1)(d_1 - b_1) + \bullet = 0. \tag{3.16}$$

Avšak

$$(c_1 - a_1)^2 = [(c_1 - d_1) + (d_1 - a_1)]^2$$

neboli

$$(c_1 - a_1)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (d_1 - a_1)^2 + 2(c_1 - d_1)(d_1 - a_1)$$

a stejně pro ostatní indexy, takže podle (3.15) jest

$$(c_1 - a_1)^2 + \bullet = [(c_1 - d_1)^2 + \bullet] + [(d_1 - a_1)^2 + \bullet]$$

neboli

$$\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2. \tag{3.17}$$

Podobně máme

$$(c_1 - b_1)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (d_1 - b_1)^2 + 2(c_1 - d_1)(d_1 - b_1), \bullet$$

a tedy podle (3.16)

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2. \tag{3.18}$$

Mimo to ze (3.12) a (3.13) plyne

$$\overline{AD}^2 = t^2 \, . \, \overline{AB}^2, \quad \overline{BD}^2 = (1 - t)^2 \, . \, \overline{AB}^2,$$

tudíž, ježto vzdálenost nikdy není záporná,

$$\overline{AD} = |t| \, . \, \overline{AB}, \quad \overline{BD} = |1 - t| \, . \, \overline{AB}. \tag{3.19}$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} |t| + |1 - t| &= 1, \text{ jestliže } 0 \leqq t \leqq 1, \\ |t| + |1 - t| &> 1, \text{ jestliže } t < 0 \text{ nebo } t > 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mimo to podle (3.5) a (3.8) jest $\overline{AB} > 0$, takže ze (3.19) a (3.20) plyne

$$\overline{AD} + \overline{BD} \geqq \overline{AB}, \tag{3.21}$$

při čemž rovnost nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže $0 \leqq t \leqq 1$. Ze (3.17) a (3.18) však plyne

$$\overline{AC} \geqq \overline{AD}, \quad \overline{BC} \geqq \overline{BD}, \tag{3.22}$$

při čemž v obou případech nastane rovnost tehdy a jenom tehdy, jestliže $\overline{DC} = 0$, t. j. jestliže $C = D$. Ze (3.21) a (3.22) plyne žádaná nerovnost (3.7).

Z provedeného důkazu plyne, že za předpokladu $A \neq B$ platí v trojúhelníkové nerovnosti (3.7) znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje reálné číslo t tak, že

$$0 \leqq t \leqq 1, \tag{3.23}$$

$$C = A + t(B - A); \tag{3.24}$$

při tom symbolická rovnost (3.24) zastupuje m rovností

$$c_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \bullet.$$

Splynou-li oba body A, B, platí ve (3.7) znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže s nimi splyne také bod C.)

4. STŘED DVOJICE BODŮ. V analytické geometrii prostoru E_m zavádíme nové pojmy aritmeticky, t. j. užívajíce souřadnic ve zvolené kartézské soustavě. Při tom je však míti na paměti, že v E_m je možno zavésti kartézskou soustavu souřadnic různými způsoby. Pouze ty pojmy, které jsou nezávislé na volbě kartézské soustavy souřadnic, jsou *geometrické pojmy* v prostoru E_m. U každého pojmu zavedeného pomocí kartézské soustavy souřadnic musíme tudíž prokázati jeho *invarianci*, t. j. prokázati, že se nezmění (že zůstane *invariantní*) při přechodu od jedné soustavy kartézských souřadnic k soustavě jiné. Důkazy invariance je možné provádět na základě vzorců, které popisují přechod od jedné kartézské soustavy souřadnic ke kterékoli jiné takové soustavě. Takové vzorce pro *transformaci souřadnic* si později v této knize skutečně odvodíme. Nebudeme jich však užívat k důkazům invariance, nýbrž budeme tyto důkazy provádět jinak. Místo *aritmetické definice*, ve které se užívá určité kartézské soustavy souřadnic, a která tudíž vyžaduje důkazu invariance, je totiž možné zavésti nový pojem také *geometrickou definicí*, ve které se vůbec neužívá souřadnic, nýbrž ve které se nový pojem převede na pojem vzdálenosti, jehož invariance je zřejmá, po případě i na jiné pojmy, jejichž invariance byla již dříve dokázána. Budeme často postupovati tak, že pro nově zaváděný pojem zavedeme dvě definice, jednu aritmetickou a druhou geometrickou, při čemž ovšem bude třeba v každém případě se přesvědčit, že obě definice skutečně popisují týž pojem. Sama o sobě bude každá z obou definic míti určitou nevýhodu, která teprve spojením obou definic se odstraní. Nevýhoda aritmetické definice je v tom, že sama o sobě vyžaduje důkazu invariance; tato nevýhoda je odstraněna geometrickou definicí. Naproti tomu geometrické definice samy o sobě zase budou míti určité nevýhody, na které poukážeme od případu k případu, a které jsou odstraněny aritmetickou definicí.

Tyto obecné zásady si v tomto článku objasníme na konkretním příkladě pojmu *středu dvojice bodů*. Buďtež

(4.1) $$A = [a_1, \bullet],\ B = [b_1, \bullet]$$

libovolné dva body prostoru $\mathbf{E}_m$. Středem dvojice A, B nazveme bod

(4.2) $$C = \tfrac{1}{2}(A + B),$$

kde symbolická rovnost (4.2) zastupuje m rovností

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), \bullet.$$

Právě jsme vyslovili *aritmetickou definici* středu dvojice A, B. Ze vzorce pro vzdálenost dvou bodů snadno plyne, že bod (4.2) má vlastnosti:

(4.3) $$\overline{AC} = \overline{BC} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$

Dokážeme, že (při daných bodech A, B) je C *jediný* bod prostoru $\mathbf{E}_m$ s vlastnostmi (4.3), které tudíž dávají *geometrickou definici* středu dvojice A, B.

Nechť tedy platí (4.3); máme dokázati, že platí (4.2). Jestliže $A = B$, je $\overline{AB} = 0$, tedy podle (4.3) také $\overline{AC} = 0$, tedy $C = A = B$, takže platí (4.2). Jestliže však $A \neq B$, uvažme, že podle (4.3) je $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, takže podle konce článku 3 existuje reálné číslo t tak, že platí (3.23) a (3.24). Ze (3.23) vypočteme snadno, že $\overline{AC} = |t| \,.\, \overline{AB}$; ježto $\overline{AB} > 0$, soudíme ze (4.3), že $|t| = \frac{1}{2}$. Avšak $t \geqq 0$ podle (3.23), tedy $t = \frac{1}{2}$, načež ze (3.24) snadno plyne (4.2).

Poznamenejme výslovně, že jestliže bod B splyne s bodem A, také střed C dvojice A, B splyne s A; naproti tomu pro $A \neq B$ jsou všecky tři body A, B, C navzájem různé. Správnost této poznámky plyne stejně snadno i z aritmetické definice (4.2) i z geometrické definice (4.3).

Sama o sobě má geometrická definice (4.3) středu dvojice bodů tu nevýhodu, že z ní není patrné, že při daných bodech A, B existuje *právě jeden* bod C tak, že platí vztahy (4.3).

Na konec uveďme ještě zřejmý fakt, že střed dvojice A, B splyne se středem dvojice B, A.

5. POJEM VEKTORU. V tomto článku budeme definovat pojem *vektoru*, který je jedním z nejdůležitějších pojmů geometrie prostorů $\mathbf{E}_m$. Než přistoupíme k věci, bude účelná obecná úvaha o *zavádění* *pojmů abstrakcí.* Abstrakce pozůstává v tom, že shrneme pod jediný širší pojem řadu pojmů, jejichž vzájemné rozdíly jsou s určitého hlediska nepodstatné. Abstrakcí se zavádí již na národní škole m. j. pojem *nepojmenovaného čísla*: shrnutím pojmů tří žáků, tří jablek, tří sešitů, tří kuliček atd. se dochází k pojmu nepojmenovaného čísla tři. Na trochu vyšším stupni dospíváme na př. k pojmu zlomku abstrakcí z pojmu dvojice čísel (čitatele a jmenovatele); na př.

$$\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{6}, \tfrac{6}{9}, \tfrac{8}{12} \text{ atd.}$$

jsou různá konkretní vyjádření téhož abstraktního zlomku.

Podobnou abstrakcí dospějeme od pojmu *dvojice bodů* k pojmu *vektoru*. Podle programu nastíněného v článku 4 uvedeme nejprve *aritmetickou definici* vektoru. Budiž v prostoru $\mathbf{E}_m$

(5.1) $$A = [a_1, \bullet], \ B = [b_1, \bullet]$$

libovolná dvojice bodů. Budiž dále

(5.1') $$A' = [a'_1, \bullet], \ B' = [b'_1, \bullet]$$

kterákoli jiná dvojice bodů. Pravíme, že obě dvojice (5.1) a (5.1') *určují týž vektor*, platí-li m rovnic

(5.2) $$b_1 - a_1 = b'_1 - a'_1, \bullet.$$

Každá z obou dvojic (5.1), (5.1') tvoří jedno *umístění vektoru*; vektor sám (pojem vzniklý abstrakcí) nemá ovšem určité umístění. Při daném umístění, na př. (5.1), nazveme A *počátečním bodem*, B *koncovým bodem*; při umístění (5.1') je ovšem A' počátečním bodem, B' koncovým bodem. Položme

(5.3) $$u_1 = b_1 - a_1, \ \ldots, u_m = b_m - a_m;$$

podle (5.2) je potom také

$$u_1 = b'_1 - a'_1, \ \ldots, u_m = b'_m - a'_m,$$

t. j. čísla $u_1, \ldots, u_m$ jsou nezávislá na umístění vektoru. Čísla $u_1, \ldots, u_m$ nazveme (při dané volbě kartézské soustavy souřadnic) *souřadnicemi vektoru*. Vektor je svými souřadnicemi (stále při dané volbě kartézské soustavy souřadnic) úplně určen. Vektor, jehož souřadnicemi jsou čísla $u_1, \ldots, u_m$, označíme $\boldsymbol{u}$; značíme tedy vektor tučným písmenem a jeho souřadnice příslušnými písmeny obyčejného typu, při čemž jednotlivé souřadnice rozlišujeme indexy.

Souřadnice $u_1, \ldots, u_m$ vektoru jsou zcela libovolná reálná čísla. Vektor daný svými souřadnicemi je mnohdy účelné zapsati tak, že napíšeme po pořádku za sebou všecky jeho souřadnice a uzavřeme je do *okrouhlé závorky*. Bude tedy

$$\mathbf{u} = (u_1, \bullet), \; \mathbf{v} = (v_1, \bullet) \text{ a pod.}$$

Vektor, který při určitém umístění má počáteční bod A a koncový bod B, označíme $B - A$, takže symbolická rovnice

$$\mathbf{u} = B - A \tag{5.4}$$

znamená totéž jako m obyčejných rovnic (5.3).

Je-li dán vektor $\mathbf{u}$ a bod A, má $\mathbf{u}$ právě jedno umístění, při kterém je A počátečním bodem. Koncový bod B tohoto umístění je dán symbolickou rovnicí

$$B = A + \mathbf{u}, \tag{5.5}$$

která znamená totéž jako m obyčejných rovnic

$$b_1 = a_1 + u_1, \bullet.$$

Obě rovnice (5.4) a (5.5) znamenají totéž.

K pojmu vektoru jsme došli v tomto článku abstrakcí založenou na aritmetické definici (5.2). Za účelem důkazu invariance je nutné nahradit (5.2) geometrickou definicí, která zní takto: Obě dvojice

$$A, B'; \; B, A' \tag{5.6}$$

mají týž střed. Neboť to znamená, že

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + b_1') = \tfrac{1}{2}(b_1 + a_1'), \bullet,$$

což je zřejmě pouze jiný tvar rovnic (5.2).

Abychom si uvědomili, jakou nevýhodu má geometrická definice sama o sobě, předpokládejme, že obě dvojice A, B; A', B' určují týž vektor. Podle geometrické definice to znamená, že obě dvojice (5.6) mají týž střed. Je-li nyní A'', B'' třetí dvojice bodů, potom dvojice A, B; A'', B'' určují týž vektor, jestliže dvojice

$$A, B''; \; B, A'' \tag{5.6'}$$

mají týž střed. Zároveň však dvojice A', B'; A'', B'' určují týž vektor, jestliže dvojice

$$A', B''; \; B', A'' \tag{5.6''}$$

mají týž střed. Z geometrické definice není nikterak zřejmé, že rovnost středů dvojic (5.6′) má za následek rovnost středů dvojic (5.6″). Že tomu tak je — za předpokladu rovnosti středů dvojic (5.6) — je ovšem důsledkem aritmetické definice.

6. NULOVÝ VEKTOR, OPAČNÉ VEKTORY, VELIKOST VEKTORU, SČÍTÁNÍ VEKTORŮ. Označíme $\mathbf{o}$ a nazveme *nulovým vektorem* ten vektor, jehož každá souřadnice je rovna nule (aritmetická definice). Zřejmě při každém umístění nulového vektoru splyne počáteční a koncový bod, kdežto při žádném umístění nenulového vektoru nesplyne počáteční a koncový bod. V tom jest obsažena geometrická definice nulového vektoru, která sama o sobě má tu nevýhodu, že z ní není bezprostředně patrné, že jestliže při jednom umístění vektoru splyne počáteční a koncový bod, platí totéž o každém jiném umístění.

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$ libovolný vektor, označíme $-\mathbf{u}$ a nazveme *vektorem opačným* k vektoru $\mathbf{u}$ vektor $(-u_1, \bullet)$. Jestliže $\mathbf{u} = B - A$, t. j. jestliže A je počáteční a B koncový bod určitého umístění vektoru $\mathbf{u}$, zřejmě je $-\mathbf{u} = A - B$, t. j. B je počáteční, A koncový bod určitého umístění opačného vektoru. V tom je obsažena geometrická definice pojmu opačného vektoru, která sama o sobě opět má tu nevýhodu, že z ní není patrné, že jestliže okolnost v ní uvedená platí při jednom umístění vektoru $\mathbf{u}$, zůstává v platnosti při každém umístění tohoto vektoru.

Nazveme *velikostí vektoru* $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$ a označíme $|\mathbf{u}|$ číslo

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + \bullet}. \tag{6.0}$$

Je-li $\mathbf{u} = B - A$, jest

$$|B - A| = \overline{AB}, \tag{6.1}$$

t. j. při každém umístění je velikost vektoru rovna vzdálenosti počátečního a koncového bodu. To je geometrická definice velikosti vektoru se stejnou nevýhodou jako při definici nulového a opačného vektoru.

Jak z aritmetické, tak i z geometrické definice velikosti vektoru je patrné, že

(6.2) $$|\mathbf{u}| = 0, \text{ jestliže } \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

(6.3) $$|\mathbf{u}| > 0, \text{ jestliže } \mathbf{u} \neq \mathbf{o},$$

(6.4) $$|-\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|.$$

Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$, $\mathbf{v} = (v_1, \bullet)$ dva vektory, nazveme *součtem obou vektorů* a označíme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektor $(u_1 + v_1, \bullet)$. Zvolme libovolný bod A a umístěme vektor $\mathbf{u}$ tak, aby A byl počátečním bodem; je-li B koncový bod tohoto umístění, jest $\mathbf{u} = B - A$. Umístěme vektor $\mathbf{v}$ tak, aby B byl počátečním bodem; je-li C koncový bod tohoto umístění, jest $\mathbf{v} = C - B$. Z toho plyne ihned, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = C - A$, t. j. vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ má takové umístění, při kterém je A počátečním bodem, C koncovým bodem. To dává geometrickou definici součtu dvou vektorů se stejnou nevýhodou, kterou mají všecky geometrické definice tohoto článku.

Zřejmě pro sčítání vektorů platí *komutativní zákon*

(6.5) $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

a *asociativní zákon*

(6.6) $$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Dále je zřejmé, že

(6.7) $$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

a že rovnice

(6.8) $$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

s danými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a s neznámým vektorem $\mathbf{x}$ má právě jedno řešení

(6.9) $$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}).$$

V asociativním zákonu (6.6) se vyskytují tři vektory; vedle toho platí zřejmě také asociativní zákon

(6.10) $$A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (A + \mathbf{u}) + \mathbf{v},$$

ve kterém se vyskytuje bod A a dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Poznamenejme si také zřejmý vzorec

$$A + \mathbf{o} = A. \tag{6.11}$$

Dosud jsme mluvili pouze o součtu dvou vektorů; součet více než dvou vektorů můžeme definovat rekurentně vzorcem

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) + \mathbf{u}_{n+1}. \tag{6.12}$$

Rekurentní definice (6.12) je geometrická definice, jejíž invariance je tudíž zřejmá. Ze známých vlastností součtu čísel okamžitě plynou obdobné vlastnosti součtu vektorů. Je to nejprve *obecný komutativní zákon*, který praví, že součet několika vektorů je nezávislý na jejich pořádku. Za druhé je to *obecný asociativní zákon*, který praví, že součet několika vektorů můžeme vypočísti tak, že rozdělíme sčítance na skupiny, vypočteme částečné součty vektorů jednotlivých skupin a tyto částečné součty sečteme; při tom může některá skupina obsahovat jediný vektor, který jest potom považovat za příslušný „částečný součet“.

7. SKALÁRNÍ SOUČIN. V prostoru $\mathbf{E}_m$ buďtež dány dva vektory

$$\mathbf{u} = (u_1, \bullet), \quad \mathbf{v} = (v_1, \bullet). \tag{7.1}$$

Označíme $\mathbf{uv}$ nebo $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$ a nazveme jejich *skalárním součinem* číslo

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + \bullet. \tag{7.2}$$

Tedy *skalární součin dvou vektorů není vektor, nýbrž číslo*. Invariance skalárního součinu plyne z geometrické definice, kterou podáme na konci tohoto článku.

Ze známých vlastností součinu čísel plynou obdobné vlastnosti skalárního součinu. Je to především *komutativní zákon*

$$\mathbf{uv} = \mathbf{vu}, \tag{7.3}$$

za druhé to jsou *distributivní zákony*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{u}')\,\mathbf{v} = \mathbf{uv} + \mathbf{u}'\mathbf{v}, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{uv} + \mathbf{uv}', \tag{7.4'}$$

ze kterých plyne snadno obecný distributivní zákon: *Máme-li součet několika vektorů skalárně znásobit součtem několika vektorů, můžeme* *to provésti tak, že každý vektor prvého součtu skalárně znásobíme každým vektorem druhého součtu a všecky takto obdržené skalární součiny sečteme.*

Zřejmě jest

$$\text{(7.5)} \qquad \mathbf{uo} = \mathbf{ou} = 0,$$

t. j. skalární součin dvou vektorů je roven nule, jakmile aspoň jeden činitel je nulový vektor. Je však důležité si všimnout, že *pro* $m > 1$ *skalární součin dvou vektorů může býti roven nule, i když žádný činitel není nulový vektor*; na př. pro $m = 2$, $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$ je $\mathbf{uv} = 0$.

Z definice (7.2) plyne, že

$$\text{(7.6)} \qquad \mathbf{uu} = |\mathbf{u}|^2,$$

t. j. *skalární součin vektoru s ním samým je roven druhé mocnině velikosti vektoru.*

Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ libovolné dva vektory, máme podle obecného distributivního zákona

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{uu} + \mathbf{uv} + \mathbf{vu} + \mathbf{vv}$$

neboli podle (7.3) a (7.6)

$$\text{(7.7)} \qquad |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{uv}.$$

Píšeme-li (7.7) ve tvaru

$$\text{(7.7')} \qquad \mathbf{uv} = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2),$$

dospíváme ke geometrické definici skalárního součinu, neboť pojem součtu dvou vektorů a pojem velikosti vektoru jsou invariantní pojmy.

8. SOUČIN ČÍSLA A VEKTORU. Budiž a libovolné reálné číslo, budiž $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$ libovolný vektor. Označíme $a\mathbf{u}$ nebo $a \,.\, \mathbf{u}$ a *nazveme součinem čísla a a vektoru $\mathbf{u}$ vektor*

$$\text{(8.0)} \qquad a\mathbf{u} = (au_1, \bullet).$$

Z této aritmetické definice plynou jednoduché vlastnosti součinu čísla a vektoru:

(8.1) Je-li $a = 0$, je $a\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(8.2) Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je $a\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(8.3) Je-li $au = o$, je buďto $a = 0$ nebo $u = o$.

(8.4) Je-li $a = 1$, je $au = u$.

(8.5) Je-li $a = -1$, je $au = -u$.

(8.6) $$a \,.\, (bu) = (ab) \,.\, u,$$

pročež bez obavy z nedorozumění můžeme psáti stručně abu.

(8.7) $$(a + b)\, u = au + bu.$$

(8.8) $$a(u + v) = au + av.$$

Z (8.7) a (8.8) plyne obecný distributivní zákon pro součin čísla a vektoru: *Součet čísel a součet vektorů můžeme znásobit tak, že každé dané číslo znásobíme každým daným vektorem a všecky tyto součiny sečteme.*

Z definice součinu čísla a vektoru a z definice (7.2) skalárního součinu plyne vzorec

(8.9) $$(au) \,.\, v = u \,.\, (av) = a \,.\, (uv);$$

obecněji jest

(8.10) $$(au) \,.\, (bv) = (ab) \,.\, (uv).$$

Z definice součinu čísla a vektoru a z definice velikosti vektoru (viz článek 6) snadno plyne vzorec

(8.11) $$|au| = |a| \,.\, |u|.$$

Zbývá prokázati geometrickou definicí invarianci součinu au. Za tím účelem poznamenejme nejprve, že jestliže mezi dvěma vektory u, v platí vztah

(8.12) $$v = au,$$

potom podle (8.9) platí také vztahy

(8.13) $$uv = a \,.\, uu, \quad vv = a \,.\, uv,$$

jejichž invariance je nám již známa. Stačí tedy dokázati, že obráceně z platnosti vztahů (8.13) plyne platnost vztahu (8.12). Nechť tedy platí (8.13). Potom jest

$$uv - a \,.\, uu = 0, \quad vv - a \,.\, uv = 0,$$

tedy také

$$(\mathbf{vv} - a \,.\, \mathbf{uv}) - a(\mathbf{uv} - a \,.\, \mathbf{uu}) = 0$$

neboli

$$(\mathbf{v} - a\mathbf{u})(\mathbf{v} - a\mathbf{u}) = 0,$$

takže podle (7.6) je $|\mathbf{v} - a\mathbf{u}| = 0$, což by podle (6.3) bylo nemožné, kdyby neplatilo (8.12).

9. DVĚ NEROVNOSTI. VĚTA 9.1. *Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vektory, platí nerovnost*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|; \tag{9.1}$$

při tom v (9.1) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ nebo existuje kladné číslo k tak, že $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.*

DŮKAZ. Zvolme libovolně bod A a určeme body B, C tak, aby bylo $\mathbf{u} = C - A$, $\mathbf{v} = B - C$, tedy $\mathbf{u} + \mathbf{v} = B - A$. Potom nerovnost (9.1) nabude podle (6.1) tvaru

$$\overline{AB} \leqq \overline{AC} + \overline{BC}$$

a v tomto tvaru již byla dokázána v článku 3, kde jsme také poznali, že znamení rovností platí tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto

$$A = B = C$$

nebo

$$A \neq B,\ C = A + t(B - A),\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

V prvém případě je $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{o}$. Ve druhém případě je

$$\mathbf{u} = t(\mathbf{u} + \mathbf{v}),\ 0 \leqq t \leqq 1,\ \mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{o}. \tag{9.2}$$

Je-li $t = 0$, potom podle (9.2) je $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ a obráceně pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ platí (9.2), při čemž $t = 0$. Je-li $t = 1$, potom podle (9.2) je $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a obráceně pro $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí (9.2), při čemž $t = 1$. Je-li $0 < t < 1$, potom podle (9.2) je $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, kde $k = (1 - t) : t$, tedy $k > 0$.

Obráceně, je-li $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, $k > 0$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, platí (9.2), položíme-li $t = 1 : (1 + k)$, takže $0 < t < 1$.

VĚTA 9.2. *Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vektory, platí nerovnost*

$$\mathbf{uv} \leqq |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|; \tag{9.3}$$

při tom v (9.3) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ *nebo* $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ *nebo existuje kladné číslo* k *tak, že* $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

DŮKAZ. Z nerovností (9.1) plyne

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \leqq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2 \,.\, |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}| \tag{9.4}$$

a obráceně z (9.4) plyne (9.1). Avšak podle (7.7) z (9.4) plyne (9.3) a obráceně z (9.3) plyne (9.4). Tedy věta 2 plyne z věty 1.

Dosadíme-li $-\mathbf{u}$ na místo $\mathbf{u}$ do (9.3), dostaneme

$$-\mathbf{u}\mathbf{v} \leqq |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|. \tag{9.5}$$

Obě nerovnosti (9.3) a (9.5) dohromady praví, že

$$|\mathbf{u}\mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|, \tag{9.6}$$

při čemž rovnost nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ nebo existuje reálné číslo k tak, že $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.