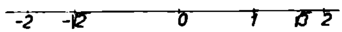
I. Úvod.

1. **Číselná osa.** Úvahy, které budeme prováděti v této knížce, jsou sice většinou aritmetické, ale často se dají dobře objasniti geometricky. Proto začneme známým geometrickým znázorňováním čísel na přímce. Přímka, na které si znázorňujeme čísla, jmenuje se *číselná osa*. Volíme ji obyčejně ve vodorovné poloze. Abychom si na ní mohli znázorňovat čísla, musíme si zvolit určitou *jednotku délky* a určitý bod přímky, kterému se často říká *počátek*. Počátek nám znázorňuje číslo 0. Čísla větší než nula neboli *čísla kladná* jsou znázorněna body ležícími napravo od počátku, čísla menší než nula neboli *čísla záporná* jsou znázorněna body ležícími nalevo od počátku. Kladné číslo $+c$ je znázorněno bodem, který leží napravo od počátku ve



Obr. 1.

vzdálenosti c jednotek délky od počátku; záporné číslo $-c$ je znázorněno bodem, který leží nalevo od počátku ve vzdálenosti c jednotek délky od počátku. V obr. 1 jsou znázorněna čísla 0, 1, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, 2, -2. Protože vlastním předmětem našich úvah nejsou body, nýbrž čísla, a protože body na číselné ose jsou pro nás pouze obrazy čísel, není třeba příliš ostře rozlišovati mezi číslem a bodem, který je obrazem čísla. Proto mluvíme krátce na př. o bodu $\sqrt{3}$ nebo o bodu $-\sqrt{2}$ místo o bodu, který je obrazem čísla $\sqrt{3}$ nebo čísla $-\sqrt{2}$. Tedy místo „počátek" můžeme také říkat „bod 0".

Pro čísla, která zde máme na mysli, tedy pro nulu, čísla kladná a čísla záporná, užíváme souhrnného názvu *čísla reálná*. Nulu nepočítáme ani mezi čísla kladná ani mezi čísla záporná.

Zvolme si dvě reálná čísla r a s; budiž třeba r menší než s, což píšeme $r < s$ nebo $s > r$. Na číselné ose leží bod r nalevo od bodu s. Body r a s omezí na číselné ose jakousi úsečku U. V aritmetických úvahách, při kterých body zastupují čísla, užívá se obyčejně místo slova úsečka slova interval. Interval U označujeme obyčejně symbolem

$$\langle r, s \rangle,$$

t. j. napíšeme obě čísla r a s za sebou (menší napřed), oddělíme je čárkou a celek dáme do úhlové závorky. Do intervalu $\langle r, s \rangle$ počítáme také oba body r a s samy; o ostatních bodech intervalu $\langle r, s \rangle$ pravíme, že leží uvnitř intervalu $\langle r, s \rangle$. Tedy x leží v intervalu $\langle r, s \rangle$, když

$$r \leqq x \leqq s$$

a x leží uvnitř intervalu $\langle r, s \rangle$, když

$$r < x < s.$$

Délka intervalu $\langle r, s \rangle$ neboli vzdálenost bodu r od bodu s se rovná $(s - r)$ jednotkám délky; ale poněvadž jednotku délky si myslíme jednou pro vždy pevně zvolenu, můžeme krátce říkat, že délka intervalu $\langle r, s \rangle$ je číslo $s - r$.

Cvičení 1. Jakou vzájemnou polohu mají intervaly $\langle r_1, s_1 \rangle$ a $\langle r_2, s_2 \rangle$, když

1) $s_1 = r_2$; 2) $s_1 < r_2$; 3) $s_2 = r_1$; 4) $s_2 < r_1$; 5) $r_1 < r_2$, $s_1 = s_2$;
6) $r_1 < r_2 < s_1 < s_2$; 7) $r_1 < r_2 < s_2 < s_1$?

2. Nerovnosti. Početní pravidla pro čtyři základní početní výkony, na př.

$$a + b = b + a,\ ab = ba,\ a(b + c) = ab + ac,$$

$$a \cdot 0 = 0,\ a \cdot 1 = 1,\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ a - (b - c) = a - b + c,$$

jsou vám asi dobře známa ze střední školy. Méně dobře jsou vám asi známa početní pravidla, jimiž se řídí počítání s nerovnostmi. Základní pravidla o nerovnostech jsou přesně vyslovena a dokázána v odst. 14 mé knížky *Co je a nač je vyšší matematika?* (Cesta k vědění, svazek 20). Odkazy na tuto knížku budu zde činiti několikrát; proto ji budu citovati zkratkou VM.

Protože pravidla o nerovnostech jsou zde pro nás důležitá, buďtež zde raději znovu uvedena. Běží v podstatě o čtyři pravidla; nebudeme je zde aritmeticky dokazovat — to bylo provedeno ve VM — ale znázorníme si je na ose číselné. Že číslo r je menší než číslo s, to se jeví na číselné ose tím, že bod r je nalevo od bodu s.

Zvolme si nějaké číslo c, třeba kladné. Přiřadíme-li každému číslu x číslo $f(x) = x + c$, pošine se každý bod z polohy x do polohy $f(x)$, která leží o délku c napravo od polohy x. Je-li bod a nalevo od bodu b, je zřejmé, že také pošinutý bod $f(a)$ je nalevo od pošinutého bodu $f(b)$. Aritmeticky řečeno, je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$. Je-li číslo c záporné, pak leží bod $f(x) = x + c$ o délku $|c|$ nalevo od bodu x. Je-li zase a nalevo od b, leží opět pošinutý bod $f(a)$ nalevo od pošinutého bodu $f(b)$, t. j. i při záporném c můžeme z nerovnosti $a < b$ soudit na nerovnost $a + c < b + c$. Že tak můžeme činiti i pro $c = 0$, je úplně samozřejmé. Nevíme-li, že $a < b$, nýbrž jen poněkud méně, totiž že $a \leqq b$, pak můžeme souditi, že $a + c \leqq b + c$, při čemž zase je c úplně libovolné číslo.

Poznali jsme názorný obsah prvního pravidla o nerovnostech: v nerovnosti smíme na obou stranách přičísti stejné číslo.

Zvolme si nyní kladné číslo c a předpokládejme napřed, že c je větší než 1. Přiřaďme každému číslu x číslo $f(x) = x \,.\, c$. Je-li x napravo od počátku, je také $f(x)$ napravo od počátku, je-li x nalevo od počátku, je také $f(x)$ nalevo od počátku. Ale v obou případech je vzdálenost bodu $f(x)$ od počátku větší, a to c-krát větší, nežli vzdálenost bodu x od počátku. Nahradíme-li každý bod x bodem $f(x)$, změní se vzhled číselné osy tak, jako bychom ji pozorovali zvětšovacím sklem, které zvětšuje v poměru $c : 1$. Je-li nyní bod a nalevo od bodu b, pak i pod zvětšovacím sklem se jeví a nalevo od b, t. j. z nerovnosti $a < b$ můžeme souditi na nerovnost $ac < bc$. Je-li kladné číslo c menší než 1 a je-li zase $f(x) = x \,.\, c$, tu se nyní vzdálenosti od počátku zmenšují v poměru $c : 1$ a zase můžeme z nerovnosti $a < b$ souditi na nerovnost $ac < bc$. Že tak můžeme činiti i pro $c = 1$, je úplně samozřejmé. Poznali jsme názorný obsah druhého pravidla o nerovnostech: v nerovnosti $a < b$ smíme na obou stranách násobiti stejným kladným číslem. Je-li dána méně ostrá nerovnost $a \leqq b$, můžeme při kladném c souditi na méně ostrou nerovnost $ac \leqq bc$ a tentokráte je to soud správný i pro $c = 0$.

Přiřaďme každému číslu x číslo $f(x) = -x$. Je-li x napravo od počátku, je $f(x)$ nalevo od počátku; je-li x nalevo od počátku, je $f(x)$ napravo od počátku. V obou případech je $f(x)$ stejně daleko od počátku jako x. Tedy $f(x)$ vznikne z x překlopením kolem počátku. Je-li nyní bod a nalevo od bodu b, je překlopený bod $f(a)$ napravo od překlopeného bodu $f(b)$, t. j. z nerovnosti $a < b$ můžeme souditi na nerovnost $-a > -b$. Ze slabší nerovnosti $a \leqq b$ soudíme zase na slabší nerovnost $-a \geqq -b$. Tím jsme poznali třetí pravidlo o nerovnostech.

Když každému **kladnému** číslu x přiřadíme kladné číslo $f(x) = \frac{1}{x}$, pak součin $x \,.\, f(x)$ je stále roven jedné. Zvětšíme-li činitele x, musí se druhý činitel zmenšit, aby součin zůstal nezměněn. Proto z nerovnosti $0 < a < b$ můžeme souditi na nerovnost $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. To je čtvrté pravidlo o nerovnostech.

Podle našich pravidel o nerovnostech můžeme řešiti nerovnosti podobně, jako se na střední škole řeší rovnice. Mějme na př. nerovnost

$$x + 7 < 3x - 5. \tag{2·1}$$

Na obou stranách smíme přičísti 5; dostaneme

$$x + 12 < 3x; \tag{2·2}$$

na obou stranách smíme přičísti $-x$; dostaneme

$$12 < 2x; \tag{2·3}$$

na obou stranách smíme násobiti **kladným** číslem $\frac{1}{2}$; dostaneme

$$6 < x \tag{2·4}$$

neboli

$$x > 6. \tag{2·5}$$

Obráceně ze (2·5) můžeme souditi na (2·4); ve (2·4) můžeme na obou stranách násobiti **kladným** číslem 2 a dostaneme (2·3); ve (2·3) můžeme na obou stranách přičísti x a dostaneme (2·2); ve (2·2) můžeme na obou stranách přičísti -5 a dostaneme (2·1). Tedy (2·5) je řešení nerovnosti (2·1).

Cvičení 2. Řešte nerovnost

a) $2\,(3x - 4) + 4\,(x + 5) < 3\,(2x + 8)$;

b) $5\,(x - 7) + 10 > 2\,(x + 7)$;

c) $\dfrac{2x - 1}{5} - \dfrac{x + 3}{2} < \dfrac{3x - 5}{5}$;

d) $\dfrac{2\,(x - 4)}{5} - \dfrac{2x - 3}{10} > \dfrac{4x + 1}{2} + 1$.

3. Posloupnosti. Posloupnost čísel dostaneme, když každému celému kladnému n přiřadíme podle nějakého zákona určité číslo a_n; jednotlivá čísla

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{3·1}$$

nazýváme **členy** posloupnosti (a_1 je první člen, a_2 druhý atd.). Na střední škole se místo slova posloupnost někdy užívá slova řada; ale ve vědecké literatuře převládá výraz posloupnost. Členy řady bývají dány obecným zákonem; je-li na př. $a_n = 1 - \frac{n^2}{8}$, pak prvních 5 členů posloupnosti (3·1) je

$$\tfrac{7}{8},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{8},\ -1,\ -\tfrac{17}{8}.$$

Často bývá posloupnost dána rekurentně, to znamená, že je dán přímo první člen (nebo několik počátečních členů) a potom je dán předpis, jak počítati následující člen na základě předcházejících. Na př. rekurentním předpisem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n$ je určena známá posloupnost faktoriálů ($a_n = n!$).

Jsou-li dána dvě čísla a, d, pak posloupnost určená rekurentním předpisem $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ je t. zv. aritmetická posloupnost s konstantní diferencí d. Jsou-li dána dvě čísla a, q, pak posloupnost určená rekurentním předpisem $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n q$ je t. zv. geometrická posloupnost s konstantním kvocientem q. Aritmetické a geometrické posloupnosti se podrobně probírají na střední škole. Znáte asi vzorce

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d,\quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

pro obecný člen aritmetické a geometrické posloupnosti. Znáte také vzorce pro součet prvých n členů aritmetické a geometrické posloupnosti. Prvý z nich nebudeme potřebovat; druhý zní v případě $a_1 = 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{3·2}$$

Vzorec (3·2) platí ovšem pouze pro $q \neq 1$. Dá se dokázati všelijak, na př. tak zvanou indukcí. Při důkaze indukcí se napřed přesvědčíme, že je vzorec správný pro $n = 1$ a potom z předpokladu, že vzorec platí pro určité n, odvodíme, že zůstane v platnosti, i když místo n máme $n + 1$. U vzorce (3·2) pro $n = 1$ smysl levé strany je číslo 1 a také pravá strana má hodnotu 1. Platí-li vzorec (3·2) pro určité n, jest

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + q^n =$$
$$= \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n (q - 1)}{q - 1} = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

takže vzorec platí i pro $n + 1$.

Cvičení **3.** T. zv. Fibonacciova (čti Fibonačiova) posloupnost je dána rekurentním předpisem $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Napište prvých dvacet členů posloupnosti! Dále dokažte vzorec

$$a_m a_n + a_{m+1} a_{n+1} = a_{m+n} \tag{3·3}$$

a z něho odvoďte, že součet čtverců dvou sousedních členů Fibonacciovy posloupnosti je zase člen téže posloupnosti. Přesvědčte se o tom v prvých deseti případech!

4. Aritmetické a geometrické středy. Aritmetickým středem prvých n členů posloupnosti (3·1) rozumíme číslo

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{4·1}$$

Cvičení 4. Dokažte, že b_n je nejvýš rovno největšímu a alespoň nejmenšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Věta 1. Když $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, pak je také $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$

Důkaz. Jest $a_1 < a_{n+1}$, $a_2 < a_{n+1}, \ldots, a_n < a_{n+1}$, tedy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < na_{n+1}.$$

Přičteme-li na obou stranách $n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, dostaneme

$$(n + 1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}).$$

Násobíme-li na obou stranách kladným číslem $1 : n\,(n + 1)$, vyjde

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n + 1}.$$

Cvičení 5. Když $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, pak je také $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

Cvičení 6. Budiž $q > 1$. Ve větě 1 volte $a_n = q^{n-1}$ a dokažte, že

$$\frac{q-1}{1} < \frac{q^2-1}{2} < \frac{q^3-1}{3} < \ldots$$

Cvičení 7. Budiž $q > 1$. Ve cvičení 5 volte $a_n = q^{-(n-1)}$ a dokažte, že

$$\frac{q-1}{q} > \frac{q^2-1}{2q^2} > \frac{q^3-1}{3q^3} > \ldots$$

Budiž $a_n > 0$ pro všecka n. Geometrickým středem prvých n členů posloupnosti (3·1) rozumíme kladné číslo

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{4·2}$$

Ve zbytku tohoto odstavce je $a_n > 0$.

Cvičení 8. Dokažte, že c_n je nejvýš rovno největšímu a alespoň rovno nejmenšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cvičení 9. Když $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, pak také $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$

Cvičení 10. Když $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, pak také $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$

Věta 2 (t. zv. věta Cauchyova).*) Jest

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{4·3}$$

Důkaz. I. Nejprve dokážeme, že (4·3) platí pro $n = 2$. Jest $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \geqq 0$, t. j. $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqq 0$, tedy $a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2}$ neboli

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}.$$

II. Při určitém n předpokládejme, že platí (4·3), tedy také

$$\sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}} \leqq \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n} \tag{4·4}$$

a dokažme, že je potom $c_{2n} \leqq b_{2n}$, neboli, že platnost vzorce (4·3) se zachová, píšeme-li v něm $2n$ místo n. Je však

$$c_{2n} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \,.\, \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}},$$

tedy podle (4·3) a (4·4)

$$c_{2n} \leqq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \,.\, \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}}.$$

Napravo máme geometrický střed dvou čísel, který podle odst. I je nejvýš roven aritmetickému středu týchž čísel. Tedy

$$c_{2n} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}\right) = b_{2n}.$$

III. Z I a II následuje indukcí, že (4·3) platí, je-li číslo n mocninou dvojky. Je-li nyní n libovolné, zvolme k tak, že $n < 2^k$ a všimněme si 2^k kladných čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \underbrace{c_n, c_n, \ldots, c_n}_{(2^k - n)\text{-krát}}.$$

Víme, že geometrický střed těchto 2^k čísel je nejvýš roven jejich aritmetickému středu, t. j. že

$$\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, c_n^{2^k - n}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2^k - n)\, c_n}{2^k}. \tag{4·5}$$

Avšak $a_1 a_2 \ldots a_n = c_n{}^n$, tedy $a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, c_n{}^{2^k - n} = c_n{}^{2^k}$, takže ve (4·5) nalevo je číslo c_n. Tedy

*) Čti Košiova.

$$2^k c_n \leqq a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^k - n) c_n,$$

takže

$$nc_n \leqq a_1 + a_2 + \dots + a_n = nb_n,$$

tedy $c_n \leqq b_n$.

Cvičení **11.** Proberte znovu důkaz věty 2 a dokažte, že ve (4·3) platí znamení rovnosti pouze tehdy, když všecka čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ si jsou rovna.

5. Limita posloupnosti. Nejdůležitější posloupnosti jsou konvergentní posloupnosti. Pravíme, že posloupnost (3·1) je konvergentní a že má limitu α, což píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha, \tag{5·1}$$

když pro všecka velká n je a_n přibližně rovné číslu α. Přesně řečeno, znamená vztah (5·1) toto: Je-li dáno libovolně malé kladné číslo ε, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je

$$| a_n - \alpha | < \varepsilon.$$

Totéž můžeme vyjádřiti stejně přesně různými jinými způsoby. Můžeme na př. také říci, že vztah (5·1) znamená toto: Je-li dán jakýkoli interval J, uvnitř kterého je bod α, pak jsou **skoro všecka** a_n uvnitř intervalu J. Rčení „skoro všecka“ znamená, že sice mohou existovati výjimečné indexy n, pro které tomu tak není, že však počet těch výjimečných n je jistě konečný.

Posloupnost (3·1) se nazývá nulová, je-li $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Cvičení **12.** Je-li posloupnost (3·1) konvergentní a má-li limitu α, pak posloupnost

$$a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, a_3 - \alpha, \dots \tag{5·2}$$

je nulová. Obráceně, je-li (5·2) nulová posloupnost, pak platí (5·1).

Cvičení **13.** Jsou-li (3·1) a

$$b_1, b_2, b_3, \dots \tag{5·3}$$

nulové posloupnosti, pak také $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Ze cvičení 12 a 13 plyne:

Věta 3. Platí-li (5·1) a

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \beta, \tag{5·4}$$

pak $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$.

Cvičení 14. Platí-li (5·1) a je-li c libovolné číslo, je $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$.

Posloupnost (3·1) se jmenuje **omezená**, existuje-li číslo c takové, že $|a_n| < c$ pro všecka n.

Cvičení 15. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Cvičení 16. Je-li (3·1) nulová posloupnost a je-li (5·3) omezená posloupnost, pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Věta 4. Platí-li (5·1) a (5·4), pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

Důkaz. Posloupnost

$$\alpha(b_1 - \beta),\ \alpha(b_2 - \beta),\ \alpha(b_3 - \beta),\ \ldots$$

je nulová podle cvič. 12 a 14; posloupnost

$$b_1(a_1 - \alpha),\ b_2(a_2 - \alpha),\ b_3(a_3 - \alpha),\ \ldots$$

je nulová podle cvič. 12, 15 a 16. Protože

$$a_n b_n - \alpha\beta = \alpha(b_n - \beta) + b_n(a_n - \alpha),$$

je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ podle cvič. 12 a 13.

Cvičení 17. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n; budiž $\alpha \neq 0$. Platí-li (5·1), pak

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots$$

je omezená posloupnost.

Věta 5. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n; budiž $\alpha \neq 0$. Platí-li (5·1), pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Důkaz. Podle cvič. 12 a 14 je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha}(a_n - \alpha) = 0$. Tedy podle cvič. 16 a 17 je také $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha a_n}(a_n - \alpha) = 0$. Avšak

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha a_n}(a_n - \alpha),$$

takže $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ podle cvič. 12.

Když posloupnost (3·1) není konvergentní, jmenuje se divergentní. Mezi divergentními posloupnostmi jsou pozoruhodné takové, pro něž

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty. \tag{5·5}$$

Vztah (5·5) znamená, že pro velká n jsou čísla a_n kladná a velká. Přesně řečeno, znamená (5·5) toto: Je-li dáno libovolně velké kladné číslo c, pak existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $a_n > c$. Jinak řečeno, skoro všecka a_n jsou větší než libovolně předepsané kladné číslo.

Vztah

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \tag{5·6}$$

znamená, že $\lim_{n \to \infty} (-a_n) = \infty$.

Limity konvergentních posloupností se jmenují vlastní limity; limity v (5·5) a (5·6) jsou nevlastní limity.

Cvičení 18. Udejte příklad divergentní posloupnosti, pro kterou neplatí ani (5·5) ani (5·6).

Cvičení 19. Budiž $a_n > 0$ pro všecka n. Je-li $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, je $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

Cvičení 20. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n. Platí-li (5·5) nebo (5·6), pak $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Věta 6. Budiž $q > 1$. Pak $\lim_{n \to \infty} q^n = \infty$.

Důkaz. Je-li q celé, je to zřejmé. Ale je-li q jen o málo větší než 1, na př. $q = 1{,}0001$, není to tak zřejmé. Avšak ze (3·2) plyne

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} > n,$$

takže $q^n > 1 + n(q - 1)$, tedy $\lim_{n \to \infty} q^n = \infty$.

Věta 7. Budiž $0 < q < 1$. Pak $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

To plyne z věty 6 a cvič. 20.

Říkáme, že (3·1) je:

[1] neklesající posloupnost, když

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots;$$

[2] nestoupající posloupnost, když

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots$$

Společný název pro oba případy je **monotonní posloupnost**. Mezi neklesající posloupnosti patří všecky **stoupající posloupnosti**, pro které

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

Mezi nestoupající posloupnosti patří všecky **klesající posloupnosti**, pro které

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

Věta 8. Budiž (3·1) neklesající posloupnost. Existuje-li číslo c takové, že $a_n \leqq c$ pro všecka n, pak posloupnost (3·1) je konvergentní.

Přesný důkaz této věty je udán ve VM, odst. 36, I. Z názoru je správnost věty celkem zřejmá. Každý bod a_{n+1} buďto splyne s bodem a_n nebo je od něho napravo. Protože však žádné a_n není napravo od bodu c, nezbývá patrně bodům a_n nic jiného, než aby se hromadily k určitému místu α, načež platí (5·1).

Věta 9. Budiž (3·1) nestoupající posloupnost. Existuje-li číslo c takové, že $a_n \geqq c$ pro všecka n, pak posloupnost (3·1) je konvergentní.

Důkaz. Zřejmě

$$-a_1, -a_2, -a_3, \dots \tag{5·7}$$

je neklesající posloupnost. Pro všecka n je $-a_n \leqq -c$, takže (5·7) je konvergentní podle věty 8. Tedy také (3·1) je konvergentní podle cvič. 14.

Dodatek k větě 8. Za předpokladů věty 8 budiž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Pak je $a_n \leqq \alpha$ pro všecka n. Je-li (3·1) stoupající posloupnost, je dokonce $a_n < \alpha$ pro všecka n.

Dodatek k větě 9. Za předpokladů věty 9 budiž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Pak je $a_n \geqq \alpha$ pro všecka n. Je-li (3·1) klesající posloupnost, je dokonce $a_n > \alpha$ pro všecka n.

Oba dodatky jsou zřejmé.

Věty 8 a 9 jsou velmi důležité pro vyšetřování limit. Prokážeme si to na dvou příkladech.

Příklad 1. Budiž $c > 0$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Pak je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \tag{5·8}$$

Důkaz. Víme-li, že naše posloupnost je konvergentní, je vše lehké. Neboť platí-li (5·1), pak je podle věty 3 $\lim_{n \to \infty} (c + a_n) = c + \alpha$ a podle věty 4 $\lim_{n \to \infty} a_n^2 = \alpha^2$. Protože je $a_{n+1}^2 = c + a_n$, musí býti $\alpha^2 = c + \alpha$. Mimoto zřejmě $a_n > 0$ pro všecka n, takže α nemůže býti záporné. Z toho následuje, že α je kladný kořen rovnice $\alpha^2 - \alpha - c = 0$, tedy

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \tag{5·9}$$

Celá potíž je jen v tom, že musíme napřed dokázat, že posloupnost (3·1) je konvergentní. Avšak

$$a_{n+1}^2 = c + a_n, \quad a_{n+2}^2 = c + a_{n+1},$$

takže

$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n.$$

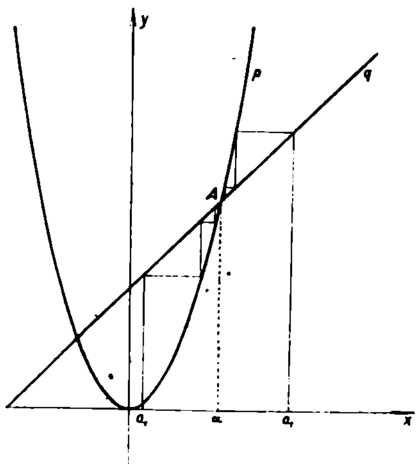
Jelikož $a_n > 0$ pro všecka n, plyne z toho, že diference

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_4 - a_3,\ \ldots \tag{5·10}$$

jsou buďto všecky rovny nule, nebo všecky kladné, nebo všecky záporné. Je tedy (3·1) monotonní posloupnost a podle vět 8 a 9 potřebujeme ještě jen vědět, že je to omezená posloupnost. Zvolme $k > c$, $k > a_1$, $k > 2$. Dokážeme, že $a_n < k$ pro všecka n. Protože $a_n > 0$, budeme hotovi. Nerovnost $a_n < k$ je zřejmá pro $n = 1$: je-li však správná pro určité n, pak je

$$a_{n+1}^2 = c + a_n < k + k = 2k < k^2,$$

takže také $a_{n+1} < k$.



Obr. 2.

Posloupnost, kterou jsme právě aritmeticky vyšetřili, dá se pěkně znázornit geometricky a výsledek (5·8) se pak zdá zřejmý. Viz obr. 2, ve kterém je silněji vytažena parabola p s rovnicí $y = x^2$ a přímka q s rovnicí $y = c + x$. Parabola p a přímka q se protnou ve dvou bodech, z nichž jeden leží napravo od osy y; je to bod $A \equiv (\alpha; c + \alpha)$, kde α má hodnotu (5·9). Zvolme si na ose x bod $(a_1; 0)$, kde a_1 je kladné a různé od α. Rovnoběžka s osou y vedená bodem $(a_1; 0)$ určí na přímce q bod $(a_1; c + a_1)$; rovnoběžka s osou x vedená bodem $(a_1; c + a_1)$ určí na parabole p bod $(a_2; c + a_1)$; rovnoběžka s osou y vedená bodem $(a_2; c + a_1)$ určí na přímce q bod $(a_2; c + a_2)$; rovnoběžka s osou x vedená bodem $(a_2; c + a_2)$ určí na parabole p bod $(a_3; c + a_2)$; a tak můžeme pokračovati dále. Obdržíme posloupnost bodů

$$(a_1; c + a_1), (a_2; c + a_1), (a_2; c + a_2), (a_3; c + a_2), (a_3; c + a_3), \ldots;$$

z názoru je patrné, že se tyto body blíží poloze $A \equiv (\alpha; c + \alpha)$, což je geometrické znázornění vztahu (5·8). Mimo to je z obrazce patrné, že posloupnost (3·1) stoupá, je-li $a_1 < \alpha$, a klesá, je-li $a_1 > \alpha$.

Cvičení 21. Dokažte aritmeticky, že právě studovaná posloupnost stoupá, je-li $a_1 < \alpha$, a klesá, je-li $a_1 > \alpha$.

Příklad 2. Budiž $c > 0$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{1 + a_n}$. Pak je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2}. \tag{5·11}$$

Důkaz. Víme-li, že (3·1) je konvergentní, je to zase snadné. Pro všecka n je $a_n > 0$; platí-li (5·1), je tedy $\alpha \geqq 0$. Podle vět 3, 5 a cvič. 14 je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c}{1 + a_n} = \frac{c}{1 + \alpha}.$$

Tedy

$$\alpha = \frac{c}{1 + \alpha}, \; \alpha \geqq 0$$

a z toho plyne

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2}. \tag{5·12}$$

Zase však musíme napřed dokázat, že posloupnost (3·1) je konvergentní. Je-li $a_1 = a_2$, je $a_n = \alpha$ pro všecka n; tento případ můžeme vyloučit, takže $a_2 - a_1 \neq 0$. Jest

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{c}{1 + a_{n+1}} - \frac{c}{1 + a_n} = \frac{-c}{(1 + a_{n+1})(1 + a_n)} (a_{n+1} - a_n)$$

neboli

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n).$$

Z toho následuje předně, že diference (5·10) jsou střídavě kladné a záporné, a za druhé, že absolutní hodnoty těch diferencí jsou stále menší a menší. Z toho pak plyne, že z posloupností

$$\begin{array}{l} a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots \\ a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots \end{array} \tag{5·13}$$

jedna stoupá a druhá klesá. Mimo to je jasné, že všecky členy leží mezi oběma čísly a_1, a_2, takže podle vět 8 a 9 jsou obě posloupnosti (5·13) konvergentní. Je tedy $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha_1$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha_2$ a zbývá patrně pouze dokázati, že $\alpha_1 = \alpha_2$. Podle dodatků k větám 8 a 9 je jistě $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Protože

$$a_{n+1} = \frac{c}{1 + a_n}, \text{ jest}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{c}{1 + \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{c}{1 + \lim_{n\to\infty} a_{2n}}$$

neboli

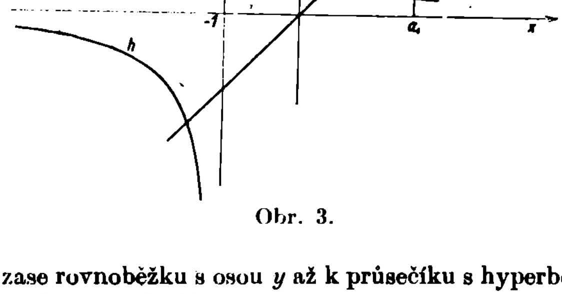
$$\alpha_2 = \frac{c}{1 + \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{c}{1 + \alpha_2}. \tag{5·14}$$

Z (5·14) se najde velmi snadným počtem $\alpha_1 = \alpha_2$. Ostatně můžeme z (5·14) usoudit $\alpha_1 = \alpha_2$ bez jakéhokoli počtu takto. Sestavíme-li znovu posloupnost vytvořenou naším rekurentním předpisem, volíce však místo čísla a_1 za prvý člen číslo α_1, tu podle (5·14) dostaneme posloupnost

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \tag{5·15}$$

o které tedy musí platiti vše, co bylo výše řečeno o posloupnosti (3·1). Z toho následuje $\alpha_1 = \alpha_2$, neboť jinak by absolutní hodnoty diferencí v posloupnosti (5·15) musily klesati, což je ovšem nemožné.

Také tento příklad se dá znázorniti geometricky. Viz obr. 3, ve kterém je silněji vytažena hyperbola h s rovnicí $y = \dfrac{c}{1 + x}$ a přímka q s rovnicí $y = x$. Hyperbola h a přímka q se protnou ve dvou bodech, z nichž jeden leží v prvém kvadrantu; je to bod $(\alpha; \alpha)$, kde α má hodnotu (5·12). Zvolme si na ose x bod $(a_1, 0)$, kde $a_1 > 0$, $a_1 \neq \alpha$. Bodem $(a_1; 0)$ veďme rovnoběžku s osou y až k jejímu průsečíku s hyperbolou h; tímto průsečíkem vedeme rovnoběžku s osou x až k průsečíku s přímkou q; novým průsečíkem vedeme zase rovnoběžku s osou y až k průsečíku s hyperbolou q atd. Tak dostaneme posloupnost bodů



Obr. 3.

$$(a_1; a_2), (a_2; a_2), (a_2; a_3), (a_3; a_3), \ldots, \tag{5·16}$$

které leží střídavě na hyperbole h a na přímce q. Z názoru je patrné, že se body (5·16) blíží poloze $(\alpha; \alpha)$, což je geometrické znázornění vztahu (5·11). Dále je z názoru patrné, že každý člen posloupnosti (3·1), členem a_3 počínajíc, leží mezi oběma předcházejícími členy, takže z posloupností (5·13) jedna stoupá a druhá klesá.

6. Řetězy intervalů. Členy posloupnosti nemusí býti vždycky čísla. Často je na př. užitečné vyšetřovati posloupnost intervalů. Důležité jsou takové posloupnosti intervalů

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{6·1}$$

u kterých je každý následující interval částí intervalu předcházejícího. Takovou posloupnost nazveme řetězem intervalů.

Cvičení 22. Je-li (6·1) řetěz intervalů, pak

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{6·2}$$

je neklesající posloupnost a

$$s_1, s_2, s_3, \ldots \tag{6·3}$$

je nestoupající posloupnost. Obráceně, když (6·2) je neklesající posloupnost, když (6·3) je nestoupající posloupnost a když

$$r_n < s_n \tag{6·4}$$

pro všecka n, pak (6·1) je řetěz intervalů.

Je-li (6·1) řetěz intervalů, pak posloupnost (6·2) je konvergentní podle věty 8 a cvičení 22; neboť zřejmě $r_n < s_1$ pro všecka n. Také posloupnost (6·3) je konvergentní podle věty 9 a cvičení 22, neboť zřejmě $s_n > r_1$ pro všecka n. Položme

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \alpha, \tag{6·5}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \beta. \tag{6·6}$$

Cvičení 23. Budiž (6·1) řetěz intervalů. Je-li $\alpha \leqq x \leqq \beta$, pak bod x leží ve všech intervalech (6·1). Obráceně, když bod x leží ve všech intervalech (6·1), jest $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Cvičení 24. Když bod x neleží ve všech intervalech řetězu (6·1), pak leží x nejvýš v konečně mnoha intervalech (6·1).

Zvláště důležité jsou takové řetězy intervalů, u kterých je $\alpha = \beta$. Takové řetězy nazveme vytvořující řetězy. Podle cvič. 23 mají vytvořující řetězy tu charakteristickou vlastnost, že existuje jediný bod x obsažený ve všech intervalech řetězu; je to ovšem bod $x = \alpha = \beta$. Určitěji mluvíme o vytvořujícím řetězu bodu x.

Cvičení 25. Je-li řetěz intervalů (6·1) vytvořující, pak je

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - r_n) = 0, \tag{6·7}$$

t. j. délky intervalů (6·1) tvoří nulovou posloupnost. Obráceně každý řetěz intervalů splňující podmínku (6·7) je vytvořující řetěz.

Cvičení 26. Budiž (6·1) řetěz intervalů a budiž $r_1 > 0$. Je-li

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{r_n} = 1, \tag{6·8}$$

pak (6·1) je vytvořující řetěz a obráceně, je-li (6·1) vytvořující řetěz (a stále $r_1 > 0$), pak platí (6·8).

Zvolme si libovolné číslo $c > 0$. Sestrojíme si určitý vytvořující řetěz bodu $\sqrt{c}$. Vyjděme od libovolného kladného čísla r_1 menšího než $\sqrt{c}$, takže $r_1^2 < c$, a položme

$$s_1 = \frac{c}{r_1}.$$

Pak je $s_1^2 > c$, takže bod $\sqrt{c}$ leží uvnitř intervalu $\langle r_1, s_1 \rangle$. Tím jsme si opatřili první interval hledaného řetězu. Tento interval splňuje podmínku

$$r_n s_n = c. \tag{6·9}$$

Je-li při určitém n dán interval $\langle r_n, s_n \rangle$ $(0 < r_n < s_n)$, splňující podmínku (6·9), pak položme

$$r_{n+1} = \frac{c}{s_{n+1}}, \quad s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2}. \tag{6·10}$$

Podle (6·9) je číslo $\sqrt{c}$ geometrickým středem čísel r_n a s_n. Číslo s_{n+1} je aritmetickým středem týchž čísel, takže $s^2_{n+1} > c$ podle věty 2 a cvič. 11. Z toho následuje $r^2_{n+1} < c$, takže číslo $r_{n+1} < \sqrt{c} < s_{n+1}$. Tedy $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ je interval, uvnitř kterého je bod $\sqrt{c}$. Ježto

$$r_n < s_n, \quad s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2},$$

je $s_{n+1} < s_n$. Ježto

$$r_n = \frac{c}{s_n}, \quad r_{n+1} = \frac{c}{s_{n+1}}, \quad 0 < s_{n+1} < s_n,$$

je $r_n < r_{n+1}$. Tedy celý interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ leží uvnitř intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$, takže (6·1) je řetěz intervalů. Mají-li α a β význam (6·5) a (6·6), tu ze vztahu

$$2s_{n+1} = r_n + s_n$$

následuje $2\beta = \alpha + \beta$ neboli $\alpha = \beta$. Tedy (6·1) je vytvořující řetěz a to ovšem vytvořující řetěz bodu $\sqrt{c}$, který leží uvnitř všech intervalů (6·1).

Vytvořující řetězy, o kterých jsme právě mluvili, poskytují velmi pohodlný prostředek k výpočtu druhých odmocnin na velký počet desetinných míst. Počítejme na př. $\sqrt{10}$. Volme $r_1 = 3$. Pak je $s_1 = \frac{10}{3}$, $s_2 = \frac{19}{6}$, $r_2 = \frac{60}{19}$, $s_3 = \frac{721}{228}$, $r_3 = \frac{2280}{721}$, $s_4 = \frac{1039681}{328776}$, $r_4 = \frac{3287760}{1039681}$. Dělením najdeme

$$\begin{aligned} s_4 &= 3{,}162\,277\,660\,169\,842\,080\,930\,481\,543\,664\ldots, \\ r_4 &= 3{,}162\,277\,660\,166\,916\,583\,067\,306\,221\,812\ldots \end{aligned} \tag{6·11}$$

Porovnáním vyjde prvých 11 desetinných míst čísla $\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,660\,16\ldots$ Můžeme však bez dalšího dělení určit spolehlivě mnohem více míst. Položme

$$s_n = \sqrt{c} + \varepsilon_n, \tag{6·12}$$

takže $\varepsilon_n > 0$ a

$$s_n = \sqrt{c}\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right), \quad r_n = \frac{\sqrt{c}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}}.$$

Pak je

$$s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\left[1 + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}} + \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,\frac{\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,\frac{2 + \dfrac{2\varepsilon_n}{\sqrt{c}} + \dfrac{\varepsilon_n^2}{c}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}} =$$

$$= \sqrt{c}\left[1 + \frac{\varepsilon_n^2}{2c\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right)}\right] < \sqrt{c}\left(1 + \frac{\varepsilon_n^2}{2c}\right) = \sqrt{c} + \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{c}}.$$

Tedy

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{c}}. \tag{6·13}$$

Ze (6·10) dostaneme sečtením a dělením dvěma

$$s_5 = 3{,}162\,277\,660\,168\,379\,331\,998\,893\,882\,738\ldots,$$

při čemž poslední místo není úplně spolehlivé. Ze (6·13) plyne, že s_5 je mnohem lepší přiblížení k číslu $\sqrt{10}$ nežli s_4, takže jistě

$$\varepsilon_4 = s_4 - \sqrt{c} < 2\,.\,10^{-12}.$$

Tedy podle (6·13)

$$\varepsilon_5 = s_5 - \sqrt{c} < \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot 10^{-24},$$

a z toho následuje, že čísla s_5 a $\sqrt{c}$ jistě souhlasí v prvých 24 desetinných místech, takže

$$\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,660\,168\,379\,331\,998\,893\ldots$$

Cvičení 27. Počítejte podobně $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

Nyní si hodláme definovati pomocí vytvořujícího řetězu velmi důležité číslo. Napřed si dokažme, že

$$\text{když } x > -1,\ n = 2, 3, 4, \ldots, \text{ pak } (1 + x)^n > 1 + nx. \qquad (6{\cdot}14)$$

Pro $n = 2$ je $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, neboť $x^2 > 0$. Budiž pro určitém $n \geqq 2$ už dokázáno, že $(1 + x)^n > 1 + nx$. Tuto nerovnost můžeme na obou stranách násobit **kladným** číslem $(1 + x)$ a dostaneme $(1 + x)^{n+1} > (1 + nx)(1 + x)$. Avšak

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)\,x + nx^2 > 1 + (n + 1)\,x,$$

neboť $nx^2 > 0$. Tedy $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,x$ a důkaz je hotov.

Věta 10. Posloupnost

$$(1 + \tfrac{1}{1})^1,\ (1 + \tfrac{1}{2})^2,\ (1 + \tfrac{1}{3})^3,\ (1 + \tfrac{1}{4})^4,\ \ldots$$

stoupá.

Důkaz. V (6·14) volme $x = -\dfrac{1}{n^2}$, což je pro $n > 1$ dovoleno, neboť je $x > -1$. Dostaneme

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{(n^2 - 1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n}.$$

Protože $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, dostaneme, násobíce na obou stranách kladným číslem $\dfrac{n^n}{(n-1)^n}$,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \text{t. j.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Věta 11. Posloupnost

$$(1 + \tfrac{1}{1})^2,\ (1 + \tfrac{1}{2})^3,\ (1 + \tfrac{1}{3})^4,\ (1 + \tfrac{1}{4})^5,\ \ldots$$

klesá.

Důkaz. Podle (6·14) je pro $x > -1$, $n \geqq 1$: $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,x$. Pro $n > 1$ můžeme dosaditi $x = \dfrac{1}{n^2 - 1}$ a dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n-1}, \text{ t. j. } \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} > \frac{n}{n-1}.$$

Násobíme-li na obou stranách kladným číslem $\frac{(n-1)(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$, vyjde

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{ t. j. } \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Z vět 10 a 11 a ze cvič. 26 následuje, že (6·1) je vytvořující řetěz určitého čísla, klademe-li

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Toto číslo označujeme v matematice písmenem e. Je tedy e definováno nerovnostmi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{6·15}$$

které platí pro $n = 1, 2, 3, \ldots$; také můžeme říci, že e je definováno vztahem

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{6·16}$$

nebo vztahem

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e. \tag{6·17}$$

Délky intervalů našeho vytvořujícího řetězu se blíží nule velmi pomalu, takže z naší definice se dá číslo e jen velmi nepohodlně počítat. To nevadí, protože v odst. 16 poznáme jinou velmi pohodlnou cestu k výpočtu čísla e (viz cvič. 80).

Abychom se přesvědčili, jak pomalu se délky našich intervalů blíží nule, volme v (6·15) $n = 500$, tedy počítejme

$$r_{500} = (1 + \tfrac{1}{500})^{500} = (\tfrac{1002}{1000})^{500}, \quad s_{500} = (1 + \tfrac{1}{500})^{501} = (\tfrac{1002}{1000})^{501}.$$

Výpočet provedeme pomocí Valouchových logaritmických tabulek. Musíme najít napřed log 1002. Chceme-li najíti pětimístné logaritmy čísel r_{500}, s_{500}, potřebujeme najít log 1002 na osm míst. Za tím účelem rozložíme 1002 na prvočinitele: $1002 = 2 \,.\, 3 \,.\, 167$ a užijeme logaritmů prvočísel v dílu X Valouchových tabulek. Takto dostaneme na osm míst $\log 1002 = 3{,}0008\,6772$ a z toho už najdeme snadno na pět míst $\log r_{500} = 0{,}43386$; $\log s_{500} = 0{,}43473$, takže je s pěticifernou přesností

$$r_{500} = 2{,}7156; \quad s_{500} = 2{,}7210.$$

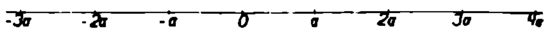
Tedy ač jsme volili veliké $n = 500$, dostali jsme hodnotu e pouze na dvě desetinná místa.

Cvičení 28. Počítejte podobně $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ pro $n = 10$, 50, 100, 300, 1000.

7. **Aritmetické svazky.** Zvolme si určité kladné číslo a a mysleme si na číselné ose všecky násobky čísla a, kladné i záporné i nulu, tedy čísla

$$\ldots, -4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots$$

Celá číselná osa se nám rozdělí na nekonečně mnoho intervalů, které mají všeckou touž délku a a které číselnou osu celou pokryjí, ale nikde se nepřekrývají (viz obr. 4).



Obr. 4.

Takové rozdělení číselné osy nazveme aritmetickou stupnicí a číslo a nazveme základem stupnice. Tedy aritmetická stupnice se základem a se skládá z nekonečně mnoha intervalů se společnou délkou a. Krajní body těch intervalů nazveme dělicí body naší stupnice. Dělicí body můžeme rozložit na dvě aritmetické posloupnosti, totiž

$$0, a, 2a, 3a, \ldots$$

a

$$-a, -2a, -3a, \ldots$$

Proto jsme dali naší stupnici název „aritmetická“.

Je-li dána určitá aritmetická stupnice a zvolíme-li si jakýkoli bod x, tu mohou nastati dva případy. Buďto x je dělicí bod naší stupnice; v tomto případě náleží x do dvou intervalů stupnice a je pro jeden z nich levým krajním bodem, pro druhý pravým krajním bodem. Nebo x není dělicí bod naší stupnice; v tomto případě náleží x do jediného intervalu stupnice a je vnitřním bodem tohoto intervalu.

Ačkoli dělicí body nevyplní celou číselnou osu, můžeme, volíce za základ malé číslo a, nahraditi každý jiný bod x přibližně některým dělicím bodem, totiž jedním z obou krajních bodů toho intervalu stupnice, uvnitř kterého je bod x. Je-li na př. $a = 0{,}0001$, pak dělicí body jsou čísla, která mají za desetinnou čárkou 4 cifry a každé jiné číslo můžeme nahraditi takovým číslem „přesně na čtyři desetinná místa“.

Tedy dělicí body aritmetické stupnice postačí k určení kteréhokoli bodu, připustíme-li chyby menší než určité malé kladné číslo a, které bereme za základ stupnice. V praxi jsou chyby menší než určitá mez vždycky bezvýznamné. Ale v teoretických úvahách musíme určovati čísla přesně bez jakékoli chyby. Toho docílíme, zavedeme-li současně nekonečně mnoho aritmetických stupnic.

Budeme postupovati takto: Zvolíme si určité kladné číslo a a zavedeme posloupnost aritmetických stupnic. Základem prvé stupnice bude číslo $a_1 = a$. Označíme-li obecně základ n-té stupnice znakem a_n, bude a_{n+1} polovina čísla a_n, takže obecně bude

$$a_n = \frac{a}{2^n}. \tag{7·1}$$

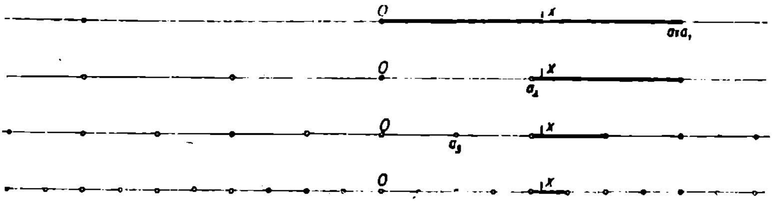
Čísla a_n tvoří tedy geometrickou posloupnost s prvním členem a a s kvocientem $\frac{1}{2}$. Podle cvič. 14 a věty 7 je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{7·2}$$

což je ostatně aritmeticky i geometricky zřejmé. Právě popsanou posloupnost aritmetických stupnic se základy

$$a_1 = a,\ a_2 = \frac{a}{2},\ a_3 = \frac{a}{4},\ a_4 = \frac{a}{8},\ \ldots$$

nazveme aritmetickým svazkem a číslo a nazveme základem svazku. Tedy základem aritmetického svazku je základ prvé stupnice svazku. V obr. 5 jsou naznačeny prvé čtyři stupnice aritmetic-



Obr. 5.

kého svazku. Pro jasnost obrazce je každá stupnice na jiné přímce; ale musíme si ovšem představovat všecky stupnice na jediné přímce. Bodu x a silně vytažených intervalů si zatím nevšímejte; bude o nich brzy řeč.

Dělicím bodem aritmetického svazku rozumíme každý bod x, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě každý dělicí bod aritmetického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li M nějaká soustava bodů na číselné ose, pak řekneme, že M leží hustě na číselné ose, když ke každému bodu x a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod z patřící do soustavy M a vzdálený od bodu x o méně než ε.

Cvičení **29.** Dělicí body aritmetického svazku leží hustě na číselné ose.

Cvičení **30.** Budiž M soustava bodů. Leží-li M hustě na číselné ose, pak uvnitř každého intervalu je nekonečně mnoho bodů soustavy M. Obráceně, když víme, že v každém intervalu leží aspoň jeden bod soustavy M, pak M leží hustě na číselné ose.

Cvičení **31.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné ose, pak: [1] nalevo od každého bodu je nějaký bod soustavy M; [2] napravo od každého bodu je nějaký bod soustavy M; [3] je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$ a jsou-li dány dva různé body soustavy M, lze mezi ně vsunouti konečný počet dalších bodů soustavy M tak, aby vzdálenost dvou sousedních bodů byla vždy menší než ε. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1], [2] a [3], leží M hustě na číselné ose.

Cvičení **32.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné ose pak ke každému bodu x lze určiti posloupnost (3·1), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy M, a pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží M hustě na číselné ose.

Ačkoli dělicí body aritmetického svazku leží na číselné ose hustě, přece jen nevyplní číselnou osu, nýbrž existují také body x, které nejsou dělicími body svazku. Volíme-li na př. $a = 1$, pak dělicími body svazku jsou ta čísla, která lze psáti ve tvaru zlomku se jmenovatelem rovným některému z čísel

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Ani číslo $\frac{1}{3}$ ani číslo $\sqrt{2}$ nelze tak psáti; proto to nejsou dělicí body svazku.

Zvolme x tak, že x není dělicím bodem daného aritmetického svazku. Pro každé n máme v n-té stupnici svazku určitý interval $\langle r_n, s_n\rangle$, uvnitř kterého leží bod x. Zřejmě interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ je buďto levou nebo pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n\rangle$, takže

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{7·3}$$

je řetěz intervalů. Ze (7·2) následuje podle cvič. 25, že (7·3) je vytvořující řetěz; protože bod x je uvnitř všech intervalů (7·3), je (7·3) vytvořující řetěz bodu x. Řekneme, že (7·3) je aritmetický řetěz bodu x. V obr. 5 jsou silně vytaženy prvé čtyři intervaly takového aritmetického řetězu.

Cvičení **33.** Budiž dán aritmetický svazek. Zvolme v každé stupnici svazku interval $\langle r_n, s_n \rangle$, takže dostaneme posloupnost intervalů (7·3). Když (7·3) je aritmetický řetěz nějakého bodu, který není dělicím bodem svazku, pak: [1] pro každé n je $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ buďto levou nebo pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$; [2] je nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ je levou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$ i nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ je pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (7·3) aritmetický řetěz určitého bodu x, který není dělicím bodem daného aritmetického svazku.

Cvičení **34.** Budiž x dělicí bod aritmetického svazku. Pak lze dvojím způsobem vybrati pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ z n-té stupnice svazku interval $\langle r_n, s_n \rangle$ tak, aby (7·3) byl vytvořující řetěz bodu x. Je-li p nejmenší z těch hodnot indexu n, pro které je x dělicím bodem n-té stupnice svazku, pak je x u jednoho z obou řetězů stále levým, u druhého stále pravým krajním bodem n-tého intervalu, a to pro všecka $n \geq p$; pro $n < p$ je interval $\langle r_n, s_n \rangle$ u obou řetězů stejný a obsahuje bod x uvnitř.

Cvičení **35.** Budiž $a = 1$ základ aritmetického svazku. Aritmetický řetěz bodu $\frac{1}{7}$ začíná intervaly

$$\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, \tfrac{1}{2} \rangle, \langle 0, \tfrac{1}{4} \rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4} \rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{16} \rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{5}{32} \rangle, \langle \tfrac{9}{64}, \tfrac{5}{32} \rangle, \langle \tfrac{9}{64}, \tfrac{19}{128} \rangle.$$

Aritmetický řetěz bodu $\sqrt{2}$ začíná intervaly

$$\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, \tfrac{3}{2} \rangle, \langle \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2} \rangle, \langle \tfrac{11}{8}, \tfrac{3}{2} \rangle, \langle \tfrac{11}{8}, \tfrac{23}{16} \rangle, \langle \tfrac{45}{32}, \tfrac{23}{16} \rangle, \langle \tfrac{45}{32}, \tfrac{91}{64} \rangle, \langle \tfrac{181}{128}, \tfrac{91}{64} \rangle.$$

8. Racionální a iracionální čísla.

Racionální číslo je takové reálné číslo x, které je kořenem lineární rovnice $ax + b = 0$, ve které $a \neq 0$ a b jsou čísla celá. Tedy na př.

$$0, 2, -5, \tfrac{1}{7}, -\tfrac{12}{5}$$

jsou racionální čísla. Iracionální číslo je reálné číslo, které není racionální. Na př. $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Neboť kdyby existovala dvě celá čísla a, b taková, že $a \neq 0$ a $a\sqrt{2} + b = 0$, mohli bychom krácením docíliti toho, že by z čísel a, b bylo aspoň jedno liché. Bylo by

$$2a^2 - b^2 = (a\sqrt{2} + b)(a\sqrt{2} - b) = 0,$$

tedy $b^2 = 2a^2$. Proto by číslo b bylo sudé, takže by a bylo liché. Mohli bychom položiti $b = 2c$, kde také c by bylo celé číslo. Pak by bylo $a^2 = 2c^2$. Protože a je liché, je to nemožné.

Zvolíme-li $a = 1$ za základ aritmetického svazku, pak všecky dělicí body svazku jsou racionální čísla. Tedy ze cvič. 29 plyne, že racionální čísla leží hustě na číselné ose. Z toho následuje snadno, že také čísla tvaru $x + \sqrt{2}$, kde x probíhá všecka racionální čísla, leží hustě na číselné ose. Ale zřejmě je $x + \sqrt{2}$ iracionální, je-li x racionální. Proto také iracionální čísla leží hustě na číselné ose.

Budiž dána rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{8·1}$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou čísla celá ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$). Racionální kořeny této rovnice (jsou-li jaké), dají se snadno najíti. Racionální kořen lze psáti ve tvaru $\frac{r}{s}$, kde $r \neq 0$ a $s \neq 0$ jsou čísla celá. Můžeme předpokládati, že je $s > 0$ a že čísla r, s jsou nesoudělná (jinak bychom mohli zlomek $\frac{r}{s}$ krátit). Protože $\frac{r}{s}$ je kořen rovnice (8·1), jest

$$a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \ldots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0.$$

Z toho následuje

$$a_0r^n = s \,.\, [-a_1r^{n-1} - \ldots - a_{n-1}rs^{n-2} - a_ns^{n-1}], \tag{8·2}$$

$$a_ns^n = r \,.\, [-a_0r^{n-1} - a_1r^{n-2}s - \ldots - a_{n-1}s^{n-1}]. \tag{8·3}$$

Z (8·2) plyne, že číslo $\frac{a_0r^n}{s}$ je celé. Je tedy možné zlomek $\frac{a_0r^n}{s}$ krátit číslem s a protože čísla r a s jsou nesoudělná, lze také zlomek $\frac{a_0}{s}$ krátit číslem s, t. j. číslo s je dělitel čísla a_0. Stejně se odvodí z (8·3), že číslo r je dělitel čísla a_n. Protože každé celé číslo různé od nuly má jen konečný počet dělitelů, máme pro zlomek $\frac{r}{s}$ jen konečný počet možností, takže zbývá pouze, abychom se o konečném počtu určitých racionálních čísel přesvědčili dosazením, vyhovují-li rovnici (8·1).

Příklad. $10x^3 + 7x^2 - 18x - 9 = 0$. Číslo 10 má dělitele ± 1, ± 2, ± 5, ± 10; číslo 9 má dělitele ± 1, ± 3, ± 9. Tedy v úvahu přichází 24 čísel

$$\frac{\pm 1}{1}, \frac{\pm 3}{1}, \frac{\pm 9}{1}, \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm 3}{2}, \frac{\pm 9}{2}, \frac{\pm 1}{5}, \frac{\pm 3}{5}, \frac{\pm 9}{5}, \frac{\pm 1}{10}, \frac{\pm 3}{10}, \frac{\pm 9}{10}. \tag{8·4}$$

Dosazením se můžeme přesvědčit, že jediné z nich, totiž číslo $-\frac{3}{2}$, je kořenem dané rovnice.

I ve zvoleném jednoduchém příkladě bylo hledání racionálních kořenů dosti pracné, protože čísel přicházejících v úvahu je dosti mnoho. Ale můžeme si výpočet zkrátit takto. Zvolme si libovolné celé číslo c. Levou stranu rovnice (8·1) si označme $f(x)$. Položme $x = c + t$. Pak je

$$f(c+t) = a_0(c+t)^n + a_1(c+t)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(c+t) + a_n;$$

jednotlivé mocniny dvojčlenu $c + t$ můžeme rozvésti podle binomické věty a dostaneme

$$f(c+t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \ldots + b_{n-1}t + b_n, \tag{8·5}$$

kde $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ jsou patrně čísla celá. Má-li rovnice $f(x) = 0$ kořen $x = \frac{r}{s}$, má patrně rovnice $f(c+t) = 0$ kořen

$$t = -c + \frac{r}{s} = \frac{r-cs}{s}.$$

Jsou-li r, s čísla nesoudělná, jsou patrně také $r - cs$, s čísla nesoudělná (neboť každý společný dělitel čísel $r - cs$, s je také dělitelem čísla $r - cs + cs = r$). Proto musí býti $r - cs$ dělitelem čísla b_n a s musí býti dělitelem čísla b_0. Druhý z těchto poznatků není ničím novým, neboť snadno se najde, že $b_0 = a_0$; a že s je dělitelem čísla a_0, to už víme. Hodnotu b_n můžeme určiti pohodlně bez binomické věty, dosadíme-li $t = 0$ do identity (8·5). Vyjde $b_n = f(c)$, takže náš výsledek zní: ať si jakkoli zvolíme celé číslo c, musí býti $r - cs$ dělitelem čísla $f(c)$. Nyní se vraťme k našemu příkladu a volme za c jednak číslo 1, jednak číslo -1. Ježto $f(1) = -10$, $f(-1) = 6$, dostaneme:

$$r - s \text{ je dělitelem čísla } 10; \tag{8·6}$$

$$r + s \text{ je dělitelem čísla } 6. \tag{8·7}$$

Ze 24 čísel (8·4) vyhovují podmínce (8·6) pouze čísla

$$\frac{-1}{1}, \frac{+3}{1}, \frac{-9}{1}, \frac{+1}{2}, \frac{+3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{+3}{5}, \frac{9}{10}$$

a podmínce (8·7) pouze čísla

$$\frac{+1}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{+1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{+1}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{9}{10}.$$

Oběma podmínkám zároveň vyhovují pouze tři čísla, totiž, $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ a $\frac{9}{10}$ a dosazením se přesvědčíme, že pouze $-\frac{3}{2}$ je kořenem dané rovnice.

Cvičení 36. Určete racionální kořeny rovnice

$$\begin{aligned}&\text{a)}\ 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0,\\ &\text{b)}\ 4x^6 + 13x^5 + 16x^4 + 23x^3 - 5x^2 - 45x + 18 = 0,\\ &\text{c)}\ 2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0.\end{aligned}$$

Cvičení 37. Jsou-li koeficienty rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

čísla celá a je-li x racionální kořen rovnice, pak x je číslo celé. Proto na př. čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$ atd. jsou jistě iracionální.

Budiž α iracionální číslo. Je-li dáno celé kladné číslo s, pak v aritmetické stupnici se základem $\frac{1}{s}$ budiž $\frac{r}{s}$ ten dělicí bod, který je bodu α nejblíž. Protože α je iracionální, nemůže ležet uprostřed mezi dvěma dělicími body; proto vzdálenost α od $\frac{r}{s}$ je menší než $\frac{1}{2s}$. Tedy: Ke každému celému $s > 0$ existuje celé r tak, že zlomek $\frac{r}{s}$ aproximuje iracionální číslo α s chybou menší než $\frac{1}{2s}$, neboli že

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s}. \tag{8·8}$$

Uvidíme, že je vždy nekonečně mnoho takových s, která dávají lepší aproximaci než (8·8).

Věta 12. Budiž α iracionální číslo. Budiž n celé kladné číslo. Pak existují celá čísla r, s taková, že $0 < s \leq n$ a

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{sn}. \tag{8·9}$$

Důkaz. Všimněme si aritmetické stupnice se základem 1. Každé z čísel

$$1 \,.\, \alpha,\ 2 \,.\, \alpha,\ 3 \,.\, \alpha,\ \ldots,\ (n+1)\,\alpha$$

leží uvnitř určitého intervalu naší stupnice. To znamená, že existují celá čísla $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ taková, že diference

$$1 \,.\, \alpha - r_1,\ 2 \,.\, \alpha - r_2,\ 3 \,.\, \alpha - r_3,\ \ldots,\ (n+1)\,\alpha - r_{n+1} \tag{8·10}$$

leží uvnitř intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Interval $\langle 0, 1\rangle$ můžeme rozděliti na n menších intervalů

$$\langle 0, \frac{1}{n}\rangle, \quad \langle \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\rangle, \ \ldots, \ \langle \frac{n-1}{n}, 1\rangle \tag{8·11}$$

a každé z čísel (8·10) leží uvnitř jednoho z intervalů (8·11). Počet čísel (8·10) je $n + 1$, kdežto intervalů (8·11) je pouze n. Proto musí býti mezi intervaly (8·11) aspoň jeden, uvnitř kterého jsou aspoň dva z bodů (8·10). Budiž J takový interval. Existují tedy celá čísla h, k taková, že $0 < h < k \leqq n + 1$ a že oba body

$$h\alpha - r_h, \ k\alpha - r_k \tag{8·12}$$

leží uvnitř intervalu J. Vzdálenost bodů (8·12) musí býti menší nežli $\frac{1}{n}$, neboť $\frac{1}{n}$ je délka intervalu J. Tedy

$$|(k - h)\,\alpha - (r_k - r_h)| < \frac{1}{n}.$$

Položme $k - h = s$, $r_k - r_h = r$. Pak jsou čísla r a s celá, jest $0 < < s \leqq n$ a $|s\alpha - r| < \frac{1}{n}$, z čehož plyne (8·9).

Cvičení **38.** Je-li číslo α racionální, pak zůstane věta 12 v platnosti, napíšeme-li nerovnost (8·9) ve slabším tvaru

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \leqq \frac{1}{sn}.$$

Cvičení **39.** Z věty 12 odvoďte, že ke každému iracionálnímu číslu α existuje nekonečně mnoho racionálních čísel $\frac{r}{s}$ (r, s celá; $s > 0$) takových, že

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^2}. \tag{8·13}$$

Dá se dokázati, že nerovnost (8·13) se dá nahraditi ostřejší nerovností

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{cs^2}, \tag{8·14}$$

ve které c je číslo větší než 1. Při tom lze voliti $c = \sqrt{5}$. Je-li však $c > \sqrt{5}$, tu lze jak uvidíme, voliti iracionální číslo α tak, že jen konečný počet zlomků $\frac{r}{s}$ může vyhověti nerovnosti (8·14).

Iracionální čísla dělíme na algebraická a transcendentní. Reálné číslo x se nazývá algebraické, je-li kořenem rovnice (8·1), jejíž koeficienty jsou čísla celá ($a_0 \neq 0$). Volíme-li rovnici (8·1) tak, aby její stupeň n byl co nejmenší, pak číslo n se jmenuje stupeň algebraického čísla x. Reálné číslo je transcendentní, není-li algebraické.

Cvičení **40.** Racionální číslo je algebraické číslo stupně 1. Obráceně každé algebraické číslo stupně 1 je racionální.

Věta 13. Budiž α reálné algebraické číslo stupně $k \geqq 2$. Pak existuje $c > 0$ takové, že počet zlomků $\frac{r}{s}$, pro něž

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{cs^k}, \tag{8·15}$$

je konečný. Je-li α kořenem rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je mnohočlen k-ho stupně s celými koeficienty, pak můžeme za c voliti kterékoli číslo větší než $|f'(\alpha)|$. (Čárka znamená derivaci. O derivacích viz VM.)

Důkaz. Budiž $c > |f'(\alpha)|$ a předpokládejme, že je nekonečně mnoho zlomků vyhovujících nerovnosti (8·15). Musíme ukázat, že náš předpoklad je nemožný. Při daném jmenovateli s je jistě počet zlomků s vlastností (8·15) konečný. Proto z našeho předpokladu plyne, že existuje posloupnost

$$\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \frac{r_3}{s_3}, \ldots,$$

ve které r_n a $s_n > 0$ jsou čísla celá, $s_n < s_{n+1}$ a

$$\left|\alpha - \frac{r_n}{s_n}\right| < \frac{1}{cs_n^k} \tag{8·16}$$

pro všecka n. Z (8·15) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \alpha. \tag{8·17}$$

Podle definice derivace je tedy [jest $f(\alpha) = 0$]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) - f(\alpha)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha} = f'(\alpha). \tag{8·18}$$

To je však nemožné. Neboť rovnice $f(x) = 0$ má, jak známo, jen konečný počet kořenů, takže lze udati interval J, uvnitř kterého má ta rovnice jen jediný kořen $x = \alpha$. Podle (8·17) existuje index p takový, že pro $n > p$ leží $\frac{r_n}{s_n}$ uvnitř J. Protože α je iracionální a $\frac{r_n}{s_n}$ je racionální, je $\frac{r_n}{s_n} \neq \alpha$. Proto pro $n > p$ je jistě $f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) \neq 0$. Ježto však $f(x)$ je mnohočlen k-ho stupně s celými koeficienty, dá se číslo $f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)$ psáti ve tvaru

$$f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) = \frac{u_n}{s_n^k},$$

kde u_n je číslo celé. Tedy pro $n > p$ je $|u_n| \geqq 1$, takže

$$\left|f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)\right| \geqq \frac{1}{s_n^k}.$$

Z této nerovnosti a z (8·16) následuje však, že pro $n > p$ je

$$\left|\frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha}\right| > c.$$

Protože $c > |f'(\alpha)|$, je tedy vztah (8·18) nemožný.

Nyní se snadno přesvědčíme, že v (8·14) nelze voliti $c > \sqrt{5}$. Neboť volme $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Číslo α je iracionální a je kořenem rovnice druhého stupně $f(x) = 0$, kde $f(x) = x^2 - x - 1$. Tedy α je algebraické číslo druhého stupně. Jest $f'(\alpha) = 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$, takže $c > f'(\alpha)$. Z toho plyne podle věty 13 (ve které $k = 2$), že jen konečný počet zlomků může vyhovovati nerovnosti (8·14).

Cvičení 41. Různými způsoby můžeme rekurentně vytvořit posloupnost intervalů

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{8·19}$$

s těmito vlastnostmi. [1] Pro všecka n jsou r_n racionální čísla. [2] Každý interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ leží uvnitř předcházejícího. [3] Existují celá čísla

$$0 < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$$

taková, že pro všecka n je

$$s_n = r_n + \frac{1}{c_n^{c_n}}.$$

Pak (8·19) je vytvořující řetěz transcendentního čísla α.

Číslo e [viz (6·15)] je transcendentní. Číslo π je transcendentní. Dekadický logaritmus kladného čísla celého, které není mocninou deseti, je transcendentní. Je-li $c > 1$ celé a je-li α iracionální, pak c^α je transcendentní. Tyto zajímavé výsledky můžeme zde pouze uvésti bez jakéhokoli důkazu.