DODATEK.

Poznámka k definici určitého integrálu.

Ve větě 31 jsme dokázali: má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b ($a < b$), má funkce $f(x)$ tuto vlastnost:

(A) Budiž $D_1, D_2, \ldots$ libovolná posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež hoví podmínce $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Dělicí body rozdělení D_m buďte

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{n_m, m} = b.$$

Pro každou hodnotu m ($m = 1, 2, \ldots$) budiž dáno n_m čísel $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n_m, m}$ tak, že platí $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n_m$. Potom existuje

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m}. \tag{1}$$

(Při tom značíme $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m}$.)

Dokonce víme, že limita (1) se rovná integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ (ať byla rozdělení D_m a čísla $\xi_{i,m}$ zvolena jakkoliv, ovšem tak, aby vyhovovala podmínkám v (A) vytčeným).

Dokážeme nyní též naopak: *Jestliže funkce $f(x)$, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, nemá určitý integrál od a do b, potom nemá také vlastnost* (A).[1])

---

[1]) Tedy funkce, definovaná v $\langle a, b\rangle$, má určitý integrál od a do b tehdy a jen tehdy, má-li vlastnost (A). Je tedy možno použíti vlastnosti (A) k definici určitého integrálu, t. j. lze určitý integrál definovati takto: je-li $a < b$ a má-li funkce $f(x)$, definovaná v interv. $\langle a, b\rangle$, vlastnost (A), nazýváme limitu (1) určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (značka $\int_a^b f(x)\,dx$) a říkáme potom, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Tuto poznámku jsem pojal do této knížky jen proto, aby čtenář nepřišel do rozpaků, setká-li se někde s touto definicí určitého integrálu; neboť mnozí autoři jí užívají.

Důkaz. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ označme znakem D_m ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy body $a = x_{0,m} < < x_{1,m} < \ldots < x_{m,m} = b$, kdež $x_{i,m} = a + \frac{i}{m}(b - a)$, takže[2])

$$\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = \frac{1}{m}(b - a), \quad \varrho(D_m) = \frac{1}{m}(b - a),$$

$\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Předpokládejme nyní, že funkce $f(x)$, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, nemá určitý integrál od a do b. Potom buďto funkce $f(x)$ není v int. $\langle a, b\rangle$ ohraničena, nebo je sice v int. $\langle a, b\rangle$ ohraničena, ale platí nerovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

I. Nechť nastane především první případ, t. j. nechť funkce $f(x)$ není ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li celé kladné číslo m zvoleno, existuje aspoň jeden interval $\langle x_{j-1,m}, x_{j,m}\rangle$ $(1 \leqq j \leqq m)$, v němž funkce $f(x)$ není ohraničena.[3]) Zvolme takové j a položme

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} f(x_{i,m})\,\Delta x_{i,m} = K_m.\text{[4])}$$

Ježto funkce $f(x)$ není ohraničena v intervalu $\langle x_{j-1,m}, x_{j,m}\rangle$, existuje aspoň jedno číslo — označme je $\xi_{j,m}$ — takové, že je

$$x_{j-1,m} \leqq \xi_{j,m} \leqq x_{j,m}, \quad \left| f(\xi_{j,m})\frac{b-a}{m} + K_m \right| > m.$$

Položíme-li ještě $\xi_{i,m} = x_{i,m}$ pro $i \neq j$, $1 \leqq i \leqq m$, máme

$$x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \right| = \left| K_m + f(\xi_{j,m})\frac{b-a}{m} \right| > m.$$

---

[2]) Přidržujeme se označení kap. II, odst. 3; tedy $\varrho(D_m) = \mathrm{Max}\,(\Delta x_{1,m}, \Delta x_{2,m}, \ldots, \Delta x_{m,m})$.

[3]) Jinak by totiž funkce $f(x)$ byla podle věty 9 ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$.

[4]) Sčítá se tedy přes všechna i od 1 do m, s vyloučením hodnoty $i = j$.

Posloupnost čísel

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

není tedy ohraničena (její m-tý člen má absolutní hodnotu větší než m) a nemá tedy limitu (Kössler 19, věta a). Tedy funkce $f(x)$ nemá vlastnost (A).

II. Zbývá nyní vyšetřiti ještě druhý případ. Nechť tedy funkce $f(x)$ je ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost (2). Označme znakem $\mu_{i,m}$ resp. $\mathsf{M}_{i,m}$[5]) dolní resp. horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1,m}, x_{i,m}\rangle$; zvolme nyní čísla $\xi_{i,m}$ takto.

Je-li m sudé, t. j. $m = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, volme $\xi_{i,2k}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, 2k$) tak, že je $x_{i-1,2k} \leqq \xi_{i,2k} \leqq x_{i,2k}$, $f(\xi_{i,2k}) < \mu_{i,2k} + \frac{1}{2k}$[6]) (a ovšem je $f(\xi_{i,2k}) \geqq \mu_{i,2k}$). Potom je tedy

$$\left| \sum_{i=1}^{2k} f(\xi_{i,2k})\, \Delta x_{i,2k} - \sum_{i=1}^{2k} \mu_{i,2k}\, \Delta x_{i,2k} \right| < \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} \Delta x_{i,2k} = \frac{1}{2k}(b-a). \tag{3}$$

Je však $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(D_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k}(b-a) = 0$; podle věty 29 je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k} \mu_{i,2k}\, \Delta x_{i,2k} = \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x$$

a tedy podle (3) též

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k} f(\xi_{i,2k})\, \Delta x_{i,2k} = \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Je-li za druhé m liché, $m = 2k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, volme $\xi_{i,2k+1}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, 2k + 1$) tak, že je

$$x_{i-1,2k+1} \leqq \xi_{i,2k+1} \leqq x_{i,2k+1},\ f(\xi_{i,2k+1}) > \mathsf{M}_{i,2k+1} - \frac{1}{2k+1}\,{}^{7})$$

---

[5]) Volím znaky μ, M místo znaků m, M (kterých jsme užívali v kap. II), abych se vyhnul kolisi s indexem m u rozdělení D_m.

[6]) Takové $\xi_{i,2k}$ existuje podle druhé vlastnosti dolní hranice (viz větu 5).

(a ovšem je $f(\xi_{i,2k+1}) \leqq \mathsf{M}_{i,2k+1}$). Potom je tedy

$$\left| \sum_{i=1}^{2k+1} f(\xi_{i,2k+1})\, \Delta x_{i,2k+1} - \sum_{i=1}^{2k+1} \mathsf{M}_{i,2k+1}\, \Delta x_{i,2k+1} \right| <$$

$$< \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{2k+1} \Delta x_{i,2k+1} = \frac{1}{2k+1}\, (b - a). \tag{5}$$

Je však $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(D_{2k+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k+1}\,(b-a) = 0$: podle věty 27 je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k+1} \mathsf{M}_{i,2k+1}\, \Delta x_{i,2k+1} = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

a tedy podle (5) též

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k+1} f(\xi_{i,2k+1})\, \Delta x_{i,2k+1} = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx. \tag{6}$$

Sestrojme nyní opět posloupnost čísel

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Kdyby tato posloupnost měla nějakou limitu C, měly by všechny posloupnosti, vybrané z posloupnosti (7), touž limitu C.[8]) Ale tomu tak není: neboť vybereme-li z posloupnosti (7) posloupnost všech členů se sudým indexem ($m = 2k$), má tato posloupnost podle vzorce (4) limitu $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$; kdežto posloupnost všech členů s lichým indexem ($m = 2k + 1$) má podle (6) limitu $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$; a podle nerovnosti (2) tyto limity *nejsou* stejné. Posloupnost (7) tedy nemá limitu a funkce $f(x)$ nemá tedy vlastnost (A). Tím je naše tvrzení úplně dokázáno.

[7]) Takové $\xi_{i,2k+1}$ existuje podle druhé vlastnosti horní hranice (viz větu 4).

[8]) Kössler 19, věta *b*.