KAPITOLA III.

Systémy diferenciálních rovnic

§ 1. Existenční teorém.[1/]

Budeme se zabývat rovnicemi a systémy rovnic "rozřešenými podle nejvyšších derivací"; podle kap. I § 4 víme, že se při tom můžeme omezit na systémy tvaru

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Budeme potřebovat opět tzv. Lipschitzovu podmínku, ale tentokráte pro funkce většího počtu proměnných. Definujme tedy : Funkce $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ budiž definována ve všech bodech jisté množiny $A \subset E_{m+n}$. Říkáme potom, že funkce f splňuje v A Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $y_1, \ldots, y_n$ (a to Lipschitzovu podmínku s konstantou N), jestliže

$$(2) \quad ([x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \in A, \; [x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n] \in A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|f(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) - f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)| \leq$$

$$\leq N(|z_1 - y_1| + \ldots + |z_n - y_n|)).$$

Příklad 1. Jestliže každá "rovina ", $x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m$ protíná A v prázdné nebo v konvexní otevřené množině [2/], jestliže f má v A parciální diferenciál vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$ a jestliže v A platí $\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}\right| \leq N$ ($j = 1, \ldots, n$), potom platí (2). Neboť z premisy této implikace plyne podle Taylorovy formule pro funkce několika proměnných (viz např. můj Diferenciální počet II, věta 203 a hlavně poznámka 1 k ní)

$$|f(x, z) - f(x, y)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y_j}(z_j - y_j)\right| \leq N \sum_{j=1}^{n} |z_j - y_j| ;$$

1/ Až do konce bude nyní opět vše reálné.

2/ Míním ovšem otevřenost v té rovině $x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m$.

přitom ovšem x, y, z, η značí zkratky pro $[x_1,\ldots,x_m]$,

$[y_1,\ldots,y_n]$, $[z_1,\ldots,z_n]$, $[\eta_1,\ldots,\eta_n]$,

a bod $[x,\eta]$ leží na úsečce spojující body $[x,y]$, $[x,z]$, takže též $[x,\eta]\in A$.

Nechť opět $f(x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_n)$ je definována všude v $A\subset E_{m+n}$. Budeme říkat, že f splňuje v A <u>lokálně</u> Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$, jestliže ke každému $[x,y]\in A$ existuje okolí $\mathcal{O}$ tak, že f splňuje v $\mathcal{O}A$ Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$ (pro různé body $[x,y]$ mohou ovšem vyjít různé hodnoty "Lipschitzovy konstanty" N).

<u>Příklad 2.</u> Nechť f má v otevřené množině A spojité derivace $\frac{\partial f}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial y_n}$. Potom f splňuje v A lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$.

Důkaz: Plyne téměř okamžitě z příkl.1.

<u>Věta 24</u> (pomocná: zobecnění věty 1.). Nechť omezená funkce $f(x,y) = f(x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_n)$ splňuje v kompaktní množině A lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$. Potom f splňuje v A Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$.

Důkaz: Jestliže to není pravda, existuje ke každému přirozenému q dvojice bodů $[x^{(q)}, y^{(q)}]\in A$, $[x^{(q)}, z^{(q)}]\in A$ tak, že

$$\left|f(x^{(q)}, y^{(q)}) - f(x^{(q)}, z^{(q)})\right| > q\sum_{j=1}^{n}\left|z_j^{(q)} - y_j^{(q)}\right|.$$

Ježto levá strana zde zůstává omezená, je

$$\lim_{q\to+\infty}\left|z_j^{(q)} - y_j^{(q)}\right| = 0$$

Existuje vybraná posloupnost konvergentní:

$$\lim_{k\to\infty}\left[x^{(q_k)}, y^{(q_k)}\right] = [\xi,\eta]\in A .$$

Jest ovšem také

$$\lim_{k\to\infty} [x^{(q_k)}, z^{(q_k)}] = [\xi, \eta] .$$

Přitom je

$$|f(x^{(q_k)}, y^{(q_k)}) - f(x^{(q_k)}, z^{(q_k)})| > q_k \sum_{j=1}^{n} |z_j^{(q_k)} - y_j^{(q_k)}| ,$$

takže f nesplňuje Lipschitzovu podmínku v žádné množině tvaru $\mathcal{O}A$, kde $\mathcal{O}$ je okolí bodu $[\xi, \eta]$ - spor.

Vraťme se nyní k systému (1). Je-li $\mathcal{J}$ nějaký (jednorozměrný) interval, říkáme, že funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ tvoří v $\mathcal{J}$ řešení systému (1), jestliže rovnice (1) jsou splněny pro každé $x \in \mathcal{J}$, když do nich za y_j dosadím funkce $y_j(x)$ a za $\frac{dy_j}{dx}$ derivace těchto funkcí. Přitom v počátečním bodě a intervalu $\mathcal{J}$ - patří-li tento bod k $\mathcal{J}$ - rozumím derivací derivaci zprava, tj. požaduji splnění rovností

$$y'_{j+}(a) = f_j(a, y_1(a), \ldots, y_n(a)) ;$$

podobně v koncovém bodě. Říkáme, že řešení

$$y_1(x), \ldots, y_n(x) \qquad (x \in \mathcal{J})$$

"leží v množině $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$", jestliže pro každé $x \in \mathcal{J}$ je $[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)] \in \mathcal{D}$. A nyní vyslovíme "lokální" větu o existenci a jednoznačnosti.

<u>Věta 25.</u> Nechť $f_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ ($j = 1, \ldots, n$) jsou v intervalu

$$\mathcal{J} : |x - x_0| \le a, |y - y_1^{(0)}| \le b, |y_2 - y_2^{(0)}| \le b, \ldots, |y_n - y_n^{(0)}| \le b$$

($a > 0$, $b > 0$, x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ daná čísla) spojité (a tedy omezené: $|f_j(x, y_1, \ldots, y_n)| \le M$, $M > 0$ a splňují v $\mathcal{J}$ Lipschitzovu podmínku (s konstantou $N > 0$) vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$. Položme $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Potom platí:

1) Existuje řešení $y_1(x), \dots, y_n(x)$ systému (1) v intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, které "prochází bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$", tj. $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}$. Toto řešení leží v $\mathcal{J}$.

2) Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li $z_1(x), \dots, z_n(x)$ řešením v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ ($x_0 - h \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq x_0 + h$) a je-li $z_1(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, z_n(x_0) = y_n^{(0)}$, je $z_1(x) = y_1(x), \dots, z_n(x) = y_n(x)$ pro všechna $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$

Důkaz. Připomeňme, že systém (1) spolu s "počátečními podmínkami" $y_j(x_0) = y_j^{(0)}$ je ekvivalentní se systémem integrálních rovnic

$$(3) \qquad y_j(x) = \int_{x_0}^{x} f_j(t, y_1(t), \dots, y_n(t))\,dt + y_j^{(0)}$$

(pro $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$; $j = 1, \dots, n$).

1) Existence. Užiji opět metody postupných aproximací. Kladu

$$(4) \qquad y_1^{(0)}(x) = y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}(x) = y_n^{(0)}$$

a pro celé $q \geq 0$ definuji

$$(5) \qquad y_j^{(q+1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f_j(t, y_1^{(q)}(t), \dots, y_n^{(q)}(t))\,dt + y_j^{(0)}$$

($j = 1, \dots, n$).

Dokáži, že je to možné; k tomu cíli dokáži indukcí, že funkce $y_j^{(q)}(x)$ jsou spojité pro $|x - x_0| \leq h$ a že pro tato x je $|y_j^{(q)} - y_j^{(0)}| \leq b$ (neboť splňují-li $y_j^{(q)}$ tuto podmínku, lze z (5) definovat $y_j^{(q+1)}$. Podtržená věta platí pro $q = 0$ a platí-li pro jisté q, jsou podle (5) funkce $y_j^{(q+1)}$ pro zmíněná x spojitá a splňují nerovnosti

$$|y_j^{(q+1)} - y_j^{(0)}| \leq |x - x_0| \cdot M \leq h \cdot M \leq b .$$

Nyní dokážeme pro $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ nerovnost

(6) $$\left|y_j^{(q)}(x) - y_j^{(q-1)}(x)\right| \le MN^{q-1}\,\frac{n^{q-1}|x-x_0|^q}{q\,!}\ .$$

Vskutku tato nerovnost platí pro $q = 1$:

$$\left|y_j^{(1)}(x) - y_j^{(0)}(x)\right| \le |x-x_0|\ .M\ .$$

Platí-li pak (6) pro jisté q , plyne z (5) a z Lipschiztovy podmínky

$$\left|y_j^{(q+1)}(x) - y_j^{(q)}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t,y_1^{(q)}(t),\dots,y_n^{(q)}(t)) - f_j(t,y_1^{(q-1)}(t),\dots,y_n^{(q-1)}(t))\right)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} N\,.\,n\,.\,M.N^{q-1}\,\frac{n^{q-1}|t-x_0|^q}{q!}\,dt\right| = MN^q\,\frac{n^q\,|x-x_0|^{q+1}}{(q+1)\,!}\ .$$

Tím je (6) dokázáno.

Položme pro $j = 1,\dots,n$, $|x - x_0| \le h$

$$y_j(x) = \lim_{q\to+\infty} y_j^{(q)}(x) = y_j^{(0)}(x) + \sum_{q=1}^{\infty}\left(y_j^{(q)}(x) - y_j^{(q-1)}(x)\right);$$

tato řada je stejnoměrně konvergentní v intervalu $|x - x_0| \le h$, neboť tam má podle (6) konvergentní majorantu

$$\frac{M}{Nn}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(Nn\,h)}{q\,!} = \frac{M}{Nn}\,(e^{Nnh} - 1)\ .$$

Odtud a ze spojitosti funkcí f_j plyne, že v (5) můžeme přejít k limitě $q \to +\infty$ za integračním znamením a dostaneme (3).

2) Jednoznačnost. Budiž $z_1(x),\dots,$ $z_n(x)$ řešení v intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ takové, o jakém se mluví v tvrzení 2) naší věty. Nechť není $y_1(x) = z_1(x),\dots,$ $y_n(x) = z_n(x)$ pro všechna $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$, takže funkce

$$\chi(x) = |y_1(x) - z_1(x)| + \dots + |y_n(x) - z_n(x)|$$

má v jistém bodě $x_1 \in \langle\alpha,\beta\rangle$ hodnotu $\chi(x_1) \ne 0$. Z toho odvodíme spor. Budiž třeba $x_1 > x_0$ (pro $x_1 < x_0$ je důkaz obdobný; v bodě x_0 je ovšem $\chi(x_0) = 0$). Budiž x_2 supremem oněch čísel x intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$, pro něž $\chi(x) = 0$ a tedy $x_0 \leq x_2 < x_1 \leq \beta \leq x_0 + h$.

Podle (3) je

$$|y_j(x_2) - y_j^{(0)}| \leq |x_2 - x_0| \,.\, M < M \,.\, h \leq b ,$$

takže bod $[x_2, y_1(x_2), \ldots, y_n(x_2)] = [x_2, z_1(x_2), \ldots, z_n(x_2)]$ leží uvnitř našeho intervalu $\mathcal{J}$. Lze tedy zvolit $\delta > 0$ tak malé, že platí:

a) $x_2 + \delta < x_1$

b) pro $|x - x_2| < \delta$ je $[x, z_1(x), \ldots, z_n(x)] \in \mathcal{J}$

c) $\delta < \frac{1}{nN}$

Pro $x_2 < x \leq x_1$ je $\chi(x) \neq 0$ (tedy > 0), takže číslo

$$A = \max_{x_2 \leq x \leq x_2 + \delta} \chi(x) \text{ je kladné.}$$

Dále máme pro $x_2 \leq x \leq x_2 + \delta$ (ježto $z_j(x_2) = y_j(x_2)$)

$$y_j(x) = \int_{x_2}^{x} f_j(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\,dt + y_j(x_2) ,$$

$$z_j(x) = \int_{x_2}^{x} f_j(t, z_1(t), \ldots, z_n(t))\,dt + y_j(x_2)$$

a tedy podle Lipschitzovy podmínky

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{n} |y_j(x) - z_j(x)| \leq n \,.\, \Big| \int_{x_2}^{x} N(|y_1(t) - z_1(t)| + \ldots$$

$$\ldots + |y_n(t) - z_n(t)|)\Big|dt = n\Big|\int_{x_2}^{x} N\,\chi(t)\Big|dt \leq nNA\delta$$

Tato nerovnost platí i pro tu hodnotu x, pro kterou $\chi(x) = A$; tedy

$$A \leq nNA\delta , \quad 1 \leq nN\delta ,$$

což je ve sporu s volbou čísla δ.

§ 2. Existenční věta " ve velkém". Charakteristiky.

Podotkněme jednu samozřejmost: Jestliže funkce $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ dávají řešení systému (1) např. v intervalu $(a, b\rangle$ a funkce $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ dávají řešení systému (1) v intervalu $\langle b, c)$ a je-li

$$y_1(b) = z_1(b), \ldots, y_n(b) = z_n(b) ,$$

potom snadno najdeme řešení $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ v intervalu (a, c) : stačí položit $Y_j(x) = y_j(x)$ pro $a < x \leq b$, $Y_j(x) = z_j(x)$ pro $b \leq x < c$. Jde totiž jen o to, zda funkce Y_j splňují systém (1) v bodě b ,a to zde je zřejmé, neboť

$$Y'_{j-}(b) = y'_{j-}(b) = f_j(b, y_1(b), \ldots, y_n(b)) = f_j(b, Y_1(b), \ldots, Y_n(b))$$

a rovněž

$$Y'_{j+}(b) = z'_{j+}(b) = f_j(b, z_1(b), \ldots, z_n(b)) = f_j(b, Y_1(b), \ldots, Y_n(b)) .$$

Nechť nyní funkce f_j v (1) splňují lokálně Lipschitzovu podmínku v jisté otevřené množině $D \subset E_{n+1}$ (vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$). Zvolme libovolný bod $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}$; k tomu se dá sestrojit interval

$$\mathcal{K} = \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle \times \langle y_1^{(0)} - b, y_1^{(0)} + b\rangle \times \ldots$$
$$\ldots \times \langle y_n^{(0)} - b, y_n^{(0)} + b\rangle , \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{D}$$ tak, jak bylo popsáno ve

větě 25, načež existuje řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, definované pro $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ ležící v $\mathcal{K}$ a procházející bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$. Toto řešení se " vpravo " končí v bodě $[x_0 + h, y_1(x_0 + h), \ldots, y_n(x_0 + h)]$ a dá se "prodloužit" z tohoto bodu doprava (a podobně doleva od bodu $[x_0 - h, y_1(x_0 - h), \ldots$ $\ldots, y_n(x_0 - h)]$) - tak jak jsme popsali v kapitole I § 2. Zrovna tak jako v kapitole I, § 2 "prodloužíme" nyní toto řešení doprava i doleva tak daleko, jak je to možno. Přesně řečeno: Vyjdu z bodu $P = [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}$; budiž B supremum oněch hodnot $b > x_0$, pro něž existuje řešení v intervalu $\langle x_0, b)$, procházející bodem P a ležící v $\mathcal{D}$. Potom existuje[3/]

3/Důkazy následujících tvrzení jsou úplně stejné jako v kap.I. § 2.

řešení v intervalu $\langle x_0, B)$, ležící v $\mathfrak{D}$ a procházející bodem P. Podobně budiž A infinum oněch hodnot $a < x_0$, pro něž existuje řešení v intervalu $(a, x_0\rangle$, procházející bodem P a ležící v $\mathfrak{D}$. Potom existuje řešení v intervalu (A, B), procházející bodem P a ležící v $\mathfrak{D}$. Toto řešení nazvu <u>charakteristikou</u> systému (1) pro otevřenou množinu $\mathfrak{D}$ (určenou bodem P). Každým bodem otevřené množiny $\mathfrak{D}$ prochází nějaká charakteristika; dvě charakteristiky, mající společný bod, jsou totožné; a konečně každé řešení systému (1), které leží v $\mathfrak{D}$, je částí některé charakteristiky. Toto všechno nebudu znova dokazovat - důkazy jsou doslova tytéž jako pro $n = 1$. Dále se dá dokázat (podobně jako v kap. I § 2 pro $n = 1$), že se každá charakteristika na obou koncích "neomezeně blíží hranici oboru $\mathfrak{D}$".

Celý výsledek tohoto paragrafu je dán následující větou (jež je zobecněním věty 3).

<u>Věta 26.</u> Nechť v otevřené množině $\mathfrak{D} \subset E_{n+1}$ funkce $f_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ ($j = 1, \ldots, n$) jsou spojité a splňují lokálně Lipschitzovu podmínku.

1) Potom každým bodem $P = [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathfrak{D}$ prochází právě jedno řešení

(7) $$y_1(x), \ldots, y_n(x)$$

systému

(1) $$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

které má tyto vlastnosti : leží v $\mathfrak{D}$ a každé řešení $z_1(x), \ldots$ $\ldots, z_n(x)$, procházející bodem P a ležící v $\mathfrak{D}$, je částí řešení (7). Toto řešení nazýváme charakteristikou systému (1) pro otevřenou množinu $\mathfrak{D}$ (určenou bodem P). Oborem této charakteristiky je jistý otevřený interval $\mathcal{J}_P = \mathcal{J}_{[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]}$ (obsahující ovšem bod x_0).

2) Každé řešení systému (1), ležící v $\mathfrak{D}$, je částí některé charakteristiky.

3) Dvě charakteristiky, které mají společný bod, jsou totožné [4].

4/ Tato tři tvrzení nebudu dokazovat; důkaz je týž jako v kap. I § 2 pro speciální případ $n = 1$.

4/ Definujme systém funkcí

(8) $\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ $(j = 1,\dots,n)$

takto: Systém rovnic

(9) $y_j = \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ $(j = 1,\dots,n)$

značí, že bod $[x, y_1, \dots, y_n]$ leží na charakteristice, procházející bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$.

Systém funkcí (8) je tedy definován pro

$$[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] \in \mathfrak{D}, \quad x \in \mathcal{J}_{[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]}$$

a nikde jinde. Systém funkcí (8) nazvu charakteristickým systémem systému (1) pro oblast $\mathfrak{D}$.

5) Platí ekvivalence

$$(10) \quad \begin{cases} (y_j = \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \text{ pro } j = 1,\dots,n) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y_j^{(0)} = \varphi_j(x_0; x, y_1, \dots, y_n) \text{ pro } j = 1,\dots,n). \end{cases}$$

Dále je

$$(11) \qquad y_j^{(0)} = \varphi_j(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$$

pro $j = 1,\dots,n$, $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] \in \mathfrak{D}$.

6) Budiž $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jistá charakteristika s oborem (a, b).[5/]

Potom platí:

a) Jestliže $x_p < b$, $\lim_{p \to +\infty} x_p = b$, potom posloupnost bodů

5/ To znamená: Existuje jistý bod $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] \in \mathfrak{D}$ tak, že

$$(a, b) = \mathcal{J}_{[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]}$$

a že

$$y_j(x) = \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$$

pro $j = 1,\dots,n$, $x \in (a, b)$.

$$[x_p, y_1(x_p), \dots, y_n(x_p)] \qquad (p = 1,2,3,\dots)$$

nemá žádný hromadný bod v $\mathcal{D}$ (podobně pro $x_p > a$, $\lim_{p\to+\infty} x_p = a$).

b) [6] Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $b' < b$ tak, že pro každé $x \in (b', b)$ je buďto

$$\operatorname{dist}\left([x, y_1(x), \dots, y_n(x)],\ H(\mathcal{D})\right) < \varepsilon$$

nebo

$$\max\left(|x|, |y_1(x)|, \dots, |y_n(x)|\right) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Podobně pro bod a.

Důkaz: Řekl jsem již, že důkazy bodů 1), 2), 3) je zbytečno provádět - viz kap. I § 2.

Bod 4) je prostě definice charakteristického systému. Co se týče bodu 5), je věc velmi snadná. Jestliže

$$y_j = \varphi_j(x;\ x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \dots, n),$$

značí to, že charakteristika, určená bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$ obsahuje též bod $[x, y_1, \dots, y_n]$; je to tedy současně charakteristika, určená bodem $[x, y_1, \dots, y_n]$ - a na ní leží bod $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$, tj.

$$y_j^{(0)} = \varphi_j(x_0;\ x, y_1, \dots, y_n).$$

Tím je dokázáno (10). Formule (11) je samozřejmá: říká, že bod $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$ leží na charakteristice, určené právě tímto bodem.

Bod 6) se dokáže podobně jako ve větě 3.

§ 3. Závislost řešení na počátečních hodnotách a na parametrech.

Zobecníme napřed větu 4 na systém (1). Mějme charakteristický systém

$$(12) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x;\ x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x;\ x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \end{cases}$$

[6] 6)b) znamená opět totéž jako 6)a).

pro obor $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$. Definičním oborem tohoto systému funkcí ($n+2$ proměnných) je tato množina $\mathcal{D}_1 \subset E_{n+2}$:

$$[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D} \ , \ x \in J_{[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]}$$

Přitom při daných $x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ přecházejí funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ve funkce jediné proměnné x :

$$y_1(x) \ , \dots, \ y_n(x) \ ,$$

které tvoří řešení systému (1) (a to "největší řešení" neboli charakteristiku), procházející bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$.
Zase nás zajímá, zda toto řešení závisí spojitě na "počátečních podmínkách" $x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$. Platí toto přímé zobecnění věty 4.

<u>Věta 27.</u> Nechť funkce $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1, \dots, n)$ jsou spojité a splňující lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, \dots, y_n$ v otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$. Budiž (12) charakteristický systém systému (1) (pro obor $\mathcal{D}$). Potom definičním oborem funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je jistá otevřená množina $\mathcal{D}_1 \subset E_{n+2}$ a funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou spojité v $\mathcal{D}_1$.

Důkaz: nebudu provádět, je analogický jako u věty 4. Naznačím jenom malé změny. Bude vhodné definovat

$$\operatorname{dist}([x, y_1, \dots, y_n], [\xi, \eta_1, \dots, \eta_n]) = \max(|x - \xi|, |y_1 - \eta_1|, \dots$$
$$\dots, |y_n - \eta_n|)$$

Přirozeně: místo o jednu nerovnost

$$|\varphi(x; x_0, y_0) - \varphi(\xi, \xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

jde o n takových nerovností (pro všechny funkce φ_j) a podobně dále.

V (22) (z kap. I) je vhodno definovat nyní

$$\tau = \max_{1 \le j \le n} |y_j^{(0)} - \eta_j^{(0)}| + M|x_0 - \xi_0| \ ,$$

načež máme

$$|\bar{y}_j^{(0)} - y_j^{(0)}| \leq \tau$$

jako ve (23) (z kap.I.). Místo funkcí $\psi(x)$ (v (17) viz kap.I), $\Theta(x)$ v (24) z kap.I) máme opět vždy n takových funkcí. V odhadech (29) - (30) musíme ovšem index n nahradit nějakým jiným písmenem, třeba p (n je zadáno) a místo (29) dostaneme

$$|\Theta_j(x) - \psi_j(x)| \leq \tau \sum_{k=0}^{q} \frac{N^k n^k |x-x_0|^k}{k!} + \Delta \frac{N^{q+1} n^{q+1} |x-x_0|^{q+1}}{(q+1)!}$$

(To n se tam dostane z Lipschitzovy podmínky

$$|f_j(t, \Theta_1(t), \ldots, \Theta_n(t)) - f_j(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))| \leq$$

$$\leq n \cdot N \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |\Theta_j(t) - \psi_j(t)|)$$

Podobně v (30) místo N bude $N \cdot n$ a konečná kvantitativní formulace v (33) bude tato:

Je-li

$$(13) \quad \begin{cases} \xi_{-1} < x_0 < \xi_1, \qquad \xi_{-1} < x < \xi_1 \\ (|y_j^{(0)} - \eta_j^{(0)}| + M|x_0 - \xi_0|)\, e^{Nn(\xi_1 - \xi_{-1})} < \rho \\ (|y_j^{(0)} - \eta_j^{(0)}| + M|x_0 - \xi_0|)\, e^{Nn(\xi_1 - \xi_{-1})} + M|x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

pro $j = 1, \ldots, n$, potom jsou hodnoty $\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ definovány a je

$$|\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) - \varphi_j(\xi; \xi_0, \eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_n^{(0)})| < \varepsilon$$

pro $j = 1, \ldots, n$.

A nyní větu 27 ještě o něco zobecníme. Představme si, že systém

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

popisuje průběh nějakého fysikálního děje: nechť třeba x značí čas a $y_1, \ldots, y_n$ nějaké další fysikální veličiny, takže rovnice (1) udávají zákonitost, podle které tyto veličiny závisí na čase. Aby průběh fysikálního děje byl určen, musíme podle existenční věty určit (řekněme třeba: změřit hodnoty $y_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, y_n^{(0)}$, kterých nabývají veličiny $y_1, \ldots, y_n$ v jistém okamžiku x_0. Ježto okamžik x_0 i hodnoty $y_1^0, \ldots, y_n^0$ dovedeme v praxi stanovit jen přibližně, je důležité se přesvědčit, že zatížíme-li x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ malými chybami, bude také příslušné řešení, dané charakteristickým systémem

$$(12) \qquad \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

zatíženo malou chybou; že tomu tak vskutku jest, ukázali jsme ve větě 27.

Ale v praxi bývá věc ještě trochu složitější. Pravé strany rovnice (1) závisí často ještě na určitých veličinách (např. nějakých hmotách, koeficientech tření, odporech,samoindukcích atd.), takže rovnice (1) mají vlastně tvar

$$(14) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; \mu_1, \ldots, \mu_m) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

a pro každý speciální systém hodnot " parametrů " $\mu_1, \ldots, \mu_m$ dostáváme vlastně jiný systém diferenciálních rovnic. Parametry, pokud je stanovíme měřením, dovedeme ovšem také stanovit pouze přibližně a je tedy pro nás také ještě důležité zjistit, že charakteristický systém systému (14) 7/

$$(15) \qquad \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

se málo změní, jestliže změníme dostatečně málo parametry $\mu_1, \ldots, \mu_m$. To nyní za jistých předpokladů vskutku dokážeme, a to velmi lehce: převedeme totiž jednoduchým obratem otázku závislosti řešení na parametrech na otázku závislosti na počátečních podmínkách.

Nechť funkce ($m + n + 1$ proměnných)

$$(16) \qquad f_j(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

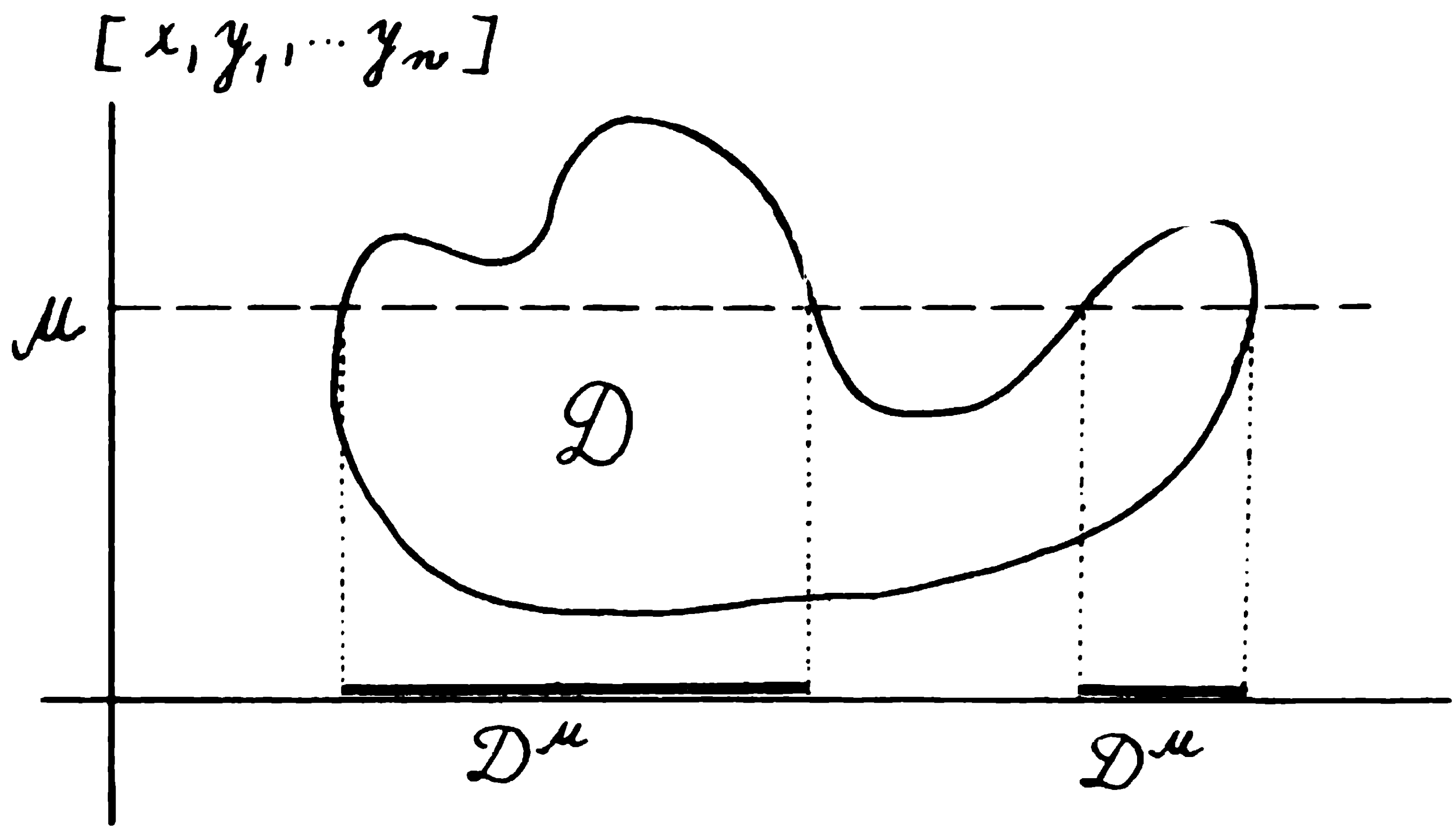
7/ Tento charakteristický systém ovšem nyní závisí též na parametrech $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

jsou definovány v nějaké množině $\mathcal{D} \subset E_{m+n+1}$. Jestliže zvolíme nějak čísla $\mu_1, \dots, \mu_m$, stanou se funkce (16) funkcemi pouze $n+1$ proměnných, které jsou definovány pro ta $x, y_1, \dots, y_n$, pro něž

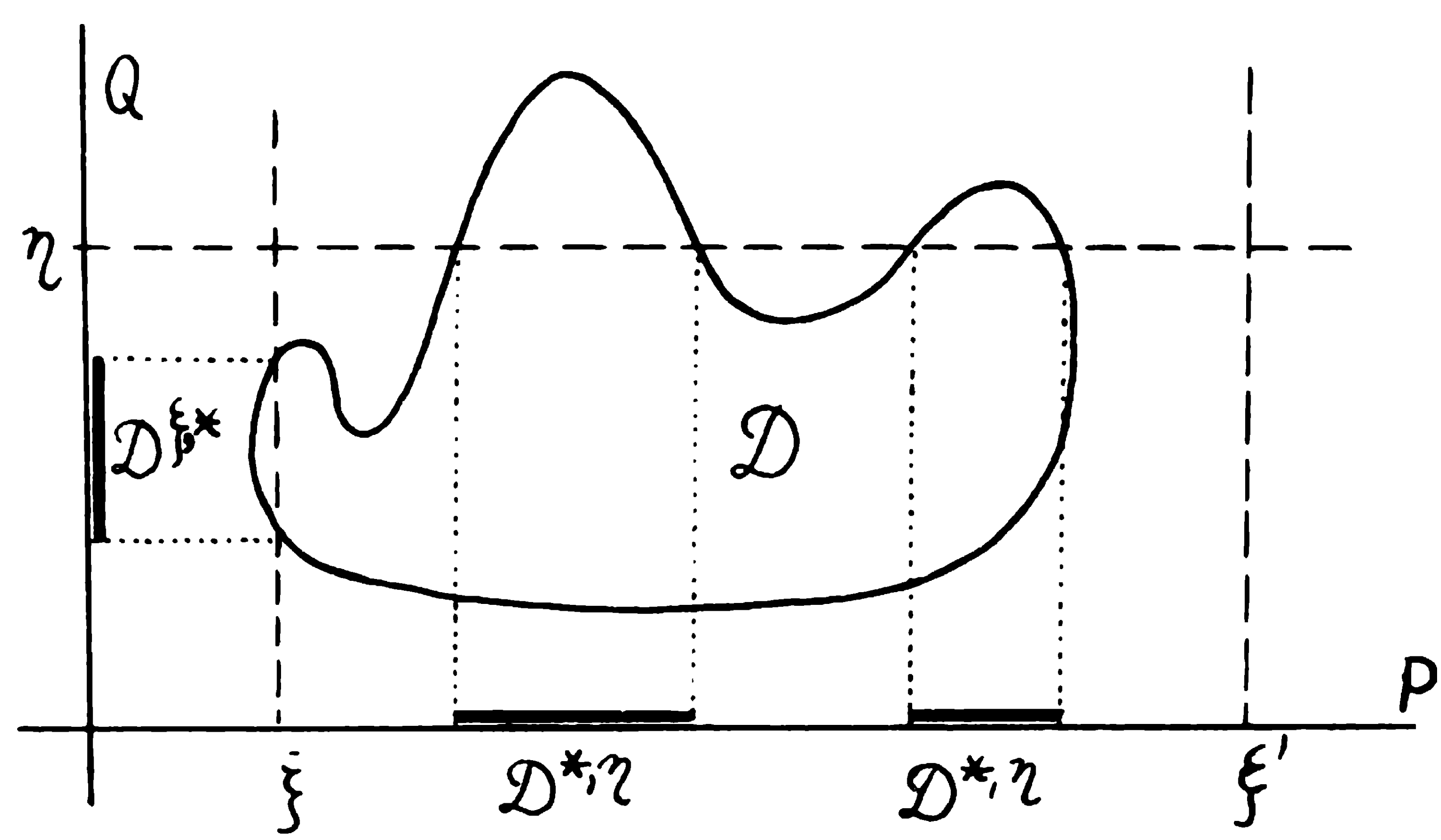
$$[x, y_1, \dots, y_n ; \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathcal{D}.$$

Množinu těchto bodů označme $\mathcal{D}^{\mu_1, \dots, \mu_m}$, tj.

$$\mathcal{D}^{\mu_1, \dots, \mu_m} = \mathcal{E} \qquad ([x, y_1, \dots, y_n ; \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathcal{D})$$



Zde se $\mathcal{D}^{\mu}$ skládá ze dvou úseček.



Proberememe to obecně. Mějme množinu $\mathcal{D} \subset P \times Q$. Zvolím-li libovolné $\eta \in Q$, bude znakem $\mathcal{D}^{*,\eta}$ značit množinu oněch x, pro něž $[x, \eta]$ patří do $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}^{*,\eta} = \underset{x}{\mathcal{E}}([x,\eta] \in \mathcal{D})$.

Obdobně: zvolím-li libovolně $\xi \in P$, budu znakem $\mathcal{D}^{\xi,*}$ značit množinu oněch y, pro něž

$[\xi, y] \in \mathcal{D}$: $\mathcal{D}^{\xi,*} = \underset{y}{\mathcal{E}}([\xi, y] \in \mathcal{D})$.

Viz obr.; na obr. je též zakreslen případ, kdy $\mathcal{D}^{\xi,*} = \emptyset$.

Mluvíme o "řezech" množiny $\mathcal{D}$ - je to velmi názorné. Hvězdičkou tam píši tehdy, kdy je nutno zdůraznit, na které místo dávám znak ξ nebo η. Na předešlé stránce jsme tedy snad měli psát $\mathcal{D}^{*,[\mu_1,\dots,\mu_m]}$ nebo $\mathcal{D}^{\overbrace{*,*,\dots,*}^{n+1 \text{ hvězdiček}},\mu_1,\dots,\mu_m}$. Ale budeme si jistě vždy rozumět.

Mysleme si nyní, že $\mathcal{D} \subset E_{p+q}$; budu mluvit o řezech $\mathcal{D}^{\xi,*}$, $\mathcal{D}^{*,\eta}$, kde $\xi \in E_p$ (takže $\mathcal{D}^{\xi,*} \subset E_q$) a $\eta \in E_q$ (takže $\mathcal{D}^{*,\eta} \subset E_p$). Jestliže $\mathcal{D}$ je otevřená (v E_{p+q}), jsou otevřené také řezy $\mathcal{D}^{\xi,*}$ (v E_q) a $\mathcal{D}^{*,\eta}$ (v E_p).

Důkaz: Je-li $[y_1,\dots,y_q] \in \mathcal{D}^{\xi,*}$, znamená to, že $[\xi_1,\dots,\xi_p, y_1,\dots,y_q] \in \mathcal{D}$. Ale $\mathcal{D}$ je otevřená; tedy také pro všechny body $[y_1',\dots,y_q']$, dosti blízké bodu $[y_1,\dots,y_q]$, bude $[\xi_1,\dots,\xi_p, y_1',\dots,y_q'] \in \mathcal{D}$, tj. $[y_1',\dots,y_q'] \in \mathcal{D}^{\xi,*}$. Tedy bod $[y_1,\dots,y_q]$ je vnitřním bodem množiny $\mathcal{D}^{\xi,*}$.

Vraťme se nyní k systému (14), kde funkce f_j jsou definovány v jisté množině $\mathcal{D} \subset E_{m+n+1}$. Zvolme předně určité hodnoty parametrů $\mu_1,\dots,\mu_m$, takže funkce f_j se stanou funkcemi $n+1$ proměnných $x, y_1,\dots,y_n$ s definičním oborem $\mathcal{D}^{\mu_1,\dots,\mu_m}$. Zvolme dále bod

(17) $$[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}^{\mu_1,\dots,\mu_m}$$

neboli

(18) $$[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1,\dots,\mu_m] \in \mathcal{D}.$$

Hledáme nyní řešení $y_1(x),\dots,y_n(x)$ soustavy n rovnic

(19) $\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; \mu_1, \ldots, \mu_m)$ $(j = 1, \ldots, n)$,

které prochází bodem (17) a leží v $\mathcal{D}^{\mu_1, \ldots, \mu_m}$, tj.

(20) $$[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)] \in \mathcal{D}^{\mu_1, \ldots, \mu_n}$$

neboli

(21) $$[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), \mu_1, \ldots, \mu_m]$$

Současně hledejme řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x), v_1(x), \ldots, v_m(x)$ soustavy rovnic $m+n$ rovnic

(22) $$\begin{cases} \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; v_1, \ldots, v_m) & (j = 1, \ldots, n) \\ \frac{dv_k}{dx} = 0 & (k = 1, \ldots, m), \end{cases}$$

které leží v $\mathcal{D}$, tj.

(23) $$[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), v_1(x), \ldots, v_m(x)] \in \mathcal{D}$$

a prochází bodem (18). Je vidět, že rovnice $\frac{dv_k}{dx} = 0$ společně s podmínkou (18) (jež říká, že v $v_k(x_0) = \mu_k$) jsou splněny tehdy a jen tehdy, je-li $v_k(x)$ rovno konstantě μ_k, načež (23) znamená totéž jako (21) neboli (20), prvních n rovnic se redukuje na rovnice (19) a podmínka (18) říká totéž jako (17).

Tedy: Úloha I.: " Nalézti řešení rovnic (19) v intervalu $\mathcal{J}$, které leží v $\mathcal{D}^{\mu_1, \ldots, \mu_m}$ a prochází bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}^{\mu_1, \ldots, \mu_m}$ znamená totéž jako úloha II: "Nalézti řešení rovnic (22) v intervalu $\mathcal{J}$, které leží v $\mathcal{D}$ a prochází bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}, \mu_1, \ldots, \mu_m] \in \mathcal{D}$" ; prostě z řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x), v_1(x), \ldots, v_m(x)$ úlohy II (kde $v_k(x) = \mu_k$) se vezme prvních n funkcí a ty dávají řešení úlohy I; naopak, mám-li řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ úlohy I, přidám k nim konstantní funkce $v_1(x) = \mu_1, \ldots, v_m(x) = \mu_m$ a dostanu řešení úlohy II.

Předpokládejme nyní, že $\mathcal{D} \subset E_{m+n+1}$ je otevřená a že funkce $f_j(x, y_1, \ldots, y_n; \mu_1, \ldots, \mu_m)$ jsou v $\mathcal{D}$ spojité a že splňují v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$.[8] Zvolíme-li libovolně $\mu_1, \ldots, \mu_m$, potom každým bodem

$$(24) \qquad [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}^{\mu_1, \ldots, \mu_m}$$

prochází právě jedna charakteristika systému (19)

$$(25) \qquad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m), \end{cases}$$

definována v jistém otevřeném intervalu

$$(26) \qquad \mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m};$$

funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (při pevném $\mu_1, \ldots, \mu_m$) tvoří charakteristický systém systému (19). Přidáme-li k rovnicím (25) ještě rovnice

$$(27) \qquad v_1 = \mu_1, \ldots, v_m = \mu_m,$$

dostaneme charakteristiku systému (22), procházející bodem

$$(28) \qquad [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m] \in \mathcal{D}$$

(je to vskutku charakteristika: neboť kdyby se řešení (25), (27) dalo ještě prodloužit za interval (26), dalo by se také řešení (25) systému (19) prodloužit za tento interval - ale to je nemožno, neboť (25) je charakteristikou systému (19)).

Tedy funkce $\varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m)$ spolu s funkcemi

---

8/ Funkce "0" v posledních m rovnic systému (22) ovšem jsou spojité a splňují Lipschitzovu podmínku.

$\mu_1,\ldots,\mu_m$ tvoří charakteristický systém pro systém (22). Užijeme-li nyní na systém (22) věty 27, dostaneme, že definiční obor těchto funkcí je otevřená množina a že tyto funkce jsou v tomto oboru spojité (triviální funkce $\mu_1,\ldots,\mu_m$ nás ovšem nezajímají).

Shrňme:

<u>Věta 28.</u> Nechť v otevřené množině $\mathcal{D}\subset E_{m+n+1}$ funkce

$$f_j(x;y_1,\ldots,y_n;\mu_1,\ldots,\mu_m) \quad (j=1,\ldots,n) \tag{29}$$

jsou spojité a splňují lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$, $\mu_1,\ldots,\mu_m$. Při pevně zvoleném $\mu_1,\ldots,\mu_m$ budiž

$$\varphi_j(x;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\mu_1,\ldots,\mu_m) \quad (j=1,\ldots,n) \tag{30}$$

charakteristický systém systému rovnic

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x,y_1,\ldots,y_n;\mu_1,\ldots,\mu_m) \quad (j=1,\ldots,n); \tag{31}$$

systém funkcí φ_j je definován v oboru $\mathcal{D}_1\subset E_{m+n+2}$ vyjadřovaném podmínkami

$$[x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\mu_1,\ldots,\mu_m]\in\mathcal{D},\ x\in\mathcal{J}_{x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\mu_1,\ldots,\mu_m} \tag{32}$$

kde $\mathcal{J}_{x_0},\ y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\ \mu_1,\ldots,\mu_m$ značí definiční (otevřený) interval charakteristiky systému (31), procházející bodem $x_0,\ y_1^{(0)},\ldots,\ y_n^{(0)}$. Potom platí: množina $\mathcal{D}_1$ je otevřená a funkce (30) jsou spojité v $\mathcal{D}_1$.

<u>Poznámka 1.</u> Kvantitativní odhad pro rozdíl

$$|\varphi_j(x;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\mu_1,\ldots,\mu_m)-\varphi_j(\xi;\xi_0,\eta_1^{(0)},\ldots,\eta_n^{(0)};\mu_1',\ldots,\mu_m')|$$

dostaneme ovšem z nerovností (13), kde místo n nutno psát $m+n$ a vedle rozdílů $|y_j^{(0)}-\eta_j^{(0)}|$ vystupují ještě rozdíly $|\mu_k-\mu_k'|$.

Poznámka 2. Větu 28 jsme převedli na větu 27 tím, že jsme systém

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; \mu_1, \ldots, \mu_m) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

převedli na systém

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; v_1, \ldots, v_m) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{dv_k}{dx} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

To bylo velmi pohodlné; nevýhoda je v tom, že splnění Lipschitzovy podmínky bylo nutno předpokládat i vzhledem k parametrům $\mu_1, \ldots, \mu_m$; jiným způsobem důkazu bylo by možno se tomuto předpokladu vyhnout.

Ježto tuto věc budeme v následujícím paragrafu potřebovat, provedeme ji aspoň pro nejjednodušší případ - pro lineární systémy (to je právě případ, který budeme potřebovat).

Věta 29 (pomocná). Budiž funkce

$$A(x, x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

spojitá v oboru $\mathfrak{A}$:

$$x \in J, \; x_0 \in J, \; \lambda_1 \in J_1, \ldots, \lambda_k \in J_k ,$$

kde $J, J_1, \ldots, J_k$ jsou kompaktní intervaly. Potom funkce

$$B(x, x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \int_{x_0}^{x} A(t, x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)\,dt$$

je též spojitá v $\mathfrak{A}$.

Důkaz: Funkce A je v $\mathfrak{A}$ omezená: $|A| \leq M$ a stejnoměrně spojitá. Budiž L délka intervalu J. Jest

$$|B(x, x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) - B(x', x_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_k')| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} (A(t, x_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) - A(t, x_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_k'))\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{x}^{x'} A(t, x_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_k')\,dt - \int_{x_0'}^{x_0} A(t, x_0', \lambda_1', \ldots, \lambda_k')\,dt \right|$$

Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že pro

(33) $|x_0 - x_0'| < \delta$, $|\lambda_1 - \lambda_1'| < \delta$,..., $|\lambda_k - \lambda_k'| < \delta$

je

$$|A(t, x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) - A(t, x_0', \lambda_1', \dots, \lambda_k')| < \varepsilon$$

(pokud oba body leží v $\mathfrak{A}$). Je-li ještě současně

$$|x_0 - x_0'| < \varepsilon , \quad |x - x'| < \varepsilon ;$$

je tedy

$$|B(x, x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) - B(x', x_0', \lambda_1', \dots, \lambda_k')| \leq L\varepsilon + M\varepsilon + M\varepsilon,$$

čímž je spojitost dokázána.

<u>Věta 30.</u> Budiž předložen lineární systém

(34) $$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, \mu_1, \dots, \mu_m)\, y_k + b_j(x, \mu_1, \dots, \mu_m),$$

(j = 1,..., n , kde $a_{j,k}$, b_j jsou spojité v množině $\mathcal{L}$:

$$x \in \mathcal{J} , \mu_1 \in \mathcal{J}_1 , \dots , \mu_m \in \mathcal{J}_m .$$

($\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_m$ intervaly). Potom víme z věty 5 toto: Ke každému systému čísel

$$x_0 \in \mathcal{J}, y_1^{(0)} \in E_1 , \dots, y_n^{(0)} \in E_1, \mu_1 \in \mathcal{J}_1, \dots, \mu_m \in \mathcal{J}_m$$

existuje právě jedno řešení systému (34) v intervalu $\mathcal{J}$, které prochází bodem x_0, $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$; označme toto řešení

(35) $\varphi_j(x ; x_0 , y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m)$ (j = 1,..., n)

($x \in \mathcal{J}$) (je to nám známý charakteristický systém). Tvrdím: funkce (35) jsou spojité funkce (svých $m + n$ + 2 proměnných) v množině $\mathcal{L}_0$:

(36) $x \in \mathcal{J}, x_0 \in \mathcal{J}$, $y_1^{(0)} \in E_1, \dots, y_n^{(0)} \in E_1 ; \mu_1 \in \mathcal{J}_1, \dots, \mu_m \in \mathcal{J}_m$.

Důkaz: Zřejmě stačí dokázat spojitost v každé kompaktní části množiny $\mathcal{L}_0$ tvaru:

$$\mathcal{L}_1 : x \in \mathcal{K}, x_0 \in \mathcal{K}, |y_1^{(0)}| \le Y, \dots, |y_n^{(0)}| \le Y, \mu_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, \mu_m \in \mathcal{K}_m,$$

kde Y je kladné, $\mathcal{K}$ je kompaktní interval $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$, $\mathcal{K}_\ell$ je kompaktní interval $\mathcal{K}_\ell \subset \mathcal{J}_\ell$. V důkazu věty 5 jsme postupovali takto: Volili jsme

$$\varphi_j^{(0)}(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = y_j^{(0)} \quad (j = 1, \dots, n)$$

a dále indukcí

$$(37)\quad \begin{cases} \varphi_j^{(p)}(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = \\ = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(t, \mu_1, \dots, \mu_m) \varphi_k^{(p-1)}(t; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) + \right. \\ \left. \qquad + b_j(t, \mu_1, \dots, \mu_m) \right) dt + y_j^0 . \quad (p = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Funkce $\varphi_j^{(0)}$ jsou spojité v $\mathcal{L}_1$; jestliže pak $\varphi_j^{(p-1)}$ jsou spojité jsou podle (37) a podle pomocné věty 29 i funkce $\varphi_j^{(p)}$ spojité v $\mathcal{L}_1$. Tedy indukcí plyne: všechny funkce $\varphi_j^{(p)}$ jsou spojité v $\mathcal{L}_1$. Dále: v $\mathcal{L}_1$ jsou $a_{j,k}$, b_j omezené:

$$|a_{j,k}| \le M, \ |b_j| \le M \qquad \text{a je} \qquad |y_j^{(0)}| \le Y ;$$

$\mathcal{K}$ má konečnou délku L a následkem toho platí pro funkce $\varphi_j^{(p+1)} - \varphi_j^{(p)}$ tytéž odhady jako v kap. II. § 1 (7). Proto posloupnost $\varphi_j^{(p)}$ (p = 0, 1,...) konverguje stejnoměrně v $\mathcal{L}_1$. A víme, že limitou této posloupnosti je právě řešení (35) systému (34) (to je ostatně ihned vidět z (37) limitním přechodem - $p \to \infty$). Tedy funkce φ_j (j = 1,...,n) jakožto limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí $\varphi_j^{(p)}$, je rovněž spojitá v $\mathcal{L}_1$.

§ 4. Derivace charakteristických funkcí podle parametru. Variační rovnice.

V tomto paragrafu půjdeme o krok dále než v předešlém. Představme si, že rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \mu) \tag{38}$$

popisuje nějaký fysikální děj, např. pohyb, přičemž parametr μ znamená např. koeficient tření. Ta rovnice bývá obyčejně jednodušší pro $\mu = 0$ (pohyb bez tření) ne pro $\mu \neq 0$. Charakteristická funkce

$$\varphi(x; x_0, y_0; \mu) \tag{39}$$

je za jistých předpokladů spojitou funkcí svých čtyř proměnných (viz předešlý paragraf). Představme si, že dovedeme řešit rovnici (38) pro $\mu = 0$, tj. že máme

$$\varphi(x; x_0, y_0; 0) . \tag{40}$$

Představme si nyní, že μ je různé od nuly, ale blízko nuly. [9/] Podle věty 28 je potom také rozdíl

$$|\varphi(x; x_0, y_0; \mu) - \varphi(x; x_0, y_0; 0)| \tag{41}$$

malý a podle poznámky 1. na konci předešlého paragrafu dovedeme velikost rozdílu (41) dokonce odhadnout. Jestliže rozdíl (41) nepřesahuje meze přesnosti, se kterou potřebujeme počítat, můžeme funkci (39)(kterou nezmáme) nahradit funkcí (40). Jestliže tato podmínka není splněna, připomeňme, že podle definice derivace je

$$F(x+h) = F(x) + h \cdot F'(x) + h \cdot \eta(h) ,$$

kde $\eta(h)$ konverguje k nule pro $h \to 0$. Můžeme tedy psát

(42)

$$\varphi(x; x_0, y_0; \mu) = \varphi(x; x_0, y_0; 0) + \mu \left[\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \mu)}{\partial \mu}\right]_{\mu=0} + \mu \cdot \eta(\mu) \quad ^{10/}$$

9/ "počáteční podmínky" x_0, y_0 nechávám beze změny.
10/ poznámka na příští stránce

a může se státi, že člen $\mu . \eta(\mu)$ je už tak malý, že jej můžeme v mezích požadované přesnosti zanedbat. Ovšem, abychom směli napsat vzorec (42), musíme napřed dokázat, že $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ existuje, a abychom z tohoto vzorce něco měli, musíme mít prostředky k výpočtu této derivace. Tímto problémem se budeme nyní zabývat.

Stejně důležitý je problém derivování funkce $\varphi(x; x_0, y_0; \mu)$ podle počátečních hodnot x_0, y_0. Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{43}$$

(parametry nás nyní nezajímají). Charakteristická funkce je

$$\varphi(x; x_0, y_0) \;; \tag{44}$$

je to ono řešení, které pro $x = x_0$ nabývá hodnoty y_0. Může se nyní stát, že pro některou hodnotu y_0 toto řešení nalezneme snadno; je-li např. $f(x, a) = 0$ pro všechna x, je konstanta a řešením (tj. $\varphi(x; x_0, a) = a$)[11/]; ptáme se nyní, jak vypadá charakteristická funkce (44) pro hodnoty y_0, blízké a. Je přirozeno, použití opět vzorce

$$\varphi(x; x_0, a + \varepsilon) = \varphi(x; x_0, a) + \varepsilon . \left[\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0)}{\partial y_0} \right]_{y_0 = a} + \varepsilon . \eta(\varepsilon) \, ,$$

kde $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon) = 0$.

Naskýtá se zde tedy otázka po existenci a výpočtu derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ a podobně otázka, týkající se $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$. Pokud se týče derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, je věc triviální, neboť funkce φ (při pevných x_0, y_0), je řešením rovnice (43), tedy

---

10/ (pozn. ze str. 147)
Existuje-li napsaná derivace, je $\lim\limits_{\mu \to 0} \eta(\mu) = 0$ při pevných x, x_0, y_0; nemluvím zatím o tom, je-li tato konvergace stejnoměrná vzhledem k x, x_0, y_0.

11/ Fysikálně (popisuje-li rovnice (43) nějaký pohyb), to znamená: Je-li v některém okamžiku $y = a$, je stále $y = a$ - máme zde klid.

$$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial x} = f(x,\varphi(x;x_0,y_0)) .$$

Tyto otázky nyní budeme řešit - ovšem hned pro systémy rovnic a pro libovolný počet parametrů.

Předpokládejme, že funkce

(45) $f_j(x,y_1,\ldots,y_n;\mu_1,\ldots,\mu_m) \qquad (j=1,\ldots,n)$

jsou v jisté otevřené množině $\mathcal{D}\subset E_{m+n+1}$ spojité a mají tam spojité derivace 1.řádu podle $y_1,\ldots,y_n$; $\mu_1,\ldots,\mu_m$; následkem toho splňují v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1,\ldots,y_n$, $\mu_1,\ldots,\mu_m$. Podle věty 28 můžeme nyní tvrdit, že systém rovnic

(46) $\frac{dy_j}{dx} = f_j(x,y_1,\ldots,y_n;\mu_1,\ldots,\mu_m) \qquad (j=1,\ldots,n)$

má charakteristický systém funkcí

(47) $\varphi_j(x;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)};\mu_1,\ldots,\mu_m) \qquad (j=1,\ldots,n)$

definovaný v jisté otevřené množině $\mathcal{D}_1\subset E_{m+n+2}$; přitom $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ jsou spojité v $\mathcal{D}_1$ a množina $\mathcal{D}_1$ je množina těch bodů $[x,x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)},\mu_1,\ldots,\mu_m]$, pro které je

(48) $[x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)},\mu_1,\ldots,\mu_m]\in\mathcal{D},\ x\in\mathcal{J}_{x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)},\mu_1,\ldots,\mu_m}$;

poslední interval je otevřený interval, obsahující bod x_0; je to "nejdelší" interval, v němž existuje řešení systému (46), ležící v $\mathcal{D}^{\mu_1,\ldots,\mu_m}$ a procházející bodem $[x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}]$; toto řešení (tzv. charakteristika) je právě dáno systémem funkcí $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, pojímaných jako funkce jediné proměnné x (při daných x_0, $y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)},\mu_1,\ldots,\mu_m$).

<u>Věta 31.</u> Funkce

$f_j(x,y_1,\ldots,y_n;\mu_1,\ldots,\mu_m) \qquad (j=1,\ldots,n)$

a jejich derivace

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial y_n}, \frac{\partial f_j}{\partial \mu_1}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial \mu_m} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

buďte spojité v otevřené množině $\mathfrak{D}$, takže charakteristický systém

$$\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

systému rovnic

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n; \mu_1, \ldots, \mu_m) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

má otevřený existenční obor $\mathfrak{D}_1$. Potom funkce

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_1^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_n^{(0)}}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_m}$$

existují a jsou spojité v $\mathfrak{D}_1$.

Důkaz: I. Napřed dokážeme tvrzení pro derivace $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_k}$, např. pro $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Zvolme určitý bod

$$[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}, \mu_1, \ldots, \mu_m] \in \mathfrak{D} \tag{49}$$

a zvolme uzavřený omezený interval

$$\begin{cases} \langle \xi_{-1}, \xi_1 \rangle \subset \mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m}, \\ \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 \end{cases} \tag{50}$$

Zjednodušme označení funkcí charakteristického systému:

$$\psi_j(x, \mu_1) = \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{51}$$

(budeme totiž vyšetřovat charakteristický systém v závislosti na prvním parametru μ_1 při pevně daných $x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, $\mu_2, \ldots, \mu_m$). Množina všech bodů

$$[x, \psi_1(x, \mu_1), \psi_2(x, \mu_1), \ldots, \psi_n(x, \mu_1)] \qquad (\xi_{-1} \leq x \leq \xi_1)$$

je spojitý obraz úsečky $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$, který leží v $\mathcal{D}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m}$; tj. množina $\mathcal{K}$ všech bodů

(52) $[x, \psi_1(x, \mu_1), \ldots, \psi_n(x, \mu_1), \mu_1, \ldots, \mu_m]$ $(\xi_{-1} \le x \le \xi_1)$

je kompaktní množina, ležící v $\mathcal{D}$. Tato množina má kladnou vzdálenost [12] Δ od množiny $E_{m+n+1} - \mathcal{D}$; zvolme kladné $\Delta_1 < \Delta$. Označme $\underline{A}$ množinu těch bodů

$$[x, y_1, \ldots, y_n, M_1, M_2, \ldots, M_m],$$

jež mají od $\mathcal{K}$ vzdálenost $\le \Delta_1$. To je kompaktní množina, k níž patří spec. všechny body, pro něž platí

(53) $\xi_{-1} \le x < \xi_1, \; |y_j - \psi_j(x, \mu_1)| \le \Delta_1 \; (1 \le j \le n), \; |M_k - \mu_k| < \Delta_1 \; (1 \le k \le m);$

tedy

A je kompaktní, $A \subset \mathcal{D}$; funkce f_j, $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $\dfrac{\partial f_j}{\partial M_l}$ jsou spojité v $\mathcal{D}$ a tedy omezené v A; v důsledku kompaktnosti (viz větu 24) splňují funkce f_j v A Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$, $M_1, \ldots, M_m$. Všimněme si nyní charakteristického systému

$$\varphi_j(x; X_0, Y_1^{(0)}, \ldots, Y_n^{(0)}; M_1, \ldots, M_m).$$

Víme, že definiční obor těchto funkcí φ_j je jistá otevřená množina $\mathcal{D}_1$. Speciálně si všimněme funkcí $\psi_j(x, M_1)$. Ježto je definováno $\psi_j(\xi_{-1}, \mu_1)$, $\psi_j(\xi_1, \mu_1)$, existuje Δ_2 $(0 < \Delta_2 < \Delta_1)$ tak, že pro $|M_1 - \mu_1| \le \Delta_2$ jsou definovány též

$$\psi_j(\xi_{-1}, M_1), \; \psi_j(\xi_1, M_1).$$

Ježto však definiční obor funkcí $\psi_j(x, M_1)$ při daném M_1 je jistý otevřený interval [13], platí:

12/ Definuji $\operatorname{dist}(a, b) = \max |a_i - b_i|$.
13/ Totiž $J_{x_0}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; M_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Je-li $|M_1-\mu_1| \le \Delta_2$, jsou funkce

(54) $\psi_j(x, M_1)$ $(j = 1,\dots,n)$

definovány v celém intervalu $\langle \xi_{-1}, \xi_1 \rangle$. Dále: funkce charakteristického systému jsou spojité v celém svém definičním oboru; tedy funkce (54) jsou spojité v kompaktním intervalu

(55) $\xi_{-1} \le x \le \xi_1, \quad |M_1-\mu_1| \le \Delta_2$

a tedy jsou v něm stejnoměrně spojité. Odtud plyne: Existuje $\Delta_3 > 0$, $\Delta_3 < \Delta_2$ tak, že pro $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$, $|M_1-\mu_1| \le \Delta_3$ je

$$|\psi_j(x, M_1) - \psi_j(x, \mu_1)| \le \Delta_1$$

Ježto $\Delta_3 \le \Delta_1$, plyne z (53):

Je-li

(56) $\xi_{-1} \le x \le \xi_1, \quad |M_1-\mu_1| \le \Delta_3$,

leží bod

(57) $[x, \psi_1(x, M_1), \dots, \psi_n(x, M_1), M_1, \mu_2, \dots, \mu_m]$

v A; a také celá úsečka, spojující (57) s bodem (52), tj. každý bod

(58) $$\begin{cases} [x, \psi_1(x,\mu_1) + t(\psi_1(x, M_1) - \psi_1(x,\mu_1)), \dots \\ \dots, \psi_n(x,\mu_1) + t(\psi_n(x,M_1) - \psi_n(x,\mu_1)), \mu_1 + t(M_1-\mu_1), \\ \mu_2, \dots, \mu_m] \qquad (0 \le t \le 1) \end{cases}$$

leží v A .

Omezíme se nyní na $x \in \langle \xi_{-1}, \xi_1 \rangle$, $M_1 \in \langle \mu_1 - \Delta_3, \mu_1 + \Delta_3 \rangle$.

Potom $\psi_j(x, M_1)$ $(j = 1,\dots,n)$ - což je funkce dvou proměnných x, M_1 - vyhovují systému rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,M_1) = f_j(x, \psi_1(x,M_1), \dots, \psi_n(x,M_1), M_1, \mu_2, \dots, \mu_m) .$$

Tento systém je splněn speciálně též pro hodnotu μ_1 ; odečteme-li, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\psi_j(x, M_1) - \psi_j(x, \mu_1)}{M_1 - \mu_1} =$$

(59)

$$= \frac{f_j(x, \psi_1(x, M_1), \dots, \psi_n(x, M_1); M_1, \mu_2, \dots, \mu_m) - f_j(x, \psi_1(x, \mu_1), \dots, \psi_n(x, \mu_1); \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)}{M_1 - \mu_1}$$

pro $0 < |\mu_1 - M_1| \leq \Delta_3$.

Rozdíl vpravo nyní vyjádříme vhodným způsobem. Jde o rozdíl tvaru

(60)

$$f_j(x, Y_1, \dots, Y_n; M_1, \mu_2, \dots, \mu_m) - f_j(x, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) ,$$

kde (podle (58)) každý bod

(61)

$$[x, y_1 + t(Y - y_1), \dots, y_n + t(Y_n - y_n); \mu_1 + t(M_1 - \mu_1), \mu_2, \dots, \mu_m]$$

leží v A. Položme (myslíce si na chvíli $x, Y_1, \dots, Y_n$, $y_1, \dots, y_n$, M_1 dané)

(62)

$$\mathcal{F}(t) = f_j(x, y_1 + t(Y_1 - y_1), \dots, y_n + t(Y_n - y_n); \mu_1 + t(M_1 - \mu_1), \mu_2, \dots, \mu_m)$$

takže (60) je rovno

(63) $$\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0) = \int_0^1 \mathcal{F}'(t)\,dt ,$$

existuje-li spojitá $\mathcal{F}'(t)$ v $\langle 0,1\rangle$. Avšak každý bod (61) leží pro $0 \leq t \leq 1$ v A a tedy v $\mathcal{D}$ a tedy podle definice (62) má $\mathcal{F}(t)$ vskutku spojitou derivaci, kterou dovedeme snadno vypočísti:

$$\mathcal{F}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j(x, y_1 + t(Y_1 - y_1), \dots, y_n + t(Y_n - y_n); \mu_1 + t(M_1 - \mu_1), \mu_2, \dots, \mu_m)}{\partial y_k} \,.$$

$$\cdot (Y_k - y_k) + \frac{\partial f_j(x, y_1 + t(Y_1 - y_1), \dots)}{\partial \mu_1} \,.\, (M_1 - \mu_1) \,.$$

Dosaďme sem nyní - což je dovoleno -

$$y_k = \psi_k(x, \mu_1) , \quad Y_k = \psi_k(x, M_1)$$

a dostaneme (pro $\xi_{-1} \le x \le \xi_1 \quad |M_1-\mu_1| \le \Delta_3$) 14/

$$f_j(x, \psi_1(x, M_1), \dots, \psi_n(x, M_1); M_1, \mu_2, \dots, \mu_m) -$$

$$- f_j(x, \psi_1(x, \mu_1), \dots, \psi_n(x, \mu_1); \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} G_{j,k}(x, M_1)(\psi_k(x, M_1) - \psi_k(x, \mu_1)) + H_j(x, M_1)(M_1 - \mu_1) \ ,$$

kde

$$(64) \qquad G_{j,k}(x, M_1) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f_j(x, \psi_1(x,\mu_1) + t(\psi_1(x,M_1) - \psi_1(x,\mu_1)), \dots, \psi_n(x,\mu_1) + t(\psi_n(x,M_1) - \psi_n(x,\mu_1)); \mu_1 + t(M_1-\mu_1), \mu_2, \dots, \mu_m)}{\partial y_k}$$

a H_j vypadá podobně, až na to, že je tam $\dfrac{\partial f_j}{\partial \mu_1}$.

Integrand je v oboru

$$0 \le t \le 1 \ , \quad \xi_{-1} \le x \le \xi_1 \ , \quad \mu_1 - \Delta_3 \le M_1 \le \mu_1 + \Delta_3$$

spojitou funkcí t , x , M_1 a tedy

$G_{j,k}$, H_j jsou spojité funkce proměnných x , M_1 v intervalu $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$, $\mu_1 - \Delta_3 \le M_1 \le \mu_1 + \Delta_3$. Speciálně: pro $M_1 = \mu_1$ odpadne v integrandu v (64) koeficient při t , integrand tedy nezávisí na t , a máme

$$G_{j,k}(x, \mu_1) = \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \psi_1(x, \mu_1), \dots, \psi_n(x, \mu_1); \mu_1, \dots, \mu_m)$$

$$(65) \qquad H_j(x, \mu_1) = \frac{\partial f_j}{\partial \mu_1}(x, \psi_1(x, \mu_1), \dots, \psi_n(x, \mu_1); \mu_1, \dots, \mu_m) \ .$$

Dosaďme nyní do (59) a máme tento výsledek : Pro $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$, $0 < |M_1 - \mu_1| \le \Delta_3$ je

---

14/ Hodnota $M_1 = \mu_1$ není vyloučena!

$$\frac{\partial}{\partial x}\;\frac{\psi_j(x, M_1) - \psi_j(x, \mu_1)}{M_1 - \mu_1} =$$

(66)

$$= \sum_{k=1}^{n} G_{j,k}(x, M_1)\,\frac{\psi_k(x,M_1) - \psi_k(x,\mu_1)}{M_1 - \mu_1} + H_j(x, M_1) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Mimoto máme pro všechna naše

$$\psi_j(x_0, M_1) = \varphi_j(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; M_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) = y_j^{(0)}$$

a tedy

(67) $$\psi_j(x_0, M_1) - \psi_j(x_0, \mu_1) = 0 .$$

Podívejme se nyní (pro jakékoliv $M_1 \in \langle \mu_1 - \Delta_3 , \mu_1 + \Delta_3 \rangle$) na systém lineárních rovnic

(68) $$\frac{dz_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} G_{j,k}(x, M_1) z_k + H_j(x, M_1) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

a hledejme ono řešení

$$z_1, \ldots, z_n$$

v intervalu $\langle \xi_{-1}, \xi_1 \rangle$, které pro $x = x_0$ má hodnoty nulové

(69) $$z_1(x_0) = \ldots = z_n(x_0) = 0 .$$

Takové řešení existuje podle věty 5 (o systémech lineárních rovnic) a je jen jedno; označme je (ježto závisí též na M_1)

(70) $$z_1(x, M_1), \ldots, z_n(x, M_1) .$$

Podle věty 30 je toto řešení spojitou funkcí v oboru $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$, $M_1 \in \langle \mu_1 - \Delta_3 , \mu_1 + \Delta_3 \rangle$, takže speciálně

(71) $$\lim_{M_1 \to \mu_1} z_j(x, M_1) = z_j(x, \mu_1)$$

Dále vidíme z (66), (67), že rovnicím (68) i podmínkám (69) vyhovují pro $\mu_1 \neq M_1$ funkce

$$\frac{\psi_j(x, M_1) - \psi_j(x, \mu_1)}{M_1 - \mu_1} ;$$

z jednoznačnosti plyne pak pro $0 < |M_1 - \mu_1| \le \Delta_3$, $\xi_{-1} \le x \le \xi_1$

$$\frac{\psi_j(x, M_1) - \psi_j(x,\mu_1)}{M_1 - \mu_1} = z_j(x, M_1)$$

a tedy podle (71) existuje limita tohoto výrazu pro $M_1 \to \mu_1$, tj.

$$\frac{\partial\psi_j(x,\mu_1)}{\partial\mu_1} = z_j(x,\mu_1) .$$

Zároveň je vidět, že tyto funkce $\frac{\partial\psi_j}{\partial\mu_1}$ vyhovují podmínkám (69) a rovnicím (68) pro $M_1 = \mu_1$, tj. [15] (podle (65))

$$(72)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} \dfrac{\partial\psi_j(x,\mu_1)}{\partial\mu_1} = \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x,\psi_1(x,\mu_1),\ldots,\psi_n(x,\mu_1),\mu_1,\ldots,\mu_m) \cdot \frac{\partial\psi_k(x,\mu_1)}{\partial\mu_1} \\ + \dfrac{\partial f_j}{\partial\mu_1}(x,\psi_1(x,\mu_1),\ldots,\psi_n(x,\mu_1);\mu_1,\ldots,\mu_m) \quad (j=1,\ldots,n) \end{cases}$$

$$(73)\quad \left[\frac{\partial\psi_j(x,\mu_1)}{\partial\mu_1}\right]_{x=x_0} = 0 \qquad (j = 1,\ldots, n)$$

To platí pro $x \in \langle \xi_{-1}, \xi_1 \rangle$, což byl libovolný kompaktní interval, obsahující uvnitř bod x_0 a obsažený v definičním intervalu

$$(74)\quad \mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)},\ldots, y_n^{(0)}; \mu_1,\ldots,\mu_m}$$

funkcí

$$(75)\quad \psi_j(x,\mu_1) = \varphi_j(x; x_0\, y_1^{(0)},\ldots, y_n^{(0)}; \mu_1,\ldots,\mu_m) ;$$

tedy platí (72), (73) v celém intervalu (74).

15/ Dívám se nyní na μ_1 jako na dané číslo; proto píši $\frac{d}{dx}$ (a ne $\frac{\partial}{\partial x}$) .

Zbývá ještě dokázat spojitost funkcí

$$\frac{\partial \varphi_j(x\,; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\,; \mu_1, \dots, \mu_m)}{\partial \mu_1}\,;$$

pro úsporu psaní jsme totiž tyto funkce vyšetřovali pouze jako funkce dvou proměnných x, μ_1. Ale to plyne snadno takto:
Víme (věta 30), že funkce $\varphi_j(x\,; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\,; \mu_1, \dots, \mu_m)$ jsou spojité v otevřené množině $\mathcal{D}_1$:

$$[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathcal{D},\ x \in \mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m}.$$

Dále víme, že pro každé $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\,; \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathcal{D}$ vyhovují funkce $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}$ v intervalu $\mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m}$ rovnicím (68) pro hodnotu $M_1 = \mu_1$ s počátečními podmínkami (69). Chci dokázat, že v každém bodě

(76) $$[\bar{x}, \bar{x}_0, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}}, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m]$$

jsou funkce $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}$ spojité. Zvolme tedy bod (76) a zvolme α, β tak, že $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathcal{J}_{\bar{x}_0, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}}, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m}$ a že $\alpha < \bar{x}_0 < \beta$, $\alpha < \bar{x} < \beta$. Ježto $\mathcal{D}_1$ je otevřená, existuje $\Delta > 0$ tak, že pro

(77) $$|x_0 - \bar{x}_0| \le \Delta,\ |y_j^{(0)} - \overline{y_j^{(0)}}| \le \Delta,\ |\mu_k - \bar{\mu}_k| \le \Delta$$

jsou definovány funkce $\varphi_j(x\,; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\,; \mu_1, \dots, \mu_m)$ pro $x = \alpha$ i pro $x = \beta$ a tedy i pro

(78) $$\alpha \le x \le \beta.$$

V kompaktní množině $\mathcal{L}$, dané nerovnostmi (77), 78), jsou tedy funkce

(79) $$\varphi_j(x\,; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\,; \mu_1, \dots, \mu_m)$$

definovány a spojité. Napišme nyní rovnice (68) pro hodnotu $M_1 = \mu_1$ kam se tedy do $G_{j,k}$, H_j (viz 65)) dosadí za

$\psi_j(x, \mu_1)$ funkce (79); to jsou lineární rovnice, jejichž koeficienty $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_j}{\partial \mu_1}$ jsou spojité funkce "parametrů" x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ v množině $\mathcal{L}$. Označme $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ono řešení rovnic (68) v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, pro které je

$$\psi_1(\xi) = \eta_1, \ldots, \psi_n(\xi) = \eta_n,$$

kde $\xi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a $\eta_1, \ldots, \eta_n$ jsou libovolně daná čísla. ψ_j závisí vedle x ještě na "počátečních hodnotách" $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ a na "parametrech" x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}, \mu_1, \ldots, \mu_m$, jež se vyskytují v koeficientech rovnic (68). Podle věty 30 jsou tyto funkce

$$\psi_j(x; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m)$$

spojité v množině $\mathcal{D}$, dané nerovnostmi (77), (78) a

(80) $$\alpha \le \xi \le \beta, \eta_1 \in E_1, \ldots, \eta_n \in E_n$$

Ale funkce $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m)$ tvoří ono řešení $z_1, \ldots, z_n$ rovnic (68), pro které je $z_j(x_0) = 0$, tj.

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m) =$$
$$= \psi_j(x; x_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ nul}}; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m).$$

To je tedy funkce spojitá v množině $\mathcal{L}$, dané nerovnostmi (77), (78), tedy speciálně v bodě (76), což bylo dokázati.

II. Jde nyní ještě o derivace funkcí

$$\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m)$$

podle počátečních hodnot x_0, $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ (zde může být i $m = 0$). Začneme s hodnotami $y_j^{(0)}$ (např. $y_1^{(0)}$) a převedeme tento problém na předešlý tím, že z veličiny $y_1^{(0)}$ uděláme "parametr". Vedle rovnic

(81) $$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m)$$

vyšetřujme rovnice

(82) $$\frac{dY_j}{dx} = f_j(x, Y_1 + y_1^{(0)}, Y_2, \ldots, Y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) ,$$

ve kterých se vyskytuje o jeden parametr - označený $y_1^{(0)}$ - více. To lze psát též

(83) $$\frac{dY_j}{dx} = F_j(x, Y_1, \ldots, Y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m, y_1^{(0)}) .$$

Pišme explicitně:

(84) $$F_j(x, Y_1, \ldots, Y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m, y_1^{(0)}) =$$
$$= f_j(x, Y_1 + y_1^{(0)}, Y_2, \ldots, Y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) .$$

Je-li $\mathcal{D}$ definiční obor funkcí f_j, je definiční obor funkcí F_j dán zřejmě podmínkou

(85) $$[x, Y_1 + y_1^{(0)}, Y_2, \ldots, Y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m] \in \mathcal{D}$$

což je otevřená množina v E_{m+n+2} a v ní ovšem je F_j spojitá a má spojité parciální derivace podle Y_1, $y_1^{(0)}$, $Y_2, \ldots$ $\ldots, Y_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Jestliže nějaké řešení $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ systému (83) (při parametrech $\mu_1, \ldots, \mu_m, y_1^{(0)}$) prochází bodem $[x_0, 0, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$, potom zřejmě systém funkcí

$$y_1(x) = Y_1(x) + y_1^{(0)}, \; y_2(x) = Y_2(x), \ldots, y_n(x) = Y_n(x)$$

prochází bodem $[x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ a vyhovuje rovnicím (viz (4))

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{dY_j}{dx} = f_j(x, Y_1 + y_1^{(0)}, Y_2, \ldots, Y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m) =$$
$$= f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m)$$

- a naopak (je vidět také, že obě řešení existují v témž intervalu). Označím-li tedy charakteristický systém systému (81) znakem $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a charakteristický systému systém (83) znakem $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ je

$$\varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) =$$

(86)

$$= \Phi_1(x; x_0, 0, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m, y_1^{(0)}) + y_1^{(0)},$$

$$\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m) =$$

(87)

$$= \Phi_j(x; x_0, 0, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m, y_1^{(0)}) \quad (j = 2, \dots, n)$$

Při daných $[x_0, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m, y_1^{(0)}]$ (s podmínkou-viz (85) - $[x_0, 0 + y^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathfrak{D}$) mají podle bodu I. funkce

$$\Phi_j(x; x_0, 0, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m, y_1^{(0)})$$

spojité derivace podle $y_1^{(0)}$ a podle (86), (87) je tedy

(88) $$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1^{(0)}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1^{(0)}} + 1, \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_1^{(0)}} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1^{(0)}} \quad (\text{pro } j = 2, \dots, n);$$ 16/

tedy též $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1^{(0)}}, \dots, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1^{(0)}}$ jsou spojité.

III. Ještě máme vyšetřit derivace podle x_0. Mohli bychom obdobně zavést novou nezávisle proměnnou t rovnicí $x = t + x_0$, načež místo "proměnné" počáteční hodnoty $x = x_0$, bychom měli "konstantní" počáteční hodnotu $t = 0$ a x_0 by se nám objevilo jako "parametr" :

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t + x_0, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \dots, \mu_m)$$

Ale abychom mohli užít bodu I, musili bychom navíc předpokládat existenci spojité derivace $\dfrac{\partial f_j}{\partial x}$; proto volíme jinou cestu, kde tento předpoklad není nutný.

16/ Míním stále φ_j, Φ_j pro hodnoty napsané v (86),(87).

Buďte splněny předpoklady naší věty, zvolme bod

(88) $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}, \mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathfrak{D}$

a sestrojme řešení jež prochází bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$, 17/
tj. funkce

(89) $\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)$.

Zvolím-li $\overline{x_0}$ v intervalu

(90) $\mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m}$

budou definována čísla

(91) $\varphi_j(\overline{x_0}; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = \overline{y_j^{(0)}}$

a víme z věty 26, že

$$y_j^{(0)} = \varphi_j(x_0; \overline{x_0}, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}}; \mu_1, \dots, \mu_m) ;$$

to znamená však, že charakteristika

$$\varphi_j(x; \overline{x_0}, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}}; \mu_1, \dots, \mu_m) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

prochází bodem (88), a tedy splývá s charakteristikou (89): 18/

(92) $\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) = \varphi_j(x; \overline{x_0}, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}})$

a tedy

(93) $$\begin{cases} \varphi_j(x; \overline{x_0}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) - \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) = \\ = \varphi_j(x; \overline{x_0}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) - \varphi_j(x; \overline{x_0}, \overline{y_1^{(0)}}, \dots, \overline{y_n^{(0)}}) . \end{cases}$$

Bod (88) byl již zvolen; zvolme x v intervalu (90) . Pro $\overline{x_0}$

17/ Při daných $\mu_1, \dots, \mu_m$ - těch si nebudeme příliš všímat, protože během úvahy budou konstantní.
18/ Parametry μ_k už nevypisuji.

v intervalu (90) platí potom (92), kde $\overline{y_j^{(0)}}$ jsou definována rovnicemi (91); ježto

$$\varphi_j(x\,;\, x_0,\, y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}\,;\,\mu_1,\ldots,\mu_m)$$

je spojitou funkcí x v intervalu (90), je

$$\lim_{\overline{x_0}\to x_0} \overline{y_j^{(0)}} = \lim_{\overline{x_0}\to x_0} \varphi_j(\overline{x_0};\, x_0,\, y_1^{(0)},\ldots,\, y_n^{(0)}) =$$
$$= \varphi_j(x_0;x_0,\, y_1^{(0)},\ldots,\, y_n^{(0)}) = y_j^{(0)} .$$

Ježto φ_j má v okolí bodu $[x\,;\, x_0,\, y_1^{(0)},\ldots,\, \overline{y_n^{(0)}}]$ spojité parciální derivace podle $y_1^{(0)},\ldots,\, y_n^{(0)}$, můžeme výraz (93) vpravo psát ve tvaru

$$(93')\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k^{(0)}}(x\,;\, \overline{x_0},\, \tilde{y}_{1,j},\ldots,\tilde{y}_{n,j})\,(\,y_k^{(0)} - \overline{y_k^{(0)}}\,)\,,$$

kde $\tilde{y}_{i,j}$ leží mezi $y_i^{(0)}$, $\overline{y_i^{(0)}}$ (inklusive těchto hranic). Dělme výraz rozdílem $\overline{x_0} - x$ a přejděme k limitě $\overline{x_0} \to x_0$. Jest

$$\frac{\overline{y_k^{(0)}} - y_k^{(0)}}{\overline{x_0} - x_0} = \frac{\varphi_k(\overline{x_0};x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}) - \varphi_k(x_0\,;x_0,y_1^{(0)},\ldots,\, y_n^{(0)})}{\overline{x_0} - x_0}$$

Ale funkce $\varphi_k(x\,;\, x_0\,,\, y_1^{(0)},\ldots,\, y_n^{(0)})$ má (jakožto funkce x) v bodě x_0 derivaci

$$f_k(\, x_0\,,\, y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}\,)\,,$$

takže

$$\lim_{\overline{x_0}\to x_0} \frac{\overline{y_k^{(0)}} - y_k^{(0)}}{\overline{x_0} - x_0} = f_k\,(x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}),$$

a tedy z (93), (93′) plyne:

$$(94)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0}(x\,;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}) &= \lim_{\overline{x_0}\to x_0}\frac{\varphi_j(x;\overline{x_0},y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)})-\varphi_j(x;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)})}{\overline{x_0}-x_0} = \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k^{(0)}}(x\,;x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)})\,.\,f_k(x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}). \end{aligned}$$

Podle bodu II. derivace vpravo vskutku existují a jsou spojité - totéž tedy platí o derivaci vlevo.

IV. Pokud se týče derivace

$$\frac{\partial \varphi_j (x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} ; \mu_1, \ldots, \mu_m)}{\partial x} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m),$$

(kde vpravo za y_k jest dosaditi spojitou funkci

$$\varphi_k(x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} ; \mu_1, \ldots, \mu_m) \; ,$$

je její spojitost zřejmá.

V důkaze věty 31 jsme ukázali toto:

<u>Dodatek 1.</u> Jestliže vyšetřuji, při pevných $x_0, y_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, y_n^{(0)}, \mu_1, \ldots, \mu_m$, funkce

$$\frac{\partial \varphi_j (x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} ; \mu_1, \ldots, \mu_m)}{\partial \mu_1} = z_j(x) \tag{95}$$

jakožto funkce jediné proměnné x, potom $z_j(x)$ podle (72), (73) vyhovují v intervalu (74) systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d z_j(x)}{dx} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} (x, y_1, \ldots, y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) . z_k(x) + \\ &+ \frac{\partial f_j}{\partial \mu_1} (x, y_1, \ldots, y_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) \end{aligned} \tag{96}$$

a počátečním podmínkám $z_j(x_0) = 0$; přitom za y_j jest dosadit $\varphi_j(x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} ; \mu_1, \ldots, \mu_m)$. Tyto rovnice, zapomeneme-li je, můžeme okamžitě odvodit z věty 31 takto: Je

$$f_j(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \; . \tag{97}$$

Levá strana má podle věty 31 a podle pravidla o derivování složených funkcí spojitou derivaci podle μ_1 a totéž tedy platí o pravé straně:

$$(98) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mu_1} + \frac{\partial f_j}{\partial \mu_1} = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial \mu_1} .$$

Ježto $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1}$, $\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial \mu_1}$ jsou spojité, platí podle věty 192 Jarníkova Diferenciálního počtu II, že existuje též

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1} \right) = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \mu_1 \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial \mu_1} = \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) .$$

Při označení (95) jsou tedy podle (98) splněny rovnice (96).
Z rovnic

$$(99) \quad \varphi_j (x_0 ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}; \mu_1, \ldots, \mu_m) = y_j^{(0)}$$

plynou pak počáteční podmínky derivováním podle μ_1

$$z(x_0) = \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu_1} \right]_{x = x_0} = \frac{\partial y_j^{(0)}}{\partial \mu_1} = 0 .$$

<u>Dodatek 2.</u> Podobně funkce

$$(100) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k^{(0)}} = u_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(při pevném k) vyhovují v (74) diferenciálním rovnicím

$$(101) \quad \frac{d u_j(x)}{dx} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_l} (x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n ; \mu_1, \ldots, \mu_m) . u_l(x)$$

s počátečními podmínkami.

$$(102) \quad u_k(x_0) = 1 , \; u_j(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad j \neq k .$$

A ještě : Pro každé x z intervalu (74) je (exp $t = e^t$) :

$$(103)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial y_1^{(0)}}, \dots, \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial y_1^{(0)}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial y_n^{(0)}}, \dots, \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial y_n^{(0)}} \end{vmatrix} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t); \mu_1, \dots, \mu_m)}{\partial y_k}\, dt\right)$$

(kde vlevo i vpravo je $\varphi_j(u) = \varphi_j(u; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)$). Tedy speciálně: determinant (103) je všude v $\mathfrak{D}_1$ různý od nuly. Důkaz: (101) plyne z (97) derivováním podle $y_k^{(0)}$ a záměnou pořadí derivování. Počáteční podmínky plynou z (99) derovováním podle $y_k^{(0)}$. (103) plyne ihned z věty 24, všimneme-li si, že funkce (100) dávají pro každé k řešení rovnic (101) a že pro $x = x_0$ má determinant (103) podle (102) hodnotu 1.

<u>Dodatek 3.</u> Podobně vyšetřeme

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_0} = v_j(x) \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Tyto funkce vyhovují systému diferenciálních rovnic

$$(104)\quad \frac{dv_j(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n; \mu_1, \dots, \mu_m) \cdot v_k(x)$$

s počátečními podmínkami

$$v_j(x_0) = -f_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) \quad (j = 1, \dots, n)$$

Rovnice (104) dostaneme podobně jako jsme dostali rovnice (101) pro derivaci podle $y_k^{(0)}$ v dodatku 2. Počáteční podmínky plynou takto: Pro větší zřetelnost označme

$$\frac{\partial\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)}{\partial x} =$$

$$= \varphi_j^{(1)}(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)$$

$$\frac{\partial\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)}{\partial x_0} =$$

$$= \varphi_j^{(2)}(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m).$$

Z rovnice (99) plyne derivováním podle

(105) $$\varphi_j^{(1)}(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) +$$

$$+ \varphi_j^{(2)}(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = 0 .$$

Ale

$$\varphi_j^{(1)}(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = f_j(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n; \mu_1, \dots, \mu_m)$$

a tedy (pro $x = x_0$ je $\varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) = y_j^{(0)}$)

$$\varphi_j^{(1)}(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) =$$

$$= f_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)$$ a tedy ze (105) plyne

$$\varphi_j^{(2)}(x_0; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) =$$

$$= -f_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m) .$$

Diferenciálním rovnicím (96), (101), (104) se také říkává variační rovnice (název, tuším, pochází od Poincaré - équations aux variations). Vyskytují se na příklad v analytické mechanice.

Poznámka 1. Znám-li řešení systému (46), procházející určitým bodem $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$ při určitých hodnotách parametrů $\mu_1, \dots, \mu_m$, tj. znám-li funkce (47) při daném $x_0, y_1^{(0)}, \dots$ $\dots, y_n^{(0)}$, $\mu_1, \dots, \mu_m$, dovedu sestrojit koeficienty $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_j}{\partial \mu_1}$ v soustavě (96) a znám tedy pro určení derivací

$$\frac{\partial \varphi_j(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}; \mu_1, \dots, \mu_m)}{\partial \mu_1}$$

systém lineárních rovnic, tedy systém, obecně řečeno jednodušší, než byl systém původní

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \dots, \mu_m) .$$

Speciálně, jestliže byla dána jedna rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \mu_1, \ldots, \mu_m) ,$$

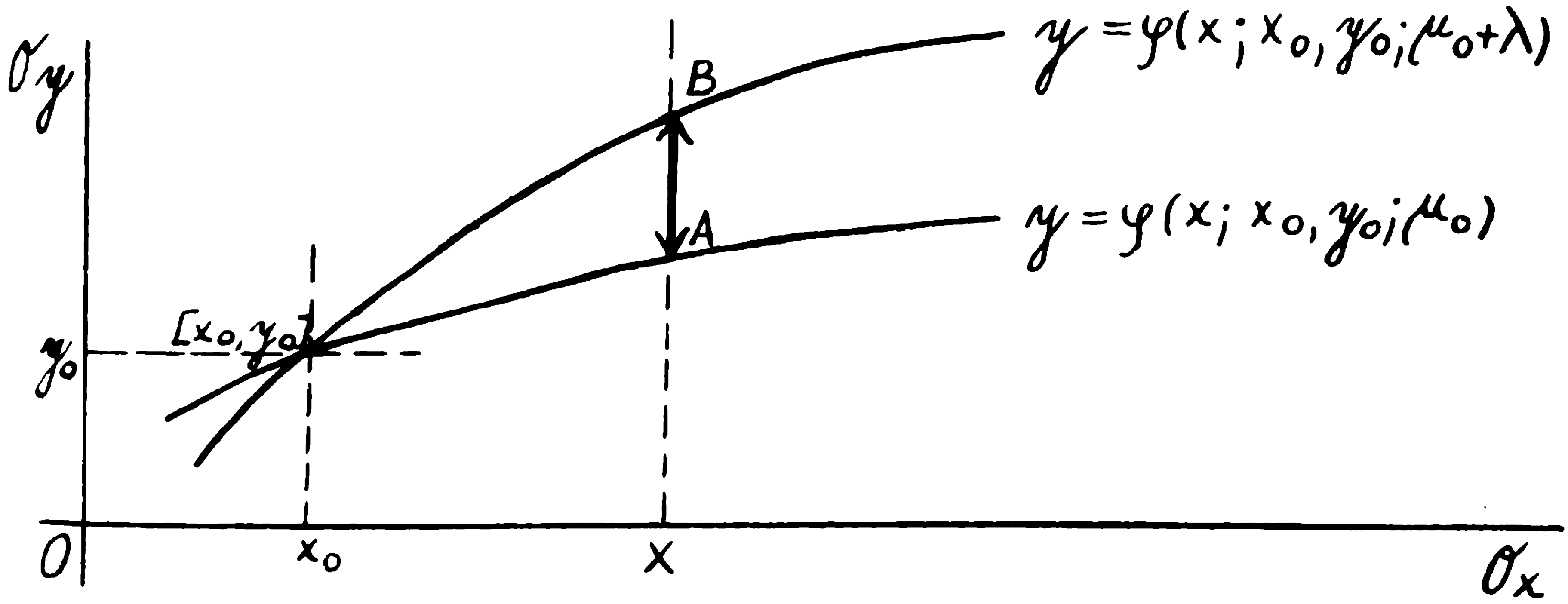
máme v (96) lineární rovnici 1.řádu, kterou dovedeme řešit kvadraturami. Naznačím ještě náčrtkem smysl naší věty pro jednu rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \mu)$$

s jedním parametrem. Představme si, že známe řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$ při jisté hodnotě μ_0 parametru, tj. funkci $\varphi(x; x_0, y_0; \mu_0)$. Z rovnice (96) (teď je to jedna rovnice) určíme

$$\left[\frac{\partial\varphi(x; x_0, y_0; \mu)}{\partial\mu}\right]_{\mu=\mu_0}$$

(pro všechna x definičního intervalu $\varphi(x; x_0, y_0; \mu_0)$) a obrázek vypadá asi takto:



Pro malá λ dovedu přibližně vyjádřit délku a smysl vektoru AB:

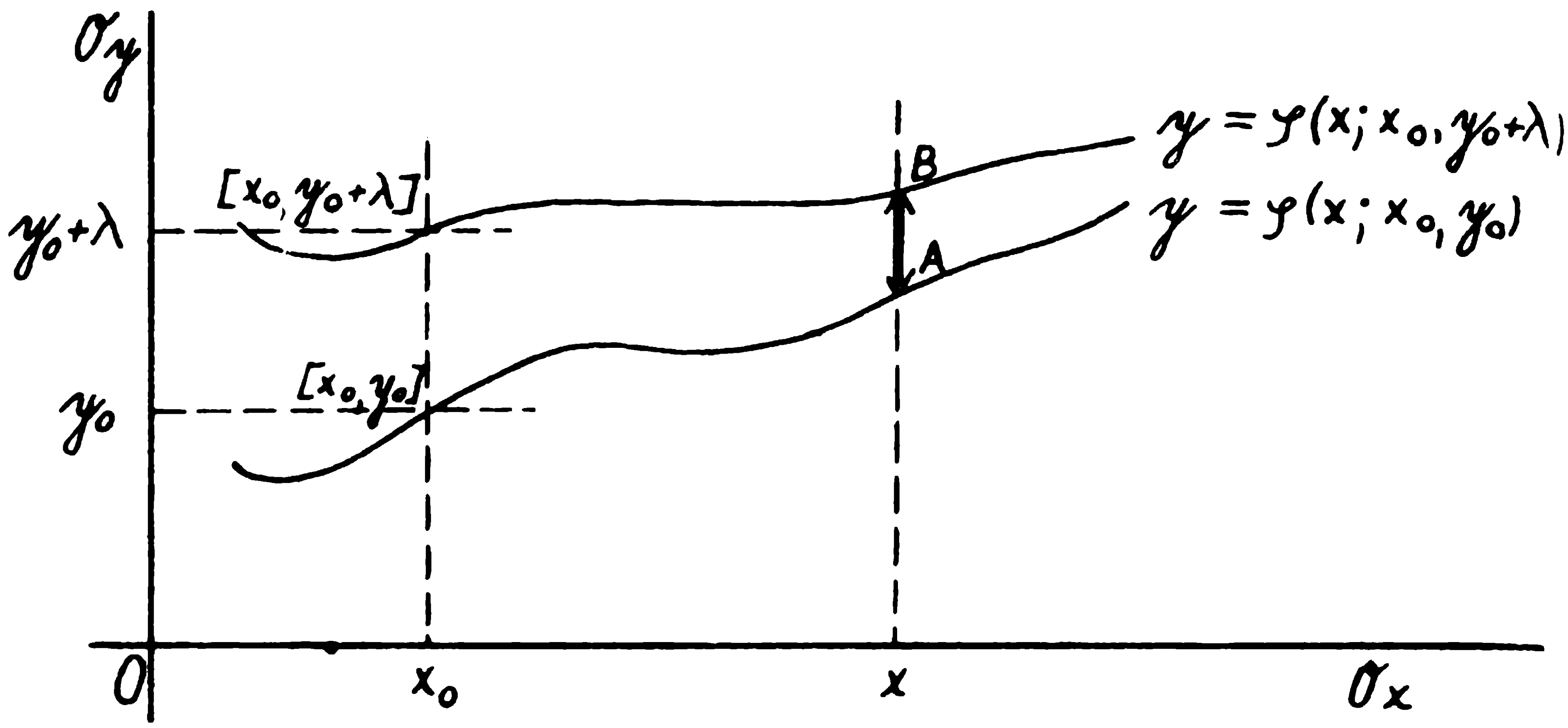
$$\varphi(x; x_0, y_0; \mu_0+\lambda) - \varphi(x; x_0, y_0; \mu_0) =$$

$$= \left[\frac{\partial\varphi(x; x_0, y_0; \mu)}{\partial\mu}\right]_{\mu=\mu_0} . \lambda + \lambda . \eta(\lambda) ,$$

kde $\lim\limits_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0$.

Poznámka 2. Načrtneme obdobně smysl dodatku 2. pro jednu rovnici bez parametru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$



Smysl a velikost vektoru AB jsou přibližně dány rovnicí

$$\varphi(x; x_0, y_0+\lambda) - \varphi(x; x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial\varphi(x; x_0, y_0)}{\partial y_0} + \lambda \cdot \eta(\lambda) ,$$

kde $\lim\limits_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0$.

Zároveň je z obrázku jasné, proč je $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right]_{x = x_0} = 1$: neboť $\varphi(x_0; x_0, Y_0) = Y_0$ a tedy derivace podle Y_0, je 1. Podobně, kdyby šlo např. o dvě rovnice:

$$\varphi_1(x_0; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = y_1^{(0)}$$

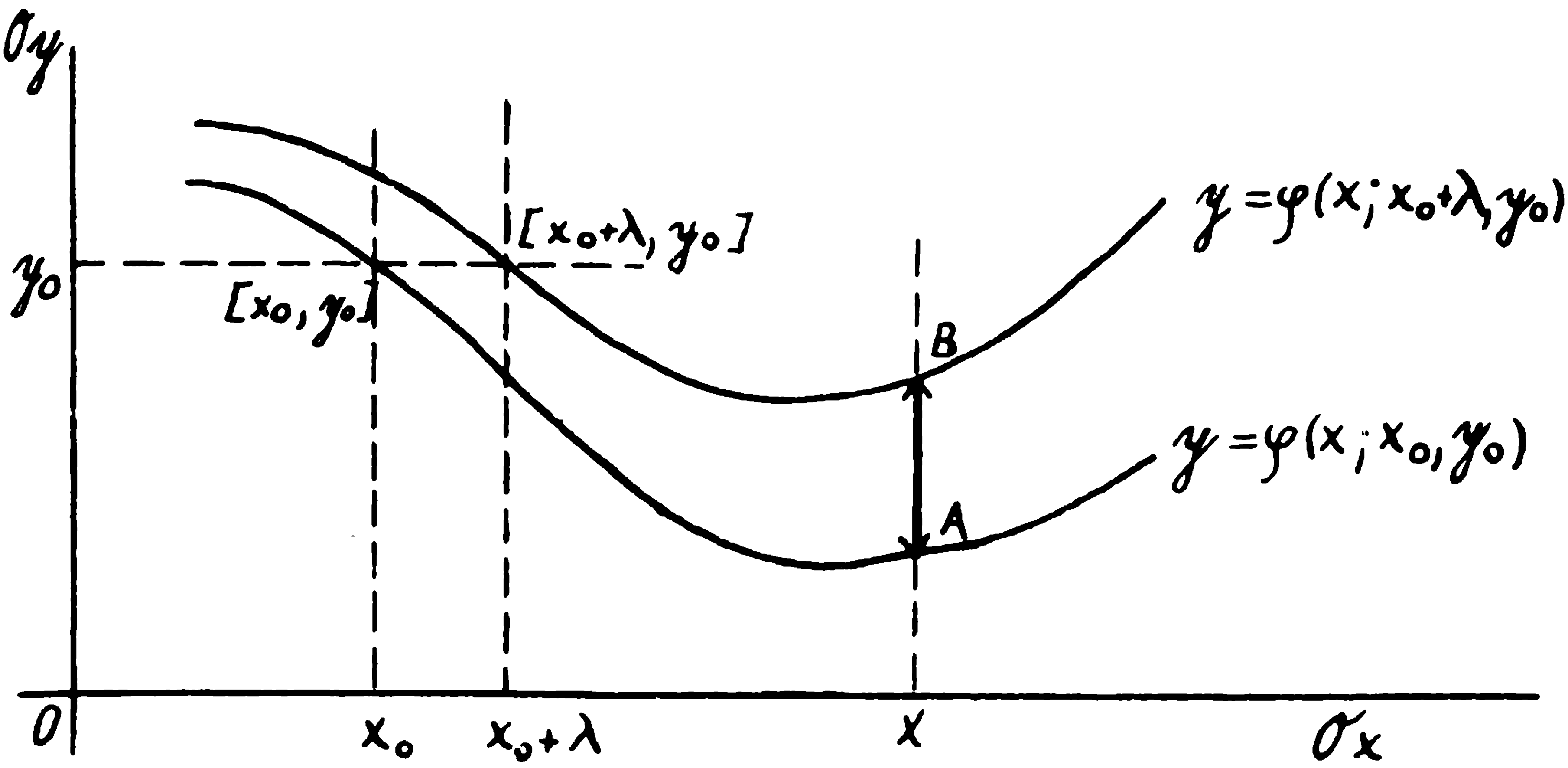
$$\varphi_2(x_0; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = y_2^{(0)}$$

a z toho pro $x = x_0$ ihned

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1^{(0)}} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2^{(0)}} = 0 , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1^{(0)}} = 0 , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2^{(0)}} = 1 .$$

<u>Poznámka 3.</u> Načrtneme konečně smysl dodatku 3. u jedné rovnice (bez parametru)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$



Vektor AB je co do smyslu i velikosti určen rovnicí

$$\varphi(x; x_0+\lambda, y_0) - \varphi(x; x_0, y_0) = \lambda \cdot \frac{\partial\varphi(x; x_0, y_0)}{\partial x_0} + \lambda \cdot \eta(\lambda),$$

kde $\lim\limits_{\lambda\to 0} \eta(\lambda) = 0$.

§ 5. První integrály. Obecný integrál.

Budiž předložen systém

$$(106) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

kde f_j, $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n)$ jsou spojité v jisté otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$ [19].

Víme, že množina $\mathcal{D}$ je pokryta charakteristikami: každým bodem $\mathcal{D}$ prochází jedna a jen jedna charakteristika. Tyto charakteristiky jsou právě všechna možná řešení systému (106), ležící v $\mathcal{D}$, přičemž definiční interval každé charakteristiky je "co největší" - pamatujeme si, co to přesně znamená. Pro řešení systému (106) je důležité znát funkce

19/ To budu stále předpokládat v celém tomto paragrafu

(107) $$G(x, y_1, \ldots, y_n),$$

které jsou "konstantní podél každé charakteristiky". Takové funkce nazývám "prvními integrály systému (106)" - ale ještě k tomu přidám jednu podmínku o derivabilitě:

Definice. Nechť funkce $G(x, y_1, \ldots, y_n)$ má v $\mathfrak{D}$ spojité parciální derivace 1. řádu podle všech $n+1$ proměnných. Jestliže funkce G je konstantní podél každé charakteristiky, ležící v $\mathfrak{D}$, říkáme, že G je prvním integrálem systému (106) v $\mathfrak{D}$.

Ta "konstantnost" značí ovšem toto: je-li $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ jakákoliv charakteristika (pro obor $\mathfrak{D}$), s definičním intervalem $\mathcal{J}$, potom funkce

(108) $$H(x) = G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

je konstantní v $\mathcal{J}$.

Odtud ovšem plyne, že v $\mathcal{J}$ jest $H'(x) = 0$, tj.

$$\frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} = 0 .$$

Zde však
$$\frac{dy_j(x)}{dx} = f_j(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)),$$

takže

(109) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots \\ &\ldots + \frac{\partial G(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_n} \cdot f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 ; \end{aligned}\right.$$

do $\dfrac{\partial G}{\partial y_j}$, f_j jest za $y_1, \ldots, y_n$ ovšem dosaditi $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Ale k a ž d ý m bodem $[x, y_1, \ldots, y_n] \in \mathfrak{D}$ prochází některá charakteristika, tj. (109) platí pro všechna $[x, y_1, \ldots, y_n] \in \mathfrak{D}$. To tedy platí pro každý první integrál G. Budiž naopak $G(x, y_1, \ldots, y_n)$ funkce, mající v $\mathfrak{D}$ spojité derivace 1. řádu a vyhovující všude v $\mathfrak{D}$ rovnici (109). Vezměme jakoukoliv charakteristiku $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ systému (106), ležící v $\mathfrak{D}$, s definičním intervalem $\mathcal{J}$ a definujme $H(x)$ rovnicí (108). Jest

$$\frac{dy_i}{dx} = f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)),$$

takže pro $x \in \mathcal{J}$ je

$$\frac{dH(x)}{dx} = \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} =$$

$$= \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial G(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial y_n} \cdot f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) .$$

Ježto však je $[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)] \in \mathfrak{D}$, je podle

(109) $\frac{dH(x)}{dx} = 0$, tj. $H(x)$ konstantní v $\mathcal{J}$, tedy G je prvním integrálem v $\mathfrak{D}$. Tedy:

Věta 32. Budiž $G(x, y_1, \ldots, y_n)$ funkce, mající v $\mathfrak{D}$ spojité parciální derivace 1.řádu podle všech proměnných. Potom G je prvním integrálem systému (106) v $\mathfrak{D}$ tehdy a jen tehdy, jestliže všude v $\mathfrak{D}$ platí (109). Prvním integrálem každého systému je libovolná konstanta - to je ovšem triviální případ, který nás nezajímá.

Všimněme si, co můžeme získat ze znalostí k prvních integrálů ($0 < k \leq n$) v oboru $\mathfrak{D}$:

$$G_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, G_k(x, y_1, \ldots, y_n) .$$

Předpokládejme, že v jistém bodě $P = [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathfrak{D}$ má matice

$$(110)\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_n}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

hodnost k ,[20] na př.

$$(112)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_k}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

v bodě P . Definujme

$$(113)\qquad G_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) = C_j^{(0)} \qquad (j = 1, \dots, k)$$

Potom podle věty o implicitních funkcích (věta 210 Jarníkova Diferenciálního počtu II) platí:

Existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému systému čísel x , $C_1, \dots, C_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ [21], vyhovujícímu nerovnostem

---

20/ Uvažme, že matice

$$(111)\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_n}, \dots, \dfrac{\partial G_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

má touž hodnost jako matice (110), neboť první řádek matice (111) je podle (109) lineární kombinací ostatních řádků. Kdyby matice (110) a tedy i matice (111) měla všude v $\mathfrak{D}$ hodnost menší než k, byly by funkce $G_1, \dots, G_k$ v jistém smyslu "závislé" - v jakém smyslu, je řečeno podrobně např. v mém Diferenciálním počtu II, věta 213.

21/ Pro $k = n$ ovšem čísla $y_{k+1}, \dots, y_n$ odpadají.

(114) $$\begin{cases} |x - x_0| < \delta, \ |y_l - y_l^{(0)}| < \delta & (l = k+1, \dots, n) \\ |C_j - C_j^{(0)}| < \delta & (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

existuje v k-rozměrném intervalu

(115) $$|y_j - y_j^{(0)}| < \Delta \qquad (j = 1, \dots, k)$$

právě jeden systém čísel $y_1, \dots, y_k$ splňující rovnice

(116) $$G_j(x, y_1, \dots, y_n) = C_j \qquad (j = 1, \dots, k)$$

Tato $y_j (j = 1, \dots, k)$ jsou tedy v oboru (114) funkcemi

(117) $$y_j = g_j(x, y_{k+1}, \dots, y_n, C_1, \dots, C_k) \quad (j = 1, \dots, k),$$

které tam mají spojité parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných. (Jestliže $k = n$, mají tyto rovnice ovšem tvar

(118) $$y_j = g_j(x, C_1, \dots, C_n) \qquad (j = 1, \dots, n).$$)

Přitom δ, Δ volme hned tak malé, aby interval $\mathcal{K}$:

(119) $$\begin{cases} |x - x_0| < \delta, \ |y_l - y_l^{(0)}| < \delta, \ |y_j - y_j^{(0)}| < \Delta \\ (j = 1, \dots, k; \quad l = k+1, \dots, n) \end{cases}$$

ležel v $\mathfrak{D}$ a aby nerovnost (112) platila všude v $\mathcal{K}$.

Ptejme se nyní: jak nalézti všechna řešení $y_1(x), \dots, y_n(x)$ systému (106), ležící v intervalu $\mathcal{K}$ a procházející aspoň jedním bodem $x, y_1, \dots, y_n$ takovým, že

(120) $$|G_j(x, y_1, \dots, y_n) - G_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})| < \delta \quad (j = 1, \dots, k).$$

Budiž předně $y_1(x), \dots, y_n(x)$ takové řešení v intervalu $\mathcal{J} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Funkce G_j jsou podél tohoto řešení konstantní :

(121) $$G_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = C_j$$

pro $x \in \mathcal{J}$ ($j = 1,\ldots,k$) a podle (120), (121), (114), je

(122) $$|C_j - C_j^{(0)}| < \delta \qquad (j = 1,\ldots,k)\,.$$

Odtud a z toho, že řešení leží v $\mathcal{K}$, plyne, že v $\mathcal{J}$ splňují funkce $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ rovnice (viz (117))

(123) $$y_j(x) = g_j(x, y_{k+1}(x),\ldots, y_n(x)\,,\; C_1,\ldots,C_k)$$

($x \in \mathcal{J}$, $j = 1,\ldots,k$) a přitom je

(124) $$|y_l(x) - y_l^{(0)}| < \delta \qquad \text{pro } l = k+1,\ldots,n\,)\,.$$

V případě $k = n$ dostáváme přímo

(125) $$y_j(x) = g_j(x, C_1,\ldots,C_n) \qquad (j = 1,\ldots,n)\,.$$

Je-li však $k < n$, pokračujeme takto:

Následkem rovnic

$$\frac{dy_l}{dx} = f_l \qquad (l = k+1,\ldots,n)$$

platí rovnice

(126) $$\frac{dy_l(x)}{dx} = f_l(x, g_1(x, y_{k+1}(x),\ldots, y_n(x), C_1,\ldots,C_k),\ldots$$
$$\ldots, g_k(x, y_{k+1}(x),\ldots, y_n(x), C_1,\ldots,C_k), y_{k+1}(x),\ldots, y_n(x))$$

($x \in \mathcal{J}$, $l = k+1,\ldots,n$).

Tedy: Každé takové řešení $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ (v intervalu $\mathcal{J}$) má tyto vlastnosti:

Definuji-li konstanty $C_1,\ldots,C_k$ rovnicemi (121), platí (122); dále funkce $y_{k+1}(x),\ldots,y_n(x)$ vyhovují v $\mathcal{J}$ systému $n-k$ diferenciálních rovnic (126) [22/] a nerovnostem (124)[22/] a funkce $y_1(x),\ldots,y_k(x)$ jsou dány rovnicemi (123).

22/ Tyto podmínky odpadají pro $k = n$.

Zvolme naopak $C_1, \dots, C_k$ tak, aby platilo (122), sestrojme řešení $y_{k+1}(x), \dots, y_n(x)$ systému (126)[23/] v intervalu $\mathcal{J} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, takové, aby platilo (124) [23/] a definujme $y_1(x), \dots, y_k(x)$ v $\mathcal{J}$ rovnicemi (123). Podle definice funkcí $g_1, \dots, g_k$ je předně

$$|y_j(x) - y_j^{(0)}| < \Delta \quad (x \in \mathcal{J},\ j = 1, \dots, k)$$

a za druhé (podle definice funkcí g_j) platí v $\mathcal{J}$ rovnice (121). Tedy: Systém funkcí $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vyhovuje především pro $x \in \mathcal{J}$ podmínce

(127) $$[x, y_1(x), \dots, y_n(x)] \in \mathcal{X}$$

a za druhé nerovnostem

(128) $$|G_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) - G_j(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})| < \delta$$
$$(j = 1, \dots, k).$$

Zbývá dokázat, že funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ splňují v $\mathcal{J}$ rovnice

(129) $$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (m = 1, \dots, n)$$

Pro $m = k+1, k+2, \dots, n$ tyto rovnice jsou splněny podle (126) a jde jen o tyto rovnice pro $m = 1, \dots, k$. [24/]

Podle rovnic (121) jsou v $\mathcal{J}$ splněny rovnice

$$\frac{\partial G_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x))}{\partial x} + \frac{\partial G_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x))}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1(x)}{dx} + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial G_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x))}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n(x)}{dx} = 0. \quad (j = 1, \dots, k)$$

Podle rovnic (126) platí tedy

23/ To opět odpadá pro $k = n$.

24/ Pro $k = n$ jde ovšem o splnění všech rovnic (129) (pro $m = 1, \dots, n$).

$$\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial x}+\sum_{m=1}^{k}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\cdot\frac{dy_m(x)}{dx}+$$

(130)

$$+\sum_{m=k+1}^{n}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\cdot f_m(x,y_1(x),\dots,y_n(x)) = 0$$

($j = 1,\dots,k$). Ale podle identity (109), platné všude v $\mathcal{D}$, platí

$$\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial x}+\sum_{m=1}^{k}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\cdot f_m(x,y_1(x),\dots$$

(131) $$\dots,y_n(x))+$$

$$+\sum_{m=k+1}^{n}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\cdot f_m(x,y_1(x),\dots,y_n(x)) = 0\ ;$$

tedy je odečtu

(132)

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\left(\frac{dy_m(x)}{dx}-f_m(x,y_1(x),\dots,y_n(x))\right) = 0$$

($j = 1,\dots,k$). Ježto však determinant (112) je v $\mathcal{K}$ různý od nuly, plyne ze (132) vskutku

(133) $$\frac{dy_m(x)}{dx} = f_m(x,y_1(x),\dots,y_n(x)) \qquad (m = 1,\dots,k).$$

Tato úvaha platí i pro $k = n$: zde odpadá součet $\sum_{m=k+1}^{n}$ a (132) nabývá tvaru

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial G_j(x,y_1(x),\dots,y_n(x))}{\partial y_m}\left(\frac{dy_m(x)}{dx}-f_m(x,y_1(x),\dots,y_n(x))\right) = 0$$

a rovnice (133) platí vskutku pro $m = 1,\dots,n$.

Tedy právě všechna hledaná řešení $y_1(x),\dots,y_n(x)$ dostaneme takto:

Zvolíme jakkoliv $C_1,\dots,C_k$ tak, aby platilo (122), dále najdu nějaké řešení $y_{k+1}(x),\dots,y_n(x)$ systému (126) (což je $n-k$ rovnic - komplikovaných ovšem tím, že závisí na k parametrech) v nějakém intervalu $\mathcal{J} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, aby platilo (124) a sestrojím funkce $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ podle rovnic (123).

Je vidět, že se problém redukuje na:

1/ řešení rovnic (116) podle $y_1, \ldots, y_k$ (viz (117)),

2/ řešení systému rovnic (126) řádu $n-k$ (s k parametry $C_1, \ldots, C_k$).

Jestliže známe n prvních integrálů $G_1, \ldots, G_n$, vyhovujících v bodě $P = [x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ nerovnosti (112), odpadá bod 2/ a řešení našeho systému n diferenciálních rovnic se redukuje na úlohu z teorie implicitních funkcí: řešit n rovnic (116) podle $y_1, \ldots, y_n$. Proto se v tomto případě říká systému funkcí $G_1, \ldots, G_n$ "obecný integrál systému (106)": neboť řešením rovnic

$$G_j(x, y_1, \ldots, y_n) = C_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

podle $y_1, \ldots, y_n$ se dostanou všechna řešení našeho systému - ovšem jen lokálně, pokud leží "dostatečně blízko" výchozího bodu $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$.

Abychom měli určitou definici, definujme obecný integrál takto:

<u>Definice.</u> Nechť funkce $f_j(x, y_1, \ldots, y_n)$,

$$\frac{\partial f_j(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} \qquad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n) \text{ jsou}$$

v jistém okolí $\mathcal{D}$ bodu $[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ spojité. Nechť $G_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ jest n prvních integrálů systému

$$\text{(134)} \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

pro obor $\mathcal{D}$ a nechť

$$(135) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial G_n}{\partial y_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_n}, \dots, \dfrac{\partial G_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

v bodě $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$. Potom říkáme, že systém funkcí $G_1, \dots, G_n$ tvoří obecný integrál v bodě $[x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$.

V praxi, při konkrétních systémech se leckdy mnoho nestaráme o explicitní vyjádření podmínek (122), (124), při jejichž splnění je správnost našeho postupu zaručena; vždyť výsledek může po případě platit i v oboru mnohem širším. Můžeme prostě použít našeho postupu, načež obdržíme funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$; dosazením můžeme zjistit, zda vyhovují našemu systému rovnic v $\mathcal{D}$, nebo aspoň v nějaké jeho otevřené části C; jestliže mimoto zjistíme, že každým bodem oboru C prochází některé z těchto řešení a že tato řešení se nedají v C "prodloužit", tj. že každé z nich "probíhá od hranice do hranice", potom je zaručeno, že jsme dostali charakteristiky, a to všechny charakteristiky pro obor C.

Probereme (ale ne do detailů) jeden příklad, vypůjčený z mechaniky tuhého tělesa.

<u>Příklad.</u> Máme řešit systém rovnic

$$(136) \qquad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} = (B - C) \cdot q \cdot r \\ B \dfrac{dq}{dt} = (C - A) \cdot r \cdot p \\ C \dfrac{dr}{dt} = (A - B) \cdot p \cdot q \end{cases}$$

kde $A > B > C > 0$ jsou konstanty.

Oborem $\mathcal{D}$ je zde celý prostor E_4, tj. množina všech bodů t, p, q, r. Jestliže $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ je nějaké řešení, násobme první rovnici p, druhou q, třetí r a sečtěme:

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

tj. podél každého řešení má funkce $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ derivaci podle t rovnou nule a je tedy konstantní - je to tedy první integrál a máme

(137) $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = m^2 \qquad (m \geq 0 \quad \text{konstanta})$$

podél každého řešení.

Podobně násobíme rovnice po řadě čísly Ap, Bq, Cr a sečteme; dostaneme

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0 ,$$

takže dostáváme další první integrál:

(138) $$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = n^2 \quad (n \geq 0 \quad \text{konstanta})$$

podél každého řešení.

Z rovnic (137), (138) vypočteme p^2 a q^2 pomocí r^2 :

(139) $$p^2 = \alpha r^2 + a , \qquad q^2 = -\beta r^2 + b ;$$

kde

$$\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0 , \qquad \beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0 \quad ;$$

$$a = \frac{-Bm^2 + n^2}{A(A-B)} , \qquad b = \frac{Am^2 - n^2}{B(A-B)}$$

jsou - právě tak jako m, n - "libovolné" konstanty (ne docela libobolné, ježto m^2, n^2 nejsou libovolná, nýbrž pouze libovolná nezáporná čísla).

Dosadíme nyní za p , q do třetí rovnice a dostaneme

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{A-B}{C}\right)^2 (\alpha r^2 + a)(-\beta r^2 + b) .$$

Odmocním-li, dostanu rovnici tvaru

$$\frac{dr}{dt} = f(r) ,$$

která se řeší známým způsobem; t bude vyjádřeno pomocí r eliptickým integrálem, tj. r pomocí t tzv. eliptickou funkcí. Ze (139) potom dostaneme p , q .

Bylo by ovšem ještě nutno prodiskutovat otázku znamení při odmocninách a zjistit rozsah platnosti řešení.

Zároveň je vidět, jakým způsobem jsme hledali první integrály: Hledali jsme takové kombinace rovnic (106), aby napravo vyšla nula a nalevo derivace nějaké funkce $G(t, p, q, r)$ podle t tj. výraz tvaru $\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial G}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt}$) v našem případě jsme našli dvě takové funkce, totiž

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 , \; A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

- v našem případě tyto funkce neobsahovaly nezávisle proměnnou t.

Poznámka. Najdu-li "obecný integrál" systému (106), jsme rádi; dovedeme potom řešení systému (106) převést - aspoň lokálně - na řešení úlohy o implicitních funkcích.

Ale existuje vždy "obecný integrál" ?

Budiž předložen systém (106), kde f_j, $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ ($j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$) jsou spojité v otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$. Víme, že potom existuje charakteristický systém

$$\varphi_j(x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

s otevřeným definičním oborem $\mathcal{D}_1$:

$$[x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D} , \quad x \in \mathcal{J}_{x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}} ;$$

funkce φ_j mají v $\mathcal{D}_1$ spojité parciální derivace 1. řádu. Víme, že systém rovnic

$$y_j = \varphi_j(x ; x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

je ekvivalentní se systémem

$$y_j^{(0)} = \varphi_j(x_0; x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) .$$

Zvolme číslo a ; potom pro každý bod

$$[y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}] \in \mathcal{D}^{a, *, *, \ldots, *}$$

(to je otevřená množina) značí

(140) $y_j = \varphi_j(x; a, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ $(j = 1,\dots,n)$

právě rovnice oné charakteristiky, jež prochází bodem $[a, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]$. Ale tyto rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi

(141) $\varphi_j(a; x, y_1, \dots, y_n) = y_j^{(0)}$ $(j = 1,\dots,n)$,

tj. funkce ($n+1$ proměnných $x, y_1, \dots, y_n$)

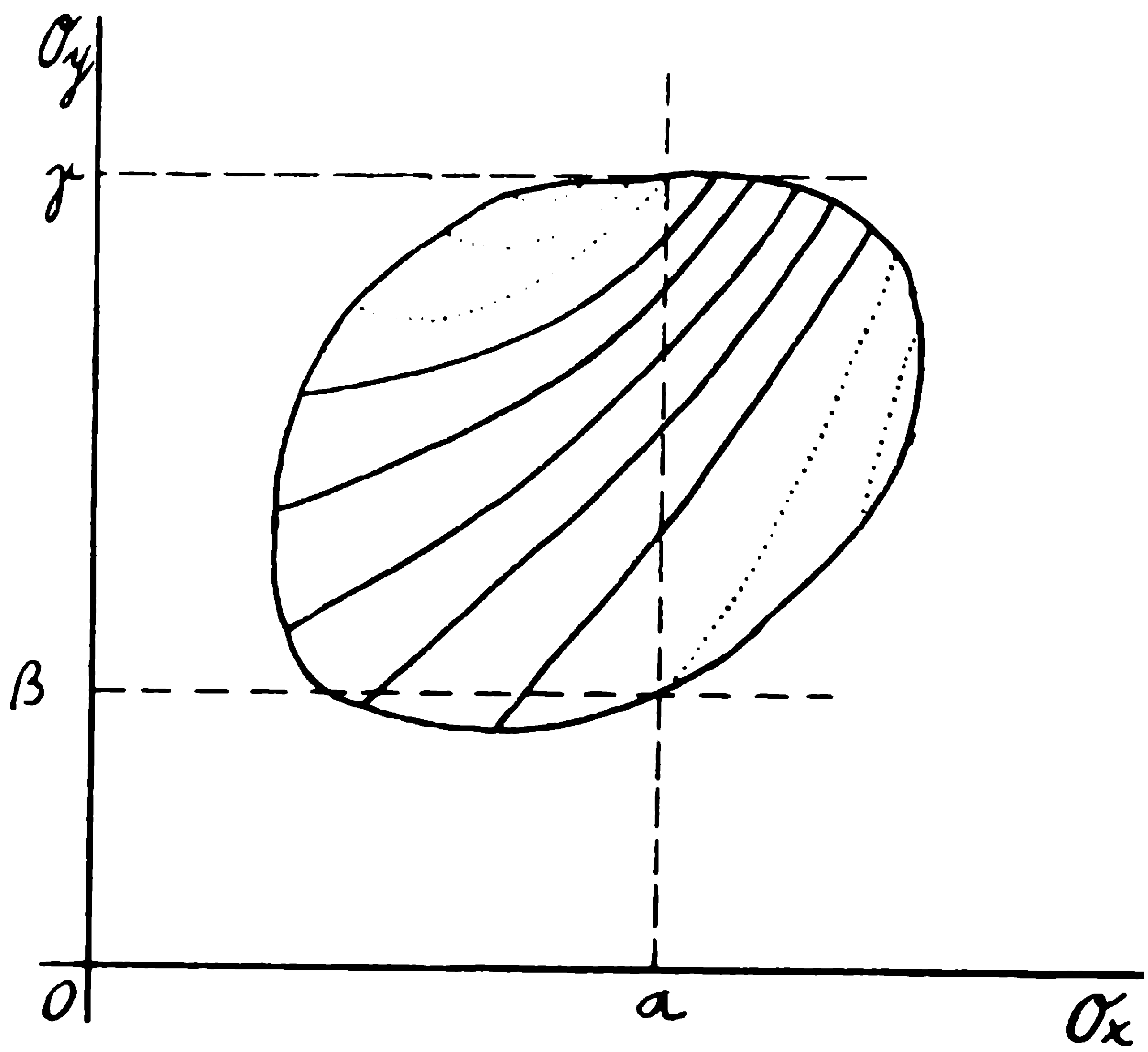
(142) $\varphi_j(a; x, y_1, \dots, y_n)$ $(j = 1,\dots,n)$

jsou prvními integrály a řešení soustavy rovnic

$$\varphi_j(a; x, y_1, \dots, y_n) = y_j^{(0)} \qquad (j = 1,\dots,n)$$

dává právě rovnice (140), tj. všechna řešení systému (106), procházející nějakým bodem o první souřadnici rovné a ; tj. dostáváme všechna řešení, jejichž definiční interval obsahuje bod a. Úlohu konstant $C_1, \dots, C_n$ hrají zde konstanty $y_1^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$. Vidíte, že ani v tomto případě nemusíme dostat všechna řešení ležící v $\mathcal{D}$. Na obrázku je znázorněn případ jedné rovnice $y' = f(x, y)$; plně jsou vytaženy charakteristiky, jež jsou dány rovnicí

$$y_0 = \varphi(a; x, y)$$



(neboli $C = \varphi(a; x, y)$,

ostatní jsou vytaženy tečkovaně. Konstanta C zde může nabývat právě všech hodnot

$$\beta < C < \gamma$$

Podotkněme, že determinant čísel

$$\frac{\partial \varphi_j(a; x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k} \qquad (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots n)$$

(což jsou spojité funkce) je v celém definičním oboru funkcí (142) různý od nuly; to plyne ihned z dodatku 2, k větě 31. Tedy podle naší definice vskutku funkce (142) tvoří obecný integrál v každém bodě

$$[x, y_1, \ldots, y_n]$$

definičního oboru funkcí (142) (tento definiční obor je otevřená množina podle věty 26). Rovnice (121) (pro $k = n$) nebo (125) nebo (141) nebo (140) ukazují, proč se říká, že "obecné řešení systému (106) závisí na n konstantách. Obecně to platí ovšem jen lokálně. V plném rozsahu to platí jen v jednoduchých případech, např. u lineárních systémů, kde vskutku dostaneme každé řešení jako funkci n konstant.