Jindřich Bečvář

Löwigovy práce z funkcionální analýzy

In: Martina Bečvářová (author); Antonín Slavík (author); Vlastimil Dlab (author); Jindřich Bečvář (author): Zapomenutý matematik Henry Lowig (1904–1995). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2012. pp. 80–116.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402210

LÖWIGOVY PRÁCE Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

Základní strukturou funkcionální analýzy jsou reálné a komplexní lineární (tj. vektorové) prostory nekonečné dimenze, jež jsou navíc opatřeny topologií, která je svázána s jejich algebraickou strukturou. Tato topologie může být odvozena z metriky, metrika z normy a norma ze skalárního součinu. Funkcionální analýza tedy pracuje s topologickými lineárními prostory, s metrickými lineárními prostory, s normovanými lineárními prostory a s lineárními prostory se skalárním součinem. Přitom je každý lineární prostor se skalárním součinem normovaným lineárním prostorem, každý normovaný lineární prostor je metrickým lineárním prostorem a každý metrický lineární prostor je topologickým lineárním prostorem.

Topologie, která doplňuje algebraickou strukturu, umožňuje zavést limitu posloupnosti, konvergenci řady, spojitost lineárního zobrazení (operátoru, resp. funkcionálu), dovoluje hovořit o cauchyovských (fundamentálních) posloupnostech, definovat pojem úplnosti prostoru, konstruovat zúplnění prostoru atd.

Skalární součin umožňuje zavést kolmost (v reálném případě i velikost úhlu), pojem ortogonální, resp. ortonormální množiny atd.

* * *

Pojem lineárního prostoru vyšetřoval již Hermann Günther Grassmann (1809–1877) ve své těžko srozumitelné knize *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844. V nové verzi z roku 1862 nazvané *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet* se již vyjadřoval poněkud srozumitelněji. Jeho myšlenky však měly velmi malý ohlas. Giuseppe Peano (1858–1932) navázal na H. Grassmanna v knize *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*; mimo jiné zde podal axiomatickou definici lineárního prostoru (*sistema lineare*), zavedl lineární zobrazení (*operazione distributiva*, resp. *trasformazione lineare*) a velmi srozumitelně zformuloval některá základní fakta, která dnes řadíme do lineární algebry. Ani jeho kniha však neměla větší odezvu. Peanovu axiomatickou definici lineárního prostoru převzal Salvatore Pincherle (1853–1936). V rozsáhlé monografii *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* z roku 1901 se systematicky zabýval teorií lineárních prostorů (*sistema lineare*, *spazio lineare*), zejména prostorů funkcí, prostorů se skalárním součinem atd. Názvem knihy se snažil zdůraznit, že její hlavní náplní je studium lineárních operátorů na prostorech funkcí. Pincherleova kniha bývá někdy považována za první monografii funkcionální analýzy (viz např. [Me2]).

Axiomy lineárního prostoru se znovu objevily roku 1918 ve slavné knize Hermanna Weyla (1885–1955) nazvané *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* jako součást axiomatického systému afinního prostoru. Kniha byla velmi úspěšná, roku 1923 vyšlo již 5. vydání, roku 1922 pak anglický a francouzský překlad.

Pojem lineárního prostoru však stále nevešel do obecného povědomí. Polský matematik Stefan Banach (1892–1945) považoval ještě roku 1922 za potřebné tento pojem ve své práci *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales* [Ba1] znovu podrobně vysvětlit. O deset let později v knize *Théorie des opérations linéaires* podal v kapitole *Espaces vectoriels généraux* již zcela moderní definici lineárního prostoru (viz [Ba2], str. 26).

Pojem lineárního prostoru se stal obecně známým až ve třicátých letech 20. století, mimo jiné v souvislosti s utvářející se funkcionální analýzou. V té době se rovněž konstituovala lineární algebra jako disciplína, která se o něco později stala jedním ze základů vysokoškolské matematiky (viz např. [B2]).

Bází lineárního prostoru dnes rozumíme lineárně nezávislou množinu generátorů. Pro konečně generovaný prostor dokážeme existenci báze jednoduchou konstrukcí, v obecném případě užijeme Zornovo lemma. Známý fakt, že každé dvě báze daného lineárního prostoru mají stejnou mohutnost, dokážeme pro konečně generovaný prostor pomocí tzv. Steinitzovy věty o výměně (nebo vhodného ekvivalentního tvrzení) a pro nekonečně generovaný prostor s využitím základních vlastností nekonečných kardinálních čísel (viz např. [B1], str. 86–87). Dimenzí lineárního prostoru pak nazveme mohutnost jeho libovolně zvolené báze.

Pojmy dimenze a n-rozměrný prostor uvažoval již roku 1862 H. Grassmann (*Stufenzahl*, *Gebiet n-ter Stufe*), zformuloval i tzv. větu o dimenzích spojení a průniku dvou podprostorů. G. Peano roku 1888 rovněž pracoval s bází a dimenzí (*enti di riferimento*, *numero delle dimensioni*). Oba však tuto problematiku uvažovali pouze v prostorech konečné dimenze, i když G. Peano uvedl i příklad prostoru nekonečné dimenze (polynomy). S. Pincherle roku 1901 nejprve studoval tyto pojmy v konečně generovaných prostorech (*sistema fondamentale*, *insieme lineare ad n dimensioni*); v nekonečně generovaných prostorech však jeho úvahy ještě nebyly přesné. Není divu, uvědomme si, že teorii množin (včetně základních faktů o kardinalitách) vybudoval Georg Cantor (1845–1918) v letech 1873 až 1884 a v letech 1895 a 1897 publikoval rozsáhlou, sjednocující práci nazvanou *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*[1] Teprve začátkem 20. století začala teorie množin výrazněji pronikat do matematiky.[2]

---

[1] Mathematische Annalen 46(1895), 481–512, 49(1897), 207–246. Viz též Gesammelte Abhandlungen, 282–351 (Anmerkungen 351–356). Anglický překlad (P. Jourdain): *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago, 1915 (reprint 1952), str. 85–136, 137–201.

[2] Připomeňme první učební texty, učebnice a monografie: A. Schoenflies: *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (1. díl: Jahresbericht der Deutschen

Německý matematik Georg Hamel (1877–1954) dokázal roku 1905 v krátké práci nazvané *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung:* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ [Ha] a otištěné v časopisu Mathematische Annalen existenci báze lineárního prostoru reálných čísel nad polem racionálních čísel.[3] Jeho výsledek zní v původním tvaru takto:

Es existiert eine Basis aller Zahlen, d. h. es gibt eine Menge von Zahlen $a, b, c, \ldots$ *derart, daß sich jede Zahl* x *in einer und auch nur einer Weise in der Form*

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots$$

darstellen läßt, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *rational sind, aber in jedem einzelnen Falle nur eine endliche Anzahl von ihnen von Null verschieden ist.* ([Ha], str. 459)

Při důkazu využil tzv. Zermelovu větu, tj. tvrzení, že každou množinu lze dobře uspořádat.[4] Potom již snadno ukázal, že libovolně zvolené zobrazení takovéto báze do množiny reálných čísel lze jediným způsobem rozšířit na lineární zobrazení f (které však nebude obecně spojité). Dostal tak řešení funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Poznamenejme, že známé Zornovo lemma, pomocí něhož dnes dokazujeme existenci báze lineárního prostoru, zveřejnil Max Zorn (1906–1993) v práci *A remark on method in transfinite algebra* [Zo] z roku 1935 v tomto tvaru:

DEFINITION 2. A set $\mathfrak{A}$ *of sets* A *is said to be closed (right-closed), if it contains the union* $\Sigma_{\mathfrak{B} \ni B} B$ *of every chain* $\mathfrak{B}$ *contained in* $\mathfrak{A}$*.*

Then our maximum principle is expressible in the following form.

(MP). In a closed set $\mathfrak{A}$ *of sets* A *there exists at least one,* A^**, not contained as a proper subset in any other* $A \in \mathfrak{A}$*.* ([Zo], str. 667)[5]

Mathematiker-Vereinigung 8(1900), 1–250, 2. díl: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Erganzungsband 2, Teubner, Leipzig, 1908, x+331 stran), A. Schoenflies: *Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erster Hälfe: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen*, Teubner, Leipzig, 1913, G. Hessenberg: *Grundbegriffe der Mengenlehre* (Abhandlungen der Friesschen Schule, Neue Folge 1, Heft IV, 1906, 220 stran, též Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1906), W. H. Young, G. Ch. Young: *The theory of sets of points* (Cambridge University Press, 1906, xii+316 stran), W. Sierpiński: *Zarys teoryi mnogości* (Warszawa, 1912, 158 stran), F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (Veit & Comp., 1914, viii+476 stran, 2. vydání: *Mengenlehre*, 1927, 285 stran), A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgrossen* (Springer-Verlag, Berlin, 1919, iv+155 stran, 2. vydání: 1923, ix+251 stran, 3. vydání: 1928, 424 stran).

[3] Jak dnes dobře víme, tento prostor má nespočetnou dimenzi.

[4] Tento výsledek Ernsta Zermela (1871–1953) byl roku 1904 otištěn v článku *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann* [Z1]. Byla v něm zveřejněna část Zermelova dopisu Davidu Hilbertovi ze dne 24. září 1904. E. Zermelo dokázal existenci dobrého uspořádání pomocí nového axiomu, který vstoupil do matematiky jako *axiom výběru*. Viz např. [M] a [E]. Této problematiky se týkají též Zermelovy práce [Z2], [Z3] z roku 1908.

[5] Viz P. J. Campbell: *The origin of "Zorn's lemma"*, Historia mathematica 5(1978), 77–89.

Jak Zermelova věta, tak Zornovo lemma (a též tzv. Hausdorffova věta o maximalitě) jsou ekvivalentní s axiomem výběru.[6]

* * *

Vznik funkcionální analýzy bývá často kladen do dvacátých a třicátých let 20. století. Základní myšlenky jsou však starší, mají původ v pracích několika významných matematiků z přelomu 19. a 20. století. Jejich autory byli již zmíněný Salvatore Pincherle, dále Vito Volterra (1860–1940), David Hilbert (1862–1943), Jacques Hadamard (1865–1963) a Maurice Fréchet (1878–1973); v některých svých pozdějších pracích se tito významní matematici podrobněji zamýšleli nad zrodem a vývojem myšlenek, které ke vzniku funkcionální analýzy vedly (viz např. [Me1]); jednalo se hlavně o studium diferenciálních a integrálních rovnic, z nichž mnohé modelovaly skutečné fyzikální jevy, o vyšetřování speciálních prostorů funkcí, konkrétních operátorů, funkcionálů apod. Na jejich myšlenky navázali další matematici – Ivar Fredholm (1866–1927), Felix Hausdorff (1868–1942), Ernst Fischer (1875–1954), Hans Hahn (1879–1934), Frigyes (Frédéric, Friedrich) Riesz (1880–1956), Paul Lévy (1886–1971), Stefan Banach, John von Neumann (1903–1957) a další. Dnes rozumíme funkcionální analýzou axiomatickou teorii topologických lineárních prostorů a lineárních i nelineárních operátorů.

Velmi významný byl zrod teorie normovaných lineárních prostorů ve dvacátých letech. V té době již bylo prozkoumáno několik konkrétních, do značné míry odlišných prostorů, jejichž společné vlastnosti podmínily vznik této nové teorie. K disposici již byl axiom výběru, Zermelova věta, transfinitní indukce, výrazně pokročila axiomatizace a abstrakce – nebyl již problém odhlédnout od konkrétní podstaty prvků toho kterého prostoru (funkce, posloupnosti apod.) a uvažovat obecné prostory, jejichž prvky nejsou blíže specifikovány, ale charakterizovány vlastnostmi popsanými určitým souborem axiomů.

Pojem Banachova prostoru, úplného normovaného lineárního prostoru, se objevil téměř současně u několika matematiků. Bylo to jednak roku 1920 v Banachově disertaci, která byla roku 1922 vydána jako časopisecký článek *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales* [Ba1], jednak v práci *Über Folgen linearer Operationen*,[7] kterou sepsal Hans Hahn, dále v příspěvku *Limit in terms of continuous transformations*,[8] jehož autorem je Norbert Wiener (1894–1964), a v práci *Über lineare Funktionaloperationen*,[9] kterou publikoval Eduard Helly (1884–1943). Termín *Banachův prostor* zavedl M. Fréchet roku 1928 v monografii *Les espaces abstraits et leurs théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale* [F] (*Les espa-*

[6] Viz např. [Ku], str. 23–25, [Ru1], v českém vydání str. 432–433 (1977), resp. 431–432 (2003).

[7] Monatshefte für Mathematik und Physik 32(1922), 1–88.

[8] Bulletin de la Société Mathématique de France 50(1922), 119–134.

[9] Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) 121(1912), 265–297.

ces de M. Banach, str. 141), S. Banach užil roku 1932 v monografii *Théorie des opérations linéaires* [Ba2] termín *B-prostor* (*Espaces du type (B)*, str. 53).

Teorie normovaných lineárních prostorů se úspěšně rozvíjela ve dvacátých letech a v první polovině let třicátých, výsledky byly shrnuty v Banachově monografii *Théorie des opérations linéaires* [Ba2] z roku 1932. K jisté rekapitulaci došlo již roku 1928 na mezinárodním kongresu matematiků v Bologni. Problematice fukcionální analýzy tam byly věnovány dvě přednášky: J. Hadamard hovořil na téma *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*, M. Fréchet na téma *L'analyse générale et les espaces abstraits.*[10] Tehdy se výrazně odlišovala funkcionální analýza od analýzy obecné.[11]

Hilbertovým prostorem dnes rozumíme reálný nebo komplexní lineární prostor, který je opatřen skalárním součinem a je úplný.[12] Dříve byla v definici Hilbertova prostoru ještě požadována separabilita (tj. existence spočetné husté podmnožiny). Abstraktní definice Hilbertova prostoru pochází až z přelomu dvacátých a třicátých let.[13] Například J. von Neumann podrobně definoval Hilbertův prostor roku 1930 v práci *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren* [N1]:[14]:

A. $\mathfrak{H}$ ist ein linearer Raum. ...

B. Es gibt in $\mathfrak{H}$ ein, zu dem der Vektorrechnung analoges, inneres Produkt, das eine Metrik erzeugt. ...

C. In der Metrik $|f-g|$ ist $\mathfrak{H}$ separabel. D. h.: eine gewisse abzählbare Menge ist in $\mathfrak{H}$ überall dicht.

D. $\mathfrak{H}$ besitzt beliebig (endlich!) viele lin. unabh. Elemente.

E. $\mathfrak{H}$ ist vollständig. D. h.: wenn eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ in $\mathfrak{H}$ der Cauchyschen Konvergenzbedingung genügt (zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, so daß aus $m, n \geqq N$ $|f_m - f_n| \leqq \varepsilon$ folgt), so ist sie konvergent (es existiert ein f aus $\mathfrak{H}$, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so daß aus $n \geqq N$ $|f_n - f| \leqq \varepsilon$ folgt). ([N1], str. 63–66)

Obdobným způsobem definoval Hilbertův prostor F. Riesz v práci *Über die*

---

[10] Atti del Congresso internazionale dei matematici, Bologna 3–10 settembre 1928, T. I, Bologna, 1929, 143–161, resp. 267–274.

[11] Obecná analýza vyrostla zejména z myšlenek Eliakima Hastingse Moorea (1862–1932), konkrétně z jeho prací *On a form of general analysis with application to linear differential and integral equations* (Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici, Roma 6–11 Aprile 1908, Vol. II, Roma, 1909, 98–114), *Introduction to a form of general analysis* (Yale University Press, 1910, 150 stran) a *On the foundation of the theory of linear integral equations* (Bulletin of the American Mathematical Society 18(1912), 334–362). Viz např. [Bro].

[12] V Halmosově knize *Introduction to Hilbert space* z roku 1951 je stručná a jasná definice: *A Hilbert space is an inner product space which, as a metric space, is complete.* Stejně stručně je definován Banachův prostor: *... a Banach space is a normed vector space which, as a metric space, is complete.* ([H], str. 17)

[13] Termín *Hilbertův prostor* zavedl již A. Schoenflies roku 1908 ve druhém dílu své knihy *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, viz str. 266, 298.

[14] Viz též von Neumannova práce [N0] z roku 1927, str. 15–17.

linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes [R2] z roku 1930, a to v prvním paragrafu nazvaném *Der komplexe Hilbertsche Raum*:

Erstens ist $\mathfrak{H}$ *linear, d. h. ...*

Zweitens ist jedem Paare f, g *eine bestimmte reelle oder komplexe Zahl, das innere Produkt* (f, g), *zugeordnet ...*

Drittens ist $\mathfrak{H}$ *vollständig, d. h. ...*

Viertens ist $\mathfrak{H}$ *separabel, d. h. er enthält eine abzählbare, überal dichte Teilmenge. ...*

Fünftes enthält $\mathfrak{H}$ *beliebig viele linear unabhängige Elemente, d. h. ...* ([R2], str. 26–27)

Ve třicátých letech již byl výše uvedený pojem intenzivně vyšetřován a označován termínem Hilbertův prostor.[15] Dokládají to např. práce *Linear Transformations in Hilbert Space* [St1] a monografie *Linear Transformations in Hilbert Space and their applications to analysis* [St2], které publikoval Marshall Harvey Stone (1903–1989). A právě v té době se zjistilo, že řada výsledků nevyžaduje předpoklad separability (H. Löwig [L6] a F. Rellich [Re]) – proto byl tento požadavek z definice Hilbertova prostoru vypuštěn.

Bližší seznámení s historií funkcionální analýzy lze získat např. v následujících knihách:

A. F. Monna: *Functional Analysis in Historical Perspective* [Mo],

J. Dieudonné: *History of Functional Analysis* [Di],

A. Pietsch: *History of Banach Spaces and Linear Operators* [P].

Mnoho cenných informací a postřehů najdeme v řadě časopiseckých prací, viz např. [BK], [NB1], [NB2], [Bor], [Br1], [Br2], [Bo2], [Bro], [Du], [G], [Hor] [Hu1], [Hu2], [Ka], [K2], [K3], [K4], [Me1], [Me2], [Si1], [Si2], [Sm], resp. v monografiích [DS], [Kli]. Velmi podnětná a zajímavá je publikace

J.-L. Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra* [Do].

Doporučit je možno též knihu

K. Saxe: *Beginning Functional Analysis* [Sa]

s řadou historických poznámek, s obsáhlou bibliografií a biografickými medailonky (Banach, Enflo, Fréchet, Fourier, Hilbert, Lebesgue, von Neumann, Riesz, Stone), resp. učebnici

[15] Půvabnou historku, o jejíž pravdivosti však pochybuje, uvádí Albrecht Pietsch (nar. 1934) v doslovu k publikaci [HS]: *Nachdem Weyl (1909) einen Seminarvortrag über seinen Beweis des Riesz-Fischer-Theorems gehalten hatte, soll ihn Hilbert gefragt haben: „Weyl, sagen Sie mir bitte, was ist ein Hilbertscher Raum? Das habe ich nicht verstanden!“* ([HS], str. 283) Viz též L. Young: *Mathematicians and their times*, Mathematics Studies 48, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981, str. 312, a A. E. Taylor: *A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals*, Archive for History of Exact Sciences 27(1982), 233–295, str. 283.

H. Schröder: *Funktionalanalysis* [Sch],

v níž jsou rovněž četné historické a bibliografické poznámky, resp. v monografii

F. Deutsch: *Best Approximation in Inner Product Spaces* [De]

obsahující za každou kapitolou historické poznámky. Pokud se jedná o vztah funkcionální analýzy k aplikacím, lze doporučit monografii

A. W. Naylor, G. R. Sell: *Linear Operator Theory in Engineering and Science* [NS],

která roku 1981 vyšla slovensky, resp. knihy

E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics* [Ze1],

E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Main Principles and their Applications* [Ze2],

H. Heuser: *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung* [Hu2].[16]

* * *

Felix Hausdorff uvedl roku 1932 v rozsáhlém článku *Zur Theorie der linearen metrischen Räume* [H1][17] nejprve definice některých základních pojmů lineární algebry: lineární prostor (*linearer Raum*), lineárně nezávislá množina (*linear unabhängige Menge*), podprostor (*lineare Menge*, *lineare Teilmenge*) atd.

Lineární obal (*lineare Hülle*) množiny A (průnik všech podprostorů obsahujících množinu A a současně množina všech lineárních kombinací prvků množiny A) označil symbolem A_λ; o lineárně nezávislé množině A pak hovořil jako o bázi (*Basis*) podprostoru A_λ. Dále poukázal na Zermelovu větu a poznamenal, že z množiny A můžeme odstraněním přebytečných prvků získat bázi prostoru A_λ. Po několika přípravných odstavcích uvedl tuto definici:

Ein linearer metrischer Raum E ensteht aus einem linearen Raum, wenn jedem Punkt x eine reelle Zahl $|x|$, der Betrag von x, gemäß den Vorschriften

$$|0| = 0, \qquad |x| > 0 \quad \textit{für} \;\; x \neq 0,$$

$$|\alpha x| = |\alpha||x|, \qquad |x + y| \leqq |x| + |y|$$

zugeordnet und $|x - y|$ als Entfernung der Punkte x, y erklärt wird. ([H1], str. 295)

F. Hausdorff tedy zavedl *lineární normovaný prostor* a jím indukovaný metrický lineární prostor. Tato definice mu umožnila mluvit o konvergenci posloupností, součtu nekonečných řad a uzávěru množiny A (*Konvergenz einer*

[16] Harro Heuser (1927–2011) zařadil do své monografie i obsáhlou historickou pasáž nazvanou *Ein Blick auf die werdende Funktionalanalysis* (strany 599–663).

[17] Viz též komentář [Ch] k této Hausdorffově práci, který napsal Srishti D. Chatterji (nar. 1935).

Punktfolge, *Summe einer unendlichen Reihe*, *abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A*). Uvedl, že uzávěr podprostoru je opět podprostor, a zdůraznil, že tvoření lineárního obalu a uzávěru není záměnné; pro uzávěr $\overline{A_\lambda}$ lineárního obalu množiny A a lineární obal $(\overline{A})_\lambda$ uzávěru množiny A platí inkluze

$$(\overline{A})_\lambda \subseteq \overline{A_\lambda}.$$

Lineárně nezávislou množinu A nazval základní množinou (*Grundmenge*) uzavřeného lineárního obalu $\overline{A_\lambda}$. Uveďme příslušný úryvek z jeho práce.

Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen; demnach gibt es zu einer Menge A die kleinste abgeschlossene Menge $\geqq A$, die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A. Die abgeschlossene Hülle $\overline{L}$ einer linearen Menge L ist wieder linear ...

Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener linearer Mengen ist wieder abgeschlossen und linear; demnach gibt es zu einer Menge A die kleinste abgeschlossene lineare Menge $\geqq A$, die abgeschlossene lineare Hülle von A. Sie ist die abgeschlossene Hülle $\overline{L} = \overline{A}_\lambda$ der linearen Hülle $L = A_\lambda$ von A; denn einerseits ist jede abgeschlossene lineare Menge $\geqq A$ auch $\geqq L$ und $\geqq \overline{L}$, anderseits ist $\overline{L}$ selbst abgeschlossen linear. (Wenn man in umgekehrter Reihenfolge erst die abgeschlossene Hülle $F = \overline{A}$ und dann deren lineare Hülle F_λ bildet, so ist nur $F_\lambda \leqq \overline{L}$, da die lineare Hülle einer abgeschlossenen Menge nicht notwendig abgeschlossen ist.) Wenn A linear unabhängig ist, so heiße sie eine Grundmenge ihrer abgeschlossenen linearen Hülle $\overline{L}$; man kann wie oben aus jeder Menge A eine linear unabhängige Teilmenge B ohne Änderung der linearen Hülle L, also eine Basis von L oder Grundmenge von $\overline{L}$ aussondern. ([H1], str. 295)

Separabilním prostorem rozuměl F. Hausdorff prostor, který má spočetnou hustou podmnožinu. Zdůraznil, že separabilní prostor má konečnou nebo spočetnou základní množinu, ale může mít konečnou, spočetnou nebo nespočetnou bázi.

* * *

V následujícím textu se budeme věnovat Löwigovým pracím [L6], [L7] a [L8]. Pro podrobnější poznání jejich charakteru zde uvedeme i několik ukázek. Upozorňujeme však, že terminologie se od třicátých let 20. století značně změnila. Stačí srovnat práce z prvních desetiletí 20. století s nejnovějšími monografiemi a učebnicemi (např. [Sa], [De], [Sch]), případně i s knihami dnes klasickými (např. [Ru2]).

* * *

Roku 1934 publikoval H. Löwig třiatřicetistránkovou práci *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl* [L6] v časopisu Acta Litterarum ac Scientiarum (Szeged).[18] V únoru roku 1934 ji podal jako svoji habilitační práci na Přírodovědecké fakultě Německé univerzity v Praze a po úspěšném řízení se v lednu roku 1935 stal soukromým docentem.

V úvodním odstavci uvedl, že cílem práce je ukázat, že řada tvrzení, která byla dokázána pro Hilbertovy prostory (v tehdejším pojetí – viz výše uvedené definice J. von Neumanna a F. Riesze), platí i pro libovolné úplné lineární prostory se skalárním součinem. Jinými slovy, předpoklad separability prostoru, který byl do té doby v definici Hilbertova prostoru uváděn, není podstatný:

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß viele Sätze, welche man bisher nur für den Hilbertschen Raum bewiesen hat, auch für beliebige euklidische Räume, d. h. lineare metrische Räume, in denen ein inneres Produkt definiert ist, gelten, oder – mit andern Worten – daß die Voraussetzung der Separabilität des Raumes, die man beim Beweise dieser Sätze bisher zu machen pflegte, unwesentlich ist. ([L6], str. 1)

V prvním paragrafu nazvaném *Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume* ([L6], str. 1–9) uvedl H. Löwig čtenáře do tématu. Nejprve stručně připomněl pojem komplexního lineárního prostoru[19] (*komplexer linearer Raum* $\mathfrak{R}$), pojem normy (*absoluter Betrag des Elements* $\mathfrak{r}$) a definoval komplexní normovaný lineární prostor (*komplexer linearer metrischer Raum* $\mathfrak{R}$). Dále zavedl pojem izomorfních podmnožin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ prostorů $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$: mezi $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ je bijekce a pro odpovídající si prvky $\mathfrak{r}_k$, $\mathfrak{n}_k$ a libovolná komplexní čísla a_k platí rovnost

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\mathfrak{r}_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\mathfrak{n}_k\Big|.$$

Pomocí normy pak definoval pojem okolí prvku $\mathfrak{r}_0$ (*starke Umgebung der Stelle* $\mathfrak{r}_0$), pojem hromadného bodu podmnožiny (*starke Häufungsstelle einer Teilmenge*), pojem uzavřené podmnožiny (*starkabgeschlossene Menge*) a pojem konvergentní posloupnosti (*stark konvergente Folge*). Uzavřený lineární obal množiny $\mathfrak{M}$ je množina všech hromadných bodů lineárního obalu množiny $\mathfrak{M}$.

V následujících dvou definicích zavedl fundamentální posloupnost (*starke Fundamentalfolge*) a úplnou množinu (*starkvollständige Teilmenge*). Poznamenal, že z úplnosti množiny vyplývá její uzavřenost.

Je-li uzavřený lineární obal množiny $\mathfrak{M}$ úplný, hovořil o úplném lineárním obalu množiny $\mathfrak{M}$. Dokázal, že jsou-li dvě množiny normovaných lineárních prostorů izomorfní, jsou izomorfní i jejich úplné lineární obaly, pokud ovšem existují. Klasickým způsobem pak ukázal konstrukci úplného rozšíření (zúplnění) prostoru:

Jeden komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$, welcher nicht starkvollständig ist, kann man zu einem starkvollständigen komplexen linearen metrischen

[18] Jeho práce došla do redakce časopisu 24. února 1934.

[19] Odvolal se na zákony afinní vektorové algebry.

Raum erweitern ... Man betrachte als die Elemente von $\mathfrak{R}^*$ die Gesamtheiten äquivalenter starker Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$. ... wir wollen diese Erweiterung die kleinste starkvollständige Erweiterung von $\mathfrak{R}$ nennen. ([L6], str. 4)

H. Löwig dále připomněl pojem lineárního zobrazení lineárních prostorů (*lineare Abbildung*), pojem omezeného lineárního zobrazení normovaných lineárních prostorů[20] (*beschränkte lineare Abbildung*), uvedl, že množina všech omezených lineárních zobrazení prostoru $\mathfrak{R}$ do prostoru $\mathfrak{S}$ tvoří normovaný lineární prostor, definoval pojem lineárního operátoru (*linearer Operator*) a lineárního funkcionálu (*lineares Funktional*), a dospěl tak k pojmu slabé okolí.

Es seien L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ endlich viele beschränkte lineare Funktionale in $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Ferner sei $\mathfrak{r}_0$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Dann heiße die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$, welche den Ungleichungen

$$\left|L_k(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, eine schwache Umgebung der Stelle $\mathfrak{r}_0$. ([L6], str. 5)

Poznamenal, že tato definice zobecňuje definici J. von Neumanna[21] a že splňuje čtyři axiomy okolí, které zformuloval F. Hausdorff ve své knize *Grundzüge der Mengenlehre.*[22]

Na pojem slabého okolí navázal řadou pojmů dalších: slabý hromadný bod množiny (*schwache Häufungsstelle einer Menge* $\mathfrak{M}$), slabě uzavřená množina (*schwachabgeschlossene Menge*), slabě konvergentní posloupnost (*schwach konvergente Folge*); obyčejnou, resp. slabou konvergenci značil

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}, \qquad \text{resp.} \qquad \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}.$$

Uvedl rovněž, že posloupnost $\mathfrak{r}_n$ slabě konverguje k prvku $\mathfrak{r}$ právě tehdy, když pro každý omezený lineární fukcionál L posloupnost čísel $L\mathfrak{r}_n$ konverguje k číslu $L\mathfrak{r}$ (*Satz 2*). Upozornil na to, že slabý hromadný bod množiny $\mathfrak{M}$ nemusí být slabou limitou nějaké posloupnosti prvků množiny $\mathfrak{M}$ (a odvolal se na výsledek J. von Neumanna [N2], str. 380–381).

Připomněl následující výsledek (*Satz 3*): jestliže $\mathfrak{M}$ je podmnožina normovaného komplexního lineárního prostoru a $\mathfrak{r}_0$ prvek neležící v uzavřeném lineárním

[20] Lineární zobrazení A je omezené, jestliže množina všech čísel $|A\mathfrak{r}|$, kde $|\mathfrak{r}| \leqq 1$, je omezená. Supremum této množiny je tzv. *norma zobrazení A*.

[21] *Schwache Topologie in $\mathfrak{H}$. Sei $\mathcal{U}_2(f_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \varepsilon)$ die Menge aller f mit $|(f - f_0, \varphi_1)| < \varepsilon$, ..., $|(f - f_0, \varphi_s)| < \varepsilon$; alle $\mathcal{U}_2(f_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \varepsilon)$ mit beliebigen $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ (aus $\mathfrak{H}$, s beliebig) und $\varepsilon > 0$ sind die Umgebungen von f_0.* ([N2], str. 379)

[22] *Umgebungsaxiome:*

(A) *Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.*

(B) *Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist* $(W_x \subseteqq \mathfrak{D}(U_x, V_x))$.

(C) *Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist* $(U_y \subseteqq U_x)$.

(D) *Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt* $(\mathfrak{D}(U_x, U_y) = 0)$. ([H2], str. 213) obalu této množiny, pak existuje omezený lineární funkcionál L, který je na celé množině $\mathfrak{M}$ nulový a na prvku $\mathfrak{x}_0$ nenulový.[23]

Uvedl, že toto tvrzení bývá formulováno a dokazováno pro reálné prostory; on však využil jednoduchého rozšíření reálného případu na komplexní – položil

$$L\mathfrak{x} = R\mathfrak{x} - \mathrm{i}R(\mathrm{i}\mathfrak{x}),$$

kde R je reálný funkcionál. Z předchozí věty vyplynula tato věta:

Satz 4. Jede schwache Häufungsstelle einer Menge $\mathfrak{M}$ gehört der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an. ([L6], str. 6)

Důsledkem jsou následující dvě tvrzení:

Satz 5. Ist

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x},$$

dann gehört $\mathfrak{x}$ der starkabgeschlossenen linearen Hülle der Menge der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ an.[24]

Satz 6. Jede starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ist auch schwachabgeschlossen. ([L6], str. 7)[25]

H. Löwig poznamenal, že u podprostoru (resp. lineárního obalu) stačí uvádět pouze uzavřenost. Pak podal tuto definici:

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße schwachvollständig, wenn sie in der kleinsten starkvollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwachabgeschlossen ist. ([L6], str. 7)[26]

Každá slabě úplná množina je slabě uzavřená, naopak tomu však být nemusí.

Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heiße eine schwache Fundamentalfolge, wenn für jedes beschränkte lineare Funktional L in $\mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n$ existiert. ([L6], str. 8)

V prvním paragrafu se H. Löwig odvolával na Hausdorffovu práci [H1], Banachovu monografii [Ba2], von Neumannovu práci [N2], Schmidtův článek [S] a Mazurův článek [Ma]; jmenované publikace vyšly (kromě článku [S]) v letech 1930 až 1932.

Vlastní jádro své práce rozdělil H. Löwig na dvě části – podle toho, zda využíval, nebo nevyužíval Zermelovu větu.

Ve druhém paragrafu nazvaném *Sätze über komplexe euklidische Räume, die ohne Benützung des Wohlordnungssatzes bewiesen werden können* (str. 9–25) uvedl nejprve definici (obecněji pojatého) skalárního součinu (*hermiteische*

[23] H. Löwig zde citoval Hausdorffovu práci [H1], str. 306.

[24] Toto tvrzení vyslovil též S. Banach v práci [Ba1] na str. 134.

[25] Tato věta je zobecněním výsledku E. Schmidta [S]. Viz též J. von Neumann [N2], str. 396.

[26] Poznamenejme, že v literatuře jsou pojmy slabé uzavřenosti a slabé úplnosti zaváděny v jiném smyslu.

bilineare Funktion). V následující větě ukázal, že je-li tento skalární součin navíc pozitivně definitní, lze definovat normu a platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost a trojúhelníková nerovnost. Lineární prostor s pozitivně definitním skalárním součinem (*innere Produkt*) je tedy normovaným lineárním prostorem; speciálními případy jsou n-dimenzionální komplexní eukleidovský prostor (*komplexer euklidischer Raum*) a komplexní Hilbertův prostor (*komplexe Hilbertsche Raum*).

Následuje řada vět, v nichž H. Löwig zformuloval četné poznatky teorie Hilbertových prostorů. Uveďme některé z nich v jeho původní formulaci.

Satz 11. Zu jedem beschränkten linearen Funktional L eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ gibt es ein (und daher auch nur ein) erzeugendes Element, d. h. ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$

$$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

ist. ([L6], str. 11)

H. Löwig poznamenal, že je dobře známo, že věta 11 platí pro komplexní eukleidovský prostor konečné dimenze a pro komplexní Hilbertův prostor (odvolal se na Rieszovu práci [R2]) a že důsledkem těchto speciálních tvrzení je věta 12. Potom dokázal větu 13, přenesl tvrzení věty 12 na libovolné komplexní prostory a následně dokázal větu 11.

Satz 12. Ist L ein beschränktes lineares Funktional in einem endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume oder im komplexen Hilbertschen Raume, dann gibt es stets ein Element $\mathfrak{u}$ des betreffenden Raumes mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$. ([L6], str. 11)

Satz 13. Gibt es zu einem beschränkten linearen Funktional L in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ ein Element u von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$, dann ist identisch

$$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}).$$

H. Löwig zavedl pojem „regulárního podprostoru“ – podprostoru, jehož ortogonální doplněk je doplňkem direktním – a v následujících dvou větách ukázal vztah regularity, úplnosti a uzavřenosti.

Definition 10. Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes heiße regulär, wenn man jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ in eine Tangentialkomponente $\mathfrak{t}$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{n}$ zerlegen kann, d. h. wenn man zu jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zwei ebensolche Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ angeben kann, so daß

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

ist, $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. ([L6], str. 12)

Satz 14. Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen sei.

Satz 15. Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei. ([L6], str. 11–14)

Stručně a přehledně uvedl:

$$\textit{Vollständigkeit} \longrightarrow \textit{Regularität} \longrightarrow \textit{Abgeschlossenheit.}$$

Satz 16. Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt, dann gibt es stets mindestens ein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. ([L6], str. 15)

H. Löwig rovněž studoval adjungované a samoadjungované operátory, o nichž dokázal některá základní fakta.[27]

Jeho definice i věty jsou podány zcela moderně.

Definition 11. Ein linearer Operator B in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ heiße zu dem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ adjungiert, wenn für beliebige Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}, B\mathfrak{n})$$

ist.

Poznamenal, že k lineárnímu operátoru A existuje nejvýše jeden adjungovaný operátor, který označil symbolem A^*.

Definition 12. Ein linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ heiße selbstadjungiert, wenn A^* existiert und mit A identisch ist.

Satz 23. Ist $\mathfrak{R}$ vollständig, dann existiert zu jedem beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ der adjungierte lineare Operator. ([L6], str. 20)

Dále studoval operátory E, pro které je $E^2 = E$ (tzv. *Einzeloperator*).

Ve druhé části své práce citoval H. Löwig Hilbertovu práci [Hi], Mazurovu [Ma], von Neumannovu [N1] a Rieszovy práce [R1], [R2].

Ve třetím paragrafu, nazvaném *Beweis weiterer Sätze über komplexe euklidische Räume unter Anwendung des Wohlordungssatzes* (str. 25–32) H. Löwig nejprve studoval prostor $\mathfrak{R}$ komplexních funkcí φ definovaných na nějaké množině $\mathfrak{N}$, které na této množině mají nejvýše spočetně mnoho nenulových hodnot (tzv. funkce se spočetným nosičem) a pro které je pro každou posloupnost $\mathfrak{u}_n$ s vlastností $\varphi(\mathfrak{u}) = 0$ pro každé $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{u}_n$ (posloupnost „pokrývá“ nosič) řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(\mathfrak{u}_n)\right|^2$$

[27] Tato problematika vzešla z prací E. Schmidta. Samoadjungované operátory (*hypermaximalen Operatoren*) studoval J. von Neumann roku 1930 v práci [N1], termín samoadjungovaný (*self-adjoint*) zavedl M. H. Stone roku 1932. J. von Neumann a M. H. Stone završili do značné míry teorii samoadjungovaných operátorů roku 1932 v monografiích [N3] a [St2].

konvergentní. Skalární součin dvou takovýchto funkcí $\mathfrak{x} = \varphi(\mathfrak{u})$, $\mathfrak{n} = \psi(\mathfrak{u})$ definoval rovností

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\mathfrak{u}_n)\overline{\psi(\mathfrak{u}_n)},$$

kde je $\varphi(\mathfrak{u}) = 0$ a $\psi(\mathfrak{u}) = 0$ pro každé $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{u}_n$. Získal úplný komplexní eukleidovský prostor (tj. Hilbertův prostor). Přitom funkce, pro něž je $\varphi(\mathfrak{u}_0) = 1$ pro jediné $\mathfrak{u}_0$ a $\varphi(\mathfrak{u}) = 0$ pro všechna ostatní $\mathfrak{u}$, tvoří maximální ortonormální množinu (viz dále). Poznamenejme, že J. von Neumann [N3] (str. 37–38) vyšetřoval případ, kdy je $\mathfrak{N}$ množinou všech reálných čísel.

Pro libovolné kardinální číslo $\aleph$ označil H. Löwig symbolem $\mathfrak{R}_\aleph$ výše uvažovaný prostor komplexních funkcí definovaných na množině $\mathfrak{N}$ mohutnosti $\aleph$. Je-li $\aleph$ konečné, je $\mathfrak{R}_\aleph$ konečnědimenzionální prostor, je-li $\aleph$ spočetné, je $\mathfrak{R}_\aleph$ Hilbertův prostor.

H. Löwig dále definoval maximální ortonormální množinu (*vollständiges normiertes Orthogonalsystem*) úplného komplexního eukleidovského prostoru. Pomocí Zermelovy věty dokázal její existenci:

Satz 28. In jedem vollständigen komplexen euklidischen Raume gibt es mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem. ([L6], str. 27)[28]

Teorii rozvíjel v následujících tvrzeních (věty 29, 30, 31, 32 na stranách 27–29):

- Úplný komplexní eukleidovský prostor je úplným lineárním obalem každé své maximální ortonormální množiny.
- Obsahují-li dva úplné komplexní eukleidovské prostory maximální ortonormální množiny stejné mohutnosti, jsou izomorfní.[29]
- Má-li úplný komplexní eukleidovský prostor maximální ortonormální množinu mohutnosti $\aleph$, je izomorfní s prostorem $\mathfrak{R}_\aleph$.[30]
- Je-li $\mathfrak{M}$ maximální ortonormální množina úplného komplexního eukleidovského prostoru, jsou pro každý prvek $\mathfrak{x}$ čísla $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$, $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, až na spočetně mnoho výjimek, rovna nule. Jestliže je $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ a $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ pro všechna $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$, potom je $\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\mathfrak{e}_n$.[31]

---

[28] Definovat maximální ortonormální množinu a dokázat její existenci lze v jakémkoli lineárním prostoru se skalárním součinem. Úplnost k tomu není zapotřebí. H. Löwigovi však šlo o teorii úplných prostorů.

[29] *Satz 30. Besitzen zwei vollständige komplexe euklidische Räume vollständige normierte Orthogonalsysteme von gleicher Mächtigkeit, dann sind sie isomorph.* ([L6], str. 27)

[30] *Satz 31. Hat ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes die Mächtigkeit $\aleph$, dann ist dieser Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ isomorph.* ([L6], str. 27)

[31] *Satz 32. Ist $\mathfrak{M}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann sind von den Zahlen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden. Ist weiter $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dann ist $\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\mathfrak{e}_n$, wobei das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist.* ([L6], str. 28–29)

H. Löwig dále dokázal důležitý poznatek o tom, že každé dvě maximální ortonormální množiny úplného komplexního eukleidovského prostoru mají stejnou mohutnost:

Satz 33. Zwei verschiedene vollständige normierte Orthogonalsysteme eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ haben stets die gleiche Mächtigkeit. ([L6], str. 31)

Při důkazu musel užít vlastností nekonečných kardinálních čísel; odvolal se přitom na obě vydání Hausdorffovy monografie o teorii množin.[32] Na základě věty 33 pak mohl vyslovit následující definici dimenze:

Definition 20. Ist $\mathfrak{R}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum und $\mathfrak{M}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$, dann heiße die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$ die Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$. ([L6], str. 32)

H. Löwig poznamenal, že úplný komplexní eukleidovský prostor $\mathfrak{R}_\aleph$ má tedy dimenzi $\aleph$. Vzápětí definoval dimenzi libovolného komplexního eukleidovského prostoru jako dimenzi jeho nejmenšího úplného rozšíření. V závěru uvedl, že analogicky jako větu 33 lze dokázat i tvrzení, že každé dvě báze komplexního lineárního prostoru mají stejnou mohutnost. Připomněl, že definici tohoto pojmu uvedl F. Hausdorff v práci [H1] na str. 395.

Ve třetí části své práce citoval H. Löwig Hausdorffovy publikace [H1], [H2], resp. [H3] a von Neumannovu práci [N3].

* * *

Poznamenejme, že hned za Löwigovou prací [L6] je v časopisu Acta Litterarum ac Scientiarum (Szeged) otištěn pětistránkový článek *Zur Theorie des Hilbertschen Raumes* [R3],[33] který sepsal F. Riesz – Löwigovu práci [L6] v něm citoval.[34] Navázal na svoji předchozí stať *Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes* [R2] otištěnou ve stejném časopise; v ní je velmi podrobně definován Hilbertův prostor.

F. Riesz dokázal v práci [R3] tyto dvě, tehdy dobře známé věty (považoval však ještě za nutné připomenout definice základních pojmů) a odkázal čtenáře na svoji práci [R2], v níž tyto dvě věty rovněž prezentoval (viz [R2], str. 28):

Die folgenden anspruchslosen Bemerkungen betreffen die beiden wohlbekannten, für die Theorie des reellen oder komplexen Hilbertschen Raumes grundlegenden Sätze, die ich auch in einer früheren Arbeit der Behandlung an die Spitze stellte.

---

[32] [H2] z roku 1914, str. 127, [H3] z roku 1927, str. 71.

[33] Do redakce došel 30. dubna 1934.

[34] *Die unmittelbare Anregung zu diesen Zeilen verdanke ich der voranstehenden Arbeit* (tj. práce [L6]), *in welcher unter andern gezeigt wird, daß auch Satz B ohne Dimensionsabgrenzung nach oben richtig ist.* ([R3], str. 35)

Satz **A.**[35] *Ist eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ nicht überal dicht in $\mathfrak{H}$, so gibt es ein Element g aus $\mathfrak{H}$ mit $|g| = 1$, das zu allen Elementen aus $\mathfrak{L}$ orthogonal ist.*

Satz **B.**[36] *Für jede lineare Funktion $l(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes „erzeugendes“ Element g, so daß*

$$l(f) = (f, g).$$

Dabei ist unter linearen Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge zu verstehen, die mit f für jede komplexe Zahl c auch cf und mit f und g auch $f+g$ enthält. Eine in $\mathfrak{H}$ definierte (skalare) Funktion $l(f)$ heißt linear, wenn sie den Gleichungen $l(cf) = cl(f)$, $l(f+g) = l(f) + l(g)$ genügt und auf der Einheitskugel $|f| = 1$ beschränkt ist.

Gewöhnlich stützt man den Beweis dieser beiden Sätze auf die Separabilität ... ([R3], str. 34)

* * *

Löwigova práce [L6] měla bezprostřední vztah k několika zásadním výsledkům funkcionální analýzy, které se zrodily v předchozích třech desetiletích. Jednalo se zejména o práce F. Riesze, E. Fischera a M. Frécheta z počátku století, které se týkaly izometrie prostorů L_2 a l_2, jejího vytvoření pomocí maximálního ortonormálního systému, úplnosti těchto prostorů, tvaru spojitého (omezeného) lineárního funkcionálu na prostoru L_2, resp. l_2 atd.[37] Dalším důležitým tématem byla Hahnova-Banachova věta z konce dvacátých let.[38] H. Löwig přispěl k přenesení výsledků z reálného na komplexní případ, k odstranění předpokladu separability v definici Hilbertova prostoru, ke studiu ortonormálních množin atd.

Práce [L6] měla značný ohlas. V časopisu Zentralblatt für Mathematik o ní referoval M. H. Stone; o článku [L6] se zmínil i v následující zprávě, která se týkala Rieszovy práce [R3].[39]

---

[35] Srovnej s výše uvedenou Löwigovou větou *Satz 16*.

[36] Srovnej s výše uvedenou Löwigovou větou *Satz 11*.

[37] Připomeňme jen úvodní práce k této problematice: F. Riesz: *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 144(1907), 615–619, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 144(1907), 734–736, *Sur un espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 144(1907), 1409–1411, *Über orthogonale Funktionensysteme*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1907, 116–122 (též Oeuvres I, 378–381, 382–385, 386–388, 389–395); E. Fischer: *Sur la convergence en moyenne*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 144(1907), 1022–1024, M. Fréchet: *Sur les opérations linéaires, III.*, Transactions of the American Mathematical Society 8(1907), 433–446, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 144(1907), 1414–1416.

[38] Viz H. Hahn: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 157(1927), 214–229, S. Banach: *Sur les fonctionnelles linéaires I, II*, Studia Mathematica 1(1929), 211–216, 223–239.

[39] Zbl 0009.25901, Zbl 0009.25902.

V časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik napsal zprávu o Löwigově práci [L6] Georg Aumann (1906–1980). O Rieszově práci [R3] zde referoval Gustav Heinrich Adolf Doetsch (1892–1977), který rovněž připomněl výsledky Löwigova článku [L6].[40]

Dne 12. září 1934 byla na zasedání Deutsche Mathematiker-Vereinigung (předsedal Helmut Hasse (1898–1979)) proslovena mimo jiné přednáška Franze Rellicha (1906–1955) nazvaná *Abstrakte Spektraltheorie und fastperiodische Funktionen*; v té souvislosti byla též představena Löwigova práce [L6].[41]

Pasqual Jordan (1902–1980) a John von Neumann ve svém článku *On inner products in linear, metric spaces* [JN] z roku 1935 citovali práci [L6]:

The hyper-Hilbert spaces (without E) have been first discussed by H. Löwig, Acta Szeged, vol. 7(1934), pp. 1–33. ([JN], str. 719)

Francis Joseph Murray (1911–1996) a John von Neumann citovali roku 1936 Löwigův článek [L6] v rozsáhlé práci *On rings of operators* [MN], která má více než 110 stran; článek [L6] je zde jednou z 22 bibliografických položek. Ve stejném roce citoval práci [L6] Oswald Teichmüller (1913–1943) v práci *Operatoren im Wachsschen Raum* [Te].

Béla Adalbert Lengyel (1910–2002) a M. H. Stone citovali práci [L6] v článku *Elementary Proof of the Spectral Theorem* [LS] z roku 1936. Mimo jiné napsali:

Since the dimensionality postulates occuring in the definition of Hilbert space are actually so little used in the theory, it is convenient to suppress them. Thus we shall consider those spaces which are called following Löwig [12], complex Euclidean spaces. ([LS], str. 853–854)

V referátu o jejich práci[42] upozornil Edgar Raymond Lorch (1907–1990) i na Löwigovu práci [L6]:

Der Beweis wird für den allgemeineren Fall eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{L}$ gegeben (vgl. Löwig ...), was bekanntlich keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten macht.

J. von Neumann citoval Löwigův článek [L6] roku 1939 ve své rozsáhlé práci *On infinite direct products* [N4], uvedl jej jako jednu z 15 položek.

V témže roce se odkazoval na článek [L6] Tosio Kitagawa v práci *The Parseval theorem of the Cauchy series and the inner products of certain Hilbert spaces* [Ki]. Ocenil precizní formulaci výchozích pojmů.

Ve stejném roce citoval Löwigovu práci [L6] ještě Franz Wecken (1912 – před r. 1945) v článku *Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren* [W]:

[40] Viz JFM 60.0324.01 a JFM 60.0325.01.

[41] *Auszüge aus den auf der Tagung in Bad Pyrmont am 11. und 12. September 1934 gehaltenen Vorträgen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 45(1935), 82–83.

[42] Viz JFM 62.0450.02.

Während nun der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren im Hilbertschen Raum nahezu unverändert auch im nichtseparablen Raum gilt (Rellich [11], Löwig [6]), treten für die Theorie der unitären Invarianten beim übergang von abzählbarer zu nichtabzählbarer Dimension die im folgenden angedeuteten neuen Verhältnisse ein. ([W], str. 422)[43]

Ralph Saul Phillips (1913–1998) citoval roku 1940 v článku *A characterization of euclidean spaces* [Ph] Löwigovu práci [L6], kterou označil [4], v následující souvislosti:

A Banach space is a linear, normed, complete space [3, chap. 5]. A euclidean space of dimension α, where α is any cardinal number, is defined to be the Banach space of sequences x_ν of real numbers where ν ranges over a class of cardinal number α, and $\sum x_\nu^2$ is finite and equal to the square of the norm [4]. ([Ph], str. 930)

Löwigovo jméno se objevilo roku 1941 v cyklostylovaných přednáškách Johna von Neumanna *Invariant measures* [N5] opatřených poznámkami Paula Richarda Halmose (1916–2006).[44]

Ve stejném roce citoval článek [L6] J. W. Calkin v rozsáhlé, pětatřicetistránkové práci *Two-sides ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space* [Ca].

Abram Iezekiilovič Plesner (1900–1961) citoval roku 1941 práci [L6] v rosáhlém článku *Spektralnaja teorija linejnych operatorov* [Pl].

Gottfried Maria Hugo Köthe (1905–1989) využil roku 1947 výsledků Löwigovy práce [L6] ve svém článku *Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume* [Kö1].

Roku 1947 citoval Robert C. James (1918–2003) v článku *Inner products in normed linear spaces* [J1] Löwigovu větu 32 z práce [L6]:

Any complete normed linear space T which has an inner product is characterized by its (finite or transfinite) cardinal "dimension-number" n. It is equivalent to the space of all sets $x = (x_1, x_2, \dots)$ of n real numbers satisfying $\sum_i x_i^2 < +\infty$, where $||x|| = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$ [7, Theorem 32]. ([J1], str. 559)

Ve stejném roce citoval práci [L6] i v článku *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces* [J2]; odvolával se na Löwigovy věty 11 a 16 (viz výše – *Satz 11*, *Satz 16*).

Helmut Schiek (1915–1981) citoval práci [L6] roku 1948 v článku *Mengen mif affiner Anordnung* [Sc].

Naum Il'jič Achiezer (též Achieser, 1901–1980) a Izrail' Markovič Glazman (též Glasmann, 1916–1968) uvedli Löwigovu práci [L6] v seznamu literatury

[43] Rellichovou prací [11] je míněna práce [Re].

[44] Na straně 124, v tištěné verzi z roku 1999 na straně 74.

své monografie *Teorija linejnych operatorov v Gil'bertovom prostranstve* [AG] z roku 1950, která vyšla v dalším vydání roku 1966 a několikrát v německém a anglickém překladu.

Frédéric Riesz a Béla Szökefalvi-Nagy (1913–1998) Löwigovu práci [L6] citovali ve své monografii *Leçons d'analyse fonctionnelle* [RS] z roku 1952, která vyšla o rok později znovu francouzsky, dále několikrát anglicky, německy a rusky; připomněli v té souvislosti též Rieszovu práci *Zur Theorie des Hilbertschen Raumes* [R3], práci F. Rellicha nazvanou *Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen* [Re] a práci J. von Neumanna *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren* [N1]. V kapitole *Espace de Hilbert abstrait* uvedli u definice Hilbertova prostoru tuto poznámku:

Cf. J. v. Neumann [1]; cet auteur énonce encore deux axiomes exigeant que l'espace soit séparable et de dimension infinie (donc de dimension dénombrablement infinie). Nous préférons de ne pas exclure dès commencement les espaces de dimension finie et les espaces non séparables. Voir, pour les espaces non séparables, Löwig [1], Riesz [15], Rellich [1]. ([RS], 1952, str. 195)

Práce [L6] je též citována v monografii *Topologische lineare Räume I.* [Kö2] z roku 1960 (anglická verze je z roku 1969), jejímž autorem je G. Köthe, a v knize *Introductory Functional Analysis with Applications* [K1] z roku 1978 (reprint 1989), kterou sepsal Erwin O. Kreyszig (1922–2008).

Löwigovu práci [L6] má na mysli N. Bourbaki ve stati věnované historii topologických vektorových prostorů:

Dès ce moment les points essentiels de la théorie des espaces hilbertiens peuvent être considérés comme acquis; parmi les progrès plus récents, il faut notamment mentionner la présentation axiomatique de la théorie donnée vers 1930 par M. H. Stone et J. von Neumann, ainsi que l'abandon des restrictions de «séparabilité», qui s'effectue aux environs de 1934, dans les travaux de Rellich, Löwig, et F. Riesz (IXe). ([Bo1], 1955, str. 168)[45]

Práci [L6] citovali Nelson Dunford (1906–1986) a Jacob T. Schwartz (1930–2009) roku 1958 v rozsáhlé monografii *Linear Operators*, která byla přeložena do ruštiny. Uvedli, že H. Löwig dokázal, že dvě ortonormální báze Hilbertova prostoru mají stejnou mohutnost (viz [L6], *Satz 33*, str. 31 – viz výše; viz též Rellichova práce [Re], str. 355) a že dva Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní právě tehdy, mají-li stejnou dimenzi (viz [L6], *Satz 30*, *Satz 31*, str. 27 – viz výše). Ocenili rovněž Löwigův přínos pro odstranění požadavku separability v definici Hilbertova prostoru.[46]

V knize *Inner Product Structures: Theory and Application* [Is] z roku 1987 citoval Vasile I. Istratescu Löwigovu práci [L6].

---

[45] Odkazem (IXe) je míněna Rieszova práce [R3]. Uvedený citát viz souborné vydání historických komentářů [Bo2]: v anglické verzi z roku 1994 na str. 213, v německé z roku 1971 na str. 248, v ruské z roku 1963 na str. 224. Rellichovo jméno se vztahuje k práci [Re].

[46] Viz [DS], str. 372 a 373, v ruském vydání str. 407 a 414.

Löwigova práce [L6] je citována i v doslovu k publikaci [HS][47] z roku 1989, který napsal A. Pietsch, i v jeho rozsáhlé monografii *History of Banach spaces and linear operators* [P] z roku 2007:[48]

The representation theorem for abstract non-separable Hilbert spaces had to wait for Löwig [1934a, p. 11] and Riesz [1934, p. 34]:

Für jede lineare Funktion $l(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes erzeugendes Element g, so das $l(f) = (f, g)$. ([P], str. 31)

... formula (2.3.6.a) was already discovered by Löwig [1934a, p. 6]. ([P], str. 39)[49]

Roku 2001 byla Löwigova práce [L6] citována v knize *Best Approximation in Inner Product Spaces* [De] Franka Deutsche (nar. 1936); informace o Löwigových výsledcích jsou převzaty z monografie [DS].

Vilmos Komornik (nar. 1954) citoval Löwigovu práci [L6] ve svém učebním textu *Précis d'analyse réelle II. Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionneles* [Ko] z roku 2002.

Femi O. Oyadare citoval Löwigovu práci [L6] v článku *Construction of higher orthogonal polynomials through a new inner product, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ in a countable real L^p-space* [Oy] z roku 2005.

Navažme ještě na poslední citát z Pietschovy monografie a vraťme se k Löwigově vztahu

$$L\mathfrak{r} = R\mathfrak{r} - \mathrm{i}R(\mathrm{i}\mathfrak{r}),$$

který popisuje strukturu funkcionálu na komplexním prostoru.

S obdobnou myšlenkou přišli roku 1938 Henri F. Bohnenblust (1906–2000) a Andrew Sobzcyk (1915–1981); v krátkém článku *Extensions of functionals on complex linear spaces* [BS] uvedli následující analogii Hahnovy-Banachovy věty:

Theorem 1. Let l be any complex linear subspace of a normed complex linear space L. Let $f(x)$ be any complex linear functional defined on l, having a norm M. Then there always exists a complex linear functional $F(x)$ defined on L, which coincides with $f(x)$ in l, and which has the same norm M on L. ([BS], str. 91)

Komplexní funkcionál $f(x)$ vyjádřili ve tvaru

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i}\, f_2(x)$$

[47] *Nicht-separable Hilberträume sind erstmalig von Löwig (1934) und Rellich (1934) betrachtet worden.* ([HS], str. 287)

[48] Viz [P], str. 13, 31 a 39.

[49] Vzorcem (2.3.6.a) je míněn Löwigův vztah $L\mathfrak{r} = R\mathfrak{r} - \mathrm{i}R(\mathrm{i}\mathfrak{r})$.

a poznamenali, že $f_2(x) = -f_1(\mathrm{i}\,x)$. Funkcionál f rozšířili na funkcionál F popsaný vztahem

$$F(x) = F_1(x) - \mathrm{i}\,F_1(\mathrm{i}\,x),$$

kde F_1 je reálný funkcionál z klasické Banachovy věty.

Navíc uvedli, že podobný důkaz podal F. J. Murray roku 1936 v práci *Linear transformations in $\mathfrak{L}_p$, $p > 1$* [Mu]. Ten však v té době (nebo o několik týdnů později) Löwigovu práci [L6] znal, neboť ji citoval (spolu s J. von Neumannem) v článku [MN].[50]

Uvedený výsledek H. F. Bohnenblusta a A. Sobzcyka brzy vešel ve známost; citovali jej například již roku 1938 Salomon Bochner (1899–1982) a Angus Ellis Taylor (1911–1999) v článku *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions* [BT].

Později se ukázalo, že obdobný výsledek je i v článku G. A. Suchomlinova *O prodolženii linejnych funkcionalov v komplexnom i kvaternionnom linejnom prostranstve* [Su] z roku 1938. Löwigův výsledek z roku 1934 byl tedy zcela přehlédnut.

Ještě roku 1975 napsal John A. R. Holbrook v článku *Concerning the Hahn-Banach theorem* [Ho] tato slova:

… the Hahn-Banach extension theorem for real spaces dates from papers by H. Hahn [3] in 1927 and S. Banach [1] in 1929, while the familiar trick deriving the theorem for other scalars by reduction to the real case was not forthcoming until 1938: H. F. Bohnenblust and A. Sobczyk [2] (complex scalars); G. A. Soukhomlinoff [9] (complex or quaternionic scalars). ([Ho], str. 322)[51]

Přínos Löwigovy práce [L6] ocenili roku 2008 Lawrence Narici a Edward Beckenstein v práci *The Hahn-Banach theorem and the sad life of E. Helly* [NB2]. Poznamenali, že důležitým okamžikem bylo rozpoznání vztahu mezi reálnou a komplexní složkou lineárního funkcionálu f na komplexním prostoru, tj. vztahu

$$\Re f(\mathrm{i}x) = \Im f(x).$$

Although usually credited to F. Murray [1936], H. Löwig discovered this in 1934. Murray reduced the complex case to the real case, then used the real Hahn-Banach theorem to prove the complex form for subspaces of $L_p[a,b]$ for $p > 1$. Murray's perfectly general method was used and acknowledged by Bohnenblust and Sobczyk [1938] who proved it for arbitrary complex normed spaces. They, incidentally, were the first to call it the Hahn-Banach theorem. Also by reduction to the real case, Soukhomlinov [1938] and Ono [1953] obtained the

[50] Práce [Mu] byla prezentována 23. února 1935, práce [MN] došla do redakce 3. dubna 1935.

[51] Citovány jsou zde tyto práce: H. Hahn: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 157(1927), 214–229, S. Banach: *Sur les fonctionnelles linéaires. I, II*, Studia mathematica 1(1929), 211–216, 223–239, dále [BS] a [Su].

theorem for normed spaces over the complex numbers and the quaternions. ([NB2], str. 105)[52]

Roku 2009 se zmínila Barbara D. MacCluer v knize *Elementary Functional Analysis* o Löwigově přínosu pro komplexní prostory:

The extension of the proof of the Hahn-Banach theorem from the real case to the complex case is outlined in Exercises 3.2 and 3.3. While it is not hard, historically there was a span of nearly ten years between the work on the real case by Banach and the extension to the complex case by H. Bohnenblust and A. Sobczyk in 1938. Perhaps not coincidently, Banach's esteemed 1932 treatise Opérations Linéaires deals only with real Banach spaces. In the particular setting of $X = L^p$ the complex case appear in 1936 in the work of F. Murray; see also the comment in Exercise 3.3 on an earlier contribution by H. Löwig. The work of Bohnenblust and Sobczyk may be the first place that the result is referred to as the "Hahn-Banach Theorem." ([Mc], str. 54)

* * *

Šestistránkový Löwigův článek *Über die Dimension linearer Räume* [L7] byl otištěn roku 1934 v časopisu Studia mathematica; do redakce došel 17. března 1934.[53]

H. Löwig vyšel ze dvou významných prací, které byly vydány roku 1932. První z nich je dlouhý článek *Zur Theorie der linearen metrischen Räume* [H1] Felixe Hausdorffa, druhou je monografie *Théorie des opérations linéaires* [Ba2] Stefana Banacha. Citoval ještě svůj předchozí článek *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl* [L6].

Uvažoval reálné i komplexní lineární prostory, na nichž je definována norma, a odkazoval čtenáře na termíny, které užil F. Hausdorff v práci [H1]. Jednalo se zejména o pojmy *linearer metrischer Raum*, *lineare Hülle* a *abgeschlossene lineare Hülle*. Ve své práci [L7] zavedl tyto dva odlišné pojmy dimenze.

– *Afinní dimenze lineárního prostoru* $\mathfrak{R}$, což je v dnešním slova smyslu klasická dimenze lineárního prostoru $\mathfrak{R}$.

Definoval ji jako nejmenší kardinální číslo z mohutností všech množin, jejichž lineárním obalem je celý prostor $\mathfrak{R}$, tj. z mohutností všech množin generátorů prostoru $\mathfrak{R}$.

– *Metrická dimenze normovaného lineárního prostoru* $\mathfrak{R}$.

[52] Jedná se o práce [Mu], [BS], [Su], [O]. Zajímavé je, že ve své předchozí práci *The Hahn-Banach theorem: the life and times* [NB1] z roku 1997 se L. Narici a E. Beckenstein ještě o Löwigově práci [L6] nezmiňují – uvádějí jen práce [Mu], [BS], [Su] a [O], přičemž práce [O] je v článku [NB1] jako položka [60] citována špatně; připomínají však navíc práci [Ho] z roku 1975. Je velmi pravděpodobné, že se o Löwigově výsledku dočetli ve výše zmíněné monografii A. Pietsche [P].

[53] Časopis Studia mathematica založil roku 1929 Stefan Banach speciálně pro otázky funkcionální analýzy.

Definoval ji jako nejmenší kardinální číslo z mohutností všech množin, jejichž uzavřeným lineárním obalem je celý prostor $\mathfrak{R}$. V obou definicích je cítit Zermelova věta o existenci dobrého uspořádání.

Definition 1. Unter der affinen Dimensionszahl eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ gibt, deren lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. ([L7], str. 18)

Definition 2. Unter der metrischen Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ gibt, deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. ([L7], str. 18)

Oba tyto pojmy dal H. Löwig do zjevné souvislosti: afinní dimenze nemůže být menší než metrická.

Es ist klar, daß die affine Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes niemals kleiner sein kann als seine metrische Dimensionszahl. ([L7], str. 19)

Pro lineární prostory zavedl pojem *báze* (lineárně nezávislá množina generátorů). Jeho tehdejší vyjádření je z dnešního pohledu trochu neobratné; o nekonečné množině si ještě netroufl přímo říci, že je lineárně nezávislá.

Definition 3. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße eine Basis von $\mathfrak{R}$, wenn endlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$ stets linear unabhängig sind und die lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. ([L7], str. 19)

Poznamenal, že je obecně známo, že každý lineární prostor má alespoň jednu bázi, a v následující větě dokázal, že každé dvě báze uvažovaného prostoru mají stejnou mohutnost, neboť mohutnost každé báze je rovna výše definované afinní dimenzi. Využil přitom základní fakta o nekonečných kardinálních číslech. Tuto záležitost dnes většinou řadíme do lineární algebry.

Satz 1. Jede Basis eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ hat eine Mächtigkeit, welche der affinen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ gleich ist. ([L7], str. 19)

V další větě srovnal mohutnost lineárního prostoru a jeho afinní dimenzi. Opět potřeboval základní fakta o nekonečných kardinálních číslech.

Satz 2. Ein linearer Raum $\mathfrak{R}$, der nicht nur aus einem Nullelement besteht, hat die Mächtigkeit des Kontinuums, wenn seine affine Dimensionszahl kleiner als die Mächtigkeit des Kontinuums ist, und sonst eine Mächtigkeit, welche gleich dieser affinen Dimensionszahl ist. ([L7], str. 20)

Pro normované lineární prostory definoval H. Löwig *základní množinu* a ukázal, že tento pojem odpovídá metrické dimenzi a že podprostor a jeho uzávěr mají stejnou metrickou dimenzi.

Definition 4. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße eine Grundmenge von $\mathfrak{R}$, wenn erstens kein Element von $\mathfrak{M}$ der abgeschlos-

senen linearen Hülle der übrigen Elemente von $\mathfrak{M}$ angehört und zweitens die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. ([L7], str. 20)

H. Löwig svůj pojem základní množiny srovnal s obdobnými pojmy, které jsou zavedeny ve zmíněné Hausdorffově práci [H1] a v Banachově monografii [Ba2]. Uvedl, že F. Hausdorff požadoval pro svůj pojem *Grundmenge* místo první podmínky pouze lineární nezávislost[54] a S. Banach pro svoji *ensemble fondamental* jen druhou podmínku.[55] Pojem základní množiny koresponduje s pojmem metrické dimenze, jak vyplývá z následující věty.

Satz 3. Jede Grundmenge eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ besitzt eine Mächtigkeit, welche gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ ist. ([L7], str. 21)

Satz 4. Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ eines linearen metrischen Raumes und ihre abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{B}}$ haben stets die gleiche metrische Dimensionszahl. ([L7], str. 22)

H. Löwig pak poznamenal, že v úplném eukleidovském prostoru je maximální ortonormální množina (*vollständiges normiertes Orthogonalsystem*) základní množinou a má mohutnost, která je rovna metrické dimenzi prostoru.[56] Uvedl rovněž, že není jasné, zda normovaný lineární prostor $\mathfrak{R}$ musí mít základní množinu. I kdyby byla pomocí dobrého uspořádání prostoru $\mathfrak{R}$ uvažována množina prvků, které nepatří uzavřenému lineárnímu obalu množiny svých předchůdců, tak se nemusí jednat o základní množinu.

Ob jeder lineare metrische Raum eine Grundmenge im Sinne unserer Definition 4 besitzt, konnte nicht entschieden werden. (Man könnte von einer Wohlordnung des Raumes ausgehen und in dieser die Menge aller derjenigen Elemente betrachten, welche nicht der abgeschlossenen linearen Hülle der Menge ihrer Vorgänger angehören. Die so ausgesonderte Menge muss aber keine Grundmenge des Raumes im Sinne unserer Definition 4 sein.) ([L7], str. 22)

Článek [L7] končí poznámkou, že každý normovaný lineární prostor $\mathfrak{R}$ lze rozšířit na úplný normovaný lineární prostor $\mathfrak{R}^*$, který je uzavřeným lineárním obalem prostoru $\mathfrak{R}$ v $\mathfrak{R}^*$ (přitom mají prostory $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{R}^*$ stejnou metrickou dimenzi).

* * *

[54] *Wenn A linear unabhängig ist, so heiße sie eine Grundmenge ihrer abgeschlossenen linearen Hülle $\overline{L}$ ...* ([H1], str. 295)

[55] *Un ensemble $G \subset E$ s'appelle fondamental, lorsque l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G est dense dans E; il s'appelle total, lorsque toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ qui s'annule pour chaque $x \subset G$, s'annule aussi pour chaque $x \subset E$. ... Théorème 7. Pour qu'un ensemble $G \subset E$ soit fondamental, it faut et il suffit qu'il soit total.* ([Ba2], str. 58)

[56] Eukleidovským prostorem rozumí reálný nebo komplexní lineární prostor se skalárním součinem, úplným normovaným ortogonálním systémem maximální ortonormální množinu; její existence vyplývá z axiomu výběru.

V časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik krátce referoval o Löwigově práci [L7] Georg Aumann.[57]

O. Teichmüller citoval práci [L7] ve svém článku *Operatoren im Wachsschen Raum* z roku 1936.

Roku 1939 citoval práci [L7] Vitold L. Šmul'jan (Shmulyan, 1914–1944) v článku *O nekotorych geometričeskich svojstvach ediničnoj sfery prostranstva tipa (B)* [Š].[58]

Casper Goffman (1913–2006) odkazoval na Löwigovu práci [L7] roku 1943 v článku *On linear spaces which may be rendered complete normed metric spaces*[Go].

George Whitelaw Mackey (1916–2006) citoval roku 1943 Löwigovu práci [L7] v článku *On infinite dimensional linear spaces* [Mac1] a o dva roky později ve stejně nazvaném článku [Mac2]:

It has been shown by Löwig [15] that any two Hamel bases for the same linear space have the same cardinal number. This cardinal number we shall call the dimension of the space. A v poznámce pod čarou připojil: *This is what Löwig calls the affine dimension.* ([Mac2], str. 157–158)

Löwig [15] has shown that whenever X is a linear space with more than C elements then its dimension is equal to the number of its elements. ([Mac2], str. 159)

H. Schiek citoval práci [L7] roku 1948 v článku *Mengen mif affiner Anordnung* [Sc].

Roku 1950 se odkazoval na Löwigovu práci [L7] Victor L. Klee (1925–2007) v článku *Decomposition of an infinite-dimensional linear system into ubiquitous convex sets* [Kl1]; připomněl Löwigův výsledek týkající se existence (Hamelovy) báze lineárního prostoru L a invariance její mohutnosti (dimenze prostoru L).

Práci [L7] citoval P. R. Halmos roku 1951 ve své učebnici *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity* [H] (2. vydání: 1957) jako 27. položku mezi 52 pracemi. V závěrečné stati *References* napsal:

The elegant proof (in §16) of the uniqueness of dimension in the infinite case is due to Löwig, [27]. ([H], str. 110)[59]

---

[57] Viz JFM 60.1229.01.

[58] Viz [Š], str. 86, 93.

[59] Ve zmíněném 16. paragrafu nazvaném *Dimension* (str. 29–31) uvedl P. R. Halmos tyto tři věty:
1. Any two bases of a subspace $\mathfrak{M}$ have the same power.
2. A linear transformation U from a Hilbert space $\mathfrak{H}$ to a Hilbert space $\mathfrak{K}$ is an isomorphism if and only if is an isometry, mapping $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{K}$.
3. Two Hilbert spaces are isomorphic if and only if they have the same dimension.

Roku 1954 zmínili práci [L7] D. T. Finkbeiner a Otton Martin Nikodým v článku *On convex sets in abstract linear spaces where no topology is assumed (Hamel bodies and linear boundedness)* [FN] a O. N. Nikodým v článku *Limit-representation of linear, even discontinuous, linear functionals in Hilbert spaces* [Ni].

Löwigovu práci [L7] citoval ve své učebnici *Introduction to functional analysis* [T] z roku 1958 A. E. Taylor; jeho kniha vyšla mnohokrát, roku 1973 i v českém překladu.[60]

Práce [L7] je citována i v knize *Normed Linear Spaces* [Da] z roku 1958 (další vydání jsou z let 1962, 1973), kterou napsal Mahlon Marsh Day (1913–1992). Ve druhé kapitole uvedl:

(8) If M is a complete linear metric space with distance function d and if a new and always smaller [or always larger] distance function d' is introduced under which M becomes a complete linear metric space M', the identity operator is an isomorphism of M with M'.

(9) The theorem of Löwig that every separable, infinite-dimensional, Banach space has a vector basis of the cardinal number of the continuum, and the fact that two such spaces may fail to be isomorphic (say $l^1(\omega)$ and $l^2(\omega)$), shows that some relation between the metric is needed in (8). ([Da], 1973, str. 42)

V. L. Klee citoval roku 1960 v článku *Mappings into normed linear spaces* [Kl2] Löwigův článek [L7].

Roku 1982 citoval práci [L7] Manuel Valdivia v článku *A class of locally convex spaces without C-webs* [V].

Práce [L7] se objevila roku 1996 i v učebnici *Functional Analysis* [Li], kterou sepsal Balmohan Vishnu Limaye.

Roku 1997 citoval práci [L7] Herbert Schröder v knize *Funktionalanalysis* [Sch]:

… nichtseparable Hilberträume wurden erst 1934 von H. Löwig (Studia Math. 5(1934) S. 18–23) im Zusammenhang mit dem Dimensionsbegriff und von F. Rellich (Math. Ann. 110(1935) S. 342–356) im konkreten Beispiel des Raums der fastperiodischen Funktionen untersucht. ([Sch], str. 33)

Paul Howard a Jean E. Rubin citovali roku 1998 práci [L7] v monografii *Consequences of the axiom of choice* [HR]; na dvou místech uvádějí Löwigovu větu – *Löwig's Theorem*: *If B_1 and B_2 are both bases for the vector space V then $|B_1| = |B_2|$.* ([HR], str. 40, 78.)

Jürg Rätz roku 1999 citoval práci [L7] v článku *Comparison of inner products* [Rä].

Löwigova práce [L7] je rovněž citována v monografii *History of Banach Spaces and Linear Operators* [P] z roku 2007, kterou napsal A. Pietsch.[61]

---

[60] A. E. Taylor odkazuje na Löwigovu větu o srovnání mohutnosti a dimenze (viz str. 46, v české verzi str. 56).

[61] Viz [P], str. 5 a 44.

Je citována i v nedávné práci Wolfganga Arendta (nar. 1950) a Robina Nittky nazvané *Equivalent complete norms and positivity* [AN] z roku 2009:

Let $\mathfrak{B}$ *be a Hamel basis of a vector space* E*. Then* $card(E) = max\{card(\mathfrak{B}), c\}$*, see Löwig [16].* ([AN], str. 425)

Helemskii A. Ya. citoval Löwigovu práci [L7] roku 2011 ve svém článku *Metric version of projectivity for normed modules over sequence algebras* [Hl].

Poznamenejme ještě pro zajímavost, že Ralph-Hardo Schulz v učebním textu *Repetitorium Bachelor Mathematik. Zur Vorbereitung auf Modulprüfungen in der mathematischen Grundausbildung* [Scu] z roku 2009 napsal:

Der grundlegende Satz ist der Satz von Löwig über die Gleichmächtigkeit aller Basen eines Vektorraums: Ist V *ein VR, und sind* B *und* C *Basen von* V*, so gibt es eine Bijektion von* B *auf* C*; folglich gilt* $|B| = |C|$. ([Scu], str. 8)

* * *

Krátký článek *Über allgemeine Spektralfunktionen* [L8] uvádí hlavní výsledek Löwigova sdělení na 2. sjezdu matematiků zemí slovanských, který se konal 22. až 28. září 1934 v Praze.[62] Zúčastnila se jej řada českých a německých matematiků z vysokých i středních škol a dalších institucí Československé republiky a poměrně mnoho zahraničních matematiků (Pavel Sergejevič Aleksandrov, Dan Barbilian, Wilhelm Blaschke, Samuel Dickstein, Maurice Fréchet, Guido Fubini, Heinz Hopf, Witold Hurewicz, Jovan Karamata, Solomon Lefschetz, Stefan Mazurkiewicz, Karl Menger, Kyrille Poppoff, Petre Sergescu, Wacław Sierpiński, Alfred Tarski, Lubomir Tchakaloff, Vladimir Varičak, George Neville Watson, Tadeusz Ważewski, Stanisław Zaremba a další). Předsedou organizačního výboru byl Karel Petr (1868–1950).

Jedním z nejaktivnějších účastníků sjezdu byl M. Fréchet. Přednesl tyto tři příspěvky:

Détermination de la classe la plus générale d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert,

Sur deux relations simples entre le „coefficient" de corrélation et le „rapport" de corrélation,

Sur les précisions comparées de la valeur moyenne et de la valeur médiane.[63]

Kromě toho promluvil 23. září na zahájení sjezdu a 28. září při jeho zakončení.[64]

Není jasné, zda byl na sjezdu přítomen např. Stefan Banach. Uveden je

[62] První sjezd matematiků zemí slovanských se uskutečnil v září roku 1929 ve Varšavě.

[63] Roku 1935 byly otištěny v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky na stranách 176–177, 209–210, 210–211. Viz též samostatně vydané *Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských*, JČMF, Praha, 1935.

[64] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 64(1935), str. xxxv, xlii–xliii.

v seznamu delegátů sjezdu za Uniwersytet Jana Kazimierza (Lwów), v seznamu členů a účastníků však jeho jméno není.

Löwigův krátký článek [L8] byl uveřejněn roku 1935 v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky spolu s ostatními přednesenými příspěvky a dalšími sjezdovými materiály.[65] Přinesl určité zobecněním výsledků Ernsta Hellingera (1883–1950) [Hel] z roku 1907 a H. Hahna [Hah] z roku 1912 týkajících se ortogonální ekvivalence dvou kvadratických forem o nekonečně mnoha proměnných.

* * *

Za inspirativní podněty děkuje autor tohoto příspěvku prof. Ivanu Netukovi a Dr. Antonínu Slavíkovi.

LITERATURA

[L6] Löwig H., *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged **7** (1934), 1–33.

[L7] Löwig H., *Über die Dimension linearer Räume*, Studia mathematica **5** (1934), 18–33.

[L8] Löwig H., *Über allgemeine Spektralfunktionen*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **64** (1935), 153–154.

* * *

[AG] Achiezer N. I., Glazman I. M., *Teorija linejnych operatorov v Gil'bertovom prostranstve*, Gusudarstvennoe izdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva, 1950, 483 stran, 2. vydání: Nauka, Moskva, 1966, 543 stran; německy: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin, 1954, xiii+369 stran; 2. vydání: 1958, xiii+369 stran, 1960, 469 stran, 1968, xvi+488 stran, 1977, 1981; anglicky (z ruštiny přeložil M. Nestell): *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* I, II, Frederick Ungar Publishing Co, New York, 1961, 1963, xi+147+218 stran, reprint: 1981, xxxii+552 stran, Dover Publications, New York, 1993.

[AN] Arendt W., Nittka R., *Equivalent complete norms and positivity*, Archiv der Mathematik (Basel) **92** (2009), 414–427.

[Ba1] Banach S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales (Thèse de doctorat)*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 133–181, Oeuvres II, 305–348.

[Ba2] Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografje matematyczne 1, Fundusz kultury narodowej, Warszawa, 1932, vii+254 stran, reprint: Chelsea Publishing Company, New York, 1943, 1955, 1963, 1978, xii+259 stran, reprint: Hafner Publishing Company, New York, 1949, vii+254 stran, Oeuvres II, 13–219; anglicky: *Theory of Linear Operations*, Mathematical Library 38, North-Holland, Amsterdam, 1987, x+237 stran; ukrajinsky: *Kurs funkcional'nogo analizu*, Kiev, 1948.

[B1] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000, 435 stran, další vydání: 2002, 2005, 2010.

[65] Vyšel rovněž ve svazku *Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských.*

[B2] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, sv. 35, Matfyzpress, Praha, 2007, 519 stran.

[Br1] Bernkopf M., *The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Archive for History of Exact Sciences **3** (1966), 1–96.

[Br2] Bernkopf M., *Vvedenie abstraktnych predstavlenij v teoriju funkcional'nych prostranstv*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **18** (1973), 94–103, referát na 13. mezinárodním kongresu historie vědy, Moskva, 1971.

[BK] Birkhoff G., Kreyszig E., *The establishment of functional analysis*, Historia mathematica **11** (1984), 258–321.

[BS] Bohnenblust H. F., Sobczyk A., *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **44** (1938), 91–93.

[BT] Bochner S., Taylor A. E., *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Annals of Mathematics **39** (1938), 913–944.

[Bor] Borgwadt H., *Die historische Entwicklung der Funktionalanalysis zu einer selbständigen mathematischen Disziplin*, NTM – Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin **12** (1975), No. 1, 1–11.

[Bo1] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques*, Éléments de mathématique, Livre V, Herman & C$^{\text{ie}}$, Éditeurs, Paris, 1953, 123 stran, 1955, 191 stran, 1966, 178 stran, 1981, vii+368 stran; anglicky: *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, vii+364 stran; rusky: *Topologičeskie vektornye prostranstva*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1959, 410 stran.

[Bo2] Bourbaki N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Herman & C$^{\text{ie}}$, Éditeurs, Paris, 1960, 276 stran, 2. vydání: 1969, 325 stran, 1974, 376 stran, Springer-Verlag, 2006, 376 stran, Masson, Paris, 1984, 2007, 376 stran; rusky: *Očerki po istorii matematiki*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1963, 292 stran; anglicky: *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994, 1998, viii+301 stran; německy: *Elemente der Mathematikgeschichte*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1971, 297 stran; italsky: *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano, 1963, 270 stran.

[Bro] Browder F. E., *The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics*, Historia mathematica **2** (1975), 577–590.

[Ca] Calkin J. W., *Two-sides ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Annals of Mathematics **42** (1941), 839–873.

[Da] Day M. M., *Normed Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958, viii+139 stran, 2. vydání: Academic Press, New York, 1962, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962, viii+139 stran, 3. vydání: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, viii+211 stran; rusky: *Normirovannye linejnye prostranstva*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1961, 232 stran.

[De] Deutsch F., *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001, xv+338 stran.

[Di] Dieudonné J., *History of Functional Analysis*, Mathematics Studies 49, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1981, vi+312 stran.

[Do] Dorier J.-L. (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Mathematical Education Library 23, Kluwer Academic Publishers, 2000, xxii+288 stran.

[Du] Duda R., *The discovery of Banach spaces*, in W. Więsław (ed.): *European Mathematics in the Last Centuries*, Lectures presented at the conference held at Będlewo, 26–30 April 2004, Stefan Banach International Mathematical Center, Institute of Mathematics Wrocław university, Wrocław, 2005, 37–46.

[DS] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear Operators I, II, III*, Interscience Publishers, New York, London, 1958, 1963, 1971, xiv+1–858, ix+859–1924, xix+1925–2592 stran, další vydání 1. dílu: 1964, J. Wiley, New York, 1988; rusky: *Linejnye operatory*, Mir, Moskva, 1962, 1966, 1974, 895+1063+661 stran.

[E] Ebbinghaus H.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007, xiv+356 stran.

[FN] Finkbeiner D. T., Nikodým O. M., *On convex sets in abstract linear spaces where no topology is assumed (Hamel bodies and linear boundedness)*, Rendiconti del Seminario della Università di Padova **23** (1954), 357–365.

[F] Fréchet M., *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, reprint: 1989, 312 stran, xi+296 stran.

[Go] Goffman C., *On linear spaces which may be rendered complete normed metric spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **49** (1943), 611–614.

[G] Gray J. D., *The shaping of the Riesz representation theorem: a chapter in the history of analysis*, Archive for History of Exact Sciences **31** (1984), 127–187.

[Hah] Hahn H., *Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*, Monatshefte für Mathematik und Physik **23** (1912), 161–224.

[H] Halmos P. R., *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951, 114 stran, 2. vydání: 1957, 114 stran, reprint: 1998.

[Ha] Hamel G., *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung:* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Mathematische Annalen **60** (1905), 459–462.

[H1] Hausdorff F., *Zur Theorie der linearen metrischen Räume*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **167** (1931/1932), 294–311, též in Gesammelte Werke IV, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 269–288.

[H2] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914, viii+476 stran, reprint: Chelsea, New York, 1949, 1965, 1978, viz též Gesammelte Werke II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, xviii+883 stran.

[H3] Hausdorff F., *Mengenlehre*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1927, 285 stran (jedná se o druhé vydání titulu *Grundzüge der Mengenlehre*), 3. vydání: 1935, 307 stran, reprint: Dover Publications, New York, 1944; anglicky: *Set Theory*, 3. německé vydání přeložil J. R. Aumann et al., Chelsea Publishing Company, New York, 1957, 1962, 1978, 1991, 352 stran; rusky: *Teorija množestv*, Moskva, Leningrad, 1937.

[He] van Heijenoort J. (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logik 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, viii+664 stran, reprint: 1971.

[Hl] Helemskii A. Ya., *Metric version of projectivity for normed modules over sequence algebras*, 2011, 19 stran.

[Hel] Hellinger E., *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variabeln*, Dissertation, Göttingen, 1907.

[Hu1] Heuser H., *Zur Ideengeschichte der Funktionalanalysis*, Mathematische Semesterberichte **35** (1988), 38–63.

[Hu2] Heuser H., *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1986, 2. vydání, 696 stran; *Functional Analysis*, J. Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1982, xv+408 stran.

[Hi] Hilbert D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung*, Nachrichten von der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1906, 157–227, tato práce je přetištěna v [HS].

[HS] Hilbert D., Schmidt E., *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 11, Leipzig, 1989, 316 stran; doslov A. Pietsche nazvaný *Nachwort*, str. 279–311, byl přeložen do češtiny (přeložil A. Kufner) a otištěn v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie 39(1994), 65–94, pod názvem *Hilbert & Schmidt aneb O jednom mezníku v historii matematiky.*

[Ho] Holbrook J. A. R., *Concerning the Hahn-Banach theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **50** (1975), 322–327.

[Hor] Horváth J., *On the Riesz-Fischer theorem*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **41** (2004), 467–478.

[HR] Howard P., Rubin J. E., *Consequences of the axiom of choice*, Mathematical Surveys and Monographs 59, American Mathematical Society, Providence, 1998, 432 stran.

[Ch] Chatterji S. D., *Commentary on [H 1931]*, in F. Hausdorff: Gesammelte Werke IV, 289–300; jedná se o komentář k práci [H1].

[Is] Istratescu V. I., *Inner Product Structures: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing Company, 1987, 895 stran.

[J1] James R. C., *Inner products in normed linear spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947), 559–566.

[J2] James R. C., *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **61** (1947), 265–292.

[JN] Jordan P., von Neumann J., *On inner products in linear, metric spaces*, Annals of Mathematics **36** (1935), 719–723.

[Ka] Katětov M., *Některé aspekty vývoje funkcionální analýzy*, DVT – Dějiny věd a techniky **1** (1968), 17–23, přednáška na matematické sekci 11. mezinárodního kongresu historie vědy (Krakov, 1965).

[Ki] Kitagawa T., *The Parseval theorem of the Cauchy series and the inner products of certain Hilbert spaces*, Annals of Mathematics **40** (1939), 71–80.

[Kl1] Klee V. L., *Decomposition of an infinite-dimensional linear system into ubiquitous convex sets*, American Mathematical Monthly **57** (1950), 540–541.

[Kl2] Klee V. L., *Mappings into normed linear spaces*, Fundamenta Mathematicae **49** (1960), 25–34.

[Kli] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, xvii+1238 stran.

[Ko] Komornik V., *Précis d'analyse réelle II. Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionneles*, Ellipses, Paris, 2002, maďarsky: *Valós analízis elöadások II.*, 2010.

[Kö1] Köthe G., *Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume vom Typus ω*, Mathematische Annalen **120** (1947/49), 634–649.

[Kö2] Köthe G., *Topologische lineare Räume I*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960, xii+456 stran, 2. vydání: 1966; anglicky: *Topological Vector Spaces I, II*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1969, 1979, xv+456+xii+331 stran; německy vyšel jen první díl.

[K1] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, J. Wiley & Sons, New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto, 1978, xvi+688 stran, reprint: 1989.

[K2] Kreyszig H., *Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis*, Elemente der Mathematik **41** (1986), 25–35.

[K3] Kreyszig H., *Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932*, Elemente der Mathematik **41** (1986), 49–57.

[K4] Kreyszig H., *Fridrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis*, Elemente der Mathematik **45** (1990), 117–130.

[Ku] Kuroš A. G., *Lekcii po obščej algebre*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1962, 396 stran; německy: *Vorlesungen über allgemaine Algebra*, Teubner, Leipzig, 1964, x+30 stran; anglicky: *Lectures on general algebra*, Chelsea Publishing Company, New York, 1963, 335 stran; česky (přeložili J. Blažek a L. Koubek): *Kapitoly z obecné algebry*, Academia, 1968, 310 stran, 2. vydání: 1977.

[LS] Lengyel B. A., Stone M. H., *Elementary Proof of the Spectral Theorem*, Annals of Mathematics **37** (1936), 853–864.

[Li] Limaye B. V., *Functional Analysis*, New Age International Limited Publishers, 1996, x+612 stran, reprint: 2004.

[Mc] MacCluer B. D., *Elementary Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 253, Springer Science + Business Media, 2009, x+207 stran.

[Mac1] Mackey G. W., *On infinite dimensional linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A. **29** (1943), 216–221.

[Mac2] Mackey G. W., *On infinite-dimensional linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **57** (1945), 155–207.

[Ma] Mazur S., *Über die Nullstellen linearer Operationen*, Studia mathematica **2** (1930), 11–20.

[Me1] Medvedev F. A., *Osnovopoložniki funkcional'nogo analiza o ego rannej istorii*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **18** (1973), 55–70.

[Me2] Medvedev F. A., *Pervaja monografija po funkcional'nomu analizu*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **18** (1973), 71–93.

[Mo] Monna A. F., *Functional Analysis in Historical Perspective*, Oosthoek Publishing Company, Utrecht, 1973, viii+167 stran.

[M] Moore G. H., *Zermelo's Axiom of Choice, its Origins, Development, and Influence*, Springer Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 8, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, xiv+410 stran.

[Mu] Murray F. J., *Linear transformations in $\mathfrak{L}_p$, $p > 1$*, Transactions of the American Mathematical Society **39** (1936), 83–100.

[MN] Murray F. J., von Neumann J., *On rings of operators*, Annals of Mathematics **37** (1936), 116–229, též in F. Bródy, T. Vámos (ed.): *The Neumann Compendium*, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, Vol. 1, World Scientific, 1995, 703 stran.

[NB1] Narici L., Beckenstein E., *The Hahn-Banach theorem: the life and times*, Topology and its Applications **77** (1997), 193–211.

[NB2] Narici L., Beckenstein E., *The Hahn-Banach theorem and the sad life of E. Helly*, in J. M. Delgado Sánchez, T. Domínguez Benavides (eds.): *Advanced Courses of Mathematical Analysis III. Proceedings of the third international school, 3–7 September 2007*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008, 208 stran, 97–110.

[NS] Naylor A. W., Sell G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971, xv+624 stran; další vydání: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, 2000; slovensky (přeložili J. Dravecký, P. Mederly): *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*, Alfa, Bratislava, 1981, 629 stran.

[N0] von Neumann J., *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Nachrichten von der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1927, 1–57.

[N1] von Neumann J., *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*, Mathematische Annalen **102** (1930), 49–131.

[N2] von Neumann J., *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Mathematische Annalen **102** (1930), 370–427.

[N3] von Neumann J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932, 262 stran, Dover Publications, New York, 1943, 266 stran; anglicky: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955, xii+445 stran; rusky: *Matematičeskie osnovy kvantovoj mechaniki*, Moskva, Nauka, 367 stran.

[N4] von Neumann J., *On infinite direct products*, Compositio Mathematica **6** (1939), 1–77.

[N5] von Neumann J., *Invariant Measures. Notes by Paul R. Halmos*, Institute for Advanced Study, 1940 – 1941, cyklostylovaný text, 230 stran, tiskem: American Mathematical Society, Providence, 1999, xv+134 stran.

[Ni] Nikodým O. M., *Limit-representation of linear, even discontinuous, linear functionals in Hilbert spaces*, Rendiconti del Seminario della Università di Padova **23** (1954), 290–298.

[O] Ono T., *A generalization of the Hahn-Banach theorem*, Nagoya Mathematical Journal **6** (1953), 171–176.

[Oy] Oyadare F. O., *Construction of higher orthogonal polynomials through a new inner product, $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ in a countable real L^p-space*, Americal Journal of undergraduate research **4** (2005), N. 3, 13–26.

[Ph] Phillips R. S., *A characterization of euclidean spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **46** (1940), 930–933.

[P] Pietsch A., *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007, xxiii+855 stran.

[Pl] Plesner A. I., *Spektral'naja teorija linejnych operatorov*, Uspechi matematičeskich nauk **9** (1941), 3–125.

[Rä] Rätz J., *Comparison of inner products*, Aequationes Mathematicae **57** (1999), 312–321.

[Re] Rellich F., *Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen*, Mathematische Annalen **110** (1935), 342–356.

[R1] Riesz F., *Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris, 1913, vi+182 stran, Oeuvres complètes II, 829–1016.

[R2] Riesz F., *Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged **5** (1930–1932), 23–54, Oeuvres complètes II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 1103–1134.

[R3] Riesz F., *Zur Theorie des Hilbertschen Raumes*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged **7** (1934-1935), 34–38, Oeuvres complètes II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 1150–1154.

[RS] Riesz F., Szökefalvi-Nagy B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952, viii+448 stran, 2. vydání: Budapest 1953, viii+455 stran, 3. vydání: Budapest, Paris, 1955, viii+488 stran, 4. vydání: 1965, viii+488 stran, 5. vydání: Gauthier-Villars, Paris, 1968, viii+488 stran, 6. vydání: Akadémiai Kiadó 1972, viii+488 stran; německy: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, xi+481 stran, 2. vydání: 1968, xi+482 stran, 3. vydání: 1973, xi+482 stran, 4. vydání: 1982, 518 stran; anglicky: *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1955, xii+467 stran, dále 1971, 1978, Dover Publications, New York, 1990, xii+504 stran; rusky: *Lekcii po funkcional'nomu analizu*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1954, 499 stran, 2. vydání: Mir, Moskva, 1979, 587 stran.

[Ru1] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966, xi+412 stran, 2. vydání: 1974, xii+452 stran, 3. vydání: 1987, xiv+416 stran; česky (přeložili I. Netuka, J. Veselý): *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977, 463 stran, 2. vydání: 2003, 460 stran.

[Ru2] Rudin W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973, xiii+397 stran, 2. vydání: 1991, xv+424 stran; rusky: *Funkcional'nyj analiz*, Mir, Moskva, 1975, 443 stran.

[Sa] Saxe K., *Beginning Functional Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002, xi+197 stran.

[Sc] Schiek H., *Mengen mit affiner Anordnung*, Archiv der Mathematik **1** (1948), 473–479.

[S] Schmidt E., *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), 53–77.

[Sch] Schröder H., *Funktionalanalysis*, Akademie Verlag, Berlin, 1997, viii+384 stran.

[Scu] Schulz R.-H., *Repetitorium Bachelor Mathematik: Zur Vorbereitung auf Modulprüfungen in der mathematischen Grundausbildung*, Vieweg, Teubner, Wiesbaden, 2009, 380 stran.

[Si1] Siegmund-Schultze R., *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900*, Archive for History of Exact Sciences **26** (1982), 13–71.

[Si2] Siegmund-Schultze R., *Eliakim Hastings Moore's "General Analysis"*, Archive for History of Exact Sciences **52** (1998), 51–89.

[Sm] Smithies F., *The shaping of functional analysis*, Bulletin of the London Mathematical Society **29** (1997), 129–138.

[St1] Stone M. H., *Linear transformations in Hilbert space*, Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. America **15** (1929), 198–200, 423–425, **16** (1930), 172–175.

[St2] Stone M. H., *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*, American Mathematical Society, New York, 1932, viii+622 stran, další vydání: …, 1966, 1970.

[Su] Suchomlinov G. A., *O prodolženii linejnych funkcionalov v komplexnom i kvaternionnom linejnom prostranstve*, Matematičeskij sbornik **3(45)** (1938), 353–358, krátký německý abstrakt *Über Fortsetzung von linearen Funktionalen in linearen komplexen Räumen und linearen Quaternionräumen* na straně 358.

[Š] Šmul'jan V. L., *O nekotorych geometričeskich svojstvach ediničnoj sfery prostranstva tipa (B)*, Matematičeskij sbornik **6(48)** (1939), 77–94, anglické resumé *On some geometrical properties of the unit sphere in the space of the type (B)* na stranách 90–94.

[T] Taylor A. E., *Introduction to Functional Analysis*, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1958, xvi+423 stran, další tisky a vydání: 1961, 1964, 1967, 1980, xi+467 stran, 1986; česky (přeložili M. Hušek, A. Kufner): *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia, Praha, 1973, 408 stran.

[Te] Teichmüller O., *Operatoren im Wachsschen Raum*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **174** (1936), 73–124.

[V] Valdivia M., *A class of locally convex spaces without C-webs*, Annales de l'Institut Fourier **32** (1982), 261–269.

[Ve] Vershik A. M., *The life and fate of functional analysis in the twentieth century*, in A. A. Bolibruch, Yu. S. Osipov, Yakov G. Sinai (Eds.): *Mathematical Events of the Twentieth Century*, Springer-Verlag, Berlin, PHASIS, Moscow, 2006, 545 stran, 437–447, 2. vydání 2010, 553 stran.

[W] Wecken F., *Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren*, Mathematische Annalen **116** (1939), 422–455.

[Ze1] Zeidler E., *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 108, Springer-Verlag, New York, 1995, xxix+481 stran.

[Ze2] Zeidler E., *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 109, Springer-Verlag, New York, 1995, xvi+444 stran.

[Z1] Zermelo E., *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe.)*, Mathematische Annalen **59** (1904), 514–516, anglický překlad viz [He], str. 139–141.

[Z2] Zermelo E., *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen **65** (1908), 107–128, anglický překlad viz [He], str. 183–198.

[Z3] Zermelo E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.*, Mathematische Annalen **65** (1908), 261–281, anglický překlad viz [He], str. 199–215.

[Zo] Zorn M., *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society **41** (1935), 667–670.

Never in the history of mathematics has a mathematical theory been the object of such vociferous vituperation as lattice theory. Dedekind, Jónsson, Kurosh, Malcev, Ore, von Neumann, Tarski, and most prominently Garrettt Birkhoff have contributed a new vision of mathematics, a vision that has been cursed by a conjunction of misunderstandings, resentment, and raw prejudice.

The hostility towards lattice theory began when Dedekind published the two fundamental papers that brought the theory to life well over one hundred years ago. Kronecker in one of his letters accused Dedekind of "losing his mind in abstractions," or something to that effect. . . .

It is a miracle that families of sets closed under unions and intersections can be characterized solely by the distributive law and by some simple identities. Jaded as we are, we tend to take Birkhoff's discovery for granted and to forget that it was a fundamental step forward in mathematics.

G.-C. Rota ([Ro], str. 1440, 1441)