

Wilhelm Matzka (1798–1891)

Michaela Chocholová
Determinanty

In: Michaela Chocholová (author); Ivan Štoll (author): Wilhelm Matzka (1798–1891). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2011. pp. 98–[107].

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402189>

Terms of use:

© Michaela Chocholová

© Ivan Štoll

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

GRUNDZÜGE

der

systematischen Einführung und Begründung

der

Lehre der Determinanten,

vermittelt

geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen,

von

Dr. WILHELM MATZKA,

jubil. k. k. ord. Univers.-Professor, k. k. Regierungsrath, ordentl. Mitglied der kön. böhm.
Gesellschaft der Wissenschaften.

P R A G.

Verlag der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1877.

DETERMINANTY

Stručný nástin historie determinantů

S představami o determinantech se setkáváme již koncem 18. století u německého matematika, filozofa a přírodovědce Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716). Při řešení úlohy z $n + 1$ lineárních rovnic vyloučit n neznámých shledal, že výsledkem je určitý výraz složený z koeficientů těchto rovnic, který v dnešní terminologii nazýváme determinantem. Jeho ideje však upadly v zapomnění a neměly žádný vliv na další vývoj matematiky.¹⁵²

Za zrod teorie determinantů je považováno zveřejnění monografie *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750), v níž švýcarský matematik Gabriel Cramer (1704–1752) podal obecné pravidlo pro řešení nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých (inspirované řešením úlohy najít rovnici kuželosečky určené pěti body), které je dnes obecně známo jako Cramerovo pravidlo, skrývající v sobě zároveň i obecnou definici determinantu n -tého řádu.¹⁵³

U G. W. Leibnize i G. Cramera se determinanty objevily jako vedlejší produkty při řešení konkrétních algebraických (eliminačních) úloh. Zásadní změnu znamenal přístup francouzského matematika Alexandra Théophile Vandermondea (1735–1796), který uvažoval determinanty jako samostatné objekty nově vznikající teorie a zabýval se jimi zcela obecně, tj. bez závislosti na eliminačních úlohách. A. T. Vandermonde v práci *Mémoire sur l'élimination* (Paris, 1771) uvedl základní vlastnosti těchto nových objektů (v dnešním pojetí např. věta o rozvoji determinantu, věta o změně znaménka při výměně dvou rovnoběžných řad, věta o nulovosti determinantu v případě lineární závislosti dvou rovnoběžných řad), čímž podal základy teorie determinantů a právem je tak považován za jejího zakladatele.

Roku 1812 předložili nezávisle na sobě francouzští matematici Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) a Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) práce související s determinanty Francouzskému institutu.¹⁵⁴ J. P. M. Binet se vrátil k Vandermondeovu pojetí a zavedl novou symboliku, pomocí níž vyjádřil rozvoj determinantu a našel obecné pravidlo pro násobení determinantů. Cauchyova práce zahrnovala část nazvanou *Des fonctions symétriques alternées désignées sous le nom de déterminans*, v níž shrnul a významně rozpracoval dosavadní

¹⁵² Rovněž korespondence z roku 1693, v níž G. W. Leibniz popisuje nové výsledky svému francouzskému příteli Guillaume de l'Hospitalovi (1661–1704), byla uveřejněna až roku 1850; tedy v době, kdy se již teorie determinantů plně rozvíjela nezávisle na Leibnizových objevech. Více o Leibnizových myšlenkách v souvislosti s teorií determinantů viz [B4].

¹⁵³ Teprve roku 1966 bylo poprvé poukázáno na to, že toto pravidlo publikoval již roku 1748 skotský matematik Colin Maclaurin (1698–1746). Více o Maclaurinových a Cramerových objevech ve spojení s Cramerovým pravidlem viz [B4].

¹⁵⁴ Binet J. P. M., *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques*, Paris, 1813; Cauchy A.-L., *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, Paris, 1815.

mýšlenky o determinantech, zavedl vhodnou symboliku a vytvořil novou terminologii. Tím A.-L. Cauchy vybudoval formálně samostatnou teorii, v hlavních bodech ukončenou a uzavřenou. Determinanty však v té době využívalo ještě poměrně málo matematiků a jeho práce neměla příliš velký ohlas.

K zásadnímu obratu v rozšíření determinantů došlo pod vlivem díla německého matematika Carla Gustava Jacoba Jacobiho (1804–1851), který si uvědomil, že dosud neexistuje stručný a logicky uspořádaný výklad teorie determinantů, který by byl pro matematiky dobře čitelný, srozumitelný a vhodný ke studiu. Roku 1841 publikoval tři významné práce, jimiž problematiku determinantů do značné míry završil.¹⁵⁵

Zejména pod vlivem Jacobiho prací se od 40. let 19. století determinanty postupně stávaly obecně známým matematickým nástrojem a pronikaly do řady disciplín (algebra, analytická geometrie, matematická analýza, teorie čísel a další).¹⁵⁶

V souvislosti s rozvojem teorie determinantů se ve druhé polovině 20. století objevila i některá jejich zobecnění. Jednalo se např. o determinanty kubické a n -rozměrné, determinanty nekonečné, permanenty, determinoidy a determinanty nad nekomutativními tělesy.¹⁵⁷

Pro úplnost ještě poznamenejme, že dnešní přístup k determinantům pomocí matic je opačný, než byl jejich historický vznik a vývoj.¹⁵⁸

Původní práce C. G. J. Jacobiho a dalších matematiků nebyly určeny k úvodnímu studiu. S rostoucím zájmem o teorii determinantů začala být silně pocítována potřeba sepsat základní učebnice. První z nich byly vydány již v polovině 19. století; v 60. a 70. letech 19. století se postupně objevovaly další a další učebnice věnované této tematice.¹⁵⁹ Byly mezi nimi jak učebnice elementární, zahrnující pouze základy teorie a sloužící zejména k prvnímu seznámení s determinanty, tak i obšírné monografie pojednávající o determinantech od jejich základů až po speciální otázky a aplikace. V mnohých z nich bývaly zařazovány pasáže o vzniku a vývoji teorie determinantů.

¹⁵⁵ Jacobiho práce vyšly ve 22. ročníku časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* latinsky pod názvy *De formatione et proprietatibus Determinantium* (str. 285–318), *De Determinantibus functionalibus* (str. 319–359) a *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum* (str. 360–371).

¹⁵⁶ Na utváření a rozvoji teorie determinantů se kromě výše jmenovaných podílelo mnoho dalších matematiků. V počátcích to byli Étienne Bézout (1730–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), později zejména Ludwig Otto Hesse (1811–1874), James Joseph Sylvester (1814–1897), Karl Theodor Weierstrass (1815–1897), Arthur Cayley (1821–1895), Charles Hermite (1822–1901), Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) a další.

¹⁵⁷ O vzniku a vývoji teorie determinantů více viz [B4], [Gue], [Kn], [Mu1] a [Mu2].

¹⁵⁸ Zrod teorie matic je datován rokem 1858, kdy britský matematik A. Cayley uveřejnil v časopise *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* článek *A memoir on the theory of matrices*. Podrobně se vzniku a vývoji teorie matic věnuje [B4].

¹⁵⁹ První učebnicí teorie determinantů byla kniha W. Spottiswooda nazvaná *Elementary theorems relating to determinants*, London, 1851; následovaly učebnice F. Brioschiho s názvem *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni*, Pavia, 1854, a R. Baltzera vydaná pod názvem *Theorie und Anwendung der Determinanten, mit Beziehung auf die Originalquellen*, Leipzig, 1857. Více o učebnicích teorie determinantů viz [B4].

Determinanty v Matzkově díle

Stejně jako většina matematické komunity (v českých zemích) i W. Matzka byl zasažen „módní“ vlnou teorie determinantů. Nejprve studoval původní práce G. Cramera, P. S. Laplace, A.-L. Cauchyho a O. Hesseho, a pak se rozhodl pro vydání vlastní, originálně pojaté „učebnice“ determinantů.

V roce 1877 publikoval v *Královské české Společnosti nauk* německé pojednání nazvané *Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten, vermitteltst geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen* [M64], které má 61 stran (předmluva, 4 kapitoly). Ač svým stylem připomíná učebnici, bylo sepsáno spíše jako odborné pojednání zejména pro univerzitní studenty a zkušenější matematiky.

W. Matzka si při jeho psaní stanovil dva hlavní cíle – zavést determinanty (nové matematické struktury) do systému algebry cestou jejich přirozeného „objevu“, tedy prostřednictvím vhodného řešení obecných soustav lineárních rovnic, a poté využít nově získaných poznatků ke zjednodušení řešení soustav lineárních rovnic.

V předmluvě knihy o svých záměrech napsal:

Es wäre nun allerdings nahe gelegt gewesen, dieses merkwürdige algebraische Zahlengeflechte, auf dem Wege seiner Entdeckung in die Mathematik einzuführen ... Andere dagegen verwandelten, ohne jegliche Vorbereitung auf eine so absonderliche Zahlenverflechtung, die Cramer'sche oder Laplace'sche Vorschrift zur Erzeugung der Resultante geradezu in die Definition der Determinante ... In allen diesen, wenn auch sonst höchst verdienstlichen ... Sonderschriften lehrt man jedoch nirgends das eigentliche Auflösen derartiger verbundener Gleichungen, das allmähliche Umstalten und Verknüpfen derselben, um die in Frage stehenden Schlüsselausdrücke ihrer Unbekannten erst herzuleiten oder aufzufinden; sondern man beweist oder erprobt blos, gestützt auf einige einschlägige Eigenschaften der Determinanten, dass die in voraus dem Autor bekannte règle générale Cramer's richtig ist. ([M64], str. 3–4)

Originalita jeho pojednání spočívá zejména ve způsobu, jakým čtenáře uvedl do studia determinantů. V úvodu první kapitoly ze soustav lineárních rovnic tvaru:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1u + f_1v + \dots = m_1 \\ & a_2x + b_2y + c_2z + d_2t + e_2u + f_2v + \dots = m_2 \\ & a_3x + b_3y + c_3z + d_3t + e_3u + f_3v + \dots = m_3 \\ & a_4x + b_4y + c_4z + d_4t + e_4u + f_4v + \dots = m_4 \\ & a_5x + b_5y + c_5z + d_5t + e_5u + f_5v + \dots = m_5 \\ & a_6x + b_6y + c_6z + d_6t + e_6u + f_6v + \dots = m_6 \\ & \dots \end{aligned}$$

za předpokladu nenulovosti všech koeficientů a užitím tzv. eliminační metody vyvodil determinant druhého řádu. Získal jej jako výsledek eliminace (první)

neznámé x z prvního páru rovnic dané soustavy. Determinant druhého řádu pak definoval jako výraz (rozdíl součinů) stojící po eliminaci x při neznámé y a označil jej po vzoru P. S. Laplace $a_1b_2 - a_2b_1 \equiv (a_1b_2)$.

Ocitujme nyní delší pasáž z Matzkova názorného postupu zavedení determinantu druhého řádu, která dobře vystihuje jeho přístup:

Multiplizieren wir, in der Absicht aus dem ersten Paar der vorliegenden Gleichungen (I) die erste Unbekannte, x , wegzuschaffen, die erste Gleichung mit a_2 , die zweite mit a_1 , und subtrahiren jene von dieser, so erhalten wir zu Coëfficienten der Unbekannten y, z, t, \dots die Producten-Unterschiede

$$a_1b_2 - a_2b_1, a_1c_2 - a_2c_1, a_1d_2 - a_2d_1, \dots$$

Solch einen Unterschied, der aus zwei Paar Zahlen, wie namentlich der erste $a_1b_2 - a_2b_1$ aus der in den Gleichungen (I) ... unter einander stehenden Coëfficienten a_1, a_2 und b_1, b_2 oder aus den daselbst neben einander befindlichen Coëfficienten a_1, b_1 und a_2, b_2 , gleichsam mittels kreuzweiser Multiplication zusammengestellt wird, bezeichnen wir hier am einfachsten und vortheilhaftesten nach Laplace (1772) durch Einschliessung seines Minuends in Haken mit (a_1b_2) ; und man nennt ihn nach demselben Mathematiker die Resultante oder gewöhnlich nach Neueren (Cauchy, 1812) die Determinante zweiter Ordnung, 2. Grades oder Ranges, jener zwei Paar Zahlen; und hiemit setzen oder definiren wir überhaupt

$$a_1b_2 - a_2b_1 \equiv (a_1b_2).$$

([M64], str. 9)

Po eliminaci neznámé x dostal soustavu lineárních rovnic tvaru:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & (a_1b_2)y + (a_1c_2)z + (a_1d_2)t + (a_1e_2)u + (a_1f_2)v + \dots = (a_1m_2) \\ & (a_2b_3)y + (a_2c_3)z + (a_2d_3)t + (a_2e_3)u + (a_2f_3)v + \dots = (a_2m_3) \\ & (a_3b_4)y + (a_3c_4)z + (a_3d_4)t + (a_3e_4)u + (a_3f_4)v + \dots = (a_3m_4) \\ & (a_4b_5)y + (a_4c_5)z + (a_4d_5)t + (a_4e_5)u + (a_4f_5)v + \dots = (a_4m_5) \\ & (a_5b_6)y + (a_5c_6)z + (a_5d_6)t + (a_5e_6)u + (a_5f_6)v + \dots = (a_5m_6) \\ & \dots \end{aligned}$$

Výše uvedeným způsobem z ní eliminací neznámé y odvodil determinant třetího řádu a definoval jej jako $(a_1b_2)c_3 - (a_1b_3)c_2 + (a_2b_3)c_1 \equiv (a_1b_2c_3)$. Ze soustav rovnic vzniklých po eliminaci neznámých z a t podobně definoval i determinanty čtvrtého a pátého řádu. Zajímavé je, že W. Matzka vždy vycházel ze zcela obecné soustavy n lineárních rovnic definované na počátku (I), oproti běžně užívanému vyvození pomocí konkrétní soustavy 2, 3, ..., n lineárních rovnic o 2, 3, ..., n neznámých.

Zároveň uvedl a dokázal některé základní vlastnosti odvozených determinantů a rovněž naznačil Cramerův a Laplaceův přístup k jejich zavedení.¹⁶⁰

¹⁶⁰ W. Matzka připomněl řešení úlohy stanovit rovnici kuželosečky určené pěti body, kterou převzal z Cramerovy monografie *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, a doplnil ji stručným komentářem.

Důkazům základních vlastností determinantů věnoval druhou a třetí kapitolu spisu. Uvedl v ní například „odvození“ a definici determinantu n -tého řádu:

Die Determinante gewisser Zahlenreihen mit je eben so viel Elementen ist die Summe der abwechselnd positiven und negativen Producte je eines der fallend geordneten Elemente der Schlussreihe in die Determinante der vorangehenden Zahlenreihen, nach Weglassung ihrer mit jenem multiplicativen Elemente gleichbezeichneten Elemente. Letztere Determinante ist bei einer Determinante zweiten Grades natürlich blos ein Element der ersten Zahlenreihe. ([M64], str. 23)

Dále vyložil formu zápisu determinantu vypsáním jeho prvků do svislých úseček, obecné pravidlo pro určení znaménka členu determinantu, pravidla pro řádkové úpravy determinantu, rozvoj determinantu atd.

Ve čtvrté, závěrečné kapitole popsal řešení soustav homogenních lineárních rovnic za pomoci determinantů. V úvodu ukázal metodu řešení soustavy dvou rovnic o třech neznámých. Naznačme stručně jeho postup řešení:

Auflösung zweier Gleichungen mit drei Unbekannten, nemlich ...

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

... Aus ihnen verdrängen wir nach einander z und x ... Hiernach werden die letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_1c_2)x + (b_1c_2)y &= 0 \\ (a_1b_2)y + (a_1c_2)z &= 0 \end{aligned}$$

und geben die Proportionen

$$\frac{x}{(b_1c_2)} = \frac{y}{-(a_1c_2)} = \frac{z}{(a_1b_2)}.$$

Zur Aufstellung dieser drei Determinanten aus den drei zweigliedrigen Coefficientenreihen a , b , c können wir eines der zwei nachstehenden Schemata benützen:

$$\begin{array}{ccc} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right\|, & \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & \end{pmatrix} \\ x & y & z & x & y & z \\ + & - & + & + & - & + \end{array}$$

...

Dann lassen wir für x die Coefficienten a , für y die b , und für z die c weg, und gruppieren jedesmal die 2übrigen Coefficientenreihen in ihrer Aufeinanderfolge zu einer Determinante, welche mit dem unter der Unbekannten stehenden Vorzeichen versehen die fragliche Proportionelle derselben darbietet. ([M64], str. 48–49)

Obdobný princip následně použil při řešení soustavy tří (čtyř, pěti) rovnic o čtyřech (pěti, šesti) neznámých. Obecné pravidlo pro řešení soustavy n rovnic o $n + 1$ neznámých však do učebnice nezahrnul.¹⁶¹

Odborná hodnocení a citace Matzkova díla

První recenze Matzkovy práce [M64] byla uveřejněna roku 1879 v referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*; obsahovala však pouze stručnou charakteristiku jejího obsahu.¹⁶²

Paul Henry Hanus (1855–1941), středoškolský profesor matematiky v Denveru, publikoval roku 1886 rozsáhlou vysokoškolskou učebnicí determinantů [Han]. Při jejím sepisování, jak uvedl v předmluvě, byl inspirován také Matzkovým spísem [M64].

Podrobnější hodnocení pojednání [M64] nacházíme u skotského matematika Thomase Muira (1844–1934), který byl největším znalcem historie teorie determinantů. V pětisvazkovém díle *Theory of determinants in the historical order of development* ([Mu1] a [Mu2]) uvedl přehled téměř všech prací o determinantech od roku 1693 až do roku 1920, který obsahuje jejich stručné charakteristiky a často také ukazuje jejich vzájemné souvislosti. V posudku práce [M64] T. Muir vyzdvihl Matzkův přístup k uvedení do nauky o determinantech:

What is fresh in this interesting memoir is the mode in which the student is introduced to determinants and becomes acquainted with their fundamental properties. ([Mu1], vol. III, str. 69)

Shrnutí Matzkových výsledků

V souvislosti s všeobecným rozšířením determinantů a jejich aplikacemi v řadě matematických a technických oblastí začali být s touto tematikou postupně seznamováni i studenti vysokých a středních škol. V 70. a 80. letech 19. století byla v našich zemích publikována nejen řada více či méně původních pojednání o determinantech, ale i větší množství vysokoškolských a středoškolských učebnic.¹⁶³

¹⁶¹ V současné době je při řešení soustav lineárních rovnic zpravidla používána Gaussova eliminační metoda a Frobeniova věta (nutná a postačující podmínka existence řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic), jež do obecného povědomí matematiků vstoupily až na přelomu 19. a 20. století. Historicky však byly přístupy k řešení soustav lineárních rovnic odlišné; podrobně se tomuto tématu věnuje [B4]. Matzkovo pojetí dokládá, že téma zpracoval v souladu s matematickými znalostmi své doby.

¹⁶² Referent F. W. Netto ze Strassburgu shrnul v časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (viz 11(1879), str. 106) obsah práce [M64] takto: *Im ersten Abschnitt werden durch die Elimination unbekannter Grössen aus Gleichungen ersten Grades mittelst der Subtractionsmethode der Reihe nach die Determinanten zweiter bis fünfter Ordnung entwickelt; hierbei treten in diesen speciellen Fällen bereits Haupteigenschaften der Determinanten auf. Diese werden nach der Besprechung der allgemeinen Bildung von Determinanten beliebiger Ordnung im zweiten und dritten Abschnitte erweitert und allgemein bewiesen. Im letzten Theile folgt die Behandlung von n homogenen linearen Gleichungen mit $n + 1$ Unbekannten.*

¹⁶³ První česky psanou učebnicí uvádějící do teorie determinantů vydal v Praze roku 1865 Martin Pokorný (1836–1900) pod názvem *Determinanty a vyšší rovnice* [Pok]. Její bližší

Upozorněme na učebnice Karla Zahradníka (1848–1916), profesora matematiky na univerzitě v Záhřebu a později na technice v Brně, s názvem *Prvé počátky nauky o determinantech* [Za2], či Eduarda Bartla, profesora na německé reálce v Praze, nazvanou *Einleitung in die Theorie der Determinanten* [Ba], které byly publikovány ve stejné době jako Matzkův spis [M64].¹⁶⁴ Byly určeny pro výuku na vyšších středních školách, nepřinášely originální přístupy k zavedení teorie determinantů, což také nebylo jejich cílem. Měly studentům zprostředkovat první seznámení s determinanty, jejich základními vlastnostmi, vybudovat základ pro „rutinní“ výpočty (obsahují názorné postupy, konkrétní řešené příklady apod.) a ukázat aplikaci determinantů na řešení jednoduchých soustav lineárních rovnic.

Matzkův spis [M64] však rozhodně není elementární povahy. W. Matzka v podstatě nepoužíval demonstrace na konkrétních (číselných) příkladech, uvedl řadu obecně platných vět, včetně jejich odvození a důkazů. Hlavní důraz kladl na vyložení problematiky v celé její obecnosti. Zároveň se mu podařilo přiblížit i historický přístup k zavedení determinantů, čímž práce získala i motivační charakter.

V roce 1874 W. Matzka uveřejnil rozsáhlé pojednání (61 stran) nazvané *Zur Lehre der Parallelprojection und der Flächen* [M63], v němž s využitím determinantů rozpracoval analytickou geometrii v rovině i prostoru.¹⁶⁵

Nejvýraznější osobností teorie determinantů v našich zemích byl bezpochyby František Josef Studnička (1836–1903), profesor matematiky na pražské univerzitě. O determinantech sepsal více než 60 prací. V souvislosti se zaměřením této kapitoly připomeňme jeho učebnici *O determinantech* [Stu2], která vyšla v roce 1870 a zasvěcovala začátečníky do elementární teorie determinantů. V roce 1899 vydal F. J. Studnička rozsáhlou učebnici pro univerzitní studenty s názvem *Úvod do nauky o determinantech* [Stu3], v níž pojednal od základních vlastností determinantů a počítání s nimi přes speciální determinanty (např. mocninné a sestavné, cyklické, symetrické a antisymetrické, komplexní, funkcionální) až po jejich aplikace v algebře a analytické geometrii. Celou řadu prací věnoval vyšetření vlastností a vzájemných vztahů některých speciálních determinantů, v dalších se pak zaměřil na různá využití determinantů v algebře, analytické geometrii, sférické trigonometrii a analýze.¹⁶⁶

charakteristika viz [BK], str. 113–114. Další česky psané učebnice a práce o determinantech uvádí a hodnotí [Be1], [Be3] a [Be4].

¹⁶⁴ Učebnice K. Zahradníka [Za2] vyšla roku 1878 též chorvatsky pod názvem *O determinantih drugoga i trećega stupnja. Za porabu viših srednjih učilišta*, Zagreb, 39 stran. Determinantům věnoval ještě další práce. Roku 1898 vydal jako litografii zápisy z chorvatských univerzitních přednášek pod názvem *O determinantima. Predavanja u zimskom semestru godine 1897/8*, Zagreb, 112 stran. Upravené vyšly roku 1904 také česky s názvem *O determinantech. Přednášky z vyšší matematiky I. běh, část úvodní*, Brno, 62 stran, a staly se předlohou pro vysokoškolskou učebnici vydanou v roce 1905 a nazvanou *O determinantech*, Brno, 50 stran. Podrobný rozbor matematického díla K. Zahraníka podává monografie [Be4].

¹⁶⁵ Rozbor a hodnocení pojednání [M63] obsahuje kapitola *Geometrie*.

¹⁶⁶ V oblasti speciálních determinantů se F. J. Studnička zabýval zejména problematikou determinantů mocninných a sestavných, jimž věnoval několik drobnějších článků a samostatnou práci nazvanou *O determinantech mocninných a sestavných*, Praha, 1897, 76 stran.

Z výše uvedeného srovnání je zřejmé, že Matzkova práce o determinantech *Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten ...* [M64] plně zapadala do trendu matematické práce rozvíjené v českých zemích v 70. a 80. letech 19. století. Zatímco tehdy byla teorie determinantů povinnou náplní středoškolské a vysokoškolské výuky matematiky, v současné době se determinanty na našich středních školách již téměř nevyučují; také jejich výklad ve vysokoškolském kurzu algebry je často omezen jen na „nejnutnější“ minimum.

* * * * *

Literatura

- [Ba] Bartl E., *Einleitung in die Theorie der Determinanten, Zum Gebrauche an Mittelschulen sowie zum Selbstunterrichte*, Prag, 1878, 96 stran.
- [B4] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 35, Matfyzpress, Praha, 2007.
- [BK] Bečvář J., Kohoutová Z., *Vladimír Kořínek (1899–1981)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 27, Grafex, Praha, 2005.
- [Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [Be3] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.
- [Be4] Bečvářová M., *Karel Zahradník (1848–1916)*, *Praha – Záhřeb – Brno*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 46, Matfyzpress, Praha, 2011.
- [Gue] Günther S., *Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende*, Erlangen, 1875, VIII + 236 stran.
- [Han] Hanus P. H., *An elementary treatise on the theory of determinants, a text-book for colleges*, Boston, 1886, VIII + 217 stran.
- [Kn] Knobloch E., *From Gauß to Weierstraß: Determinant theory and its historical evaluations*, in Sasaki Ch., Sugiuru M., Dauben J. W. (ed.), *The intersection of history and mathematics*, Basel, 1994, 51–66.
- [Mu1] Muir T., *The theory of determinants in the historical order of development I–IV*, London, 1906–1923.
- [Mu2] Muir T., *Contributions to the history of determinants 1900–1920*, London, 1930.
- [Pok] Pokorný M., *Determinanty a vyšší rovnice*, Praha, 1865, 133 stran.
- [Stu2] Studnička F. J., *O determinantech*, Praha, 1870, 64 stran.
- [Stu3] Studnička F. J., *Úvod do nauky o determinantech*, Praha, 1899, 231 stran.
- [Za2] Zahradník K., *Prvé počátky nauky o determinantech. Pro vyšší střední školy*, Praha, 1879, 48 stran.

Články o aplikacích determinantů byly převážně určeny pro studenty vysokých a středních škol. Připomeňme například článek *O základních vlastnostech determinantů mocninných a jich upotřebení v teorii rovnic algebraických*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 26(1897), str. 105–120, v němž předvedl řešení algebraických rovnic pomocí cyklických determinantů mocninných a sestavných, nebo práce naznačující využití determinantů v analytické geometrii *Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 2(1873), str. 69–82, 144–146, 192–195, 236–239, a sférické trigonometrii *Odození základních vzorců sférické trigonometrie pomocí některých pouček determinantních*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 4(1875), str. 49–57. Podrobný přehled a hodnocení Studničkových prací z teorie determinantů viz [Be3].

