Tomáš Zuščák

Sobotkovo řešení Apolloniovy úlohy

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. II. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 203–217.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402131

SOBOTKOVO ŘEŠENÍ APOLLONIOVY ÚLOHY

Tomáš Zuščák

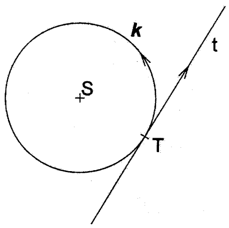
1. Úvod

Obecnou Apolloniovou úlohou rozumíme úlohu sestrojit kružnici, která se dotýká daných tří kružnic. Krása problému spočívá mimo jiné v jednoduchosti zadání, které vybízí k řešení. Těch vzniklo v historii opravdu mnoho. Apolloniovou úlohou se zabývala řada význačných matematiků novověku. Jmenujme např. Vièta, Fermata, Newtona, Eulera, Plückera, Caseye. Jeden ze způsobů řešení, který představuje tento článek, pochází od prof. Jana Sobotky. Sobotka žil v letech 1862 až 1931 a patřil mezi význačné české geometry. Známé jsou především jeho práce a učebnice z oblasti deskriptivní a diferenciální geometrie. Jedno z jeho řešení výše zmíněné úlohy nalezneme v článku *O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického* [1]. Pro úplnost uvádím, že tento způsob je odlišný od toho, které je jako Sobotkovo řešení vyloženo v [2] a které je speciálním důsledkem obecnějších úvah o problému koule dotýkající se čtyř daných koulí.

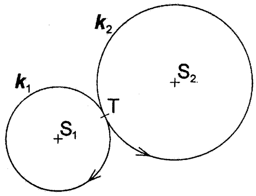
2. Některé poznatky využívané Sobotkou při řešení

Zavedeme pojem cyklu. Chceme-li narýsovat kružnici, můžeme kružítkem otáčet buď ve směru, nebo proti směru hodinových ručiček. Tato jednoduchá představa nás vede k myšlence, abychom libovolné kružnici přisoudili jeden ze dvou možných smyslů otáčení (kladný pro pohyb proti směru hodinových ručiček, záporný pro smysl opačný). Vznikne tak tzv. orientovaná kružnice (cyklus). Poloměr orientované kružnice je v absolutní hodnotě roven poloměru původní kružnice a je kladný pro kladnou orientaci cyklu a naopak. V dalších úvahách budeme označovat cyklus o středu S a poměru r symbolem $\overrightarrow{k}\,(S,r)$, příp. $\overrightarrow{k}$.

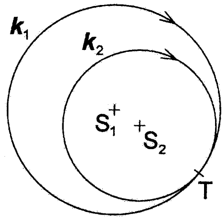
V libovolném bodě cyklu je možné sestrojit orientovanou tečnu. Její orientace je určena orientací cyklu, jak ukazuje obrázek. V případě, že se dva cykly dotýkají, musí být shodná i orientace jejich společné tečny v bodě dotyku. Dva cykly stejného smyslu mohou proto mít pouze



Obr. 1



Obr. 2a



Obr. 2b

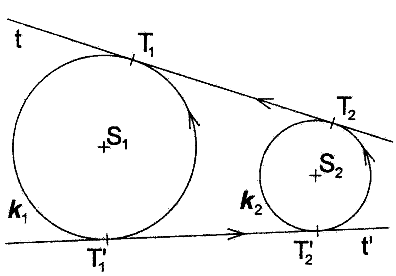
vnitřní dotyk, cykly různého smyslu pouze vnější. Vše může být názornější, představíme-li si cykly jako otáčející se soukolí nějakého stroje.[1]

Máme-li dány dva cykly, které se dotýkají, platí pro vzdálenost jejich středů jednoduchý vztah:

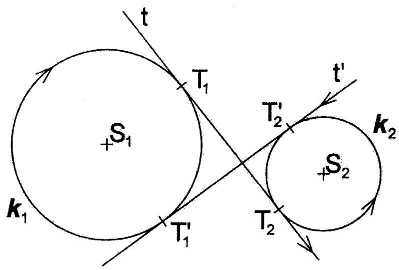
$$|S_1S_2| = |r_1 - r_2| \tag{1}$$

Dva cykly $\overrightarrow{k}_1(S_1, r_1)$ a $\overrightarrow{k}_2(S_2, r_2)$, kdy jeden leží vně druhého, mají právě dvě společné orientované tečny. Mají-li cykly stejný smysl, jedná se o dvojici vnějších tečen, mají-li opačný smysl, jsou to tečny vnitřní. I zde si pomůžeme názornou představou dvou otáčejících se kol spojených řemenem. Označíme-li body dotyku jedné z tečen a cyklů T_1, T_2, platí nezávisle na orientaci cyklů:

$$|T_1T_2|^2 = |S_1S_2|^2 - (r_1 - r_2)^2 \tag{2}$$



Obr. 3a

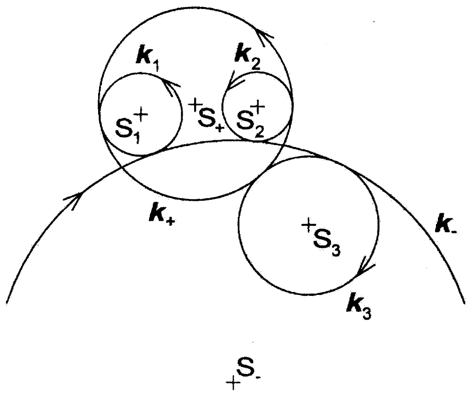


Obr. 3b

Nyní si ukážeme, jak je možné cyklů použít ke stanovení maximálního počtu řešení obecné Apolloniovy úlohy. Předpokládáme, že každá z daných kružnic leží vně zbývajících. Označme cykly jimi určené $\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}$.

[1] Jednoduchou úvahou bychom se přesvědčili, že není možné přiřadit žádnou přípustnou orientaci trojici vzájemně se dotýkajících kružnic. Neexistují proto tři vzájemně se dotýkající cykly.

Nechť cyklus $\overrightarrow{k_1}$ je orientován kladně. Symbolicky naznačme možné orientace daných cyklů: $+++, ++-, +-+, +--$. K určité zvolené volbě smyslů existují právě dvě řešení – cyklus s kladným a záporným smyslem. Výše uvedené poznatky o dotycích dvojice cyklů použijeme při úvaze o druhu dotyků řešení a zadaných kružnic. Např. pro volbu $++-$ platí, jestliže bude mít hledaný cyklus $\overrightarrow{k}_+$ kladný smysl, musí mít s $\overrightarrow{k}_1$ (kladně orientovaná) vnitřní, s $\overrightarrow{k}_2$ (kladně orientovaná) vnitřní a s $\overrightarrow{k}_3$ (záporně orientovaná) vnější dotyk. U záporně orientovaného řešení $\overrightarrow{k}_-$ by tomu bylo právě naopak. Obdobnou úvahu je možné provést i pro další tři uváděné orientace cyklů $\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2, \overrightarrow{k}_3$. Jak snadno nahlédneme, získáme celkem osm různých řešení obecné Apolloniovy úlohy. Pokud bychom zvolili zápornou orientaci prvního cyklu, žádné nové řešení již nenalezneme. O cyklech může čtenář nalézt více např. v [5].



Obr. 4

Předpokládám, že jsou čtenáři známy pojmy mocnost bodu ke kružnici, chordála dvou kružnic a potenční střed. Mocnost bodu X ke kružnici $k(S,r)$ je rovna číslu $m = |SX| - r^2$. Nechť je kružnic k dána ve zvolené kartézské soustavě souřadnic rovnicí

$$K(x,y) = (x-m)^2 + (y-n)^2 - r^2 = 0,$$

kde souřadnice středu S jsou $[m,n]$. V dalším textu budeme často ztotožňovat kružnici k a její rovnici $K(x,y) = 0$, stručně též $K = 0$. Mocnost m bodu $X[x_0, y_0]$ ke kružnici $K(x,y) = 0$ určíme snadno:

$$m = |SX| - r^2 = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 - r^2 = K(x_0, y_0) \qquad (3)$$

Nechť jsou dány dvě kružnice: $k_1(K_1 = 0)$ a $k_2(K_2 = 0)$. Pak bod $X[x_0, y_0]$ je bodem chordály c těchto dvou kružnic právě tehdy, když $K_1(x_0, y_0) = K_2(x_0, y_0)$. Získáváme tak rovnici chordály:

$$c : K_1(x, y) - K_2(x, y) = 0 \text{ (stručně } K_1 - K_2 = 0). \tag{4}$$

Jestliže mají kružnice k_1 a k_2 dva společné body A a B, chordála těchto kružnic je totožná s přímkou AB. Předpokládám, že je též známa konstrukce chordály dvou kružnic využívající pomocné kružnice, jakož i konstrukce potenčního středu tří kružnic. Jinak odkazuji čtenáře například na literaturu [3].

3. Vlastnosti svazku přímek

Na tomto místě uvádím vlastní modifikaci Sobotkova postupu odvození jisté relace platné ve svazku přímek, která je základem vlastního řešení Apolloniovy úlohy. Definujme dělící poměr tří různých kolineárních bodů A, B, C. Rozumíme jím takové číslo d, že $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$. Značíme jej (ABC). Dvojpoměrem čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D rozumíme poměr dělících poměrů $\frac{(ABC)}{(ABD)}$. Označujeme jej $(ABCD)$. V dalším textu využijeme následující úmluvy: je-li U^∞ nevlastní bod přímky AB, klademe $(ABU^\infty) = 1$. Z toho vyplývá $(ABCU^\infty) = (ABC)$.

V našich úvahách budeme též využívat dělícího poměru a dvojpoměru definovaného na svazku přímek. Nechť a, b, c, d jsou libovolné různé přímky téhož svazku se středem $S \in a \cap b$. Nechť p je pevně zvolená přímka téhož svazku různá od a, b, c. Označme $\overrightarrow{ac}$ velikost orientovaného úhlu polopřímek SA a SC daných průnikem přímek a, c s jednou polorovinou určenou přímkou p. Pak dělícím poměrem (abc) přímky c vzhledem k přímkám a, b rozumíme číslo $(abc) = \frac{\sin \overrightarrow{ac}}{\sin \overrightarrow{bc}}$. Dvojpoměrem $(abcd)$ přímek a, b, c, d nazýváme podíl dělících poměrů (abc) a (abd).

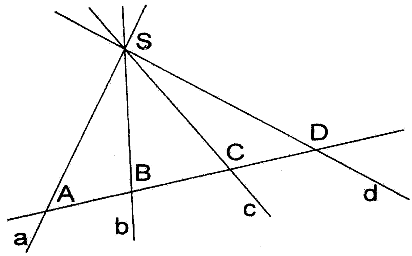
$$(abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin \overrightarrow{ac} \cdot \sin \overrightarrow{bd}}{\sin \overrightarrow{bc} \cdot \sin \overrightarrow{ad}}.$$

Souvislost dvojpoměru bodů na přímce a dvojpoměru přímek svazku vyjadřuje následující věta.

Věta 1: *Jestliže A, B, C, D jsou čtyři různé body přímky p, S bod neležící na přímce p, $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$. Pak*

$$(ABCD) = (abcd).$$

Tuto větu ponecháme bez důkazu, který však není nijak obtížný.



Obr. 5

Věta 2: *Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé kolineární body. Pak*

$$(ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Na přímce zvolíme soustavu souřadnic, v níž $A[a], B[b], C[c], D[d]$. Pak

$$(ABC) = \frac{c-a}{c-b} \qquad (ABD) = \frac{d-a}{d-b}$$
$$(ABCD) = \frac{(ca-)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \qquad (ACBD) = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)}$$

Jak se snadno přesvědčíme, skutečně $(ABCD) + (ACDB) = 1$.

Důsledek: Nechť a, b, c, d jsou různé přímky téhož svazku. Pak

$$(abcd) + (acdb) = 1. \tag{5}$$

Tvrzení je zjevně důsledkem předchozích dvou vět. Všimněme si blíže vztahu (5)

$$\frac{\sin\overrightarrow{ac}\cdot\sin\overrightarrow{bd}}{\sin\overrightarrow{bc}\cdot\sin\overrightarrow{ad}} + \frac{\sin\overrightarrow{ab}\cdot\sin\overrightarrow{cd}}{\sin\overrightarrow{cd}\cdot\sin\overrightarrow{ad}} = 1.$$

Další úpravou, při uvážení, že $\sin\overrightarrow{ac} = -\sin\overrightarrow{ca}$, získáme vztah

$$\sin\overrightarrow{ab}\sin\overrightarrow{cd} + \sin\overrightarrow{bc}\sin\overrightarrow{ad} + \sin\overrightarrow{ca}\sin\overrightarrow{bd} = 0. \tag{6}$$

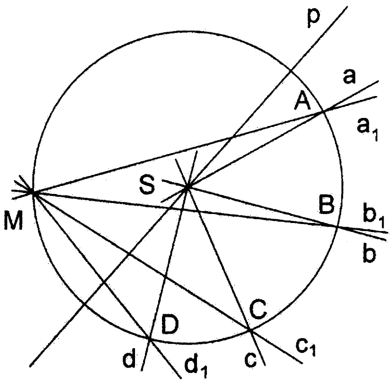
Od tohoto místa již budu sledovat opět Sobotkův přístup k řešení. Nechť jsou dány čtyři různé přímky téhož svazku, sestrojme kružnici k se středem S ve středu svazku. Zvolme libovolnou přímku p téhož svazku. Označme A, B, C, D průsečíky přímek a, b, c, d s kružnicí k ležící v jedné z polorovin určených přímkou p. Jestliže spojíme body A, B, C, D

s libovolným bodem na kružnici k, který leží v opačné polorovině určené přímkou p, přímkami a_1, b_1, c_1, d_1, platí:

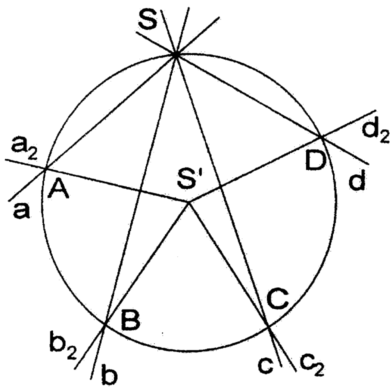
$$\sin \overrightarrow{a_1b_1} \sin \overrightarrow{c_1d_1} + \sin \overrightarrow{b_1c_1} \sin \overrightarrow{a_1d_1} + \sin \overrightarrow{c_1a_1} \sin \overrightarrow{b_1d_1} = 0.$$

Protože $\overrightarrow{a_1b_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}, \cdots$, je též:

$$\sin \frac{\overrightarrow{ab}}{2} \sin \frac{\overrightarrow{cd}}{2} + \sin \frac{\overrightarrow{bc}}{2} \sin \frac{\overrightarrow{ad}}{2} + \sin \frac{\overrightarrow{ca}}{2} \sin \frac{\overrightarrow{bd}}{2} = 0. \tag{7}$$



Obr. 6



Obr. 7

Pokud bychom kružnici k' proložili středem svazku, její průsečíky s přímkami a, b, c, d označili A, B, C, D, pro spojnice těchto bodů se středem S' kružnice $k' a_2, b_2, c_2, d_2$ bude platit

$$\sin \overrightarrow{a_2b_2} \sin \overrightarrow{c_2d_2} + \sin \overrightarrow{b_2c_2} \sin \overrightarrow{a_2d_2} + \sin \overrightarrow{c_2a_2} \sin \overrightarrow{b_2d_2} = 0.$$

Protože $\overrightarrow{a_2b_2} = 2\overrightarrow{ab}$, je

$$\sin 2\overrightarrow{ab} \sin 2\overrightarrow{cd} + \sin 2\overrightarrow{bc} \sin 2\overrightarrow{ad} + \sin 2\overrightarrow{ca} \sin 2\overrightarrow{bd} = 0.$$

Nebylo by již těžké ukázat, že

$$\sin(2^k \overrightarrow{ab}) \sin(2^k \overrightarrow{cd}) + \sin(2^k \overrightarrow{bc}) \sin(2^k \overrightarrow{ad}) + \sin(2^k \overrightarrow{ca}) \sin(2^k \overrightarrow{bd}) = 0,$$

kde $k \in Z$.

4. Vlastní řešení Apolloniovy úlohy

Výše uvedené výsledky jsou základem Sobotkova řešení. Nejprve je budeme aplikovat na čtyři kružnice dotýkající se páté kružnice. Poté přejdeme snížením počtu kružnic k Apolloniově úloze. Odvozené vztahy ukáží poměrně jednoduchou konstrukci bodů dotyku hledané kružnice a zadaných kružnic.

Uvažujme kružnice $k(S,r), k_1(S_1,r_1), \cdots, k_4(S_4,r_4)$ takové, že se kruž nice $k_1, \cdots, k_4$ dotýkají kružnice k. Dále nechť každá z kružnic $k_1, \cdots, k_4$ leží vně zbývajících. Označme dále $a_1, \cdots, a_4$ polopřímky $SS_1, \cdots, SS_4$. Pak pro vzdálenost středů S_i, S_k kružnic k_i, k_k $(i,k = 1,2,3,4)$ platí podle kosinové věty

$$d_{ik}^2 = |S_iS_k|^2 = |SS_i|^2 + |SS_k|^2 - 2|SS_i| \cdot |SS_k| \cos \overrightarrow{a_ia_k}.$$

Uvážíme-li nyní namísto kružnic takové cykly, že jejich orientace odpovídá již uvedeným podmínkám o dotycích, získáme vztahy

$$\begin{aligned}
d_{ik}^2 &= (r-r_i)^2 + (r-r_k)^2 - 2(r-r_i)(r-r_k)\cos \overrightarrow{a_ia_k}, \\
d_{ik}^2 &= ((r-r_i)-(r-r_k))^2 + 2(r-r_i)(r-r_k)(1-\cos \overrightarrow{a_ia_k}), \\
d_{ik}^2 &= (r_i-r_k)^2 + 4(r-r_i)(r-r_k)\sin^2 \frac{\overrightarrow{a_ia_k}}{2}.
\end{aligned}$$

Uvažme dále délku úseků společných tečen cyklů $\overrightarrow{k}_1, \cdots, \overrightarrow{k}_4$:

$$t_{ik}^2 = |T_iT_k|^2 = d_{ik}^2 - (r_i-r_k)^2 = 4(r-r_i)(r-r_k)\sin^2 \frac{\overrightarrow{a_ia_k}}{2}.$$

Odtud

$$|\sin \frac{\overrightarrow{a_ia_k}}{2}| = \left| \frac{t_{ik}}{2\sqrt{(r-r_i)(r-r_k)}} \right|.$$

Dosadíme-li tyto vztahy do relace (7), získáme vztah vyjadřující tzv. Caseyovu[2] větu:

$$t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{13}t_{14} = 0 \qquad (8)$$

Zdůrazňuji, že při odvození tohoto vztahu bylo nezbytné použití cyklů. Proto t_{ik} označuje buď délku úseku vnější tečny kružnic k_i a k_k (při souhlasné orientaci příslušných cyklů), nebo délku úseku vnitřní tečny kružnic k_1 a k_k (při nesouhlasné orientaci příslušných cyklů). Jednoduchou úvahou zjistíme, že souhlasně jsou orientovány takové dva cykly, které leží buď oba vně, nebo oba uvnitř cyklu $\overrightarrow{k}$.

[2] John Casey (květen 1820 – 3. 1. 1891), irský matematik, zabýval se především teorií algebraických křivek.

Nechť kružnice k_1, k_2, k_3 jsou dány rovnicemi

$$K_1(x,y) = 0, \quad K_2(x,y) = 0, \quad K_3(x,y) = 0$$

($K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$). Nechť se kružnice k_4 redukuje v bod S_4. Ten podle původního předpokladu leží na kružnici k, jinak však může být jeho poloha libovolná. Proto nechť bod $S_4[x,y]$ je libovolným bodem kružnice k. Předpokládejme dále polohu kružnic k_1, k_2, k_3 takovou, že každá z nich leží vně ostatních. Bod S_4 je vždy vnějším bodem těchto kružnic a délka úseku společné tečny např. t_{14} se redukuje na délku úseku tečny vedené z bodu S_4 na k_1. Potom ovšem $t_{14} = \sqrt{m_1}$, kde m_1 je mocnost bodu S_4 ke kružnici k_1. Podle vztahu (3) je $t_{14} = \sqrt{K_1(x,y)}$. Dosazením do (8) získáme:

$$t_{12}\sqrt{K_3(x,y)} \pm t_{23}\sqrt{K_1(x,y)} \pm t_{13}\sqrt{K_2(x,y)} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme zapsat stručně:

$$t_{12}\sqrt{K_3} \pm t_{23}\sqrt{K_1} \pm t_{13}\sqrt{K_2} = 0. \tag{9}$$

Po umocnění obdržíme též rovnici:

$$\begin{aligned} t_{23}^4 K_1^2 + t_{13}^4 K_2^2 + t_{12}^4 K_3^2 - 2t_{13}^2 t_{23}^2 K_1 K_2 - \\ -2t_{12}^2 t_{13}^2 K_2 K_3 - 2t_{23}^2 t_{12}^2 K_1 K_3 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Tato rovnice není závislá na volbě znamének jako rovnice (9). Musí ji splňovat každý bod náležející kružnici k. Bylo by třeba dále dokázat, že ji nesplňuje žádný jiný. To však přesahuje zaměření tohoto článku. Ukazuje se, že rovnice (9) a (10) jsou rovnicemi páru kružnic, které jsou řešením Apolloniovy úlohy určené kružnicemi $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0$ při jisté přípustné volbě smyslu cyklů $\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}$ přiřazených těmto kružnicím. Pro volbu jejich orientace existují čtyři možnosti, každá z nich určí jinou kombinaci délek t_{12}, t_{23}, t_{13}. Získáme tak celkem čtyři různé rovnice tvaru (9), resp. (10). Tyto rovnice nejsou snadno řešitelné, jedná se o rovnice 4. stupně o dvou neznámých. Pro analytické řešení Apolloniovy úlohy nejsou tedy příliš výhodné, neboť existují řešení jistě jednodušší a schůdnější (jedno z nich je uvedeno např. v [3]). Přesto tyto vztahy vedou k zajímavým závěrům, které umožní celou úlohu vyřešit konstruktivně.

Uvažujme dvojici řešení k, k', odpovídající určité zvolené orientaci cyklů $\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}$. Označme U_i, V_i body dotyku kružnic k, k' s kružnicí k_i. Souřadnice bodů U_i, V_i vyhovují rovnici $K_i(x,y) = 0$. Současně však vyhovují i rovnici (10). Pro souřadnice bodů U_1, V_1 platí $K_1 = 0$ a rovnice (10) přechází v rovnici

$$t_{13}^4 K_2^2 + t_{12}^4 K_3^2 - 2t_{12}^2 t_{13}^2 K_2 K_3 = 0,$$

která je ekvivalentní rovnici

$$t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3 = 0. \tag{11}$$

Není těžké ukázat, že pokud $t_{13}^2 \neq t_{12}^2$, jedná se o rovnici jisté kružnice. Označme ji k_{23}. Upravme rovnici (11):

$$\frac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0. \tag{12}$$

Rovnice (12) je samozřejmě opět rovnicí kružnice k_{23}, je však výhodnější, protože koeficienty u x^2 a y^2 jsou rovny 1. Body U_1, V_1 jsou průsečíky kružnic k_1 a k_{23}. Leží tedy na chordále těchto kružnic. Rovnice chordály a tedy i přímky U_1V_1 je podle (4):

$$U_1V_1 : K_1 - \frac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0.$$

Pokud tuto rovnici dále upravíme:

$$U_1V_1 : t_{13}^2(K_1 - K_2) - t_{12}^2(K_1 - K_3) = 0,$$

nebo též:

$$U_1V_1 : \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} - \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} = 0. \tag{13}$$

Pokud $t_{13}^2 = t_{12}^2$, je rovnice (11) rovnicí přímky. Jedná se tedy přímo o rovnici přímky U_1V_1. Po úpravě:

$$U_1V_1 : K_2 - K_3 = 0, \text{ též } (K_1 - K_2) - (K_1 - K_3) = 0.$$

Tuto rovnici vydělíme $t_{13}^2 = t_{12}^2$:

$$U_1V_1 : \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} - \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} = 0.$$

Tato rovnice je totožná s rovnicí (13).

Označme P potenční střed tří daných kružnic. Bod P leží na chordále kružnic k_1 a k_2 s rovnicí $K_1 - K_2 = 0$, i na chordále kružnic k_1 a k_3

s rovnicí $K_1 - K_3 = 0$. Proto souřadnice bodu P vyhovují i rovnici (13). Z toho plyne důležitý poznatek.

Spojnice bodů U_1, V_1 prochází potenčním středem daných kružnic P. Pro dvojice bodů U_2, V_2 a U_3, V_3 platí totéž a rovnice jejich spojnice je obdobou rovnice (13).

$$U_2V_2 : \frac{K_2 - K_3}{t_{23}^2} - \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} = 0$$

$$U_3V_3 : \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} - \frac{K_2 - K_3}{t_{23}^2} = 0.$$

Uvažujme nyní v souladu se Sobotkou rovnice $K_1 = 0$ kružnic k_i ve tvaru:

$$x^2 + y^2 - 2a_i x - 2\beta_i y + p_i = 0.$$

Jestliže umístíme počátek kartézské soustavy souřadnic do bodu P, je jeho mocnost ke kružnici k_i rovna $K_i(0,0) = p_i$. Z definice bodu P plyne $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Napišme rovnici přímky $U_1V_1 = l_1$ užitím vztahu (13):

$$l_1 : \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y}{t_{12}^2} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)x + (\beta_1 - \beta_3)y}{t_{13}^2} = 0.$$

Dále vyjádříme rovnice chordál p_{12} (kružnic k_1 a k_2), p_{13} a p_{23}:

$$p_{12} : (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y = 0$$

$$p_{13} : (\alpha_1 - \alpha_3)x + (\beta_1 - \beta_3)y = 0$$

$$p_{23} : (\alpha_2 - \alpha_3)x + (\beta_2 - \beta_3)y = 0$$

Ztotožníme přímku p_{23} s osou x, proto $\alpha_2 = \alpha_3$. Označme orientované úhly $\overrightarrow{p_{23}l_1} = \alpha$, $\overrightarrow{p_{23}p_{12}} = \beta$, $\overrightarrow{p_{23}p_{13}} = \gamma$. Potom

$$\tan\alpha = -\frac{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{t_{12}^2} - \frac{\alpha_1-\alpha_2}{t_{13}^2}}{\frac{\beta_1-\beta_2}{t_{12}^2} - \frac{\beta_1-\beta_3}{t_{13}^2}}, \quad \tan\beta = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}, \quad \tan\gamma = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_3}.$$

Ukazuje se vhodnější použít funkci kotangens:

$$\cot\alpha = -\frac{\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}t_{13}^2 - \frac{\beta_1-\beta_3}{\alpha_1-\alpha_2}t_{12}^2}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = \frac{t_{13}^2\cot\beta - t_{12}^2\cot\gamma}{t_{13}^2 - t_{12}^2}.$$

Postupnou úpravou tohoto vztahu získáme:

$$t_{13}^2(\cot\alpha - \cot\beta) = t_{12}^2(\cot\alpha - \cot\gamma),$$

$$t_{13}^2 \frac{\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = t_{12}^2 \frac{\cos\alpha\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$t_{13}^2 \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta} = t_{12}^2 \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma}. \tag{14}$$

Vrátíme-li se k původnímu označení:

$$\beta - \alpha = \overrightarrow{p_{23}p_{12}} - \overrightarrow{p_{23}l_1} = \overrightarrow{l_1p_{12}},$$

$$\gamma - \alpha = \overrightarrow{p_{23}p_{13}} - \overrightarrow{p_{23}l_1} = \overrightarrow{l_1p_{13}}.$$

Poté můžeme vztah (14) psát ve tvaru:

$$t_{13}^2 \frac{\sin\overrightarrow{l_1p_{12}}}{\sin\overrightarrow{p_{23}p_{12}}} = t_{12}^2 \frac{\sin\overrightarrow{l_1p_{13}}}{\sin\overrightarrow{p_{23}p_{13}}}.$$

Po úpravě:

$$\frac{\sin\overrightarrow{p_{12}l_1}\,\sin\overrightarrow{p_{13}p_{23}}}{\sin\overrightarrow{p_{13}l_1}\,\sin\overrightarrow{p_{12}p_{23}}} = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}. \tag{15}$$

Levá strana vztahu (15) je zjevně dvojpoměr přímek $p_{12}, p_{13}, l_1, p_{23}$. Analogicky můžeme určit i relace pro přímky $l_2 = U_2V_2$ a $l_3 = U_3V_3$.

$$\begin{aligned} (p_{12}p_{13}l_1p_{23}) &= \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2} \\ (p_{23}p_{12}l_2p_{13}) &= \frac{t_{23}^2}{t_{12}^2} \\ (p_{13}p_{23}l_3p_{12}) &= \frac{t_{13}^2}{t_{23}^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Tyto vztahy již umožňují sestrojit přímky l_1, l_2, l_3. Vedeme-li libovolnou rovnoběžku q s přímkou p_{23}, protnou ji přímky p_{12}, p_{13}, l_1 po řadě v bodech Q_{12}, Q_{13}, Q_1. Přímky p_{23} a q mají společný nevlastní bod U^∞. Pak platí podle věty 1

$$(Q_{12}Q_{23}Q_1U^\infty) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2},$$

neboli

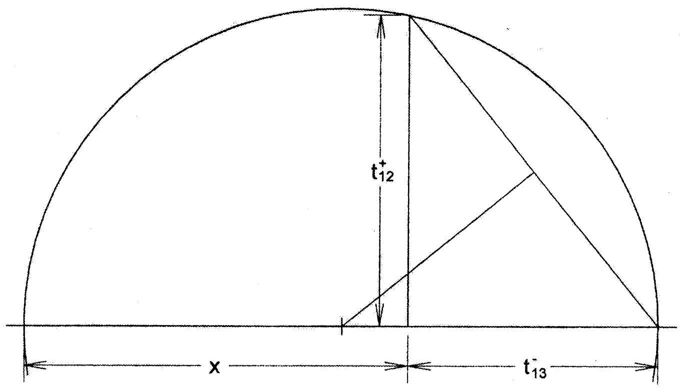
$$(Q_{12}Q_{23}Q_1) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}. \tag{17}$$

K určení přímky l_1 stačí sestrojit na přímce q bod Q_1, určený dělícím poměrem tak, jak ukazuje (17). Je-li tento dělící poměr kladný, leží bod Q_1 vně úsečky $Q_{12}Q_{13}$. V bodech Q_{12} a Q_{13} vztyčíme kolmice a v případě kladného dělícího poměru (17) na nich sestrojíme ve stejné polorovině určené přímkou q body Q'_{12} a Q'_{13} tak, aby

$$|Q_{12}Q'_{12}| : |Q_{13}Q'_{13}| = t_{12}^2 : t_{13}^2.$$

Přímka $Q'_{12}Q'_{13}$ protne přímku q v bodě Q_1. Hledaná přímka l_1 je spojnicí bodu Q_1 a potenčního středu P. Průsečíky přímky l_1 s kružnicí k_1 jsou body dotyku hledané dvojice kružnic k, k' a kružnice k_1.

Obdobně sestrojíme přímky l_2 a l_3 a body U_2, V_2 a U_3, V_3. Není již obtížné sestrojit kružnici k procházející body U_1, U_2, U_3 a k' procházející body V_1, V_2, V_3. Další řešení získáme jinou volbou smyslu cyklů $\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}$, což povede k jiné hodnotě alespoň jednoho z čísel $t_{12}^2, t_{13}^2, t_{23}^2$, jak již bylo uvedeno výše.

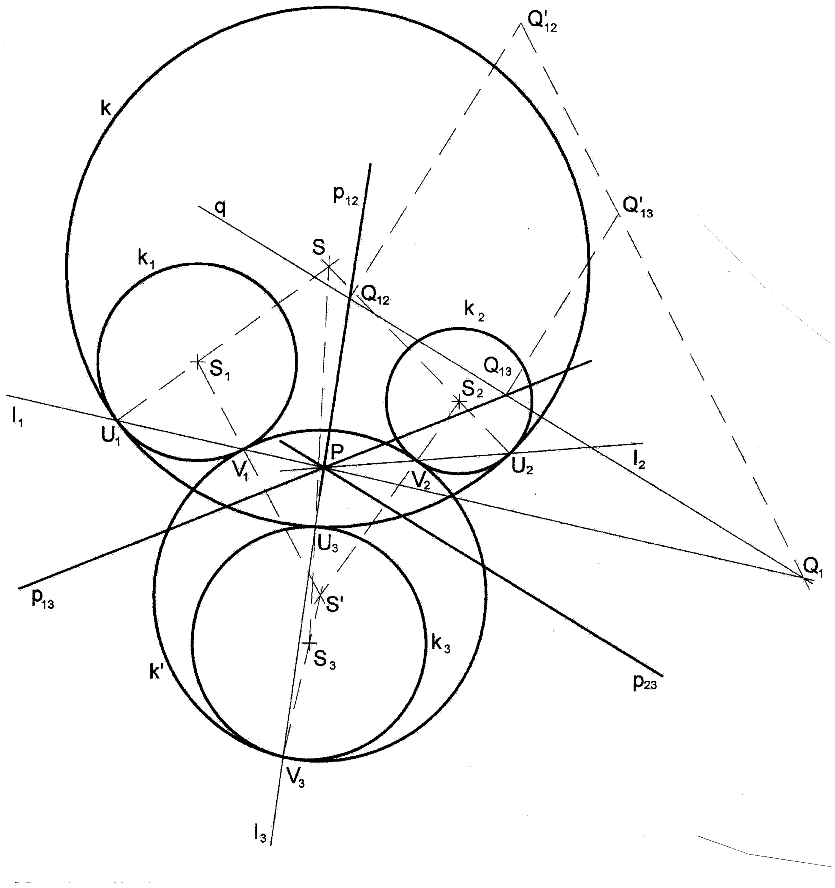


Obr. 8

Na obr. 9 je takto sestrojena jedna dvojice řešení příslušející orientaci cyklů $\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}$: $+ + -$. Při řešení bylo potřeba sestrojit (např. užitím vztahu (2)) délku úseku vnější tečny t_{12}^+ kružnic k_1 a k_2, dále délku úseku vnitřní tečny t_{13}^- kružnic k_1 a k_3 a konečně délku úseku vnitřní tečny t_{23}^- kružnic k_2 a k_3. Při konstrukci bodu Q_1 sestrojujeme dvojici úseček tak, aby jejich délky byly v poměru $t_{12}^2 : t_{13}^2$. Obr. 8 ukazuje využití Eukleidovy věty o výšce k sestrojení takových úseček. Zřejmě platí

$$x = \frac{{t_{12}^+}^2}{t_{13}^-} = \frac{{t_{12}^+}^2}{{t_{13}^-}^2} t_{13}^-,$$

neboli $x : t_{13}^{-} = {t_{12}^{+}}^{2} : {t_{13}^{-}}^{2}$. Na obr. 9 nejsou již provedeny obdobné konstrukce bodů Q_2 a Q_3. Pouze jsou narýsovány přímky l_2 a l_3. Jestliže známe body dotyku hledané kružnice, zcela jednoduše sestrojíme i střed této kružnice.



Obr. 9

5. Závěr

V úvodu jsem se zmínil o velkém množství způsobů řešení Apolloniovy úlohy. Zde uvedu co nejstručnější přehled některých z nich. Je bezpředmětné pokoušet se je zde popsat, zájemce odkazuji na [2]. Pouze provedu stručné srovnání s řešením, které představil tento článek. Každé z níže uvedených řešení a. – d. je starší než Sobotkovo.

a. Řešení užitím kruhové inverze. Toto řešení je známé téměř každému, kdo studoval vysokoškolskou matematiku. Není potřeba zavádět pojem cyklu, je však konstrukčně náročné. Řešitele provází velké množství čar, které výrazně snižují přehlednost. Ve srovnání s ním se Sobotkovo řešení jeví jako velmi jednoduché a přehledné. Většina konstrukcí má pomocný charakter a je možné provést je mimo samotné zadání úlohy.

b. Řešení užitím kuželoseček. Jeví se opět jako náročné na konstrukci s množstvím kroků. Ve srovnání s uváděným řešením je proto výrazně složitější.

c. Gergonnovo řešení. Toto řešení vyžaduje hlubší studium celého problému, výsledek je však elegantní. Podobně jako Sobotkovo řešení využívá pojmu cyklu a snaží se nalézt spojnici bodů dotyku páru hledaných kružnic a potenčního středu. Nevyužívá však při tom metrických vztahů. Konstrukce není příliš složitá. Je nutné pouze sestrojení středů stejnolehlosti daných tří cyklů, jejich spojnice a pólů této spojnice vzhledem k daným cyklům. Přímky l_1, l_2 a l_3 procházejí potenčním středem a příslušným pólem. Toto řešení se mi zdá výhodnější než v tomto článku rozpracované řešení.

d. Gaultierovo a Fouchéovo řešení. Tato řešení navazují na řešení Gergonnovo a jsou také jednoduchá. Je možné je považovat za výhodnější než předkládané Sobotkovo.

e. Sobotkovo řešení. V dalších svých pracích Sobotka mimo jiné zdokonalil Gergonnovu konstrukci. Toto řešení je jednoduché a elegantní.

Zatím jsem se ve svém hodnocení zaměřil pouze na náročnost a eleganci konstrukce. Existují starší i novější řešení, která jsou jednodušší než zde představené řešení. I ve své době se jistě nejednalo o významný objev. Řešení má však svoji určitou krásu v tom, jak Sobotka dokáže čistě analytických vztahů (v jeho době již známých) využít k nalezení poměrně jednoduchého konstrukčního řešení. S touto metodou se můžeme setkat i v jeho dalších pracích. A to bylo cílem i tohoto článku. Snažil jsem se ukázat, jak je možné netriviálních analytických úvah využít k nalezení syntetického řešení jedné z klasických úloh.

Literatura

[1] Sobotka, J., *O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického*, ČPMF XLI, 1912, 487–500.

[2] Holubář, J., *O methodách rovinných konstrukcí (úloha Apolloniova a úlohy příbuzné)*, Praha, 1949.

[3] Kuřina, F., *Deset pohledů na geometrii*, Praha, 1996.

[4] Bydžovský, B., *Jan Sobotka*, Orbis, Praha, 1932.

[5] Seifert, L., *Cyklografie*, Praha, 1949.

[6] Naas, J., Schmid, H.,L., *Mathematisches Wörterbuch*, Berlin, Leipzig, 1961.

[7] Solčan, Š., *Projektívna geometria*, Bratislava, 1995.

Tomáš Zuščák
Katedra matematiky PdF UHK
Hradec Králové
e-mail: tomas.zuscak@uhk.cz