# 4. Lineární diferenciální rovnice

**4.1.** *Lineární soustava diferenciálních rovnic* je takový speciální případ soustavy (3.1.1), že $G = \mathscr{I} \times K^n$, kde $\mathscr{I}$ je interval v $R$ a funkce $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ při pevném $t$ jsou polynomy stupně nejvýše 1 v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Můžeme tedy psát

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = A_{i1}(t)\, x_1 + \ldots + A_{in}(t)\, x_n + b_n(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Lineární soustavu diferenciálních rovnic zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_{11}(t)\, x_1 + \ldots + A_{1n}(t)\, x_n + b_1(t)\,,\\
\dot{x}_2 &= A_{21}(t)\, x_1 + \ldots + A_{2n}(t)\, x_n + b_2(t)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= A_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + A_{nn}(t)\, x_n + b_n(t)\,.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Abychom přešli k vektorovému zápisu, soustavu koeficientů $A_{ij}(t)$ zapíšeme jako matici $A(t)$ typu $(n, n)$ [tj. $A_{ij}(t)$ je prvek, který stojí v $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci matice $A(t)$] a pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ definujeme, že $A(t)\, x$ je takový vektor z $K^n$, jehož $i$-tou komponentou je $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j$ [viz (3.2.10)]. Označíme-li ještě $b(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t)) \in K^n$, můžeme soustavu (1.1) zapsat ve tvaru

$$\dot{x} = A(t)\, x + b(t)\,. \tag{1.2}$$

Při tomto způsobu značení je výhodné vektory z $K^n$ považovat za matice typu $(n, 1)$, tj. za sloupce

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

neboť výraz $A(t)\, x$ potom přechází v součin matic $A(t)$ a $x$. Protože zápis v (1.3) je graficky nevýhodný, užívá se místo něho zápisu $\dot{x} = \operatorname{col}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$, $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b(t) = \operatorname{col}(b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t))$ (v latině columnus, v angličtině column znamená sloupec). Tohoto zápisu budeme užívat v této kapitole a dále tam, kde budeme pracovat s lineárními diferenciálními rovnicemi. Na jiných místech budeme pro $a \in K^n$ psát $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ [viz zavedení kartézského součinu v odst. 0.1].

**4.1.1. Poznámka:** (1.2) je *vektorová lineární diferenciální rovnice*. Slovo vektorová se obvykle vynechává, a proto (1.2) budeme nazývat lineární diferenciální rovnicí nebo stručně rovnicí. Protože (1.1) vznikne rozepsáním rovnice (1.2), nazývá se i (1.1) *lineární diferenciální rovnice*. Je-li $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, pak (1.1) se nazývá *soustava lineárních homogenních diferenciálních rovnic*; je-li $b = 0$, pak (1.2) se nazývá *lineární homogenní diferenciální rovnice*. Chceme-li zdůraznit, že rovnice (1.2) nemusí být homogenní nebo dokonce, že není homogenní, mluvíme o *nehomogenní* lineární diferenciální rovnici; obdobně se mluví o soustavě *nehomogenních* lineárních diferenciálních rovnic.

Pod vlivem pojmu „lineární zobrazení" se v některých textech rovnice (1.2) nazývá lineární diferenciální rovnice jen je-li $b = 0$; nemusí-li být $b = 0$, pak se rovnice (1.2) nazývá *afinní diferenciální rovnice* a obdobně se termínů lineární a afinní užívá v případě soustavy (1.1).

**4.2.** V celé kapitole budeme předpokládat, že $\mathscr{I}$ je interval v $R$ a že funkce $A: \mathscr{I} \to M_n$, $b: \mathscr{I} \to K^n$ jsou spojité. Nejdříve dokážeme, že existují řešení rovnice (1.2).

**4.2.1. Věta:** *Nechť je dáno $y \in K^n$, $s \in \mathscr{I}$. Potom existuje řešení $u: \mathscr{I} \to K^n$ rovnice (1.2) takové, že je $u(s) = y$.*

Důkaz: Definujme posloupnost funkcí $u^{[i]}: \mathscr{I} \to K^n$, $i = 1, 2, \dots$, rovnicemi

$$u^{[1]}(t) = y + \int_s^t b(\sigma)\, d\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \tag{2.1}$$

$$u^{[i+1]}(t) = y + \int_s^t b(\sigma)\, d\sigma + \int_s^t A(\sigma)\, u^{[i]}(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{2.2}$$

Funkce $u^{[1]}$ je spojitá; víme-li, že $u^{[i]}$ je spojitá funkce, potom $Au^{[i]}$ je také spojitá, integrál v (2.2) spojitě závisí na horní mezi a také $u^{[i+1]}$ je spojitá. Funkce $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots$, jsou tedy spojité. Položme

$$\varphi(t) = \max \{\|u^{[1]}(\sigma)\| \mid \sigma \in \langle s, t\rangle\} \quad \text{pro} \quad t \geqq s,$$
$$\varphi(t) = \max \{\|u^{[1]}(\sigma)\| \mid \sigma \in \langle t, s\rangle\} \quad \text{pro} \quad t \leqq s$$

[také funkce $\|u^{[1]}(\sigma)\|$ proměnné $\sigma$ je spojitá]. Píšeme-li v (2.2) $i = 1$ a odečteme-li (2.1), dostaneme

$$u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t) = \int_s^t A(\sigma)\, u^{[1]}(\sigma)\, d\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}. \tag{2.3}$$

Píšeme-li v (2.2) $i + 1$ místo $i$ a odečteme-li od této rovnice nezměněnou rovnici (2.2), dostaneme

$$u^{[i+2]}(t) - u^{[i+1]}(t) = \int_s^t A(\sigma) \left[u^{[i+1]}(\sigma) - u^{[i]}(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$\text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Dokážeme, že platí

$$\|u^{[i+1]}(t) - u^{[i]}(t)\| \leqq \varphi(t) \frac{1}{i!} \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, \mathrm{d}\sigma \right|^i$$

$$\text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Z (2.3) a z definice funkce $\varphi$ plyne [viz (3.2.12) a (3.2.25)]

$$\|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\| \leqq \varphi(t) \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, \mathrm{d}\sigma \right|,$$

tj. (2.5) platí pro $i = 1$. Víme-li, že (2.5) platí pro nějaké $i = j$, kde $j = 1, 2, 3, \ldots$, odvodíme z (2.4) pro $t > s$

$$\|u^{[j+2]}(t) - u^{[j+1]}(t)\| \leqq \int_s^t \|A(\sigma)\| \frac{1}{j!} \varphi(\sigma) \left[ \int_s^\sigma \|A(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi \right]^j \mathrm{d}\sigma .$$

Funkce $\varphi(\sigma)$ proměnné $\sigma$ je neklesající pro $\sigma \geqq s$, tj. $\varphi(\sigma) \leqq \varphi(t)$ pro $s \leqq \sigma \leqq t$, a proto platí

$$\|u^{[j+2]}(t) - u^{[j+1]}(t)\| \leqq \frac{1}{j!} \varphi(t) \int_s^t \|A(\sigma)\| \left[ \int_s^\sigma \|A(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi \right]^j \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{(j+1)!} \varphi(t) \left[ \int_s^t \|A(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi \right]^{j+1},$$

neboť je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \int_s^t \|A(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi \right]^{j+1} = (j+1) \|A(t)\| \left[ \int_s^t \|A(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi \right]^j .$$

Obdobně pro $t < s$ platí

$$\|u^{[j+2]}(t) - u^{[j+1]}(t)\| \leqq \frac{1}{(j+1)!} \varphi(t) \left[ \int_t^s \|A(\sigma)\| \, \mathrm{d}\sigma \right]^{j+1},$$

tedy (2.5) platí pro $i = j + 1$. Proto (2.5) platí pro $i = 1, 2, \ldots$. Z (2.5) plyne, že platí

$$\|u^{[k]}(t) - u^{[j]}(t)\| \leqq \varphi(t) \sum_{i=j}^{k-1} \frac{1}{i!} \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, \mathrm{d}\sigma \right|^i$$

$$\text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \quad j < k, \; j, k = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Při pevném $t$ řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right|^i$$

konverguje a tak z (2.6) plyne, že posloupnost $u^{[j]}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, je cauchyovská pro každé $t \in \mathscr{I}$. Protože $K^n$ je úplný prostor (viz Větu 3.2.2), existuje $u(t) = \lim_{j \to \infty} u^{[j]}(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$. Podle (2.6) je

$$\|u(t) - u^{[j]}(t)\| \leqq \varphi(t) \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i!} \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right|^i \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I} . \tag{2.7}$$

Je tedy $u: \mathscr{I} \to K^n$. Je-li $s \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathscr{I}$, $\varkappa = \max(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, $\zeta = \int_\alpha^\beta \|A(\sigma)\| \, d\sigma$, je

$$\|u(t) - u^{[j]}(t)\| \leqq \varkappa \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i!} \zeta^i \quad \text{pro} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle ; \tag{2.8}$$

posloupnost $u^{[j]}$ konverguje k $u$ stejnoměrně na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Je tedy $u$ spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$, a protože $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathscr{I}$ můžeme volit libovolně, je $u$ spojitá (na $\mathscr{I}$). Z (2.8) a (3.2.26) plyne

$$\left\| \int_s^t A(\sigma) \, u(\sigma) \, d\sigma - \int_s^t A(\sigma) \, u^{[j]}(\sigma) \, d\sigma \right\| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, \|u(\sigma) - u^{[j]}(\sigma)\| \, d\sigma \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_s^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right| \varkappa \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i!} \zeta^i \quad \text{pro} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathscr{I} ,$$

tj.

$$\int_s^t A(\sigma) \, u^{[j]}(\sigma) \, d\sigma \to \int_s^t A(\sigma) \, u(\sigma) \, d\sigma \quad \text{pro} \quad j \to \infty, \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathscr{I} .$$

Protože $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathscr{I}$ můžeme volit libovolně, platí

$$\int_s^t A(\sigma) \, u^{[j]}(\sigma) \, d\sigma \to \int_s^t A(\sigma) \, u(\sigma) \, d\sigma \quad \text{pro} \quad j \to \infty, \ t \in \mathscr{I} .$$

Odtud a z (2.2) plyne [limitním přechodem pro $i \to \infty$]

$$u(t) = y + \int_s^t b(\sigma) \, d\sigma + \int_s^t A(\sigma) \, u(\sigma) \, d\sigma \tag{2.9}$$

a podle Věty 3.3.4 $u$ je řešení rovnice (1.2). Samozřejmě $u(s) = y$ a Věta 4.2.1 je dokázána.

**4.2.2. Poznámka:** V důkazu Věty 4.2.1 jsme sestrojili řešení $u$ rovnice (2.9) tím, že jsme definovali tzv. *postupné aproximace* $u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots$ rovnicemi (2.1), (2.2) a dokázali jsme, že platí (2.7), (2.9); jinými slovy, dokázali jsme, že metoda postupných aproximací pro rovnici (2.9) konverguje a její limita je hledané řešení.

**4.2.3. Poznámka:** Úloha najít řešení $u$ rovnice (1.2) tak, aby splňovalo podmínku $u(s) = y$, se nazývá *počáteční úloha* [*pro rovnici* (1.2)]. Podmínka $u(s) = y$ se nazývá *počáteční podmínka*. Obdobný význam má počáteční podmínka a počáteční úloha v případě rovnice (1.1).

**4.3.** Nechť $s \in \mathscr{J}$, $y \in K^n$ jsou pevně zvoleny. V tomto odstavci ukážeme, že nemohou existovat dvě různá řešení $u, v: \mathscr{J} \to K^n$ rovnice (1.2) splňující podmínku $u(s) = y = v(s)$. To je důsledek Věty 4.3.1, která je v literatuře známa jako *Gronwallova pomocná věta* (nebo též *Gronwallova nerovnost*).

**4.3.1. Pomocná věta:** *Nechť $\mathscr{K}$ je interval, $\eta \in R$, $s \in \mathscr{K}$, $\varrho, \xi: \mathscr{K} \to R$. Nechť funkce $\varrho, \xi$ jsou spojité, $\varrho(t) \geqq 0$, $\xi(t) \geqq 0$, pro $t \in \mathscr{K}$, $\eta > 0$. Nechť platí*

$$\xi(t) \leqq \eta + \left| \int_s^t \varrho(\sigma)\, \xi(\sigma)\, d\sigma \right| \quad pro \quad t \in \mathscr{K}\,. \tag{3.1}$$

*Potom platí*

$$\xi(t) \leqq \eta \exp \left| \int_s^t \varrho(\sigma)\, d\sigma \right| \quad pro \quad t \in \mathscr{K}\,. \tag{3.2}$$

Důkaz: Z (3.1) plyne, že pro $t \geqq s$ platí

$$\frac{\varrho(t)\, \xi(t)}{\eta + \int_s^t \varrho(\sigma)\, \xi(\sigma)\, d\sigma} \leqq \varrho(t)\,. \tag{3.3}$$

Primitivní funkce k levé straně je

$$\ln \left[ \eta + \int_s^t \varrho(\sigma)\, \xi(\sigma)\, d\sigma \right],$$

tedy integrací nerovnosti (3.3) dostáváme

$$\ln \left[ \eta + \int_s^t \varrho(\sigma)\, \xi(\sigma)\, d\sigma \right] - \ln \eta \leqq \int_s^t \varrho(\sigma)\, d\sigma \quad \text{pro} \quad t \geqq s\,,$$

a podle (3.1) je

$$\xi(t) \leqq \eta + \int_s^t \varrho(\sigma)\, \xi(\sigma)\, d\sigma \leqq \eta \exp \int_s^t \varrho(\sigma)\, d\sigma \quad \text{pro} \quad t \geqq s\,.$$

Dokázali jsme, že (3.2) platí pro $t \in \mathscr{K}$, $t \geqq s$; obdobně postupujeme i v případě $t \leqq s$.

**4.3.2. Věta:** *Nechť $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$ jsou intervaly. Nechť $v: \mathscr{H} \to K^n$, $w: \mathscr{J} \to K^n$ jsou řešení rovnice* (1.2) *a nechť pro nějaké $\tau \in \mathscr{H} \cap \mathscr{J}$ je $v(\tau) = w(\tau)$. Potom platí $v(t) = w(t)$ pro $t \in \mathscr{H} \cap \mathscr{J}$.*

Důkaz: Podle Věty 3.3.2 platí

$$v(t) = v(\tau) + \int_\tau^t b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_\tau^t A(\sigma)\,v(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{H},$$

$$w(t) = w(\tau) + \int_\tau^t b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_\tau^t A(\sigma)\,w(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}.$$

Odtud dostáváme

$$v(t) - w(t) = \int_\tau^t A(\sigma)\,[v(\sigma) - w(\sigma)]\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K},$$

kde $\mathscr{K} =_{\bullet} \mathscr{H} \cap \mathscr{J}$. Jestliže $\mathscr{K}$ obsahuje pouze bod $\tau$, Věta 4.3.2 platí. Nechť $\mathscr{K}$ obsahuje více než jeden bod. $\mathscr{K}$ je interval. Podle Věty 3.2.10 a podle (3.2.12) je

$$\|v(t) - w(t)\| \leqq \left|\int_\tau^t \|A(\sigma)\|\;\|v(\sigma) - w(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma\right| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K}.$$

Tím spíše platí

$$\|v(t) - w(t)\| \leqq \eta + \left|\int_\tau^t \|A(\sigma)\|\;\|v(\sigma) - w(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma\right| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K},$$

pro libovolné $\eta > 0$ a podle Pomocné věty 4.3.1 je

$$\|v(t) - w(t)\| \leqq \eta \exp\left|\int_\tau^t \|A(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma\right| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K};$$

protože $\eta$ je libovolné, je $\|v(t) - w(t)\| = 0$, $v(t) = w(t)$ pro $t \in \mathscr{K}$ a Věta 4.3.2 je dokázána.

**4.3.3. Poznámka:** Z Věty 4.3.2 plyne: Jsou-li $u, v: \mathscr{J} \to K^n$ taková řešení rovnice (1.2), že $u(\tau) = v(\tau)$ pro nějaké $\tau \in \mathscr{J}$, potom $u(t) = v(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$.

**4.3.4. Poznámka:** *Ke každému řešení $w: \mathscr{J} \to K^n$ rovnice (1.2) existuje řešení $u: \mathscr{J} \to K^n$ rovnice (1.2) takové, že je $u(t) = w(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$; jinými slovy řešení $w$ můžeme prodloužit na interval $\mathscr{J}$.* Abychom to dokázali, zvolíme $\tau \in \mathscr{J}$ a podle Věty 4.2.1 najdeme řešení $u: \mathscr{J} \to K^n$ tak, že $u(\tau) = w(\tau)$. Podle Věty 4.3.2 je $u(t) = w(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$. Zejména platí: *Každé maximální řešení rovnice (1.2) je definováno na $\mathscr{J}$.*

Z Věty 4.2.1 a Poznámky 4.3.3 dostáváme, že platí

**4.3.5. Věta:** *Nechť $y \in K^n$, $s \in \mathscr{J}$. Potom existuje právě jedno maximální řešení $u$ rovnice (1.2), pro které je $u(s) = y$.*

**4.4.** Nechť $\mathscr{S}(4.1)$ je množina maximálních řešení rovnice

$$\dot{x} = A(t)\,x, \tag{4.1}$$

kde $A: \mathscr{I} \to M_n$ je spojitá funkce. Funkce $x_0: \mathscr{I} \to K^n$ definovaná rovnicí $x_0(t) = 0$ je maximální řešení rovnice (4.1); budeme ji, jak je obvyklé, značit symbolem 0 a nazývat triviálním [nebo též nulovým] řešením rovnice (4.1). Je-li $u \in \mathscr{S}(4.1)$, $u \neq 0$ [tj. existuje-li $s \in \mathscr{I}$ takové, že $u(s) \neq 0 \in K^n$], budeme říkat, že $u$ je netriviální řešení. Podle Poznámky 4.3.4 je každé maximální řešení rovnice (4.1) definováno na $\mathscr{I}$. Je-li tedy $u, v \in \mathscr{S}(4.1)$, je $u + v$ definováno v rovnici (3.2.21) a snadno se přesvědčíme, že je $u + v \in \mathscr{S}(4.1)$; obdobně je $\lambda u \in \mathscr{S}(4.1)$ pro $\lambda \in K$. Pojmy z lineární algebry, kterých užíváme ve Větě 4.4.1, nalezne čtenář v Dodatku 3.1.

**4.4.1. Věta:** *Je-li $u, v \in \mathscr{S}(4.1)$, $\lambda \in K$, pak je též $u + v \in \mathscr{S}(4.1)$, $\lambda u \in \mathscr{S}(4.1)$. $\mathscr{S}(4.1)$ je lineární prostor; přitom triviální řešení je nulový prvek.*

Některá z tvrzení Věty 4.4.1 jsme již dokázali, zbytek se dokáže snadno.

Zvolme $\tau \in \mathscr{I}$ a definujme zobrazení $\Gamma_\tau: K^n \to \mathscr{S}(4.1)$ tímto předpisem: $\Gamma_\tau(y) = u$, kde $u$ je takové maximální řešení rovnice (4.1), že $u(\tau) = y$ (viz Větu 4.3.5). Ke každému $x \in \mathscr{S}(4.1)$ existuje jediné $y \in K^n$ tak, že $x = \Gamma_\tau(y)$ [je ovšem $y = x(\tau)$]. $\Gamma_\tau(y) + \Gamma_\tau(z)$ je maximální řešení rovnice (4.1), jehož hodnota pro $t = \tau$ je $y + z$. Je tedy

$$\Gamma_\tau(y + z) = \Gamma_\tau(y) + \Gamma_\tau(z) \quad \text{pro} \quad y, z \in K^n . \tag{4.2}$$

Obdobně platí

$$\Gamma_\tau(\lambda y) = \lambda\, \Gamma_\tau(y) \quad \text{pro} \quad \lambda \in K,\ y \in K^n . \tag{4.3}$$

Tyto vlastnosti zobrazení $\Gamma_\tau$ vyjádříme výrokem, že $\Gamma_\tau$ je *lineární izomorfismus* prostoru $K^n$ na $\mathscr{S}(4.1)$. Pomocí lineárního izomorfismu $\Gamma_\tau$ se vlastnosti spojené s pojmem lineární závislosti přenášejí z $K^n$ do $\mathscr{S}(4.1)$.

Říkáme, že maximální řešení $u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots, u^{[k]}$ rovnice (4.1) jsou *lineárně závislá,* jsou-li lineárně závislá jako prvky lineárního prostoru $\mathscr{S}(4.1)$, tj. existují-li $c_1, \ldots, c_k \in K$ tak, že je $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_k| > 0$ a $c_1 u^{[1]}(t) + c_2 u^{[2]}(t) + \ldots + c_k u^{[k]}(t) = 0$ pro $t \in \mathscr{I}$. V opačném případě říkáme, že řešení $u^{[1]}, \ldots, u^{[k]}$ jsou lineárně nezávislá. Jsou-li tedy řešení $u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots, u^{[k]}$ lineárně závislá, jsou pro každé $t \in \mathscr{I}$ vektory $u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[k]}(t)$ lineárně závislé.

Nechť naopak $u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots, u^{[k]}$ jsou řešení rovnice (4.1) a nechť vektory $y^{[1]} = u^{[1]}(\tau), y^{[2]} = u^{[2]}(\tau), \ldots, y^{[k]} = u^{[k]}(\tau)$ jsou lineárně závislé. Existují tedy $c_1, \ldots, c_k \in K$ tak, že je $|c_1| + \ldots + |c_k| > 0$,

$$c_1 y^{[1]} + \ldots + c_k y^{[k]} = 0 . \tag{4.4}$$

Nyní využijeme vlastností zobrazení $\Gamma_\tau$. Jediné maximální řešení, které pro $t = \tau$ má hodnotu 0, je řešení triviální, tedy

$$\Gamma_\tau(c_1 y^{[1]} + \ldots + c_k y^{[k]}) = \Gamma_\tau(0) = 0 . \tag{4.5}$$

Podle (4.2) a (4.3) je

$$\Gamma_\tau(c_1 y^{[1]} + \ldots + c_k y^{[k]}) = \Gamma_\tau(c_1 y^{[1]} + \ldots + c_{k-1} y^{[k-1]}) + c_k \Gamma_\tau(y^{[k]})$$

a postupně odvodíme

$$\Gamma_\tau(c_1 y^{[1]} + \dots + c_k y^{[k]}) = c_1 \Gamma_\tau(y_1) + \dots + c_k \Gamma_\tau(y_k). \tag{4.6}$$

Je $\Gamma_\tau(y^{[i]}) = u^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, n$, a podle (4.5) a (4.6) je

$$c_1 u^{[1]} + \dots + c_k u^{[k]} = 0, \tag{4.7}$$

tj. řešení $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[k]}$ jsou lineárně závislá. Tak jsme ukázali, že platí

**4.4.2. Věta:** *Nechť $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, k$, jsou maximální řešení rovnice (4.1), $\tau \in \mathscr{I}$. Řešení $u^{[1]}, \dots, u^{[k]}$ jsou lineárně závislá [nezávislá] právě tehdy, jsou-li vektory $y^{[1]} = u^{[1]}(\tau), \dots, y^{[k]} = u^{[k]}(\tau)$ lineárně závislé [nezávislé]; rovnice (4.4) platí právě tehdy, platí-li (4.7).*

**4.4.3. Věta:** *Je-li $y^{[1]}, y^{[2]}, \dots, y^{[n]}$ báze v $K^n$, $\tau \in \mathscr{I}$, pak $\Gamma_\tau(y^{[1]}), \Gamma_\tau(y^{[2]}), \dots, \Gamma_\tau(y^{[n]})$ je báze v $\mathscr{S}(4.1)$, a tedy lineární prostor $\mathscr{S}(4.1)$ má dimenzi $n$.*

Důkaz: Položme $\Gamma_\tau(y^{[i]}) = u^{[i]}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Je $u^{[i]}(\tau) = y^{[i]}$ a podle Věty 4.4.2 jsou řešení $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, n$, lineárně nezávislá. Nechť $u^{[n+1]}$ je maximální řešení rovnice (4.1). Položme $y^{[n+1]} = u^{[n+1]}(\tau)$. Protože $y^{[1]}, \dots, y^{[n]}$ je *báze* v $K^n$, existují čísla $c_1, \dots, c_n \in K$ tak, že platí

$$y^{[n+1]} = c_1 y^{[1]} + \dots + c_n y^{[n]}.$$

Protože zobrazení $\Gamma_\tau$ je lineární, platí

$$u^{[n+1]} = c_1 u^{[1]} + \dots + c_n u^{[n]}$$

a tak $\Gamma_\tau(y^{[1]}), \dots, \Gamma_\tau(y^{[n]})$ je báze v $\mathscr{S}(4.1)$ (viz Dodatek 3.1).

**4.4.4. Definice:** Uspořádaná $n$-tice maximálních řešení rovnice (4.1) se nazývá *fundamentální soustava (systém) řešení* rovnice (4.1), je-li bází v $\mathscr{S}(4.1)$.

**4.4.5. Poznámka:** Z Věty 4.4.3 plyne, že rovnice (4.1) má fundamentální systém (dokonce že má tolik fundamentálních systémů, kolik je bází v $K^n$). Jak jsme ukázali, lineární prostor $\mathscr{S}(4.1)$ má dimenzi $n$ a z (D4.1.1) plyne, že platí toto tvrzení:

> *Jsou-li maximální řešení $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[n]}$ rovnice (4.1) lineárně nezávislá, pak $(u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[n]})$ je fundamentální systém rovnice* (4.1). (4.8)

**4.4.6. Poznámka:** Mějme fundamentální systém $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[n]}$ rovnice (4.1). Nechť $z \in K^n$, $\tau \in \mathscr{I}$. Hledejme řešení $v$ rovnice (4.1), které splňuje podmínku $v(\tau) = z$. Z Definice 4.4.4 plyne, že existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ taková, že platí

$$v = c_1 u^{[1]} + c_2 u^{[2]} + \dots + c_n u^{[n]}. \tag{4.9}$$

Stačí určit čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ tak, aby platilo

$$v(\tau) = c_1 u^{[1]}(\tau) + c_2 u^{[2]}(\tau) + \dots + c_n u^{[n]}(\tau).$$

Protože zobrazení $\Gamma_\tau$ je lineární, platí (4.9).

Příklad: Nechť

$$A_1(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t, & 1 \\ -1, & t \end{pmatrix}.$$

Funkce $u^{[1]}, u^{[2]}: R \to R^2$ definované rovnicemi $u^{[1]}(t) = \operatorname{col}(t, 1)$, $u^{[2]}(t) = \operatorname{col}(-1, t)$ jsou řešení rovnice

$$\dot{x} = A_1(t)\, x\,. \tag{4.10}$$

Prostor $\mathscr{S}(4.10)$ má dimenzi 2. Řešení $u^{[1]}, u^{[2]}$ jsou lineárně nezávislá, a proto tvoří bázi prostoru $\mathscr{S}(4.10)$ [viz (D3.1.1)]. Hledejme $v \in \mathscr{S}(4.10)$, které splňuje podmínku $v(1) = \operatorname{col}(3, 5)$. Řešení $v$ budeme hledat ve tvaru

$$v = c_1\, u^{[1]} + c_2\, u^{[2]}\,, \tag{4.11}$$

kde $c_1, c_2 \in R$. Dosadíme-li $t = 1$ do (4.11), dostaneme tyto podmínky pro $c_1, c_2$:

$$\operatorname{col}(3, 5) = c_1 \operatorname{col}(1, 1) + c_2 \operatorname{col}(-1, 1)$$

čili

$$c_1 - c_2 = 3\,, \quad c_1 + c_2 = 5\,;$$

$$c_1 = 4\,, \quad c_2 = 1\,; \quad v = 4u^{[1]} + u^{[2]}\,, \quad v(t) = \operatorname{col}(4t - 1, t + 4)\,.$$

**4.4.7. Definice:** Nechť $U: \mathscr{I} \to M_n$ a nechť $u^{[i]}(\tau)$ je $i$-tý sloupec matice $U(\tau)$, $u^{[i]}: \mathscr{I} \to K^n$. (Viz úmluvu z odst. 4.1, že elementy $K^n$ zapisujeme jako sloupcové vektory.) Budeme psát $U = ((u^{[1]}, \ldots, u^{[n]}))$, $U(t) = ((u^{[1]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)))$. $U$ se nazývá *fundamentální matice rovnice* (4.1), je-li $(u^{[1]}, \ldots, u^{[n]})$ fundamentální soustava rovnice (4.1).

**4.4.8. Poznámka:** Je-li $A(t) = (A_{ij}(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$ a je-li $U$ fundamentální matice rovnice (4.1), budeme též říkat, že $U$ je *fundamentální matice soustavy*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_{11}(t)\, x_1 + A_{12}(t)\, x_2 + \ldots + A_{1n}(t)\, x_n\,,\\
\dot{x}_2 &= A_{21}(t)\, x_1 + A_{22}(t)\, x_2 + \ldots + A_{2n}(t)\, x_n\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= A_{n1}(t)\, x_1 + A_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + A_{nn}(t)\, x_n\,.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Obdobně budeme uspořádanou $n$-tici lineárně nezávislých maximálních řešení soustavy (4.12) nazývat *fundamentálním systémem* soustavy (4.12). V souhlase s úmluvou zavedenou v odst. 4.1 budeme řešení soustavy (4.12) zapisovat do sloupců a budeme říkat, že sloupce fundamentální matice $U$ jsou řešení soustavy (4.12). Je-li $U$ fundamentální matice, potom $U(\tau)$ je regulární matice pro $\tau \in \mathscr{I}$, neboť podle Věty 4.4.2 jsou sloupce matice $U(\tau)$ lineárně nezávislé. Proto existuje inverzní matice k matici $U(\tau)$; označíme ji $U^{-1}(\tau)$. Je-li $n > 1$, $B \in M_n$ regulární matice, $C \in M_n$ inverzní matice k $B$, $C = (C_{ij})$, potom $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det D^{(ij)} / \det B$, kde $D^{(ij)} \in M_{n-1}$ je matice, která vznikne z matice $B$ vynecháním $j$-tého řádku a $i$-tého sloupce. Odtud plyne

**4.4.9. Věta:** *Je-li $U$ fundamentální matice rovnice* (4.1), *potom pro každé $t \in \mathscr{I}$ existuje k matici $U(t)$ matice inverzní $U^{-1}(t)$. Funkce $U^{-1}: \mathscr{I} \to M_n$ je spojitá a má spojitou derivaci.*

Je-li $(u^{[1]}, \ldots, u^{[n]})$ fundamentální soustava rovnice (4.1), potom ke každému $x \in \mathscr{S}(4.1)$ existují čísla $c_1, \ldots, c_n \in K$ tak, že je

$$x = c_1 u^{[1]} + \ldots + c_n u^{[n]} . \tag{4.13}$$

Píšeme-li $U = ((u^{[1]}, \ldots, u^{[n]}))$, $c = \operatorname{col}(c_1, \ldots, c_n)$, pak (4.13) můžeme zapsat ve tvaru

$$x = Uc , \tag{4.14}$$

$$x(t) = U(t)\, c \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I} . \tag{4.15}$$

Vektor $c$ je rovnicí (4.15) při libovolném $t \in \mathscr{I}$ určen jednoznačně, neboť matice $U(t)$ je regulární. Dospěli jsme k tomuto výsledku:

**4.4.10. Věta:** *Je-li $U$ fundamentální matice rovnice* (4.1), *$x \in \mathscr{S}(4.1)$, pak existuje právě jedno $c \in K^n$ tak, že $x = Uc$; naopak pro každé $c \in K^n$ je $Uc$ maximální řešení rovnice* (4.1).

**4.4.11. Poznámka:** Položme

$$U_{\lambda n}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}, & t\,e^{\lambda t}, & \dfrac{t^2}{2!}e^{\lambda t}, & \ldots, & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0, & e^{\lambda t}, & t\,e^{\lambda t}, & \ldots, & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ 0, & 0, & e^{\lambda t}, & \ldots, & \dfrac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^{\lambda t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Ze vzorců (2.3.6) se lze přesvědčit, že sloupce matice $U_{\lambda n}$ jsou řešení rovnice (2.3.5); tato řešení jsou lineárně nezávislá, a proto $U_{\lambda n}$ je fundamentální matice soustavy (2.3.5). Vzorec (2.3.6) můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$u(t) = U_{\lambda n}(t)\, y^{[1]} ,$$

kde $u(t) = \operatorname{col}(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $y^{[1]} = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n)$. Položme ještě

$$U^{[2]}(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right], & \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right] \\ -\exp\left[\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right], & \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right] \end{pmatrix}.$$

Obdobně platí, že $U^{[2]}$ je fundamentální matice soustavy (2.4.2), $U^{[2]}(s) = I$, kde $I$ je jednotková matice; vzorec (2.4.1) můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$u(t) = U^{[2]}(t)\, y^{[2]},$$

kde $u(t) = \operatorname{col}(u_1(t), u_2(t))$, $y^{[2]} = \operatorname{col}(y_1, y_2)$.

**4.5.** Nechť $V\colon \mathscr{I} \to M_n$, $V = ((v^{[1]}, \ldots, v^{[n]}))$, tj. $v^{[i]}(t)$ je $i$-tý sloupec matice $V(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$ (viz Definici 4.4.7). Z (3.2.3) a z pravidla pro násobení matic plyne: Funkce $V$ má spojitou derivaci $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ a přitom platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)\, V(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I} \tag{5.1}$$

právě tehdy, je-li $v^{[i]} \in \mathscr{S}(4.1)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

**4.5.1. Věta:** *Funkce $U\colon \mathscr{I} \to M_n$ je fundamentální matice rovnice* (4.1) *právě tehdy, jsou-li splněny tyto tři podmínky:*

(i) *$U$ má spojitou derivaci* $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$.

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)\, U(t)$ *pro* $t \in \mathscr{I}$.

(iii) *Matice $U(\tau)$ je regulární pro nějaké $\tau \in \mathscr{I}$.*

Důkaz: Je-li $U$ fundamentální matice, pak (i), (ii) jsou splněny podle toho, co jsme dokázali o funkci $V$, a (iii) platí podle Věty 4.4.2. Naopak, platí-li (i), (ii), (iii) a píšeme-li $U = (u^{[1]}, \ldots, u^{[n]})$, potom $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou řešení rovnice (4.1) podle toho, co jsme dokázali o funkci $V$, a to řešení lineárně nezávislá, neboť vektory $u^{[1]}(\tau), \ldots, u^{[n]}(\tau) \in K^n$ jsou lineárně nezávislé podle (iii).

Jak plyne z Poznámky 4.4.5, rovnice (4.1) má fundamentální matici (má tolik fundamentálních matic, kolik bází je v $K^n$).

**4.5.2. Věta:** *Je-li $U$ fundamentální matice rovnice* (4.1) *a je-li $C \in M_n$ regulární, pak $V = UC$ [tj. $V(t) = U(t)\, C$ pro $t \in \mathscr{I}$] je fundamentální matice. Naopak, je-li $V$ fundamentální matice rovnice* (4.1), *pak existuje $C \in M_n$ regulární tak, že je $V = UC$.*

Důkaz. Je-li $U$ fundamentální matice, $C \in M_n$ regulární, pak $UC$ splňuje podmínky (i), (ii), (iii) předcházející věty (neboť součin regulárních matic je regulární matice). Jsou-li $U, V$ fundamentální matice, zvolme $\tau \in \mathscr{I}$ a položme $C = U^{-1}(\tau)\, V(\tau)$, $V = ((v^{[1]}, \ldots, v^{[n]}))$, $W = UC$, $W = ((w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}))$. Jak jsme již dokázali, je $W$ fundamentální matice, tedy $v^{[i]}, w^{[i]} \in \mathscr{S}(4.1)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Je $V(\tau) = W(\tau)$, tedy $v^{[i]}(\tau) = w^{[i]}(\tau)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, podle Poznámky 4.3 je $v^{[i]}(t) = w^{[i]}(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy je $V = W = UC$.

**4.6.** Nechť $\mathscr{S}(1.2)$ je množina maximálních řešení rovnice (1.2). Snadno lze zjistit, že platí

**4.6.1. Věta:** *Je-li* $w \in \mathscr{S}(1.2)$, $v \in \mathscr{S}(4.1)$, *pak* $w + v \in \mathscr{S}(1.2)$. *Je-li* $p, q \in \mathscr{S}(1.2)$, *pak* $p - q \in \mathscr{S}(4.1)$.

**4.6.2. Poznámka:** Nechť $y \in K^n$, $s \in \mathscr{I}$; hledejme $z \in \mathscr{S}(1.2)$ splňující podmínku $z(s) = y$. Předpokládejme, že známe fundamentální soustavu $(u^{[1]}, \ldots, u^{[n]})$ rovnice (4.1) a jedno řešení $w \in \mathscr{S}(1.2)$. Ukazuje se, že stačí najít $v \in \mathscr{S}(4.1)$ splňující podmínku $v(s) = y - w(s)$, neboť podle Věty 4.6.1 a Poznámky 4.3.3 je $z = v + w$.

Nechť $y \in K^n$, $s \in \mathscr{I}$. Předpokládejme, že známe fundamentální matici $U$ rovnice (4.1). Nechť $z \in \mathscr{S}(1.2)$ splňuje $z(s) = y$ (takové $z$ existuje právě jedno, viz Větu 4.3.5) a hledejme vzorec pro $z$. Položme

$$z(t) = U(t)\, q(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{6.1}$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}Uq}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)\, U(t)\, q(t) + b(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{6.2}$$

Je $q = U^{-1}z$ a tak $q$ má spojitou derivaci (viz Věty 4.4.9 a 3.2.7) a platí $U(s)\, q(s) = y$. Je (viz Věty 3.2.7 a 4.5.1)

$$\frac{\mathrm{d}Uq}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)\, q(t) + U(t)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) =$$

$$= \mathrm{A}(t)\, U(t)\, q(t) + U(t)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)\,.$$

Po úpravě odvodíme z (6.2) a (6.1)

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) = U^{-1}(t)\, b(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,,$$

$$q(t) = U^{-1}(s)\, y + \int_s^t U^{-1}(\sigma)\, b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,, \tag{6.3}$$

$$z(t) = U(t)\, U^{-1}(s)\, y + \int_s^t U(t)\, U^{-1}(\sigma)\, b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{6.4}$$

(6.4) je hledaný vzorec pro $z$.

**4.6.3. Poznámka:** (6.4) se také nazývá *vzorec pro variaci konstant*; tím se chce naznačit, že nahradíme-li ve výrazu $U(t)\, c$ vektor $c \in K^n$ funkcí $q$ definovanou vzorcem (6.3), přejdeme od řešení rovnice (4.1) k řešení rovnice (1.2).

**4.6.4. Poznámka:** Funkce $U(t)\, U^{-1}(s)$ proměnné $t$ (při pevném $s \in \mathscr{I}$) je fundamentální matice rovnice (4.1), která pro $t = s$ má hodnotu $I$.

Příklad: Nechť $\mathscr{I}$ je otevřený interval v $R$, $s \in \mathscr{I}$, nechť funkce $a, b, q\colon \mathscr{I} \to R$ jsou spojité, $y_1, y_2 \in R$, a nechť $z_1, z_2$ je maximální řešení soustavy

$$\dot{x}_1 = \quad a(t)\,x_1 + b(t)\,x_2\,,$$
$$\dot{x}_2 = -b(t)\,x_1 + a(t)\,x_2 + q(t)\,,$$

které splňuje podmínky $z_1(s) = 1$, $z_2(s) = 0$. Potom podle (6.4) a Poznámek 4.6.4 a 4.4.11 platí

$$z_1(t) = \exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$
$$+ \int_s^t q(\sigma)\exp\left[\int_\sigma^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_\sigma^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma\,,$$
$$z_2(t) = -\exp\left[\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\left[\int_s^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] +$$
$$+ \int_s^t q(\sigma)\exp\left[\int_\sigma^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\left[\int_\sigma^t b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma\,.$$

**4.7.** Je-li dána funkce $A$, obvykle neumíme vypočítat fundamentální matici $U$ (viz odst. 2.24). Pro funkci $\det U(t)$ však platí jednoduchý vzorec.

**4.7.1. Věta:** *Nechť $U$ je fundamentální matice rovnice* (4.1), $s \in \mathscr{I}$. *Potom platí*

$$\det U(t) = \det U(s)\exp\int_s^t \operatorname{Tr} A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \textit{pro} \quad s, t \in \mathscr{I}\,, \tag{7.1}$$

*kde* $\operatorname{Tr} A(t) = A_{11}(t) + A_{22}(t) + \ldots + A_{nn}(t)$ *je stopa matice* $A(t)$, $t \in \mathscr{I}$.

Důkaz: Položme $\zeta(t) = \det U(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$; nechť $V^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, je matice, která vznikne z matice $U(t)$ tím, že derivujeme $k$-tý řádek, tj.

$$V^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t), & \ldots, & U_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{U}_{k1}(t), & \ldots, & \dot{U}_{kn}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{n1}(t), & \ldots, & U_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Podle pravidla o derivování determinantů je

$$\dot{\zeta}(t) = \det V^{(1)}(t) + \ldots + \det V^{(n)}(t)\,.$$

Z rovnice $\dot{U}(t) = A(t)\,U(t)$ plyne

$$\dot{U}_{kj}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}(t)\,U_{ij}(t)\,,$$

a proto je podle pravidel pro počítání s determinanty

$$\det V^{(k)}(t) = A_{kk}(t)\,\zeta(t)\,.$$

Je tedy

$$\dot{\zeta}(t) = \zeta(t) \sum_{k=1}^{n} A_{kk}(t)$$

a podle odst. 2.1 je

$$\zeta(t) = \zeta(s) \exp \int_s^t \operatorname{Tr} A(\sigma) \, d\sigma .$$

**4.8.** Nechť $\mathscr{J}$ je interval v $R$, $a_i$: $\mathscr{J} \to K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $q$: $\mathscr{J} \to K$. Rovnice

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t) u = q(t) \tag{8.1}$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice řádu n*. Budeme psát $u^{(k)}$ místo $d^k u/dt^k$, $k = 1, 2, \ldots$, popř. též $u^{(0)} = u$. Pojem řešení rovnice (8.1) zavádíme obdobně jako v odst. 1.5 pro rovnici (1.5.1). Pojmy „prodloužení daného řešení" a „maximální řešení" zavádíme obdobně jako v odst. 1.8. Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 , \\
\dot{x}_2 &= x_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n , \\
\dot{x}_n &= -a_n(t) x_1 - a_{n-1}(t) x_2 - \ldots - a_1(t) x_n + q(t) .
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Obdobně jako v odst. 1.5 lze ukázat, že platí

**4.8.1. Věta:** *Nechť $w$: $\mathscr{J} \to K$ je řešení rovnice* (8.1). *Položme $v_1 = w$, $v_2 = \dot{w}, \ldots, v_n = w^{(n-1)}$. Potom $v_1, \ldots, v_n$ je řešení soustavy* (8.2). *Naopak, je-li $v_i$: $\mathscr{J} \to K$, $i = 1, 2, \ldots, n$, řešení soustavy* (8.2), *položme $w = v_1$; $w$ je řešení rovnice* (8.1).

V tomto odstavci budeme předpokládat, že funkce $a_1, \ldots, a_n$, $q$ jsou spojité a výsledky, které byly v této kapitole dokázány pro rovnici (1.2) [a tím také pro soustavu (1.1)] přeneseme pomocí Věty 4.8.1 na rovnici (8.1).

Tak z Poznámky 4.3.4 dostáváme

**4.8.2. Věta:** *Je-li $\tilde{w}$: $\mathscr{J} \to K$ řešení rovnice* (8.1), *pak existuje řešení $\tilde{u}$: $\mathscr{J} \to K$ rovnice* (8.1) *takové, že je $\tilde{u}(t) = \tilde{w}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$. Speciálně každé maximální řešení rovnice* (8.1) *je definováno na $\mathscr{J}$.*

Důkaz: Položíme $w_i(t) = \tilde{w}^{(i-1)}(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; $w_1, \ldots, w_n$ je řešení soustavy (8.2). Podle Poznámky 4.3.4 existuje řešení $u_1, \ldots, u_n$ soustavy (8.2), $u_i$: $\mathscr{J} \to K$, $u_i(t) = w_i(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Funkce $\tilde{u} = u_1$ splňuje tvrzení Věty 4.8.2.

Obdobným způsobem z Věty 4.3.5 odvodíme:

**4.8.3. Věta:** *Nechť $y_i \in K$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $s \in \mathscr{I}$. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\tilde{u}$ rovnice* (8.1), *pro které je $\tilde{u}^{(i-1)}(s) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Úloha najít řešení $\tilde{u}$ rovnice (8.1) tak, aby platilo $\tilde{u}^{(i-1)}(s) = y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývá *počáteční úloha* [*pro rovnici* (8.1)] a podmínky $\tilde{u}^{(i-1)}(s) = y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývají *počáteční podmínky* [srovnej Poznámku 4.2.3].

Nechť $\mathscr{S}(8.3)$ je množina maximálních řešení rovnice

$$u^{(n)} + a_1(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, u = 0\,. \tag{8.3}$$

Funkce $u_0: \mathscr{I} \to R$ definovaná rovnicí $u_0(t) = 0$ je zřejmě maximální řešení rovnice (8.3); budeme ji nazývat *triviálním* (nebo též *nulovým*) *řešením rovnice* (8.3) a značit symbolem 0. Je-li $v \in \mathscr{S}(8.3)$, $v \neq 0$ [tj. existuje-li takové $s \in \mathscr{I}$, že $v(s) \neq 0$], pak budeme říkat, že $v$ je *netriviální řešení rovnice* (8.3). Z Věty 4.4.1 nebo přímým způsobem lze dokázat, že platí:

**4.8.4. Věta:** *Je-li $\hat{x}, \hat{y} \in \mathscr{S}(8.3)$, $\lambda \in K$, pak je též $\hat{x} + \hat{y} \in \mathscr{S}(8.3)$, $\lambda\hat{x} \in \mathscr{S}(8.3)$. $\mathscr{S}(8.3)$ je lineární prostor; přitom triviální řešení je nulový prvek.*

Zvolme $\tau \in \mathscr{I}$ a definujme zobrazení $\hat{\Gamma}_\tau: K^n \to \mathscr{S}(8.3)$ tímto předpisem: Je-li $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, pak $\hat{\Gamma}_\tau(y) = \hat{u}$, kde $\hat{u}$ je takové maximální řešení rovnice (8.3), že $\hat{u}^{(i-1)}(\tau) = y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ (viz Větu 4.8.3).

Obdobně jako pro zobrazení $\Gamma_\tau$ platí:

$$\hat{\Gamma}_\tau(y + z) = \hat{\Gamma}_\tau(y) + \hat{\Gamma}_\tau(z)\,, \quad \hat{\Gamma}_\tau(\lambda z) = \lambda\, \hat{\Gamma}_\tau(z)$$

pro $y, z \in K^n$, $\lambda \in K$; ke každému $\hat{x} \in \mathscr{S}(8.3)$ existuje jediné $y \in K^n$ tak, že $\hat{x} = \hat{\Gamma}_\tau(y)$ [je ovšem $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n)$, kde $y_i = \hat{x}^{(i-1)}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$]. Slovy vyjádříme tyto vztahy výrokem, že $\hat{\Gamma}_\tau$ je lineární izomorfismus prostoru $K^n$ na $\mathscr{S}(8.3)$. Odtud zejména plyne, že $\mathscr{S}(8.3)$ je lineární prostor dimenze $n$. Proto můžeme zavést tuto definici:

**4.8.5. Definice:** Nechť $u_i \in \mathscr{S}(8.3)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Uspořádaná $n$-tice $(u_1, \ldots, u_n)$ se nazývá *fundamentální soustava* (*systém*) *řešení rovnice* (8.3), je-li bází v $\mathscr{S}(8.3)$.

Rovnice (8.3) ovšem má fundamentální systém. Obdobně jako v Poznámce 4.4.5 platí:

*Jsou-li $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineárně nezávislá maximální řešení rovnice* (8.3), *pak $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je fundamentální systém řešení rovnice* (8.3). (8.4)

Známe-li fundamentální systém $(u_1, \ldots, u_n)$, potom každé maximální řešení $\tilde{x}$ rovnice (8.3) můžeme odvodit lineárními operacemi; k $\tilde{x}$ existují taková čísla $c_1, \ldots, c_n \in K$, že platí

$$\tilde{x} = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n\,;$$

čísla $c_1, \ldots, c_n$ jsou určena jednoznačně.

Příklad. Rovnice

$$\ddot{y} + \frac{1}{t}\dot{y} - \frac{1}{t^2}y = 0\,, \tag{8.5}$$

kterou vyšetřujeme na intervalu $(0, \infty)$, má fundamentální systém $u_1$, $u_2$ kde $u_1(t) = t$, $u_2(t) = 1/t$. Nechť $s$ je kladné číslo a hledejme maximální řešení $v_s$ rovnice (8.5), pro něž platí $v_s(s) = 0$, $\dot{v}_s(s) = 1$. Položme

$$v_s = \alpha(s)\,u_1 + \beta(s)\,u_2\,,$$

kde $\alpha(s), \beta(s) \in R$. Dosazením $t = s$ dostáváme $0 = \alpha(s)\,s + \beta(s)/s$, $1 = \alpha(s) - \beta(s)/s^2$; odtud $\alpha(s) = 1/2$, $\beta(s) = -s^2/2$, $v_s(t) = t/2 - s^2/(2t)$.

**4.8.6. Věta:** *Nechť funkce $u_i\colon \mathscr{I} \to K$ mají spojité derivace do řádu $n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Definujme funkce $w^{[i]}\colon \mathscr{I} \to K^n$ rovnicemi*

$$w^{[i]}(t) = \operatorname{col}\left(u_i(t), \dot{u}_i(t), \ldots, u_i^{(n-1)}(t)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

*Potom platí:*
*$(u_1, \ldots, u_n)$ je fundamentální systém řešení rovnice (8.3) právě tehdy, je-li $(w^{[1]}, \ldots, w^{[n]})$ fundamentální systém řešení soustavy*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n\,,\\
\dot{x}_n &= -a_n(t)\,x_1 - \ldots - a_1(t)\,x_n\,.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Důkaz: Podle Věty 4.8.1 je $u_i$ řešením rovnice (8.3) právě tehdy, je-li $w^{[i]}$ řešením soustavy (8.6). Je-li $(u_1, \ldots, u_n)$ fundamentální systém rovnice (8.3), jsou podle tvrzení (8.4) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lineárně nezávislá řešení rovnice (8.3), tedy $w^{[1]}$, $w^{[2]}, \ldots, w^{[n]}$ jsou lineárně nezávislá řešení soustavy (8.6) a $(w^{[1]}, w^{[2]}, \ldots, w^{[n]})$ je fundamentální systém soustavy (8.6). Obdobně se ukáže, že $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je fundamentální systém rovnice (8.3), je-li $(w^{[1]}, w^{[2]}, \ldots, w^{[n]})$ fundamentální systém soustavy (8.6); při tom využijeme skutečnosti, že $\dim \mathscr{S}(8.3) = n$, a tohoto tvrzení: Jsou-li funkce $u_1, \ldots, u_n$ lineárně závislé, jsou také funkce $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$ lineárně závislé a naopak, jsou-li funkce $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$ lineárně závislé, jsou také funkce $u_1, \ldots, u_n$ lineárně závislé.

**4.8.7. Věta:** *Nechť $u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou řešení rovnice (8.3). Zvolme $\tau \in \mathscr{I}$. $(u_1, \ldots, u_n)$ je fundamentální systém rovnice (8.3) právě tehdy, jsou-li vektory $q^{[i]} = \operatorname{col}(u_i(\tau), \dot{u}_i(\tau), \ldots, u_i^{(n-1)}(\tau))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, lineárně nezávislé.*

Věta 4.8.7 plyne z Vět 4.4.2 a 4.8.6.

Nechť funkce $z_j\colon \mathscr{I} \to K$, $j = 1, 2, \ldots n$, mají spojité derivace do řádu $n - 1$. Nechť $W(z_1, \ldots, z_n)(t)$ je matice, jejíž $j$-tý sloupec je

$$\operatorname{col}\left(z_j(t), \dot{z}_j(t), \ldots, z_j^{(n-1)}(t)\right), \quad t \in \mathscr{I}\,,$$

a položme

$$w(z_1, \dots, z_n)(t) = \det W(z_1, \dots, z_n)(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}. \tag{8.7}$$

Je $W(z_1, \dots, z_n): \mathscr{I} \to M_n$, $w(z_1, \dots, z_n): \mathscr{I} \to K$. Funkce $w(z_1, \dots, z_n)$ se nazývá *wronskián* funkcí $z_1, \dots, z_n$.

Je-li $(u_1, \dots, u_n)$ fundamentální soustava rovnice (8.3), potom podle Věty 4.8.6 sloupce matice $W(u_1, \dots, u_n)$ tvoří fundamentální systém soustavy (8.6). Z Věty 4.7.1 plyne, že platí

$$w(u_1, \dots, u_n)(t) = w(u_1, \dots, u_n)(s) \exp\left[-\int_s^t a_1(\sigma)\,d\sigma\right] \quad \text{pro} \quad s, t \in \mathscr{I}. \tag{8.8}$$

Tvrzení obsažené v (8.8) je známé v literatuře jako „*Liouvilleova věta*“. Obdobně jako Věta 4.6.1 platí též

**4.8.8. Věta:** *Je-li* $\tilde{w} \in \mathscr{S}(8.1)$, $\tilde{v} \in \mathscr{S}(8.3)$, *pak* $\tilde{v} + \tilde{w} \in \mathscr{S}(8.1)$. *Je-li* $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathscr{S}(8.1)$, *pak* $\tilde{p} - \tilde{q} \in \mathscr{S}(8.3)$.

Nechť $\sigma \in \mathscr{I}$ a nechť $v_\sigma$ je takové maximální řešení rovnice (8.3), že platí $v_\sigma^{(i)}(\sigma) = 0$ pro $i = 0, 1, \dots, n-2$, $v_\sigma^{(n-1)}(\sigma) = 1$. Definujme funkci $h: \mathscr{I} \times \mathscr{I} \to K$ vztahem $h(t, \sigma) = v_\sigma(t)$.

**4.8.9. Věta:** *Nechť* $s \in \mathscr{I}$, $y_i \in K$ *pro* $i = 1, 2, \dots, n$. *Nechť* $w \in \mathscr{S}(8.3)$ *splňuje podmínky* $w^{(i-1)}(s) = y_i$ *pro* $i = 1, 2, \dots, n$. *Funkci* $r: \mathscr{I} \to K$ *definujme rovnicí*

$$r(t) = w(t) + \int_s^t h(t, \sigma)\,q(\sigma)\,d\sigma. \tag{8.9}$$

*Potom* $r$ *je maximální řešení rovnice* (8.1) *a splňuje podmínky* $r^{(i-1)}(s) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz: Nechť $U$ je fundamentální matice soustavy (8.6). Položme

$$y = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_n), \quad g(t) = \operatorname{col}(g_1(t), \dots, g_n(t)) = U(t)\,U^{-1}(s)\,y,$$
$$b(t) = \operatorname{col}(0, \dots, 0, q(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}.$$

Nechť $z(t) = \operatorname{col}(z_1(t), \dots, z_n(t))$, kde $z_1, \dots, z_n$ je maximální řešení soustavy (8.2) splňující podmínky $z_i(s) = y_i$.

Platí (6.4). Vektorová rovnice (6.4) reprezentuje $n$ skalárních rovnic; z nich zapíšeme první. Podle Věty 4.8.1 $z_1$ je maximální řešení rovnice (8.1) a splňuje podmínky $z_1^{(i-1)} = y_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, tedy $z_1 = r$. Funkce $g$ je maximální řešení soustavy (8.2), $g(s) = y$, a podle Věty 4.8.1 je $g_1$ maximální řešení rovnice (8.3) a je $g_1^{(i-1)}(s) = y_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, tedy $g_1 = w$. Položme ještě $H(t, \sigma) = (H_{ij}(t, \sigma)) = U(t)\,U^{-1}(\sigma)$. První řádek vektorové rovnice (6.4) přepíšeme

$$r(t) = w(t) + \int_s^t H_{1n}(t, \sigma)\,q(\sigma)\,d\sigma. \tag{8.10}$$

Při pevném $\sigma$ je funkce $H(t, \sigma)$ proměnné $t$ fundamentální matice soustavy (8.6) (viz Větu 4.5.2), $H(\sigma, \sigma) = I$, tedy $n$-tý sloupec matice $H(t, \sigma)$, tj. funkce $\operatorname{col}(H_{1n}(t, \sigma), \ldots, H_{nn}(t, \sigma))$ je řešení soustavy (8.6) a platí $H_{in}(\sigma, \sigma) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, $H_{nn}(\sigma, \sigma) = 1$. Podle Věty 4.8.1 je $H_{1n}(t, \sigma) = v_\sigma(t) = h(t, \sigma)$ a (8.10) přechází v (8.9). Věta 4.8.9 je dokázána.

**4.8.10. Poznámka:** Vzorec (8.9) se nazývá *vzorec pro variaci konstant* (viz Poznámku 4.6.3).

**4.9.** Položme si otázku: Nechť $\mathscr{I}$ je interval v $R$ a nechť funkce $u_i\colon \mathscr{I} \to K$ mají spojité derivace do řádu $n$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Za jakých dalších podmínek existují spojité funkce $a_j\colon \mathscr{I} \to K$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tak aby $(u_1, \ldots, u_n)$ byl fundamentální systém rovnice (8.3)?

Podle Věty 4.8.6 musí v takovém případě být vektory

$$w^{[i]}(s) = \operatorname{col}(u_i(s), \dot{u}_i(s), \ldots, u_i^{(n-1)}(s)) \in K^n$$

lineárně nezávislé pro každé $s \in \mathscr{I}$ čili musí být

$$w(u_1, \ldots, u_n)(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}. \tag{9.1}$$

To také stačí. Má-li $u_i$ být řešením rovnice (8.3) pro $i = 1, 2, \ldots, n$, musí platit

$$u_i^{(n)}(t) = a_1(t)\, u_i^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, u_i(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}, \tag{9.2}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. (9.2) je soustava lineárních nehomogenních algebraických rovnic pro $a_1(t) \ldots, a_n(t)$; její determinant je $w(u_1, \ldots, u_n)(t)$. Proto rovnicemi (9.2) jsou funkce $a_j$ jednoznačně určeny a jsou spojité. Jsou-li funkce $a_1, \ldots, a_n$ určeny z rovnic (9.2), je $u_1, \ldots, u_n$ fundamentální systém rovnice (8.3). Dokázali jsme:

*Platí-li* (9.1), *potom existují spojité funkce* $a_i\colon \mathscr{I} \to K$ *tak, že* $(u_1, \ldots, u_n)$ *je fundamentální systém rovnice* (8.3); *funkce* $a_i$ *jsou určeny jednoznačně.*

Z pravidel pro počítání s determinanty plyne, že hledanou rovnici lze zapsat ve tvaru

$$[w(u_1, \ldots, u_n)(t)]^{-1} \begin{vmatrix} u_1(t), & \ldots, & u_n(t), & u \\ \dot{u}_1(t), & \ldots, & \dot{u}_n(t), & \dot{u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n)}(t), & \ldots, & u_n^{(n)}(t), & u^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Otázku, kterou jsme položili na začátku tohoto odstavce, lze modifikovat takto: Nechť $\mathscr{I}$ je interval v $R$ a nechť funkce $u_j\colon \mathscr{I} \to K$, $j = 1, 2, \ldots, k$, kde $k < n$, mají spojité derivace do řádu $n$. Za jakých podmínek existují spojité funkce $a_l\colon \mathscr{I} \to K$, $l = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $u_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, je řešení rovnice (8.3)?

Nechť $H(t)$ je matice typu $(n, k)$, v jejímž $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci je $u_j^{(i-1)}(t)$. Nechť $\operatorname{rank} H(t)$ znamená hodnost matice $H(t)$. Jsou-li $u_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, řešení rovnice (8.3) (s vhodně volenými funkcemi $a_1, \ldots, a_n$), můžeme bez ztráty na obecnosti předpokládat, že funkce $u_1, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé. Ukážeme, že odtud plyne

$$\operatorname{rank} H(t) = k \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{I} . \tag{9.3}$$

Kdyby pro nějaké $s \in \mathcal{I}$ bylo $\operatorname{rank} H(s) < k$, existovala by čísla $c_1, \ldots, c_k \in K$, $|c_1| + \ldots + |c_k| > 0$, a bylo by

$$\sum_{l=1}^{k} c_l u_l^{(i-1)}(s) = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

a podle Věty 4.8.3 by bylo

$$\sum_{l=1}^{k} c_l u_l^{(i-1)}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{I} ,$$

tj. $u_1, \ldots, u_k$ by byly lineárně závislé.

Platí-li (9.3), potom existují spojité funkce $a_j : \mathcal{I} \to K$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $u_1, \ldots, u_k$ jsou řešení rovnice (8.3). V případě $K = R$ to bylo dokázáno v [1], [25], [26] a úvahy z [26] lze snadno přenést na případ $K = C$.

**4.10.** Obdobnou otázku jako v odst. 4.9 je možné položit i pro rovnici (4.1). Nechť funkce $u^{[i]} : \mathcal{I} \to K^n$ mají spojitou derivaci, $i = 1, 2, \ldots, n$. Za jakých okolností existuje spojitá funkce $A : \mathcal{I} \to M_n$ tak, že $(u^{[1]}, \ldots, u^{[n]})$ je fundamentální systém rovnice (4.1)?

Podle Věty 4.4.2 má v takovém případě platit: Vektory $u^{[1]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)$ jsou lineárně nezávislé pro $t \in \mathcal{I}$. Položíme-li $U = ((u^{[1]}, \ldots, u^{[n]}))$, můžeme tuto podmínku zapsat ve tvaru

$$\det U(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{I} . \tag{10.1}$$

A to také stačí. Funkce $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou řešení rovnice (4.1) právě tehdy, jestliže platí

$$\dot{U}(t) = A(t)\, U(t) ; \tag{10.2}$$

platí-li (10.1), je $A(t)$ určeno rovnicí (10.2) jednoznačně.

Obdobně jako v odst. 4.9 lze položit otázku: Nechť funkce $u^{[j]} : \mathcal{I} \to K^n$ mají spojitou derivaci, $j = 1, 2, \ldots, k < n$. Za jakých podmínek existuje spojitá funkce $A : \mathcal{I} \to M_n$ tak, že $u^{[j]}$ jsou řešení rovnice (4.1)?

Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že funkce $u^{[j]}$ jsou lineárně nezávislé; jsou-li přitom funkce $u^{[j]}$ řešení rovnice (4.1), pak platí (viz Větu 4.4.2):

*Vektory* $u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[k]}(t)$ *jsou lineárně nezávislé pro* $t \in \mathcal{I}$. (10.3)

Naopak, platí-li (10.3), pak existuje spojitá funkce $A : \mathcal{I} \to M_n$ tak, že $u^{[j]}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, jsou řešení rovnice (4.1).

Zde ukážeme, jak toto tvrzení plyne z Věty 4.10.1. Větu 4.10.1 zde dokazovat nebudeme. V Dodatku 4.1 je odvozeno, jak Věta 4.10.1 plyne z věty, která je dokázána v [14].

**4.10.1. Věta:** *Mají-li funkce* $u^{[j]}: \mathscr{I} \to K^n$ *spojitou derivaci,* $j = 1, 2, \ldots, k < n$, *a platí-li* (10.3), *potom existují funkce* $u^{[l]}: \mathscr{I} \to K^n$, *které mají spojitou derivaci,* $l = k + 1, k + 2, \ldots, n$, *a platí:*

$$(u^{[j]}(t), u^{[l]}(t)) = 0 \quad pro \quad t \in \mathscr{I},\ j = 1, 2, \ldots, k,\ l = k + 1, \ldots, n\,. \tag{10.4}$$

*Vektory* $u^{[l]}(t)$, $l = k + 1, \ldots, n$, *jsou lineárně nezávislé pro* $t \in \mathscr{I}$. (10.5)

Nechť funkce $u^{[j]}: \mathscr{I} \to K^n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, mají spojitou derivaci a nechť platí (10.3). Najděme funkce $u^{[l]}$, $l = k + 1, \ldots, n$, podle Věty 4.10.1 a položme $U = ((u^{[1]}, \ldots, u^{[n]}))$ (viz Definici 4.4.7). Podle Dodatku 4.2 jsou vektory $u^{[1]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)$ lineárně nezávislé pro $t \in \mathscr{I}$, tedy $\det U(t) \neq 0$ pro $t \in \mathscr{I}$. Funkci $A$ určeme z rovnice $\dot{U}(t) = A(t)\,U(t)$; $A: \mathscr{I} \to M_n$ je spojitá funkce a $u^{[1]}, \ldots, u^{[k]}$ jsou řešení rovnice (4.1).

**4.11.** Známe-li řešení $v_1$ rovnice

$$x_1^{(n)} + a_1(t)\,x_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,x_1 = 0 \tag{11.1}$$

(kde $a_i: \mathscr{I} \to K$ jsou spojité funkce), můžeme rovnici (11.1) převést na rovnici řádu $n - 1$. Musíme se ovšem omezit na takový interval $(\alpha, \beta) \subset \mathscr{I}$, že je $v_1(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$. Řešení $x_1: (\alpha, \beta) \to K$ rovnice (11.1) budeme hledat ve tvaru

$$x_1(t) = v_1(t)\,y_1(t)\,.$$

Je

$$x_1^{(k)} = v_1^{(k)} y_1 + \binom{k}{1} v_1^{(k-1)} \dot{y}_1 + \binom{k}{2} v_1^{(k-2)} y_1^{(2)} + \ldots + v_1 y_1^{(k)}\,,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

a po dosazení do (11.1) dostáváme

$$\begin{aligned} &v_1(t)\,y_1^{(n)} + b_1(t)\,y_1^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(t)\,\dot{y}_1 + \\ &+ [v_1^{(n)}(t) + a_1(t)\,v_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,v_1(t)]\,y_1 = 0\,, \end{aligned}$$

kde $b_i: \mathscr{I} \to K$ jsou spojité funkce, které lze vyjádřit pomocí funkce $v_1$, jejích derivací a funkcí $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Protože $v_1$ je řešení rovnice (11.1), je

$$y_1^{(n)} + \frac{b_1(t)}{v_1(t)}\,y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{v_1(t)}\,\dot{y}_1 = 0\,. \tag{11.2}$$

Zde položíme $x_2 = \dot{y}_1$ a dostáváme

$$x_2^{(n-1)} + \frac{b_1(t)}{v_1(t)}\,x_2^{(n-2)} + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{v_1(t)}\,x_2 = 0\,. \tag{11.3}$$

Předpokládejme, že dovedeme najít $r$ lineárně nezávislých řešení $w_1, \ldots, w_r$ rovnice (11.3). Označme $\int w_i$ libovolnou primitivní funkci k $w_i$. Funkce

$$v_1,\, v_1 \int w_1, \ldots, v_1 \int w_r \tag{11.4}$$

jsou zřejmě řešení rovnice (11.1). Ukážeme, že funkce (11.4) jsou lineárně nezávislé. V opačném případě by existovala čísla $c_i \in K$,

$$\sum_{i=1}^{r+1} |c_i| \neq 0\,, \quad c_1 v_1 + c_2 v_1 \int w_1 + \ldots + c_{r+1} v_1 \int w_r = 0\,. \tag{11.5}$$

Dělíme-li poslední rovnici $v_1$, dostáváme $c_1 + c_2 \int w_1 + \ldots + c_{r+1} \int w_r = 0$. Odtud plyne derivováním $c_2 w_1 + \ldots + c_{r+1} w_r = 0$ a z lineární nezávislosti funkcí $w_1, \ldots, w_r$ plyne $c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$.

Podle nerovnosti (11.5) je $c_1 \neq 0$ a to odporuje rovnici (11.5). Jestliže tedy $w_1, \ldots, w_r$ je $r$ lineárně nezávislých řešení rovnice (11.3), je (11.4) $r + 1$ lineárně nezávislých řešení rovnice (11.1).

Je-li $n > 2$ a známe-li ještě řešení $v_2$ rovnice (11.1) tak, že $v_1, v_2$ jsou lineárně nezávislá řešení, pak rovnice (11.3) má řešení

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

které není identicky rovno nule. Je-li

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta)\,,$$

můžeme postupu, kterého jsme užili na rovnici (11.1), znovu užít na rovnici (11.3). Případ, že známe $k$ lineárně nezávislých řešení rovnice (11.1), je vyložen v Dodatku 4.3.

Příklad: Rovnice

$$\dddot{x}_1 - \frac{2t+1}{t^2+t+3}\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 - \frac{2t+1}{t^2+t+3}x_1 = 0 \tag{11.6}$$

má řešení $v_1(t) = \cos t$, $v_2(t) = \sin t$. Na intervalu $(0, \pi)$ můžeme položit $x_1 = y_1 \cos t$, $\dot{y}_1 = x_2$ a po úpravě dostaneme

$$\ddot{x}_2 - \left(3 \operatorname{tg} t + \frac{2t+1}{t^2+t+3}\right)\dot{x}_2 + \left(-2 + 2 \operatorname{tg} t \frac{2t+1}{t^2+t+3}\right)x_2 = 0\,. \tag{11.7}$$

Rovnice (11.7) má řešení

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_2(t)}{v_1(t)}\right) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

na intervalu $(0, \pi/2)$. Položíme $x_2 = y_2/\cos^2 t$, $x_3 = \dot{y}_2$ a po úpravě dostaneme

$$\dot{x}_3 + \left(\operatorname{tg} t - \frac{2t + 1}{t^2 + t + 3}\right) x_3 = 0 . \tag{11.8}$$

Odtud

$$x_3(t) = \cos t \, (t^2 + t + 3) ,$$

$$x_2(t) = \frac{2t + 1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t} (t^2 + t + 1) ,$$

$$x_1(t) = t^2 + t + 1 .$$

Řešení $x_1$ jsme nalezli na intervalu $(0, \pi/2)$. Lze se však přesvědčit, že funkce $t^2 + t + 1$ je řešení rovnice (11.6) na $R$.

**4.12.** V případě rovnice (11.6) můžeme užít jiného postupu. Hledejme řešení $x_1$ rovnice (11.6) ve tvaru

$$x_1(t) = \zeta_1(t) \cos t + \zeta_2(t) \sin t , \tag{12.1}$$

kde funkce $\zeta_1$, $\zeta_2$ volíme tak, aby ještě platila rovnice

$$\dot{x}_1(t) = -\zeta_1(t) \sin t + \zeta_2(t) \cos t . \tag{12.2}$$

Funkci $\vartheta$ zaveďme rovnicí

$$\ddot{x}_1(t) = -\zeta_1(t) \cos t - \zeta_2(t) \sin t + \vartheta(t) . \tag{12.3}$$

Po dosazení do rovnice (11.6) a úpravě dostáváme

$$\dot{\vartheta}(t) - \dot{\zeta}_1(t) \cos t - \dot{\zeta}_2(t) \sin t - \frac{2t + 1}{t^2 + t + 3} \vartheta(t) = 0 .$$

Derivováním rovnice (12.1) a srovnáním s rovnicí (12.2) dostáváme

$$\dot{\zeta}_1(t) \cos t + \dot{\zeta}_2(t) \sin t = 0 , \tag{12.4}$$

tedy

$$\dot{\vartheta} - \frac{2t + 1}{t^2 + t + 3} \vartheta = 0 ,$$

$\vartheta(t) = c(t^2 + t + 3)$, kde $c \in R$; protože k řešením $\cos t$, $\sin t$ rovnice (11.6) hledáme třetí, lineárně nezávislé, můžeme bez ztráty na obecnosti položit $c = 1$, tj.

$$\vartheta(t) = t^2 + t + 3 .$$

Derivováním rovnice (12.2) a srovnáním s rovnicí (12.3) dostáváme

$$-\dot{\zeta}_1(t) \sin t + \dot{\zeta}_2(t) \cos t = \vartheta(t) . \tag{12.5}$$

Z (12.4) a (12.5) plyne

$$\dot{\zeta}_1(t) = -\vartheta(t)\sin t = -(t^2 + t + 3)\sin t\,,$$
$$\dot{\zeta}_2(t) = \vartheta(t)\cos t = (t^2 + t + 3)\cos t\,.$$

Odtud

$$\zeta_1(t) = (t^2 + t + 1)\cos t - (2t + 1)\sin t + c_1\,,$$
$$\zeta_2(t) = (t^2 + t + 1)\sin t + (2t + 1)\cos t + c_2\,.$$

Opět můžeme bez ztráty na obecnosti položit $c_1 = 0 = c_2$ a z rovnice (12.1) dostáváme $x_1(t) = t^2 + t + 1$. Funkce $\cos t$, $\sin t$, $t^2 + t + 1$ tvoří fundamentální systém rovnice (11.6). Pro obecný případ je tento postup vyložen v Dodatku 4.6.

**4.13.** Také soustavu $n$ lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu lze zjednodušit, známe-li $k$ lineárně nezávislých řešení. Vyřešme nejdříve speciální případ

$$\dot{z} = B(t)\,z\,, \tag{13.1}$$

kde $B\colon \mathscr{I} \to M_n$ je spojitá funkce, $B(t) = (B_{ij}(t))$, $B_{ij}(t) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $t \in \mathscr{I}$, tj. sloupce první až $k$-tý matice $B(t)$ jsou nulové. Položme $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $e_i = \operatorname{col}(\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $v^{[i]}(t) = e_i$ pro $t \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Funkce $v^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou zřejmě lineárně nezávislá řešení rovnice (13.1).

Pro $j = k + 1, k + 2, \ldots, n$ nechť

$$w^{[j]} = \operatorname{col}(w^{[j]}_{k+1}, w^{[j]}_{k+2}, \ldots, w^{[j]}_n)$$

je řešení soustavy

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{k+1} &= B_{k+1,k+1}(t)\,z_{k+1} + B_{k+1,k+2}(t)\,z_{k+2} + \ldots + B_{k+1,n}(t)\,z_n\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{z}_n &= B_{n,k+1}(t)\,z_{k+1} + B_{n,k+2}(t)\,z_{k+2} + \ldots + B_{nn}(t)\,z_n\,.
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Pro $i = 1, 2, \ldots, k$ nechť $w^{[j]}_i$ je primitivní funkce k funkci

$$\sum_{r=k+1}^{n} B_{ir}(t)\,w^{[j]}_r(t)\,, \quad \tilde{w}^{[j]} = \operatorname{col}(w^{[j]}_1, w^{[j]}_2, \ldots, w^{[j]}_n)\,.$$

Funkce $\tilde{w}^{[j]}$ jsou zřejmě řešení rovnice (13.1), a je-li $w^{[k+1]}, w^{[k+2]}, \ldots, w^{[n]}$ fundamentální systém soustavy (13.2), je $v^{[1]}, \ldots, v^{[k]}, \tilde{w}^{[k+1]}, \ldots, \tilde{w}^{[n]}$ fundamentální soustava rovnice (13.1). Tedy:

Dovedeme-li řešit soustavu (13.2), dovedeme též řešit rovnici (13.1).

Nechť jsou známa lineárně nezávislá maximální řešení $u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots, u^{[k]}$, $k < n$, rovnice

$$\dot{x} = A(t)\,x\,, \tag{13.3}$$

kde $A\colon \mathscr{I} \to M_n$ je spojitá funkce. Podle Věty 4.4.2 platí (10.3). Najděme funkce

$u^{[k+1]}, u^{[k+2]}, \ldots, u^{[n]}$ podle Věty 4.10.1, položme $U(t) = ((u^{[1]}(t), \ldots, u^{[n]}(t)))$. Podle Dodatku 4.2 je pro každé $t \in \mathscr{I}$ matice $U(t)$ regulární. Hledejme řešení rovnice (13.3) ve tvaru $x(t) = U(t)\, z(t)$. Snadným výpočtem plyne, že $x$ je řešením rovnice (13.3) právě tehdy, je-li $z$ řešením rovnice (13.1), kde $B(t) = (B_{ij}(t)) = U^{-1}(t) [A(t)\, U(t) - \dot{U}(t)]$; protože $u^{[1]}, \ldots, u^{[k]}$ jsou řešení rovnice (13.3), jsou sloupce první až $k$-tý matice $A(t)\, U(t) - \dot{U}(t)$ nulové. Proto jsou i sloupce první až $k$-tý matice $U^{-1}(t) [A(t)\, U(t) - \dot{U}(t)]$ nulové [tj. $B_{ij}(t) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $t \in \mathscr{I}$, což jsme předpokládali v případě rovnice (13.1)]. Tak jsme rovnici (13.3) převedli na rovnici (13.1).