PŘEHLED VÝSLEDKŮ, PLATNÝCH PRO KOMPLEXNÍ FUNKCE

Na str. 86 jsme se smluvili, že slovem „funkce" budeme v kap. III až VI, IX—XII rozuměti vždy reálnou funkci, pokud není výslovně řečeno něco jiného. Mnohé výsledky těchto kapitol platí však i pro funkce komplexní — v textu je to většinou na vhodném místě poznamenáno. Aby však měl čtenář snadnější přehled, uvádím zde výsledky, platné pro komplexní funkce, po případě uvádím, jak je nutno modifikovat výsledky, platné pro reálné funkce, aby platily i pro funkce komplexní. Neuvádím ovšem takové věty, v jejichž formulaci je přímo uvedeno, že platí pro komplexní funkce.

Kapitola II.

Definici komplexní měřitelné funkce viz na počátku § 5. Přehled výsledků kapitoly II, platných pro komplexní funkce, je obsažen v § 5.

Kapitola III.

Definici integrálu komplexní funkce viz na počátku § 6. Přehled výsledků kapitoly III, § 1—5, které platí pro komplexní funkce, je podán v § 6.

K § 7: Pozn. 1 platí s výjimkou posledních tří řádek i pro komplexní funkce. Pozn. 2, pozn. 3 a příkl. 11 platí i pro komplexní funkce[1]). Pozn. 4: Text o substituční metodě platí i pro komplexní f[1]) a reálné φ. Text o integraci per partes platí i pro komplexní f, g (ale v příkladě na konci pozn. 4 je β reálné).

[1]) Výroky jako „integrál má smysl" nebo „integrál existuje" a pod. je u integrálů komplexní funkce vždy nutno nahraditi výrokem „integrál konverguje" a pod. Neboť v § 6 jsme zavedli „integrál komplexní funkce" jen v tom případě, že je konvergentní, t. j. že má konečnou hodnotu.

Kapitola IV.

§ 1. Věty 70, 70a, důsledek věty 73, věta 74 a dodatek k ní, poznámky 5, 6, 7, 10, 11 platí i pro komplexní funkce[1]). Důkaz věty 70a pro komplexní funkce je podán v pozn. 2.

§ 2, § 3 se týkají jen reálných funkcí.

Kapitola V.

Komplexní funkci nazýváme absolutně spojitou (zkratka a. s.) v $\langle a, b\rangle$, jestliže její reálná a imaginární část jsou a. s. v $\langle a, b\rangle$. Definici neurčitého integrálu komplexní funkce viz v § 5, pozn. 2.

§ 2. Místo věty 84 čti: Každá (komplexní) funkce, která je a. s. v $\langle a, b\rangle$, má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci[2]). Věty 85, 86 platí i pro komplexní funkce.

§ 4. Věty 88, 89[1]), pozn. 1[1]), příklady[1]) (39), (40), cvič.[1]) 1, 2 platí i pro komplexní funkce (ovšem a, b, p v (39), (40) a a, b, c, k v cvič. 2 jsou reálná).

§ 5. Místo věty 91 čti: Je-li (komplexní) funkce f a. s. v $\langle a, b\rangle$, je $f' \in \mathsf{L}(a, b)$. Pozn. 1, 4[1]), věty 92, 93, 94 a pozn. 6 (vyjma pozn.[12]) pod čarou) platí i pro komplexní funkce. Věta 95 platí pro komplexní funkce, jestliže místo „f spojitá" čteme „f konečná a spojitá". Podržíme-li definici 14 i pro komplexní funkce, platí věty 96, 97 též pro komplexní funkce. Pozn. 8 platí[1]) i pro komplexní funkce.

§ 6. Věty 98, 99, 100 a pozn. 2 platí i pro komplexní funkce. Věta 101 nikoliv!

Kapitola VI.

Věty 103, 104, příkl. 2 a prvních sedm řádek z příkl. 1 platí i pro komplexní funkci F[1]). Zobrazení $f\,(x_i = f_i(u_1, \ldots, u_r),\ \ i = 1, \ldots, r)$

[2]) Zavedl jsem pojem „funkce s v. k." (s variací konečnou) jen pro reálné funkce. Mohl bych ovšem definovati tento pojem i pro komplexní funkce takto: Funkce $f + ig$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$, jestliže reálné funkce f, g mají v. k. v $\langle a, b\rangle$. Potom by věta 84 platila v nezměněném znění i pro komplexní funkce (a rovněž některé další věty). Neprovádím však toto (triviální) zobecnění a ponechávám název „funkce s v. k." jen pro reálné funkce.

musí ovšem býti „reálné“, t. j. f_i musí býti reálné funkce; speciálně funkce f ve větě 104 musí býti reálná.

Kapitola VII.

§ 1. Pozn. 1, 2, 3, 4 platí i pro komplexní f[1]). K pozn. 7: Znaku $f(x) \cong g(x)$ se užívá i pro komplexní f, g; znaků $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ se užívá pro komplexní f (ale kladné g).

§ 2. Prvních 11 řádek z pozn. 1 platí i pro komplexní f; pouze místo „spojitá“ čti „konečná a spojitá“. Druhý odstavec z pozn. 4 platí i pro komplexní f (za předpokladu, že f je měřitelná v M). Pozn. 5 platí i pro komplexní f.

§ 3. Příklad 5[1]), 6[1]), 9[1]), 14[1]), 15 platí i pro komplexní f. Příklad 22[1]), 23[1]), 25[1]) platí i pro komplexní F, příkl. 30a pro komplexní φ.

V dalších paragrafech je vždy jasně řečeno, kdy se připouštějí komplexní funkce.

Kapitola VIII.

Zde je vždy poznamenáno, zda nějaká úvaha platí i pro komplexní funkce. Většina výsledků platí pro komplexní funkce.

Kapitola IX.

Týká se pouze reálných funkcí.

Kapitola X.

§ 1. Věta 127: Tvrzení 3 platí i pro komplexní μ-měřitelnou funkci. Věta 128 platí i pro komplexní f[1]) (ale ovšem reálné g, stejně jako věta 127).

§ 2. Poznámka 3, věta 133[1]) a počátek pozn. 4[1]) platí i pro komplexní f.

§ 3. Definice 20 se vztahuje i na měřitelnost komplexní funkce a na integrál komplexní funkce f[1]) — viz pozn. 6. Pro komplexní funkce platí dále pozn. 7, 10, 11, 13, 15; rovnice (24) platí pro komplexní funkce, konvergují-li integrály vpravo. Věta 140[1]) (při reálném c) a 141[1]) platí i pro komplexní f.

§ 4. Tvrzení 5, 7 věty 142, věta 143 a pozn. 1 platí i pro komplexní f.

§ 5. Označení z pozn. 6 lze ovšem užíti i pro integrál komplexní funkce f (při reálném m).

§ 6. Věta 145 platí[1]) i pro komplexní f (a reálné g). Také věta 146 platí[1]) pro komplexní f (a reálné s), jestliže pravé straně v (61) přisuzujeme smysl jen tehdy, když zobecněná řada je absolutně konvergentní. Rovněž pozn. 1 platí[1]) pro komplexní f (a reálné g).

§ 7. Zachovejme definici 21 i pro komplexní konečnou funkci f; to můžeme říci také — v ekvivalentní formě — tak, že definujeme Stieltjesův integrál komplexní funkce rovnicí

$$\int_a^b (f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x))\, \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f_1(x)\, \mathrm{d}g(x) + \mathrm{i} \int_a^b f_2(x)\, \mathrm{d}g(x)\,,$$

existují-li Stieltjesovy integrály vpravo (ty mají potom ovšem, podle def. 21, konečnou hodnotu). Potom platí pozn. 1, pozn. 2[3]), věty 148, 149 a pozn. 4, 5 i pro komplexní funkce f, f_1, f_2.

§ 8. Věty 150, 151, 152 (při označení z pozn. 1) platí i pro komplexní f.

§ 9. Věty 153, 154 platí[1]) i pro konečnou komplexní f.

Mohli bychom ovšem zavésti též Lebesgue—Stieltjesův integrál při „komplexní míře" $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\mu_2$ a Stieltjesův integrál při komplexní funkci $g = g_1 + \mathrm{i}g_2$ definicí

$$\int_M f\, \mathrm{d}\mu = \int_M f\, \mathrm{d}\mu_1 + \mathrm{i} \int_M f\, \mathrm{d}\mu_2\,{}^{4}), \qquad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) =$$
$$= \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g_1(x) + \mathrm{i} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g_2(x)\,,$$

ale nebudeme se tím zdržovat.

---

[3]) V této poznámce může také číslo c v II a k v III být komplexní (konečné).
[4]) Pokud integrály vpravo mají konečnou hodnotu.

Kapitola XI, XII.

Zde se mluví jen o reálných funkcích. Mohli bychom ovšem Riemannův, Newtonův i Perronův integrál definovati i pro komplexní funkce obvyklým způsobem. Podrobnosti neuvádím — leží na snadě a nebudeme je potřebovati.

Kapitola XIII – XIX.

Zde jde o komplexní funkce, pokud není výslovně řečeno něco jiného. Řeknu-li ovšem, že f je na př. funkce s variací konečnou nebo funkce neklesající, je v tom už implicite obsaženo, že f je reálná. Výsledků, platných pro reálné funkce, lze ovšem v praxi často použíti též na vyšetřování funkcí komplexních, aplikuji-li je na reálnou a na imaginární část.

Hlavní výsledky kap. XVI, XVII, XIX se týkají reálných funkcí, ale je to vždy výslovně řečeno. V kap. XIII si všimněte úmluvy o realitě v úvodu na str. 469, v kap. XIX úmluvy na str. 705.