Kapitola XVIII. Funkce Gamma

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 683--704.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402065

KAPITOLA XVIII*

FUNKCE GAMMA*

Funkci $\Gamma(s)$ jsme v kap. VII, § 1, pozn. 6 definovali určitým integrálem pro $\Re s > 0$. Nyní ji budeme definovati jinak (nekonečným součinem), a to obecněji (pro všechna komplexní $s \neq 0, -1, -2, \ldots$); v § 2 dokážeme, že obě definice pro $\Re s > 0$ souhlasí. Z „ohvězdičkovaného" textu potřebuje čtenář § 3 z kap. XV a v § 3 též kapitolu XVI.

Funkce gamma je jednou z nejdůležitějších funkcí analysy kromě t. zv. elementárních funkcí; už jsme se s ní opětovně setkali, na př. při výpočtu mnohých integrálů v kap. VIII, § 4, příkl. 3 a pozn. 6, nebo ve větách 226, 228, dále v kap. VII, § 3, příkl. 28, 30a, 30b atd.

§ 1. Definice a základní vlastnosti funkce $\Gamma(s)$. Budeme v této kapitole mluviti o nekonečných součinech

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)\,; \tag{1}$$

$u_1, u_2, \ldots$ jsou libovolná komplexní čísla. Ježto jsme o nich dlouho nemluvili, zopakujme, co budeme potřebovati.[1]) Součin (1) nazýváme konvergentním, nastává-li jeden z těchto dvou případů:

A) Existuje konečná, od nuly různá limita

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m}(1 + u_n)\,. \tag{2}$$

B) Posloupnost $1 + u_1, 1 + u_2, \ldots$ obsahuje jen konečný počet členů rovných nule;[2]) vynecháme-li je, vznikne nekonečný součin, mající vlastnost **A** (def. 7 v **D II**).

Znakem (1) označujeme pak číslo (2), jež nazýváme hodnotou součinu (1).

Je-li součin $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + |u_n|)$ konvergentní, je též (1) konvergentní; říkáme pak, že (1) jest absolutně konvergentní (viz **D II**, věta 49). To

[1]) Podrobný výklad viz v **D II**, kap. III, § 7.

[2]) Jakmile existuje jeden takový člen, je limita (2) rovna nule.

nastává tehdy a jen tehdy, je-li $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konvergentní (viz **D II**, věta 50); potom součin (1) zůstává absolutně konvergentní i po libovolném přerovnání a jeho hodnota se nezmění.

Vyšetřujme nyní součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right), \tag{3}$$

kde s je libovolné komplexní číslo. Ježto $e^{\alpha} = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$ pro $\alpha \in \boldsymbol{K}_1$, $\alpha \to 0$, je (při pevném s)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} &= \left(1 + \frac{s}{n}\right)\left(1 - \frac{s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{pro } n \in \boldsymbol{N},\ n \to +\infty . \end{aligned} \tag{4}$$

Píši-li tedy obecný člen součinu (3) ve tvaru $1 + u_n$, jest $u_n = O(n^{-2})$, a tedy součin (3) jest absolutně konvergentní. Jeho hodnota jest ovšem (viz definici **A**), **B**)) různá od nuly, není-li s celé záporné.

Poznámka 1. Dokážeme nyní existenci konečné limity

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right).^{3)} \tag{5}$$

Položme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\,, \quad b_n = a_n - \frac{1}{n}\,.$$

Pro přirozené n je (podle věty o přírůstku funkce)

$$\lg (n + 1) - \lg n = \frac{1}{n + \Theta_n}\ (0 < \Theta_n < 1)\,.$$

Tedy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n + 1} - (\lg (n + 1) - \lg n) < 0\,,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - (\lg (n + 1) - \lg n) > 0\,.$$

---

[3]) Ježto $\lim_{n \to \infty} (\lg (n + k) - \lg n) = 0$ pro každé $k \in \boldsymbol{E}_1$, mohli bychom zde místo $\lg n$ psáti též $\lg (n + k)$.

Tedy klesající posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ má limitu C ($-\infty \leqq C < a_1 = 1$). Ale touž limitu má nutně **rostoucí** posloupnost $b_1, b_2, \ldots$ (neboť $\lim (b_n - a_n) = 0$). Tedy $C > b_1 = 0$, takže C je konečná. Mimo to vychází $0 < C < 1$. Označení C pro toto číslo podržíme v celé kapitole; říká se mu **Eulerova konstanta** (jak se dá numericky počítat, bylo vyloženo v kap. XVI na konci § 5).

Nyní zavedeme definici funkce $\Gamma(s)$. Nebude ovšem ihned jasno, že tato definice je ve shodě s označením Eulerova integrálu 2. druhu z kap. VII, § 1, pozn. 6. Proto nechť si čtenář na chvíli myslí zavedeno označení třeba

$$\Gamma_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \text{ pro } \Re s > 0$$

a dívá se na funkci Γ, kterou nyní budeme definovati a studovati, jako na zcela novou funkci; v § 2 dokážeme pak, že pro $\Re s > 0$ je $\Gamma_1(s) = \Gamma(s)$, takže se budeme moci vrátiti k původnímu označení Eulerova integrálu 2. druhu (toto označení je v literatuře tak běžné, že jsem nechtěl ani v kap. VII ani nyní zavádět jiné označení).

Definice 30. *Budiž s komplexní číslo, různé od čísel* $0, -1, -2, -3, \ldots$ *Budiž C Eulerova konstanta. Potom definujeme číslo* $\Gamma(s)$ *rovnicí*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right). \tag{6}$$

Poznámka 2. Pro $s = 0, -1, -2, \ldots$ je pravá strana rovna nule; ale pro všechna ostatní s jest od nuly různá, takže rovnice (6) vskutku definuje číslo $\Gamma(s)$, různé od nuly. To je tedy funkce, definovaná pro všechna komplexní s s výjimkou hodnot $0, -1, -2, \ldots$ Vlastnosti této funkce budeme studovati.

Věta 249. *Je-li s různé od čísel* $0, -1, -2, \ldots$, *jest*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \right), \tag{7}$$

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{s(s+1) \ldots (s+n-1)} n^s. \tag{8}$$

Poznámka 3. Z (8) plyne: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s) > 0$ pro $s > 0$.

Důkaz. Podle (6), (5) a podle pozn.[3]) jest

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \lim_{m\to\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{m}-\lg(m+1)\right)s} \cdot \prod_{n=1}^{m}\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}\right)\right) =$$

$$= s \lim_{m\to\infty} \left((m+1)^{-s} \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) =$$

$$= s \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m}\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s}\right).$$

Ale zde předposlední výraz dává (8), poslední dává (7).

Věta 250. *Je-li* s *různé od čísel* $0, -1, -2, \ldots,$ *je* $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$.

Poznámka 4. Pro přirozené s plyne odtud (ježto $\Gamma(1) = 1$) $\Gamma(s) = (s-1)!$

Důkaz. Podle (8) (a podle pravidla o limitě podílu) jest

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2\ldots(n-1)}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}\, n^{s+1} \,.$$

$$\cdot \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}\, n^{-s} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{s+n} = s\,.$$

Věta 251. *Není-li* s *celé číslo, je*

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,. \tag{9}$$

Poznámka 5. Pro $s = \frac{1}{2}$ vychází $\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. Podle (7) je

$$\Gamma(s)\,\Gamma(-s) = -\frac{1}{s^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \cdot \left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{s^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{s^2}{n^2}} = -\frac{\pi}{s \sin \pi s}$$

(kap. XIII, § 6, příkl. 3, (98)). Podle věty 250 pak jest $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = -s\,\Gamma(s)\,\Gamma(-s) = \pi : \sin \pi s$.

Věta 252. (Gaussův vzorec.) *Budiž m přirozené číslo; nechť ms není rovno žádnému z čísel* $0, -1, -2, \ldots$ *Potom jest*

$$(10) \qquad \Gamma(s)\,\Gamma\left(s+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(s+\frac{m-1}{m}\right)= \\ = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}\,m^{\frac{1}{2}-ms}\,\Gamma(ms)\,.$$

Poznámka 6. Případ $m = 1$ je triviální; případ $m = 2$ pochází od Legendrea:

$$(11) \qquad 2^{2s}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)\,.$$

Důkaz. Podle (8) jest[4])

$$(12) \qquad \frac{m^{ms}\prod\limits_{r=0}^{m-1}\Gamma\left(s+\frac{r}{m}\right)}{\Gamma(ms)} = \\ = \lim_{n\to\infty}\frac{m^{ms}((n-1)!)^m\prod\limits_{r=0}^{m-1} n^{s+\frac{r}{m}}\,.\,ms\,.\,(ms+1)\ldots(ms+mn-1)}{\prod\limits_{r=0}^{m-1}\left(\left(s+\frac{r}{m}\right)\left(s+\frac{r}{m}+1\right)\ldots\left(s+\frac{r}{m}+n-1\right)\right).\,(nm-1)!\,(nm)^{ms}}\,.$$

Součin $\prod\limits_{r=0}^{m-1}$ ve jmenovateli má hodnotu

$$\frac{ms}{m}\,.\,\frac{ms+1}{m}\ldots\frac{ms+mn-1}{m}\,;$$

podíváme-li se tedy na výraz (12), vidíme, že nezávisí na s, t. j. závisí jen na m, takže

$$(13) \qquad \prod_{r=0}^{m-1}\Gamma\left(s+\frac{r}{m}\right) = m^{-ms}\,\Gamma(ms)\,.\,C_m\,,$$

kde C_m závisí jen na m (nikoliv na s). Zbývá určiti C_m. Dosaďme do (13) napřed $m = 2$, $s = \frac{1}{2}$. Vyjde $\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(1) = 2^{-1}\,\Gamma(1)\,C_2$, t. j. $C_2 = 2\sqrt{\pi}$, čímž (11) dokázáno. Budiž nyní m libovolné. Do (13) dosaďme $s + \dfrac{1}{2m}$ místo s; vychází

[4]) Užívám ovšem pravidla o limitě podílu. Ve výrazu (8) pro $\Gamma(ms)$ píši mn místo n (což smím).

$$\prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(s + \frac{2r+1}{2m}\right) = m^{-ms-\frac{1}{2}}\Gamma(ms + \tfrac{1}{2})\, C_m\,. \tag{14}$$

Vynásobím (13), (14); vyjde (užiji-li nakonec (11))

$$\begin{aligned}\prod_{r=0}^{2m-1} \Gamma\left(s + \frac{r}{2m}\right) &= m^{-2ms-\frac{1}{2}}\, \Gamma(ms)\, \Gamma(ms + \tfrac{1}{2})\,.\, C_m^2 = \\ &= m^{-2ms-\frac{1}{2}}\,.\, 2^{-2ms+1}\sqrt{\pi}\, C_m^2\, \Gamma(2ms)\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Levá strana v (15) je rovna[5])

$$\begin{aligned}&\prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(s + \frac{r}{2m}\right)\Gamma\left(s + \frac{r}{2m} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \prod_{r=0}^{m-1}\left(2^{1-2s-\frac{r}{m}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(2s + \frac{r}{m}\right)\right) =^{6)} \\ &= 2^{m-2ms-\frac{1}{2}(m-1)}\pi^{\frac{1}{2}m} m^{-2ms}\,\Gamma(2ms)\, C_m\,.^{7)}\end{aligned} \tag{16}$$

Jest $C_m \neq 0$ (ježto levá strana v (13) je různá od nuly). Srovnáním posledních výrazů v (15), (16) plyne tedy $C_m = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}m^{\frac{1}{2}}$, čímž (10) dokázáno.

Cvičení

1. Budiž $v(x)$ racionální funkce proměnné x. Ptáme se, kdy součin

$$K = \prod_{n=0}^{\infty} v(n)$$

je konvergentní a různý od nuly.

Návod:

$$v(x) = A\,\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_k)}{(x - b_1)\ldots(x - b_l)}\,.$$

Předně nesmí a_j ani b_j býti žádné z čísel 0, 1, 2, ... Za druhé musí být $\lim_{n\to\infty} v(n) = 1$, tedy $k = l$, $A = 1$. Potom je $v(n) = 1 - \dfrac{a_1 + \ldots + a_k - b_1 - \ldots - b_k}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Proto musí za třetí býti $a_1 + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_k$, a tyto tři podmínky již postačí.

[5]) Dám vždy dohromady ony dva činitele, v nichž se hodnoty r liší o m.
[6]) Podle (11).
[7]) Podle (13).

2. Z (8) dokažte: Je-li k přirozené číslo, $a_1 + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_k$ a není-li žádné z čísel a_j, b_j rovno žádnému z čísel $0, 1, 2, \ldots$, je

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n - a_1) \ldots (n - a_k)}{(n - b_1) \ldots (n - b_k)} = \frac{\Gamma(- b_1) \ldots \Gamma(- b_k)}{\Gamma(- a_1) \ldots \Gamma(- a_k)} .$$

§ 2. Vyjádření funkce $\Gamma(s)$ určitým integrálem. Připomeňme: Je-li $\gamma = \alpha + \beta\mathrm{i}$ (α, β reálná; budeme psáti $\alpha = \Re\gamma$), je pro $x > 0$

$$x^\gamma = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i}) \lg x} = x^\alpha \mathrm{e}^{\beta\mathrm{i} \lg x}, \text{ tedy } |x^\gamma| = x^\alpha .$$

Jsou-li tedy reálné části čísel s, p, q kladné (což budeme předpokládati), jsou absolutně konvergentní tyto dva integrály:

(17) $\Gamma_1(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ (t. zv. Eulerův integrál druhého druhu),

(18) $\mathrm{B}(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, \mathrm{d}x$ (t. zv. Eulerův integrál prvního druhu, neboli funkce beta).

Substituce $x = 1 - y$ dává ihned

$$\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p) . \tag{19}$$

Integrace per partes dává

$$\mathrm{B}(p, q + 1) = \frac{q}{p} \mathrm{B}(p + 1, q) . \tag{20}$$

Píši-li dále $x^{p-1}(1 - x)^q = x^{p-1}(1 - x)^{q-1} - x^p(1 - x)^{q-1}$, obdržím

$$\mathrm{B}(p, q + 1) = \mathrm{B}(p, q) - \mathrm{B}(p + 1, q) , \tag{21}$$

načež z (20), (21) plyne

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{p + q}{p} \mathrm{B}(p + 1, q) . \tag{22}$$

Odtud (z (20), (22)) úplnou indukcí pro přirozené n

$$\mathrm{B}(p, q + n) = \frac{q(q + 1) \ldots (q + n - 1)}{p(p + 1) \ldots (p + n - 1)} \mathrm{B}(p + n, q) , \tag{23}$$

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{(p + q)(p + q + 1) \ldots (p + q + n - 1)}{p(p + 1) \ldots (p + n - 1)} \mathrm{B}(p + n, q). \tag{24}$$

Jest
$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\,.$$
Kladu-li tedy v (23) $q = 1$, $1 + n = m$ (a píši ve výsledku opět n místo m), obdržím

$$B(p, n) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}{p(p+1)(p+2)\,\ldots\,(p+n-1)} \text{ pro přirozené } n\,. \tag{25}$$

Nyní se snažím vypočísti $\Gamma_1(s)$; přitom budu postupovati obdobně jako při výpočtu Laplaceova integrálu v kap. III, § 7, příkl. 12. Tam jsme ukázali: v intervalu $(0, 1)$ je funkce $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ klesající a má pro $\varepsilon \to 0+$ limitu e^{-1}, takže $0 < (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} < e^{-1}$ pro $0 < \varepsilon < 1$. Je-li tedy n přirozené číslo, $x > 0$, dostáváme, klademe-li $\varepsilon = x : n$,
$$0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} < e^{-1} \text{ pro } 0 < x < n\,, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \\ = e^{-1} \text{ pro } x > 0\,,$$
tedy

$$0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n} < e^{-x} \text{ pro } 0 < x < n\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{-x} \text{ pro } x > 0\,. \tag{26}$$

Budiž nyní dáno s ($\Re s > 0$); zvolme libovolné q ($\Re q > 0$) a definujme funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ v $(0, +\infty)$ rovnicemi

$$f_n(x) = x^{s-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+q} \text{ pro } 0 < x < n\,,\ f_n(x) = 0 \text{ pro } x \geqq n\,. \tag{27}$$

Ježto pro $0 < x < n$ jest
$$\left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{q}\right| = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\Re q} < 1$$
a dále $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{q} = 1$ pro každé $x > 0$, je podle (26)
$$|f_n(x)| < x^{\Re s - 1}e^{-x},\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{s-1}e^{-x}$$
pro každé $x > 0$ (neboť pro všechna dosti velká n, totiž pro $n > x$, platí první z rovnic (27)). Ježto

$$\int_0^{+\infty} x^{\Re s - 1} e^{-x}\, dx$$

konverguje, plyne z věty 65

$$\Gamma_1(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{s-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+q} dx = \lim_{n\to\infty} n^s \int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{n+q}\, dy$$

(substituce $x = ny$). Podle (18) je tedy

$$\Gamma_1(s) = \lim_{n\to\infty} n^s\, \mathrm{B}(s, n + q + 1)\,. \tag{28}$$

To platí pro libovolná s, q s kladnou reálnou částí. Speciálně pro $q = 1$ vychází podle (25)

$$\Gamma_1(s) = \lim_{n\to\infty} n^s \frac{1\,.\,2\ldots(n+1)}{s(s+1)\ldots(s+n+1)} = \Gamma(s)\,,$$

neboť výraz za znamením lim se liší od obdobného výrazu v (8) pouze činitelem $\dfrac{n(n+1)}{(s+n)(s+n+1)}$, jenž má limitu 1. Tedy máme předně tuto větu:

Věta 253. *Je-li* $\Re s > 0$, *je*

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(s)\,. \tag{29}$$

Tím jsme dokázali, že pro $\Re s > 0$ je naše nová definice funkce gamma ve shodě s definicí v kap. VII, § 1, pozn. 6.

Vyšetřujme nyní dále $\mathrm{B}(p, q)$. Podle (24) jest (užijeme též (19))

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{(p+q)\ldots(p+q+n)}{p\ldots(p+n)}\, \mathrm{B}(p+n+1, q) =$$

$$= \frac{n^q\, \mathrm{B}(q, p+n+1)\,.\, n^p\,.\, \dfrac{1\,.\,2\ldots n}{p(p+1)\ldots(p+n)}}{n^{p+q}\,.\, \dfrac{1\,.\,2\ldots n}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+n)}}\,.$$

To platí pro každé přirozené n. Ale pravá strana má podle (8), (28) pro $n \to \infty$ limitu $\Gamma(q)\,\Gamma(p) : \Gamma(p+q)$. Tím je dokázána

Věta 254. *Je-li* $\Re p > 0$, $\Re q > 0$, *je*

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{30}$$

Poznámka 1. Čtenář si vzpomíná, že jsme některé z výsledků nyní odvozených dokázali již dříve, vycházejíce ovšem z (29) a proto částečně za podmínek více omezujících. Převedli jsme také řadu integrálů na funkci gamma (některé jsem připomněl v úvodu k této kapitole). Uveďme ještě několik příkladů (viz též připojená cvičení). Připomeňme, že výsledek $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (dokázaný v § 1, pozn. 5) nám znovu dává hodnotu Laplaceova integrálu:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Příklad 1. Pro kladná p, q, m je

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\,\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

Důkaz. Substitucí $x^m = y$ dostaneme $\frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right)$ a užijeme věty 254.

Příklad 2. Pro $m > 0$, $n > 0$ jest

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{2\Gamma(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n)}.$$

Důkaz. Substitucí $\sin x = y$ převede se integrál na typ, vyšetřovaný v příkl. 1.

Poznámka 2. Abychom se nedostali příliš hluboko do theorie analytických funkcí, omezuji se v dalším hlavně na reálná (dokonce většinou kladná) s, ač mnohé výsledky platí obecněji (to platí i o předcházejících příkladech 1, 2).

Cvičení

1. Z příkl. 1 odvoďte tyto hodnoty eliptických integrálů:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (\Gamma(\tfrac{1}{4}))^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\Gamma(\tfrac{3}{4}))^2.$$

Součin obou integrálů je $\frac{1}{4}\pi$.

2. Pro $a > 0$, $a + b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ dokažte substitucí $y = \dfrac{(a+b)\,x}{a+bx}$:

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(a+bx)^{\alpha+\beta}}\,dx = \frac{1}{(a+b)^\alpha a^\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

3. Pro $s > 0$ je $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx.$

4. Pro $s > 1$, $w > -1$ je

$$\frac{1}{(w+1)^s} + \frac{1}{(w+2)^s} + \frac{1}{(w+3)^s} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-wx}\,x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

Návod: Rozviňte $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots$; podle věty 61 lze integrovati člen po členu.

5. Pro $s > 0$, $a > 0$, $k > 0$ jest

$$\int_0^{+\infty} \exp(-ax^k)\,.\,x^{s-1}\,dx = \frac{1}{k}\,a^{-\frac{s}{k}}\,\Gamma\left(\frac{s}{k}\right).$$

6. Funkce $\Gamma(s)$ je spojitá v každém bodě $s \in K$ s výjimkou bodů $0, -1, -2, \ldots$ (Pro $\Re s > 0$ to víme z kap. VII, § 4, příkl. 1; pro ostatní s užijeme rovnice $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$.)

7. Pro celé $n \geqq 0$ je (při komplexním ε)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\,\Gamma(\varepsilon - n) = (-1)^n : n!$$

Návod: Užije se vztahů $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, $\lim\limits_{s\to 1} \Gamma(s) = 1$.

§ 3. Rozvoje pro lg $\Gamma(s)$, hlavně Stirlingův rozvoj. Ježto $\Gamma(s + 1) = s\,\Gamma(s)$, plyne z (6)

$$\Gamma(s+1) = e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{s}{n}}}{1 + \frac{s}{n}} \quad \text{pro } s \neq -1, -2, -3, \ldots$$

(pro $s = 0$ toto odvození selhává, ale rovnice je správná, ježto obě strany jsou rovny jedné). Odtud logaritmováním

$$\text{(31)} \qquad \lg \Gamma(s+1) = -Cs + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{n} - \lg \left(1 + \frac{s}{n} \right) \right) \text{ pro } s > -1 .$$

Užijeme-li řady pro $\lg (1 + z)$, máme

$$\lg \Gamma(s+1) = -Cs + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s^2}{2n^2} - \frac{s^3}{3n^3} + \frac{s^4}{4n^4} - \ldots \right) \text{ pro } -1 < s < 1 .$$
(32)

Pro tato s jest

$$\left| \frac{s^2}{2n^2} \right| + \left| \frac{s^3}{3n^3} \right| + \left| \frac{s^4}{4n^4} \right| + \ldots \leqq \frac{s^2}{2n^2} (1 + |s| + |s^2| + \ldots) = \frac{s^2}{2n^2(1 - |s|)}$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2}{2n^2(1 - |s|)}$ je konvergentní. Je tedy možno dívati se na pravou stranu v (32) jako na absolutně konvergentní zobecněnou řadu, kterou tedy můžeme uspořádati libovolným způsobem. Srovnáme-li podle mocnin s, obdržíme

$$\lg \Gamma(z+1) = -Cz + \tfrac{1}{2} s_2 z^2 - \tfrac{1}{3} s_3 z^3 + \tfrac{1}{4} s_4 z^4 - \ldots \text{ pro } -1 < z < 1 ,$$
(33)

při čemž klademe $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ (a píšeme pro větší zřetelnost z místo s).
Rozvoj (33) lze ještě upraviti tak, aby rychleji konvergoval (viz cvič. 1). Pro větší hodnoty s (na př. pro $s = z + n + 1$, n přirozené, $-1 < z < 1$) můžeme užíti rovnice

$$\lg \Gamma(z + n + 1) = \lg (z + n) + \lg (z + n - 1) + \ldots + \lg (z + 1) + \lg \Gamma(z + 1) ,$$

která však pro velké n je nepohodlná. Proto si odvodíme asymptotický rozvoj pro $\lg \Gamma(s + 1)$, užitečný pro velké hodnoty s.

Věta 255. (Rozvoj Stirlingův.) *Pro každé $s > 1$ a každé přirozené p jest*

$$\lg \Gamma(s+1) = \lg \sqrt{2\pi} + (s + \tfrac{1}{2}) \lg s - s + \tag{34}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k-1)\,2k} \cdot \frac{1}{s^{2k-1}} + \frac{(-1)^p B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)} \cdot \frac{2\Theta}{s^{2p+1}},$$

při čemž $0 \leqq \Theta \leqq 1$ a čísla $B_1, B_2, \ldots$ jsou Bernoulliova čísla (viz kap. XVI, věta 235).

Důkaz. Každé číslo $s > 1$ lze psáti ve tvaru $s = a + q$ $(0 < a \leqq 1$, q přirozené číslo). Potom jest

$$\lg \Gamma(s+1) = \lg \Gamma(a+q+1) =$$
$$= \lg (a+q) + \lg (a+q-1) + \ldots + \lg a + \lg \Gamma(a).$$

Užiji nyní věty 244 pro funkci $F(x) = \lg x$ s hodnotou $h = 1$. Vychází

$$\lg \Gamma(a+q+1) = \tfrac{1}{2} \lg (a+q) + \tag{35}$$
$$+ \int_a^{a+q} \lg x \, \mathrm{d}x + A + W + \lg \Gamma(a),$$

kde

$$W = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k-1)\,2k} \cdot \frac{1}{(a+q)^{2k-1}} + \frac{(-1)^p B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)} \cdot \frac{2\Theta}{(a+q)^{2p+1}}, \tag{36}$$

číslo A (viz tvrzení I věty 244) pak nezávisí na q, nýbrž pouze na a, p.[8]) Jest

$$\int_a^{a+q} \lg x \, \mathrm{d}x = (a+q) \lg (a+q) - (a+q) - a \lg a + a.$$

Tedy lze (35) psáti v tomto tvaru, kde B při pevném a, p je konstantní (t. j. nezávislé na q):

$$\lg \Gamma(a+q+1) = (a+q+\tfrac{1}{2}) \lg (a+q) - (a+q) + B + W. \tag{37}$$

Podle kap. XV, § 3, příkl. 1 jest

$$\lim_{s \to +\infty} \Gamma(s+1) \frac{e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

[8]) Snadno bychom zjistili, že A nezávisí dokonce ani na p, ale na tom nezáleží.

tedy

$$(38) \qquad \lim_{s \to +\infty} (\lg \Gamma(s+1) + s - (s + \tfrac{1}{2}) \lg s) = \lg \sqrt{2\pi}\,.$$

Omezíme-li se na hodnoty s tvaru $s = a + q$ při pevném a a přirozeném q, obdržíme

$$(39) \lim_{q \to \infty} (\lg \Gamma(a+q+1) + (a+q) - (a+q+\tfrac{1}{2}) \lg (a+q)) = \lg \sqrt{2\pi}\,.$$

Uvážíme-li však, že W má podle (36) pro $q \to \infty$ limitu nulu (při pevném a, p), vychází z (37), že limita (39) je rovna B (to je totiž číslo nezávislé na q). Tedy je $B = \lg \sqrt{2\pi}$, a z (37), (36) plyne (34).

Cvičení

1. Pište v (33) $-z$ místo z a sečtěte obě formule; vyjde

$$2(\tfrac{1}{2}s_2 z^2 + \tfrac{1}{4}s_4 z^4 + \tfrac{1}{6}s_6 z^6 + \ldots) = \lg(\Gamma(z+1)\,\Gamma(1-z)) =$$
$$= \lg(z\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)) = \lg \frac{\pi z}{\sin \pi z}\,;$$

tedy

$$\lg \Gamma(z+1) = \tfrac{1}{2} \lg \frac{\pi z}{\sin \pi z} - (Cz + \tfrac{1}{3}s_3 z^3 + \tfrac{1}{5}s_5 z^5 + \ldots)\,.$$

Užijeme-li ještě známého vzorce pro $\lg \dfrac{1+z}{1-z}$, obdržíme

$$(40) \qquad \begin{aligned} \lg \Gamma(z+1) &= \tfrac{1}{2} \lg \frac{\pi z}{\sin \pi z} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z} + \\ &+ z(1-C) - \tfrac{1}{3}(s_3 - 1)\,z^3 - \tfrac{1}{5}(s_5 - 1)\,z^5 - \ldots \end{aligned}$$

pro $-1 < z < 1$. Ježto pro velká k je s_k blízko jedničky (rozdíl není o mnoho větší než 2^{-k}), je řada v (40) dosti rychle konvergentní.

2. Budiž σ pevně dáno, $0 < \sigma < 1$. Potom je

$$(41) \qquad \Gamma(\sigma + it) \cong \sqrt{2\pi}\, e^{i(\frac{1}{2}\pi\sigma - \frac{1}{4}\pi)}\, e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma - \frac{1}{2}}\, e^{it(\lg t - 1)} \text{ pro } t \to +\infty\,.$$

Návod: Podle cvič. 2 v kap. VIII, § 4 je

$$\Gamma(\sigma + it) = e^{i\frac{1}{2}\pi(\sigma + it)} \int_0^{+\infty} x^{\sigma - 1} x^{it} e^{-ix}\, dx\,.$$

Substituce $x = vt$ nás vede k vyšetření integrálu

$$\int_0^{+\infty} v^{\sigma-1} e^{it(\lg v - v)} \, dv .$$

Integrál v mezích $0, \frac{1}{2}$ lze psáti

$$\frac{1}{it} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{v^\sigma}{1-v} \frac{d}{dv} e^{it(\lg v - v)} \, dv ,$$

a integrace per partes dává odhad $O(t^{-1})$. Podobně lze odhadnouti integrál v mezích $2, +\infty$. Konečně integrál v mezích $\frac{1}{2}, 2$ odhadneme metodou stacionární fáze (věta 228).

3. Rovnice $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ dovoluje nám rozšířiti platnost rovnice (41) na každé necelé reálné σ. Pro celá σ platí (41) též, ale naše metoda zde selhává.

§ 4. Vyjádření Eulerovy konstanty určitým integrálem.

Závěrem odvodíme vyjádření funkce $\lg \Gamma(s)$ a její derivace určitým integrálem. Napřed však odvodíme toto vyjádření Eulerovy konstanty:

Věta 256. *Budiž C Eulerova konstanta, definovaná rovnicí* (5). *Potom*

$$C = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} \, dt . \tag{42}$$

Důkaz. Písmeno n značí přirozené číslo. Jest

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} =$$

$$= \int_0^1 (1 + (1-t) + \ldots + (1-t)^{n-1}) \, dt = \int_0^1 (1 - (1-t)^n) \frac{dt}{t} ,$$

a tedy podle (5)

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 (1-(1-t)^n) \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{dt}{t} \right) .$$

První integrál po substituci $v = tn$ dává

$$\int_0^n \left(1 - \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n\right) \frac{dv}{v} ,$$

takže

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(\int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \right). \tag{43}$$

Již dříve jsme našli (viz na př. § 2, vzorec (26)), že

$$0 < \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \mathrm{e}^{-t} \text{ pro } 0 < t < n, \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t} \text{ pro } t > 0.$$

Kladu-li tedy

$$f_n(t) = t^{-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ pro } 1 \leqq t < n, \ f_n(t) = 0 \text{ pro } t \geqq n,$$

je podle věty 65[9])

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{44}$$

Dále: pro $0 < x < 1$ jest $0 < 1 - (1 - x)^n = nx(1 - \Theta x)^{n-1} \leqq nx$ $(0 < \Theta < 1$, podle věty o přírůstku funkce). Klademe-li tedy

$$g_n(t) = \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \text{ pro } 0 < t < 1,$$

je

$$0 < g_n(t) \leqq \frac{1}{t} \cdot n \cdot \frac{t}{n} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} g_n(t) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t},$$

takže podle věty 65

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 g_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1 - \mathrm{e}^{-t}) \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{45}$$

Z (43), (44), (45) plyne

$$C = \int_0^1 (1 - \mathrm{e}^{-t}) \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t};$$

---

[9]) Jest $f_n(t) < t^{-1}\mathrm{e}^{-t}$ pro $t \geqq 1$ a integrál funkce $t^{-1}\mathrm{e}^{-t}$ v mezích $1, +\infty$ konverguje.

(46) $$C = \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^1 e^{-t} \frac{dt}{t} - \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} \right).$$

Klademe-li $1 - e^{-\delta} = \Delta$, je $\lim_{\delta \to 0+} \frac{\Delta}{\delta} = 1$, tedy

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_\delta^\Delta \frac{dt}{t} = \lim_{\delta \to 0+} \lg \frac{\Delta}{\delta} = \lg 1 = 0\,,$$

takže místo (46) lze též psáti

(47) $$C = \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\Delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} \right).$$

Substituce $t = 1 - e^{-u}$, $dt = e^{-u}\, du$ dává

$$\int_\Delta^1 \frac{dt}{t} = \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-u}\, du}{1 - e^{-u}}\,,$$

takže (47) dává

(48) $$C = \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t}\, dt \right),$$

což je (42).

Cvičení

1. $C = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{\lg u} \right) du.$

(Substituce $t = \lg \frac{1}{u}$ v (42)).

2. V (48) pište

$$\int_\delta^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} = \int_{e^\delta - 1}^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} = \int_\delta^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} + o(1) \text{ pro } \delta \to 0+\,.$$

Tedy

$$C = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t}.$$

3. Rozvažte, že integrál (48) i integrály v cvič. 1, 2 jsou Lebesgueovy (t. j. „absolutně konvergentní").

§ 5. Vyjádření funkce $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ určitým integrálem (Gauss).

Pro $s > -1$ derivujme rovnici (31) člen po členu; vychází

$$(49)\quad \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n(n+s)}.$$

Poslední tvar ukazuje: je-li $-1 < a < b < +\infty$, je nekonečná řada v (49) stejnoměrně konvergentní v (a, b), takže derivování člen po členu je dovoleno (viz **D II**, věta 61). Ježto $\frac{1}{k} = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\, dt$ pro $k > 0$, lze (49) psáti

$$(50)\quad \begin{aligned} \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} &= -C + \lim_{m\to\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{m} (e^{-nt} - e^{-(n+s)t})\, dt = \\ &= -C + \lim_{m\to\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-t} - e^{-(s+1)t} - e^{-(m+1)t} + e^{-(m+1+s)t}) \frac{dt}{1-e^{-t}}. \end{aligned}$$

Užití rovnice (42) dává

$$(51)\quad \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-(s+1)t}}{1-e^{-t}} \right) dt + \lim_{m\to\infty} K_m(s),$$

kde

$$K_m(s) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(s+1)t}}{1-e^{-t}} e^{-mt}\, dt.$$

Funkce $\varphi(t) = (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(s+1)t}) : (1 - \mathrm{e}^{-t})$ je spojitá v $(0, +\infty)$, má limitu 0 pro $t \to +\infty$ (ježto $s + 1 > 0$) a má limitu s pro $t \to 0+$. Tedy je funkce $\varphi(t)$ (při pevném s) omezená v $(0, +\infty)$, takže existuje číslo $A(s)$ (nezávislé na t) tak, že $|\varphi(t)| < A(s)$ pro $0 < t < +\infty$, načež

$$|K_m(s)| \leqq A(s) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-mt}\, \mathrm{d}t = \frac{A(s)}{m},$$

takže limita v (51) vpravo je rovna nule. Píši-li ještě s místo $s + 1$, plyne z (51)

Věta 257. *Pro $s > 0$ je*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \lg \Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-st}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t. \tag{52}$$

Cvičení

1. Pro $s > 0$ je

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{-\lg t} - \frac{t^{s-1}}{1 - t}\right) \mathrm{d}t.$$

2. Pro $s > 0$ je podle (52)

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \lim_{\delta \to 0+} \left(\int_\delta^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t - \int_{\mathrm{e}^\delta - 1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + x)^s}\right);$$

podobným obratem jako v § 4, cvič. 2 obdržíme

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{(1 + t)^s}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{pro } s > 0.$$

3. Rovnice (49) platí i pro $s < -1$, pokud není s celé záporné. Dále: pro každé reálné s, různé od čísel $0, -1, -2, \ldots$ a pro $k = 2, 3, 4, \ldots$ je

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \lg \Gamma(s) = (-1)^k (k - 1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + s)^k}.$$

§ 6. Vyjádření funkce lg $\Gamma(s)$ určitým integrálem (Binet). V podstatě jde o to, integrovati integrál v (52) podle parametru s. To bychom mohli učiniti přímo (viz cvič. 2), ale dospěli bychom k jinému vyjádření, než mám na mysli. Pišme napřed v (52) $s + 1$ místo s a předpokládejme $s > 0$; vyjde

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{e^t - 1}\right) dt \tag{53}$$

(v posledním zlomku jsme v čitateli i ve jmenovateli násobili e^t). Jest

$$e^t - 1 = t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \dots,$$

tedy

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{6} t^2 + \dots\right)^{-1} = \tag{54}$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{2} t - \frac{1}{6} t^2 + \left(\frac{1}{2} t\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} t + \dots;$$

vpravo je — s výjimkou prvního členu — mocninná řada; rovnice pak platí pro všechna dosti malá $|t| \neq 0$.

Sestrojme integrál

$$J(s) = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-st}\, dt \tag{55}$$

a vyšetřujme, oč se liší od integrálu v (53). Zřejmě vyjde

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = J(s) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t}\, dt =$$

$$= J(s) + \frac{1}{2s} + \lg s$$

(viz kap. VIII, § 3, příkl. 8). Integrací od 1 do s ($s > 0$) dostáváme

$$\lg \Gamma(s) = \lg \Gamma(s+1) - \lg s =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \lg s + s \lg s - s + 1 + \int_1^s J(\sigma)\, d\sigma. \tag{56}$$

Přitom (viz (55))

$$J(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}\, dt\,, \quad f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\,,$$

takže poslední integrál v (56) je vlastně dvojnásobný integrál, v němž nyní vyměníme pořad integrací. Že to smíme učinit (podle Fubiniovy věty), nahlédneme takto: $f(t)$ je spojitá v $(0, +\infty)$ a má konečnou limitu pro $t \to +\infty$ a podle (54) také pro $t \to 0+$, tedy je omezená: $|f(t)| < M$ pro $0 < t < +\infty$, a pro konečné meze $0 < a < b < +\infty$ (tedy též pro meze $1, s$) je

$$\int_a^b \left(\int_0^{+\infty} M e^{-\sigma t}\, dt \right) d\sigma = M \int_a^b \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty\,.$$

Tedy

$$\int_1^s J(\sigma)\, d\sigma = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^s f(t)\, e^{-\sigma t}\, d\sigma \right) dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,.\,\frac{e^{-t} - e^{-st}}{t}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, \frac{dt}{t} - \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, \frac{dt}{t}$$

(oba tyto integrály totiž konvergují, neboť $f(t) : t$ je spojitá v $(0, +\infty)$, má limitu 0 pro $t \to +\infty$ a limitu $-\frac{1}{12}$ pro $t \to 0+$ podle (54), takže je omezená, t. j. $|f(t) : t| < K$ v $(0, +\infty)$). První integrál nezávisí na s, označme jej B. Tedy (užiji (56))

$$\lg \Gamma(s) = (s - \tfrac{1}{2}) \lg s - s + (B + 1) - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, e^{-st}\, dt\,.$$

Proveďme limitu pro $s \to +\infty$; absolutní hodnota integrálu vpravo je nejvýše $K \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{K}{s}$ a má limitu 0, takže

$$B + 1 = \lim_{s \to +\infty} (\lg \Gamma(s) - (s - \tfrac{1}{2}) \lg s + s)\,.$$

Podle (38) dostaneme — píšeme-li $\lg \Gamma(s+1) = \lg \Gamma(s) + \lg s$ — rovnici $B + 1 = \lg \sqrt{2\pi}$; tedy platí

Věta 258. *Pro $s > 0$ jest*

$$\lg \Gamma(s) = (s - \tfrac{1}{2}) \lg s - s + \lg \sqrt{2\pi} +$$
$$+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-st} \, dt \, .$$

Cvičení

1. Pro přirozené k plyne z věty 258

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-kt} \, dt = \left(k - \frac{1}{2} \right) \lg k -$$
$$- k + \lg \sqrt{2\pi} - \lg ((k-1)!) \, .$$

2. Integrujeme-li v (52) podle s, obdržíme záměnou integračního pořadí (dokažte její oprávněnost!)

$$\lg \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t}(s-1) + \frac{e^{-st} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t} \quad \text{pro } s > 0 \, .$$