Diferenciální počet II

Kapitola VI. Metrické prostory. Spojitost a limita

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 222--354.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402013

KAPITOLA VI.

METRICKÉ PROSTORY. SPOJITOST A LIMITA

§ 1. Úvod. Pojem metrického prostoru. Limita posloupnosti. Spojité zobrazení. V kap. V jsme studovali vlastnosti reálných funkcí jedné reálné proměnné. Šlo tedy o zobrazení z $\boldsymbol{E}_1$ do $\boldsymbol{E}_1$ (po příp. do $\boldsymbol{E}_1^*$, pokud funkce nabývaly také nekonečných hodnot). V této rozsáhlé kapitole budeme studovati především vlastnosti konečných reálných funkcí r proměnných, t. j. zobrazení z $\boldsymbol{E}_r$ do $\boldsymbol{E}_1$. Ale nebylo by účelné, kdybychom se omezili jen na tento případ; neboť budeme příležitostně vyšetřovati také komplexní funkce reálných nebo komplexních proměnných (t. j. zobrazení z $\boldsymbol{E}_r$ do $\boldsymbol{K}$ nebo z $\boldsymbol{K}_r$ do $\boldsymbol{K}$), zobrazení z $\boldsymbol{E}_r$ do $\boldsymbol{E}_s$ atd. Je tedy účelnější a přehlednější, probereme-li tyto věci s obecnějšího hlediska, zahrnujícího všechny tyto případy. Mimo to získá tím čtenář vědomosti, které mu budou užitečné v mnoha partiích matematiky.

Studiu funkcí jedné proměnné jsme v kap. V předeslali studium množin reálných čísel, t. j. množin $M \subset \boldsymbol{E}_1$. Množinu $\boldsymbol{E}_1$ nazýváme též číselnou osou, její prvky (t. j. reálná čísla) nazýváme body. Vzdáleností bodů x, y jsme nazvali číslo — označme je $\varrho(x, y)$ — definované rovnicí

$$\varrho(x, y) = |x - y| \,. \tag{1}$$

Zřejmé jsou tyto tři vlastnosti funkce $\varrho(x, y)$:

I. $\varrho(x, x) = 0$.

II. Je-li $x \neq y$, je $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) > 0$.

III. $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Třetí vlastnost plyne z toho, že

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leqq |x - y| + |y - z| \,.$$

Na těchto třech vlastnostech spočívaly mnohé (ne ovšem všechny) úvahy v kap. V.

Příklad 1. Množina $\boldsymbol{E}_2$, t. j. množina všech „bodů“ $[x_1, x_2]$ ($x_1 \in \boldsymbol{E}_1$,

$x_2 \in \mathsf{E}_1$) se často nazývá rovinou a vzdáleností bodů $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ se nazývá číslo

$$(2) \qquad \varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

(to odpovídá Pythagorově větě).

Podobně se zavádí vzdálenost $\varrho(x, y)$ dvou bodů $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_r]$ v r-rozměrném prostoru E_r rovnicí

$$(3) \qquad \varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_r - y_r)^2}\,.$$

Že také tato funkce má svrchu zmíněné vlastnosti I, II, III, ukážeme za chvilku.

Příklad 2. V matematice se vyskytuje ještě mnoho zcela odlišných případů, ve kterých je účelno definovati „vzdálenost" neboli „odchylku" $\varrho(x, y)$ dvou prvků x, y podobným způsobem. Buďte na př. a, b ($a < b$) dvě konečná reálná čísla a budiž B množina všech reálných konečných a omezených funkcí v oboru $\langle a, b\rangle$. Jsou-li x, y dva prvky z B (t. j. dvě reálné omezené funkce $x(t)$, $y(t)$), je přirozeno definovati

$$(4) \qquad \varrho(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|\,.^{1)}$$

Že ϱ má vlastnosti I, II, je jasno. Že má též vlastnost III, je patrno takto: Pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ jest

$$|x(t) - z(t)| \leqq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)\,;$$

přejdeme-li vlevo k supremu, dostaneme III.

Jeví se tedy jistě účelným zavésti nový pojem, který shrnuje tyto a podobné případy:

Definice 14. *Budiž dána nějaká množina P a mimo to konečná reálná funkce ϱ v oboru $P \times P$ (t. j. $\varrho(x, y)$ je definováno pro všechna $x \in P$, $y \in P$), jež má tyto vlastnosti:*

1. $\varrho(x, x) = 0$ *pro každé* $x \in P$. 2. *Je-li* $x \in P, y \in P, x \neq y$, *je* $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) > 0$. 3. *Je-li* $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$, *je*

$$\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)\,.$$

[1]) $\varrho(x, y)$ je tedy konečné nezáporné číslo.

Potom funkci ϱ nazýváme metrikou v množině P; množinu P a funkci ϱ dohromady nazýváme metrickým prostorem, znak (P, ϱ).

Poznámka 1. Metrický prostor je tedy jakákoliv množina, opatřená metrikou. Prvky metrického prostoru téměř vždy budeme nazývati body. Jsou-li x, y dva body metrického prostoru (P, ϱ), nazýváme číslo $\varrho(x, y)$ jejich *odchylkou* nebo *vzdáleností*.[2]) Není-li pochybnosti o tom, o kterou metriku jde, mluvíme krátce o metrickém prostoru P místo (P, ϱ).

Vlastnosti 1, 2, 3 z definice jsou velmi názorné. Vlastnosti 1 a 2 požadují, aby vzdálenost bodu od sebe sama byla rovna nule, kdežto pro $x \neq y$ má být vzdálenost $\varrho(x, y)$ kladná (a stejná jako $\varrho(y, x)$). Nerovnost $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ je t. zv. trojúhelníková nerovnost; je zobecněním nerovnosti známé z elementární geometrie.

Příklad 3. Funkce (1) a (4) jsou vskutku metriky, jak jsme již zjistili. Ověřme ještě, že funkce (3) (jejímiž speciálními případy pro $r = 1$, $r = 2$ jsou funkce (1), (2)) je metrikou v $\mathbf{E}_r$. Obecněji: zvolme $p \geqq 1$ a dokažme, že funkce

$$\varrho_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{r} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

je metrikou v $\mathbf{E}_r$. Vlastnosti 1, 2 jsou zřejmé; vlastnost 3 plyne ze vzorce (128) v kap. V, klademe-li v něm $a_j = x_j - y_j$, $b_j = y_j - z_j$, tedy $a_j + b_j = x_j - z_j$. Pro $p = 1$ dostáváme speciálně metriku

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{j=1}^{r} |x_j - y_j| \,. \tag{6}$$

Další metrika v $\mathbf{E}_r$ je funkce

$$\sigma(x, y) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} |x_j - y_j| \,;^{3)} \tag{7}$$

vlastnost 3 plyne takto:

$$|x_j - z_j| \leqq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

pro každé $j = 1, \ldots, r$. Nejužívanější metriky v $\mathbf{E}_r$ jsou ϱ_2 (t. j. metrika (3)) a σ. Metrika ϱ_2 se nazývá eukleidovskou metrikou a prostor $\mathbf{E}_r$ s tou-

---

[2]) Z vlastnosti 2 plyne, že je jedno, který z těchto bodů bereme za první a který za druhý bod.

[3]) Snadno zjistíte, že pro jakékoliv body x, y je $\sigma(x, y) = \lim_{p \to +\infty} \varrho_p(x, y)$.

to metrikou se nazývá r-**rozměrným eukleidovským prostorem.** Metriky (5), (7) se „příliš neliší". Pro každé $p \geqq 1$ je zřejmě

$$(8) \qquad \sigma(x, y) \leqq \varrho_p(x, y) \leqq r^{\frac{1}{p}}\sigma(x, y) \leqq r\sigma(x, y) .$$

Pro $r = 1$ všechny tyto metriky splývají.

Je vidět, že do téže množiny P můžeme zavésti různé metriky, jež je ovšem nutno nějak rozlišiti označením, na př. ϱ, σ, σ', ...; příslušné metrické prostory (P, ϱ), (P, σ), (P, σ'), ... jsou ovšem různé.

Příklad 4. (Normované lineární neboli vektorové prostory.) Budiž (viz kap. I, § 10) P modul (reálný, resp. komplexní), o jeho nulový bod.

Konečnou reálnou funkci ν v oboru P nazýváme **normou,** jestliže jsou splněny tyto tři vlastnosti:

a) Pro každé $x \in P$, $x \neq o$ je $\nu(x) > 0$.

b) $x \in P, y \in P \Rightarrow \nu(x + y) \leqq \nu(x) + \nu(y)$.

c) Pro každé konečné reálné (resp. komplexní) α a pro každé $x \in P$ je $\nu(\alpha x) = |\alpha| \, \nu(x)$.

Poznamenejme, že z c) plyne $\nu(o) = 0$, neboť $\nu(o) = \nu(0 \, . \, x) = 0 \, . \, \nu(x) = 0$, a že $\nu(- x) = \nu(- 1 \, . \, x) = |- 1| \, \nu(x) = \nu(x)$.

Modul, v němž je dána norma, se nazývá **normovaným lineárním nebo vektorovým prostorem.** Tyto prostory jsou základem, na němž spočívá důležitá theorie lineárních operací, vybudovaná okolo r. 1930 polským matematikem S. Banachem. Tato theorie, důležitá v různých oborech matematiky i v aplikacích, jest od té doby intensivně pěstována na celém světě; zvláště významných úspěchů dosáhli zde matematikové sovětští.

Norma $\nu(x)$ se často značí $\|x\|$ (tohoto označení se přidržíme) nebo dokonce $|x|$; toto označení vzniklo z toho, že v $\mathbf{E}_1$ nebo v $\mathbf{K}$ (t. j. v oboru reálných nebo komplexních čísel) je funkce „$\nu(x) =$ absolutní hodnotě čísla x" zřejmě normou.

Ihned vidíte, že v $\mathbf{E}_r$ funkce

$$\nu_p(x) = \left(\sum_{j=1}^{r} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqq 1)\,, \tag{9}$$

$$\mu(x) = \max_{1 \leq j \leq r} |x_j| \tag{10}$$

jsou vskutku normami (u funkce ν_p použijeme vzorce (128) z kap. V k ověření vlastnosti c). Rovněž tak v prostoru B (příkl. 2) je funkce

$$\nu(x) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| \tag{11}$$

zřejmě normou.

Budiž P normovaný lineární prostor; normu značme $\|x\|$. Položme $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.[4]) Tvrdím, že ϱ je metrika v P (mluvíme-li o normovaném lineárním prostoru, pojímáme jej proto vždy jako metrický prostor právě s touto metrikou). Vlastnost 1 z def. 14 je zřejmá: $\varrho(x, x) = \|x - x\| = \|o\| = 0$. Vlastnost 2 rovněž: Pro $x \neq y$ je $x - y \neq o$, tedy $0 < \varrho(x, y) = \|x - y\| = \|-(x - y)\| = \|y - x\| = \varrho(y, x)$. A vlastnost 3 je triviální: $\varrho(x, z) = \|x - z\| \leqq \|x - y\| + \|y - z\| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Zavedeme-li v $\mathbf{E}_r$ normy (9), (10) nebo v B normu (11), vidíme ihned, že jsou tím v $\mathbf{E}_r$ a v B právě zavedeny metriky z příkl. 2, 3.

Příklad 5. Budiž M množina všech posloupností konečných reálných čísel; její prvky jsou tedy posloupnosti $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,[5]) $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \ldots$, kde $x_n \in \mathbf{E}_1$, $y_n \in \mathbf{E}_1, \ldots$ Z této množiny vytvoříme přirozeným způsobem modul, definujeme-li (pro $a \in \mathbf{E}_1$) $x + y = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $ax = \{ax_n\}_{n=1}^{\infty}$; jest ovšem $o = \{0, 0, 0, \ldots\}$. Pro $x \in M$, $y \in M$ položme

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \tag{12}$$

(to je zřejmě konvergentní řada, n-tý člen je menší než 2^{-n}). Tvrdím, že ϱ je metrika v M. Vlastnosti 1, 2 z def. 14 jsou zřejmé. Vlastnost 3 pak plyne takto: Funkce $\dfrac{\xi}{1 + \xi}$ je rostoucí pro $\xi > -1$. Tedy (ježto $|x_n - z_n| \leqq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$) jest

[4]) Tedy speciálně pro $y = o$ dostáváme, že $\|x\| = \varrho(x, o)$.

[5]) Takto se často značí posloupnost $x_1, x_2, \ldots$

$$\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \leqq \frac{|x_n - y_n| + |y_n - z_n|}{1 + |x_n - y_n| + |y_n - z_n|} \leqq$$
$$\leqq \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}$$

(v posledním součtu jsem místo společného jmenovatele napsal jmenovatele menší); odtud podle (12) ihned plyne $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Ale tato metrika není vytvořena žádnou normou prostoru M podle předpisu příkladu 4. Neboť kdyby tomu tak bylo, musila by norma bodu x (podle pozn. [4])) býti rovna číslu $\varrho(x, o)$. Ale zvolíte-li $x = \{1, 0, 0, \ldots\}$, je $ax = \{a, 0, 0, \ldots\}$ pro $a \in \mathbf{E}_1$, tedy podle (12) $\varrho(x, 0) = \frac{1}{4}$, $\varrho(ax, o) = \frac{1}{2}\frac{|a|}{1 + |a|}$, takže není obecně $\varrho(ax, o) = |a|\, \varrho(x, o)$ (stačí dosadit na př. $a = 2$), t. j. funkce $\varrho(x, o)$ jakožto funkce bodu x není normou v M. Uvedl jsem tento příklad hlavně proto, aby se čtenář nedomníval, že každá metrika v modulu musí býti vytvořena z nějaké normy modulu rovnicí $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Poznámka 2. Budiž (P, ϱ) metrický prostor; budiž $M \subset P$. Definujme funkci σ v oboru $M \times M$ rovnicí $\sigma(x, y) = \varrho(x, y)$ (pro $x \in M$, $y \in M$); σ je prostě parciální funkce $\varrho_{M \times M}$. Ježto vlastnosti 1, 2, 3 jsou splněny pro všechna x, y, z z P, jsou splněny speciálně pro všechna x, y, z z M, t. j. σ je metrika v M. O metrickém prostoru (M, σ) říkáme, že je **vnořen** do (P, ϱ) nebo že M je **podprostorem** prostoru P (P je **nadprostorem** prostoru M), nebo že M je **bodová množina** v P (nebo prostoru P).[6]) Vyjadřujeme to obyčejně znakem $M \subset P$, který tedy v tomto případě znamená:

1. Jest $M \subset P$ ve smyslu obecné theorie množin, t. j. $x \in M \Rightarrow x \in P$.

2. Kterékoliv dva body z M mají v prostoru M touž vzdálenost jako v prostoru P.

V dalším budeme v této knize užívati znaku $M \subset P$ téměř výhradně v tomto smyslu; kde by hrozilo nedorozumění, odstraníme je vhodnou poznámkou.

---

[6]) Vlastně jsem měl psáti (M, σ) a (P, ϱ). Ovšem $\emptyset$ a (P, ϱ) jsou také podprostory prostoru (P, ϱ).

Příklad 6. Často se vyskytuje tento případ: Máme r metrických prostorů $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$. Potom $P = P_1 \times \ldots \times P_r$ je množina všech r-členných posloupností $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_r]$ a pod., kde $x_j \in P_j$, $y_j \in P_j$. Zaveďme tyto funkce v oboru $P \times P$:

$$\varrho^p(x, y) = \varrho_1^p(x_1, y_1) + \ldots + \varrho_r^p(x_r, y_r) \quad (p \geqq 1) , \tag{13}$$

$$\sigma(x, y) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} \varrho_j(x_j, y_j) ; \tag{14}$$

číslo $\varrho(x, y)$[7]) beru *nezáporné*. Tvrdím, že ϱ, σ jsou metriky v P. Vlastnosti 1, 2 z def. 14 jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost (vlastnost 3) plyne takto: Ježto ϱ_j jsou metriky, je

$$\varrho(x, z) = \left(\sum_{j=1}^{r} \varrho_j^p(x_j, z_j)\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_j (\varrho_j(x_j, y_j) + \varrho_j(y_j, z_j))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_j \varrho_j^p(x_j, y_j)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_j \varrho_j^p(y_j, z_j)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(věta 105), t. j. $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Důkaz pro σ je obdobný, ale snazší.

Jak víme, můžeme na př. kartézský součin $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_6$ vytvořit také tak, že na př. položíme $P_1 \times P_2 = Q_1$, $P_3 = Q_2$, $P_4 \times \times P_5 \times P_6 = Q_3$, načež $P = Q_1 \times Q_2 \times Q_3$.[8]) Vzorec (13) ukazuje ihned, že obojím způsobem dostaneme v P touž metriku. Jsou-li totiž τ_1, τ_2, τ_3 metriky v Q_1, Q_2, Q_3, je podle (13) (psáno velmi zkráceně)

$$\tau_1^p + \tau_2^p + \tau_3^p = (\varrho_1^p + \varrho_2^p) + \varrho_3^p + (\varrho_4^p + \varrho_5^p + \varrho_6^p) \, .$$

Obecně: ať upravím kartézský součin jakkoliv ve smyslu asociativního zákona, dostanu v něm vždy touž metriku. Totéž platí pro metriku (14). Ovšem je nutno v celém výpočtu užívati buďto stále vzorce (13) (s týmž p), nebo stále vzorce (14).

Vyjdu-li speciálně z prostoru $\mathbf{E}_1$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$, dostanu pro $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_1$ podle předpisu (13) metriku (5) a podle předpisu (14) metriku (7).

---

[7]) Metrika ϱ ovšem závisí na p.

[8]) V jakém smyslu je rozuměti této rovnici, bylo řečeno v kap. I, § 8, pozn. 5.

Poznamenejme ještě, že pro metriky (13), (14) zřejmě platí

$$(15) \qquad \sigma(x, y) \leqq \varrho(x, y) \leqq r^{\frac{1}{p}}\sigma(x, y) \leqq r\sigma(x, y) .$$

Poznámka 3. Budu-li v dalším mluvit o kartézském součinu $P = P_1 \times \ldots \times P_r$ metrických prostorů, budu tím rozuměti vždy prostor (P, ϱ) s metrikou (13) nebo (P, σ) s metrikou (14). Speciálně znak $\mathbf{E}_r$ bude vždy značit prostor $(\mathbf{E}_r, \varrho_p)$ s metrikou (5) nebo $(\mathbf{E}_r, \sigma)$ s metrikou (7). Vždy se ovšem budu v celé úvaze držet téhož předpisu. Při tomto označení je $\mathbf{E}_{r+s+t} = \mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_s \times \mathbf{E}_t$ (i co do metriky). Při většině našich úvah nebude záležeti na tom, kterého z našich předpisů použiji. Odchylky od této úmluvy vždy poznamenám.

Poznámka 4. Mějme v množině P dvě metriky ϱ, σ. Budeme říkati, že tyto metriky jsou „skoro stejné",[9]) jestliže existují kladná konečná čísla a, b tak, že platí:

$$(x \in P, y \in P, x \neq y) \Rightarrow \left(a \leqq \frac{\varrho(x, y)}{\sigma(x, y)} \leqq b\right).$$

Na př.: Podle (15) jsou metriky (13), (14) skoro stejné. Podle (8) jsou metriky (5), (7) v $\mathbf{E}_r$ skoro stejné. Téměř u všech vlastností, které budeme zde studovat, bude lhostejné, kterou ze dvou skoro stejných metrik vezmeme.

Budiž P nějaká množina; do ní jest ovšem možno obecně zavésti metriku na mnoho způsobů. Píši-li $\varrho \sim \sigma$, jestliže metriky ϱ, σ jsou „skoro stejné", dostávám tím zřejmě ekvivalenci ve smyslu kap. I, § 7. Všechny metriky v P je tedy možno rozděliti do tříd tak, že dvě metriky patří do téže třídy tehdy a jen tehdy, jsou-li skoro stejné.

Častěji než „skoro stejné" metriky se studují v literatuře dvojice metrik ϱ, σ (v téže množině P), které mají tuto vlastnost: Jsou-li $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ jakékoliv dvě posloupnosti bodů z P, je $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, y_n) = 0$ (jsou-li ϱ, σ skoro stejné, mají zřejmě tuto vlastnost). Je jasné, že také tento vztah je ekvivalencí v podobném smyslu jako svrchu.

---

[9]) Není to nikterak obvyklý název.

Poznámka 5. Zavedeme ještě jedno označení. Budiž (P, ϱ) metrický prostor, $a \in P$, $0 < \varepsilon < +\infty$. Definujme

$$(16) \qquad \Omega_{(P,\varrho)}(a, \varepsilon) = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in P, \varrho(a, x) < \varepsilon) .$$

(Čtěme: množina všech bodů $x \in P$, pro které je $\varrho(a, x) < \varepsilon$.) Tuto množinu nazýváme **koulí** (obšírněji: otevřenou koulí) v prostoru (P, ϱ) o středu a a poloměru ε. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme $\Omega_P(a, \varepsilon)$ nebo $\Omega(a, \varepsilon)$.

„Podoba" „koule" záleží ovšem na množině P a na metrice ϱ. Na př. vyšetřujme „kouli" $\Omega(o, \varepsilon)$ v prostoru $\mathbf{E}_3$. Jde-li o eukleidovskou metriku, je to vskutku koule v obvyklém geometrickém smyslu; jde-li o metriku σ (viz (7)), je to množina $\mathop{\mathcal{E}}_x(\mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, |x_3|) < \varepsilon)$, což je — ve smyslu Eukleidovy geometrie — krychle; jde-li o metriku ϱ_1 (viz (6)), je to množina $\mathop{\mathcal{E}}_x(|x_1| + |x_2| + |x_3| < \varepsilon)$, t. j. osmistěn. Zavedu-li do množiny $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel eukleidovskou metriku $\varrho(x, y) = |x - y|$, skládá se $\Omega_{(\mathbf{N},\varrho)}(0, 2)$ právě ze tří bodů $0, 1, -1$. Atd. V $\mathbf{E}_1$ (s eukleidovskou metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$) je ovšem $\Omega(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Zavedení metriky nám umožňuje zobecniti na obecné metrické prostory mnohé pojmy, zavedené v kap. V. To budeme nyní prováděti; čtenář udělá dobře, bude-li si stále připomínati příslušné věty z kap. V a bude-li se snažit představit si věc aspoň v $\mathbf{E}_2$; přes obecnost následujících úvah jde o věci velmi názorné.

Je-li $x \in \mathbf{E}_1$ a je-li $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost čísel z $\mathbf{E}_1$, můžeme rovnici $\lim x_n = x$ psáti také v ekvivalentním tvaru $\lim |x_n - x| = 0$ neboli $\lim \varrho(x_n, x) = 0$. Definujeme obecně obdobně:

Definice 15. *Budiž $x \in (P, \varrho)$, budiž $x_n \in (P, \varrho)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Říkáme, že posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ má limitu x a píšeme*

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x ,$$

jestliže

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0 .$$[10]

---

[10]) V této rovnici jde již o známý pojem: limita posloupnosti reálných čísel $\varrho(x_n, x)$.

Uvědomme si, že rovnice (18) zůstává v platnosti, jestliže v posloupnosti vynechám, přidám nebo změním konečný počet členů (viz **DI**, kap. II, § 1). To nás vede k této úmluvě: Smysl vzorce (17) budeme definovati rovnicí (18) *i tehdy, jestliže konečný počet členů posloupnosti* $x_1, x_2, \ldots$ *není definován.*

Poznamenejme, že platnost rovnice (17) závisí na metrice ϱ. Kdybychom tedy měli v množině P dvě metriky ϱ, σ, mohlo by se státi, že by (17) na př. platilo při metrice ϱ a neplatilo při metrice σ.

Poznámka 6. Posloupnost má v (P, ϱ) nejvýše jednu limitu. Důkaz: Budiž současně $\lim \varrho(x_n, x) = 0 = \lim \varrho(x_n, y)$; máme dokázati, že $x = y$. Trojúhelníková nerovnost dává $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y)$ pro každé n. Ale pravá strana má limitu 0,[11]) tedy $\varrho(x, y) \leqq 0$, tedy (podle vlastnosti 2 z def. 14) nutně $x = y$ (a ovšem $\varrho(x, y) = 0$).

Poznámka 7. Je-li $x_n = x$ pro všechna $n > n_0$, je $\lim x_n = x$. Důkaz: Pro $n > n_0$ je $\varrho(x_n, x) = 0$.

Poznámka 8. Je-li $\lim x_n = x$ a je-li $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ vybraná posloupnost, je též $\lim x_{k_n} = x$. Důkaz: Posloupnost reálných čísel $\varrho(x_{k_n}, x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ má za limitu nulu, ježto je vybrána z posloupnosti reálných čísel $\varrho(x_n, x)$, jež má limitu 0.[12])

Mějme nyní zobrazení f z metrického prostoru (P, ϱ) do metrického prostoru (Q, σ). Metriky ϱ, σ nám umožňují definovati spojitost přesně tak, jako jsme ji definovali v kap. V, § 3;[13]) pouze místo $|x - a|$ píšeme $\varrho(a, x)$, místo $|f(x) - f(a)|$ píšeme $\sigma(f(a), f(x))$ (body $f(x)$ leží v (Q, σ)). Tedy:

Definice 16. *Budiž f zobrazení z prostoru (P, ϱ) do prostoru (Q, σ). Budiž $A \subset P$. Potom definujeme:*

1. *Je-li $a \in A$, a jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace*

[11]) Nehledejte zde žádné problémy: zde už jde o posloupnosti reálných čísel, ne o posloupnosti bodů z P.

[12]) Viz **DI**, věta 62.

[13]) Pro konečné reálné funkce jedné reálné proměnné; případ $f(a) = \pm\infty$ prozatím pod definici 16 nespadá.

(19) $$(x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$ [14])

říkáme, že zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k množině A.

2. *Je-li f spojité vzhledem k A v každém bodě a množiny A, říkáme, že f je spojité v A.*

3. *Je-li f spojité v A, kde A je oborem zobrazení f, říkáme krátce, že f je spojité.*

Poznámka 9. Pojmenování v definici není zcela úplné: jedno a totéž zobrazení může nebo nemusí být spojité podle toho, o kterou metriku ϱ či σ jde. Mělo by se tedy snad říkat „ϱ-σ-spojité" nebo podobně; ale není to zvykem a není toho téměř nikdy třeba. Je zřejmý lokální charakter bodu 1 naší definice: nahradím-li množinu A množinou $B \subset P$ a zobrazení f zobrazením g tak, že pro jisté $\Delta > 0$ je $\Omega_A(a, \Delta) = \Omega_B(a, \Delta)$ a že pro všechna $x \in \Omega_A(a, \Delta)$ má symbol $f(x)$ týž smysl jako $g(x)$, potom zřejmě platí: Je-li f spojité v a vzhledem k A, je též g spojité v a vzhledem k B. Na př. u funkcí jedné reálné proměnné definujeme „spojitost zprava v bodě a" jako spojitost v bodě a vzhledem k intervalu $\langle a, +\infty)$; ale mohli bychom také říci „vzhledem k intervalu $\langle a, a + 1)$" nebo $\langle a, a + \frac{1}{10}\rangle$ a pod., a smysl výroku se tím nezmění. Jestliže místo slova zobrazení užívám slova funkce, mluvím ovšem o spojité funkci a pod.

Poznámka 10. Ptáme-li se, zda nějaké zobrazení f z (P, ϱ) do (Q, σ) je spojité v množině $A \subset P$ (t. j. spojité vzhledem k A v každém bodě množiny A), přicházejí podle definice 16 v úvahu pouze čísla $\varrho(x, a)$, $\sigma(f(x), f(a))$ pro $a \in A$, $x \in A$. Není tedy žádnou újmou obecnosti našeho vyšetřování, omezím-li se na parciální zobrazení f_A a vezmu-li místo (P, ϱ), (Q, σ) přímo prostory A, $f(A)$. Píši-li tedy opět P, Q, f místo A, $f(A)$, f_A, jde o zobrazení f prostoru (P, ϱ) (t. j. obor f je P) na (Q, σ). Je-li toto zobrazení prosté, existuje inversní zobrazení f_{-1} prostoru Q na P. Následující příklad ukazuje, že se může státi, že f je spojité (t. j. spojité v P), ale f_{-1} není spojité.

Budiž (všechno se odehrává v $\mathbf{E}_1$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$) $P = (0, 1) \cup \langle 2, 3)$ a položme $f(x) = x$ pro $0 < x < 1$, $f(x) = x - 1$

[14]) T. j.: Je-li $x \in \Omega_{(A, \varrho)}(a, \delta)$, je $f(x) \in \Omega_{(Q, \sigma)}(f(a), \varepsilon)$. Tím je též implicite řečeno, že f je definováno v $\Omega_{(A, \varrho)}(a, \delta)$.

pro $2 \leqq x < 3$; položme $Q = f(P) = (0, 2)$. Zřejmě je f prostá a spojitá v P. Inversní funkci označíme φ; je $\varphi(y) = y$ pro $0 < y < 1$, $\varphi(y) = y + 1$ pro $1 \leqq y < 2$ — nespojitost v bodě $y = 1$.

Definujme: Budiž f spojité a prosté zobrazení prostoru (P, ϱ) na (Q, σ).[15] Jestliže také f_{-1} je spojité (v prostoru Q), říkáme, že f je **homeomorfní** neboli **topologické** zobrazení. Ze symetrie definice je zřejmo, že potom také f_{-1} je homeomorfní. Prostory (P, ϱ), (Q, σ) se nazývají homeomorfní, existuje-li homeomorfní zobrazení P na Q.

Příklad 7 (s eukleidovskou metrikou): Funkce konečná, rostoucí a spojitá v intervalu $J \subset \mathbf{E}_1$ zobrazuje tento interval na jistý interval $J' \subset \mathbf{E}_1$. Toto zobrazení je homeomorfní, ježto podle věty 114 v **DI** je inversní funkce spojitá v J'.

§ 2. Vzdálenost. Cauchyovské posloupnosti. Definice úplného prostoru. Budiž (P, ϱ) metrický prostor, $a \in P$, $A \subset P$, $B \subset P$.[16] Zavedeme trvale tato označení:

$$\varrho(a, A) = \inf_{x \in A} \varrho(a, x)\,, \quad d(a, A) = \sup_{x \in A} \varrho(a, x) \tag{20}$$

(t. zv. **dolní a horní vzdálenost** bodu a od množiny A),

$$\varrho(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} \varrho(x, y)\,, \quad d(A, B) = \sup_{x \in A,\, y \in B} \varrho(x, y) \tag{21}$$

(t. zv. dolní a horní vzdálenost množin A, B). Význam těchto symbolů je velmi názorný. Zřejmě $\varrho(a, B) = \varrho((a), B)$, $\varrho(a, b) = \varrho((a), (b)) = d((a), (b))$, $\varrho(A, B) = \inf_{x \in A} \varrho(x, B)$ (viz kap. II, § 1, příkl. 2) a pod.

Důležitější je dolní vzdálenost; horní vzdálenost se nejčastěji vyskytuje pro $A = B$, načež se zkráceně píše

$$d(A) = d(A, A) = \sup_{x \in A,\, y \in A} \varrho(x, y)\,; \tag{22}$$

$d(A)$ je t. zv. **průměr** množiny A.

Čísla $\varrho(a, B)$, $\varrho(A, B)$ jsou vždy konečná a nezáporná, s výjimkou případů $\varrho(a, \emptyset) = \varrho(A, \emptyset) = \varrho(\emptyset, B) = +\infty$. Podobně čísla $d(a, B)$,

---

[15]) T. j.: f má obor P a je spojité v P.
[16]) Užívám úmluvy z § 1, pozn. 2: $A \subset P$ značí, že prostor A je vnořen do (P, ϱ).

$d(A, B)$, $d(A)$ jsou vždy nezáporná (ale nemusí být konečná), s výjimkou případů $d(\emptyset, B) = d(A, \emptyset) = d(a, \emptyset) = d(\emptyset) = -\infty$. Množina A se nazývá **omezená**, je-li $d(A) < +\infty$.

V $\mathbf{E}_1$ je to zřejmě v souhlase s pojmem známým z **DI**, kap. I, § 8.

Poznámka 1. Budiž $a \in (P, \varrho)$, $A \subset (P, \varrho)$. Tvrdím: A je omezená tehdy a jen tehdy, je-li $\sup\limits_{x \in A} \varrho(a, x) < +\infty$ (t. j. $d(a, A) < +\infty$). Důkaz: Jestliže pro všechna $x \in A$ je $\varrho(a, x) < K$ (kde $K < +\infty$), potom $(x \in A,\ y \in A) \Rightarrow (\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, a) + \varrho(a, y) < 2K)$, tedy $d(A) \leqq 2K$. Jestliže naopak A je omezená, tedy $\varrho(x, y) < C$ pro $x \in A$, $y \in A$, zvolme pevně bod $y \in A$ (případ $A = \emptyset$ je jasný), načež pro každé $x \in A$ plyne $\varrho(a, x) \leqq \varrho(a, y) + \varrho(y, x) < C + \varrho(a, y)$.

Důsledek. Jestliže v $\mathbf{E}_r$ zavedu za ϱ kteroukoliv z metrik (5), (7), potom $A \subset \mathbf{E}_r$ je omezená tehdy a jen tehdy, jestliže množina všech souřadnic všech bodů $x \in A$ je omezená. Stačí totiž položiti v naší poznámce $a = o$, načež (viz (7)) je věc jasná pro metriku σ, a podle (8) to platí i pro ostatní metriky.

Poznámka 2. Buďte A, B, C neprázdné bodové množiny v metrickém prostoru (P, ϱ). Potom

$$|\varrho(A, C) - \varrho(B, C)| \leqq d(A, B)\,. \tag{23}$$

Důkaz. Budiž $d(A, B) < +\infty$ (jinak je to jasné). Pro libovolné body $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ je

$$\varrho(A, C) \leqq \varrho(a, c) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, c) \leqq \varrho(b, c) + d(A, B)\,;$$

tedy $\varrho(b, c) \geqq \varrho(A, C) - d(A, B)$ pro každé $b \in B$, $c \in C$, tedy $\varrho(B, C) \geqq \geqq \varrho(A, C) - d(A, B)$, a výměnou A s B: $\varrho(A, C) \geqq \varrho(B, C) - d(A, B)$; odtud plyne (23). Důležitý je vlastně jen případ jednobodových množin $A = (a)$, $B = (b)$, kde (23) dává

$$|\varrho(a, C) - \varrho(b, C)| \leqq \varrho(a, b) \quad \text{pro } C \neq \emptyset\,. \tag{24}$$

Nejjednodušší příklady (na př. $A = (0, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2)$, $\varrho(A, C) = 1$, $\varrho(B, C) = 0$, $\varrho(A, B) = 0$ v $\mathbf{E}_1$) ukazují, že (23) by nebyla správná, kdybychom vpravo místo d psali ϱ.

Poznámka 3. Z definice je zřejmo: Je-li $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, je $\varrho(a, A) \geqq \varrho(a, A_1)$, $\varrho(A, B) \geqq \varrho(A_1, B_1)$, ale $d(A, B) \leqq d(A_1, B_1)$, $d(A) \leqq d(A_1)$ atd.

Poznámka 4. Už jste si snad všimli, jak důležitou úlohu hraje trojúhelníková nerovnost v důkazech všeho druhu. To je přirozené, neboť všechny obecné věty o metrických prostorech musíme odvozovati z vlastností 1, 2, 3 (def. 14), při čemž 1 a 2 se aplikují zcela mechanicky. Všimněme si jí proto blíže. Předně jest

$$\varrho(a, d) \leqq \varrho(a, c) + \varrho(c, d) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, c) + \varrho(c, d)$$

a podobně dále indukcí. Odtud

$$\varrho(a, d) - \varrho(b, c) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(c, d)\,,$$

a výměnou a s b, c s d

$$\varrho(b, c) - \varrho(a, d) \leqq \varrho(b, a) + \varrho(d, c)\,,$$

tedy

$$|\varrho(a, d) - \varrho(b, c)| \leqq \varrho(a, b) + \varrho(c, d)\,. \tag{25}$$

To platí pro libovolné body a, b, c, d. Speciálně pro $d = c$ dostáváme

$$|\varrho(a, c) - \varrho(b, c)| \leqq \varrho(a, b).\text{[17]} \tag{26}$$

V rovině E_2 s eukleidovskou metrikou jsou vám (25), (26) dobře známy z elementární planimetrie.

Poznámka 5. Je-li $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \varrho(x, y)$. Pro $y_n = y$ máme speciálně: Je-li $\lim x_n = x$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y) = \varrho(x, y)$.

Důkaz. Podle (25) je

$$|\varrho(x_n, y_m) - \varrho(x; y)| \leqq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_m, y)\,.$$

Máme tedy dokonce ještě ostřejší výsledek: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $(n > n_0,\ m > n_0) \Rightarrow |\varrho(x_n, y_m) - \varrho(x, y)| < \varepsilon$.[18]

Poznámka 6. Je-li $A \subset P$, $\lim x_n = x$, je $\lim \varrho(x_n, A) = \varrho(x, A)$. Důkaz: Pro $A = \emptyset$ je to zřejmé. Pro $A \neq \emptyset$ plyne z (24) $|\varrho(x_n, A) - \varrho(x, A)| \leqq \varrho(x_n, x)$.

---

[17]) To je ostatně obsaženo v (24).

[18]) To se psává často takto:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \varrho(x_n, y_m) = \varrho(x, y)\,;$$

viz o tom blíže § 10.

P o z n á m k a 7. Pojem limity v metrickém prostoru je velmi důležitý a je nutno umět s ním dobře zacházet. Podobně jako v oboru reálných čísel říkáme, že posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je **konvergentní** v (P, ϱ), jestliže body $x_1, x_2, \ldots$ leží v P a jestliže existuje v P bod x, který je limitou této posloupnosti (podle def. 15).

Je-li A bodová množina v metrickém prostoru P, a je-li $x_1, x_2, \ldots$ konvergentní v A ($\lim x_n = x$), je tato posloupnost též konvergentní v P (s touž limitou); neboť $\varrho(x_n, x)$ znamená v P totéž jako v A. Ale obrátit se toto tvrzení nedá: Je-li $P = \mathbf{E}_1$, $A = (0, 1)$ (vše s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$), má posloupnost $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ v P limitu 0, kdežto v A limitu nemá (neboť 0 nepatří do A, a kdyby naše posloupnost měla v A limitu x, měla by v P dvě různé limity 0 a x, což je nemožno).

Přicházíme nyní k pojmu velmi důležitému:

Definice 17. *Posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů prostoru (P, ϱ) nazýváme cauchyovskou (neboli fundamentální) posloupností, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že*

$$(n \geqq n_0, m \geqq n_0) \Rightarrow \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \,. \tag{27}$$

P o z n á m k a 8. To, zda $x_1, x_2, \ldots$ je cauchyovská, záleží tedy jenom na vzájemných vzdálenostech bodů $x_1, x_2, \ldots$, t. j. na metrickém prostoru X, složeném z těchto bodů, a ne na tom, do kterého širšího prostoru je prostor X vnořen. Ekvivalentní forma definice je ovšem tato: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že $p > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho(x_{n_0}, x_{n_0+p}) < \varepsilon$.

P o z n á m k a 9. Každá posloupnost konvergentní v (P, ϱ) je cauchyovská. Důkaz: Nechť $\lim x_n = x$, nechť $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že $n \geqq n_0 \Rightarrow \varrho(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $n \geqq n_0, m \geqq n_0$ je tedy $\varrho(x_n, x_m) \leqq$ $\leqq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) < \varepsilon$.

P o z n á m k a 10. Zdalipak také naopak každá cauchyovská posloupnost bodů z (P, ϱ) je konvergentní v (P, ϱ)? To nemusí být pravda: Posloupnost $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ není konvergentní v prostoru $(0, 1)$ (s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$), ač je cauchyovská (neboť je konvergentní v širším prostoru $\mathbf{E}_1$).

Tato poznámka nás vede k důležité definici:

Definice 18. *Metrický prostor* P[19]) *nazýváme úplným, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů prostoru* P *je konvergentní v* P.

Příklad 1. Na př. věta 26 (o „Bolzano-Cauchyově podmínce") říká právě, že prostor $\mathbf{E}_1$ s eukleidovskou metrikou je úplný; naproti tomu žádný omezený interval otevřený nebo polouzavřený, vnořený do tohoto prostoru, není úplný (stačí sestrojiti posloupnost čísel toho intervalu, mající za limitu právě onen krajní bod intervalu, jenž k němu nepatří — tato posloupnost je pak cauchyovská, ale není v tom intervalu konvergentní).

Poznámka 11. Všimněme si nyní pojmů: limita, cauchyovská posloupnost, úplný prostor v kartézských součinech metrických prostorů. Mysleme si r metrických prostorů $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ a jejich kartézský součin $P = P_1 \times \ldots \times P_r$ s některou z metrik (13), (14). Budiž $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ posloupnost bodů z P — pišme

$$x^{(n)} = [x_1^{(n)}, \ldots, x_r^{(n)}] \tag{28}$$

a budiž $x = [x_1, \ldots, x_r]$ rovněž bod z P. Z (13), (14) je ihned vidět, že $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_j(x_j^{(n)}, x_j) = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$. Krátce: *Posloupnost bodů* $x^{(n)}$ *má za limitu bod* x *tehdy a jen tehdy, když každá „souřadnice" bodu* $x^{(n)}$ *má pro* $n \to \infty$ *za limitu příslušnou souřadnici bodu* x. Speciálně platí tato věta v prostoru $\mathbf{E}_r$ opatřeném některou z metrik (5), (7). Úplně obdobně je vidět z (13), (14), že posloupnost $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ je cauchyovská tehdy a jen tehdy, jestliže každá z r posloupností $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots$ je cauchyovská. Odtud pak snadno plyne

Věta 111. *Buďte* $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ *neprázdné metrické prostory. Potom prostor* $P = P_1 \times \ldots \times P_r$ *s metrikou* (13) *nebo* (14) *je úplný tehdy a jen tehdy, když prostory* $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ *jsou úplné.*

Důkaz. 1. Nechť $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ jsou úplné, a nechť body (28) $(n = 1, 2, \ldots)$ tvoří cauchyovskou posloupnost v P. Máme dokázati, že tato posloupnost je konvergentní v P. Ježto každá posloupnost $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots$ je cauchyovská a P_j úplné, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j \in P_j$, načež

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = [x_1, \ldots, x_r] \in P .$$

[19]) Když není třeba, nevypisuji explicitně metriku — jak jsme se již smluvili.

2. Nechť některý P_j, na př. P_1, není úplný. Tedy existuje cauchyovská posloupnost $x_1^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bodů z P_1, jež nemá limitu v P_1. Volme body $a_2 \in P_2, \ldots, a_r \in P_r$[20]) a klaďme $x^{(n)} = [x_1^{(n)}, a_2, \ldots, a_r]$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Posloupnost $a_j, a_j, a_j, \ldots$ je konvergentní a tedy cauchyovská, takže posloupnost $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ je cauchyovská, ale přesto nemá limitu v P, ježto posloupnost prvních „souřadnic" $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots$ nemá limitu v P_1. Tedy P není úplný.

Věta 112. *Prostor* $\mathbf{E}_r$, *opatřený metrikou* (5) *nebo* (7), *je úplný.*

Důkaz. Věta 26 říká právě, že prostor $\mathbf{E}_1$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$ je úplný. Odtud plyne věta 112 užitím věty 111.

Všimněme si ještě několika drobností.

Poznámka 12. Posloupnost bodů $x_1, x_2, \ldots$ z (P, ϱ) nazývám omezenou, je-li omezená množina, složená ze všech jejích členů (jako v **DI**, kap. II, § 2). *Každá cauchyovská posloupnost je omezená.* Důkaz: Existuje přirozené n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\varrho(x_n, x_{n_0}) < 1$. Zřejmě pak pro každé $n \geqq 1$ je

$$\varrho(x_n, x_{n_0}) \leqq \operatorname{Max}\,(\varrho(x_1, x_{n_0}), \ldots, \varrho(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1)\,.$$

Poznámka 13. *Obsahuje-li cauchyovská posloupnost* $x_1, x_2, \ldots$ *konvergentní posloupnost vybranou:*

$$\lim x_{k_n} = x\,,$$

je $\lim x_n = x$.

Důkaz: Budiž $\varepsilon > 0$; existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$, $m > n_0$ je $\varrho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Existuje s tak, že $k_s > n_0$ a že $\varrho(x_{k_s}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $n > n_0$ je tedy

$$\varrho(x_n, x) \leqq \varrho(x_n, x_{k_s}) + \varrho(x_{k_s}, x) < \varepsilon\,.$$

Poznámka 14. (Velmi důležitá.) *Každá omezená posloupnost* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ *bodů z* $\mathbf{E}_r$ *obsahuje vybranou posloupnost konvergentní v* $\mathbf{E}_r$.

Důkaz. Z posloupnosti $\mathfrak{P}$: $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ vyberu podle vět 19, 17 posloupnost $\mathfrak{P}_1$ tak, aby první souřadnice tvořily posloupnost kon-

[20]) To lze, ježto $P_j \neq \emptyset$ pro $j = 2, \ldots, r$.

vergentní (v $\mathbf{E}_1$). Z $\mathfrak{P}_1$ vyberu podle týchž vět posloupnost $\mathfrak{P}_2$ tak, aby i druhé souřadnice tvořily posloupnost konvergentní atd. Po r krocích dostanu posloupnost

$$\mathfrak{P}_r\colon\ y^{(1)}, y^{(2)}, \dots ,$$

vybranou z $\mathfrak{P}$, s touto vlastností: Existuje $\lim_{n\to\infty} y_j^{(n)} = y_j \in \mathbf{E}_1$ pro $j = 1, \dots$ $\dots, r$. Podle pozn. 11 existuje tedy $\lim y^{(n)} = y \in \mathbf{E}_r$, kde $y = [y_1, \dots$ $\dots, y_r]$.

Poznámka 15. Poznamenejme, že výroky a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, b) x_1, $x_2, \dots$ je cauchyovská, c) (P, ϱ) je úplný nezmění smyslu, nahradím-li metriku ϱ skoro stejnou metrikou σ; na př.: (P, ϱ) je úplný tehdy a jen tehdy, je-li (P, σ) úplný; posloupnost $x_1, x_2, \dots$ bodů z P je cauchyovská (resp. má limitu $x \in P$) při metrice ϱ tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská (resp. má limitu x) při metrice σ. To je zřejmé.

§ 3. Isometrická zobrazení. Zobrazení f prostoru (P, ϱ) na prostor (Q, σ) nazýváme **isometrickým**, jestliže pro všechna $x \in P$, $y \in P$ je

$$\varrho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) \tag{29}$$

(t. j. vzdálenost dvou bodů se rovná vzdálenosti jejich obrazů). Zřejmě je toto zobrazení spojité a prosté, a inversní zobrazení je opět isometrické, tedy také spojité, takže isometrické zobrazení je homeomorfní (viz § 1 ke konci).

Prostory (P, ϱ), (Q, σ) se nazývají isometrické, jestliže existuje isometrické zobrazení jednoho na druhý (načež jsou ovšem homeomorfní). Pokud se omezujeme pouze na t. zv. metrické vlastnosti prostoru (t. j. takové, které spočívají pouze na metrice ϱ), je patrno, že se isometrické prostory podstatně od sebe neliší: všechny vztahy, které platí mezi vzdálenostmi $\varrho(x, y)$, $\varrho(u, V)$, ... bodů a množin z P, platí také mezi vzdálenostmi jejich obrazů $\sigma(f(x), f(y))$, $\sigma(f(u), f(V))$, ... Uveďme tři závažné příklady.

Příklad 1. V množině $\mathbf{K}$ všech konečných komplexních čísel zaveďme metriku $\sigma(x, y) = |x - y|$. To je vskutku metrika, ježto

$|x - z| \leqq |x - y| + |y - z|$ (viz **DI**, věta 180).[21]) V rovině E_2 zaveďme eukleidovskou metriku

$$\varrho([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

což je právě $|(x_1 + ix_2) - (y_1 + iy_2)|$. Přiřadím-li tedy každému bodu $[x_1, x_2] \in E_2$ číslo $x_1 + ix_2 \in K$, dostanu isometrické zobrazení E_2 na K.

Příklad 2. V prostoru E_{2r} zaveďme eukleidovskou metriku; v prostoru K_r (to je množina všech $x = [x_1, \ldots, x_r]$, kde x_j jsou konečná komplexní čísla) zaveďme metriku[22])

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} |x_j - y_j|^2}.$$

Pišme

$$x_j = x_j' + ix_j'', \quad y_j = y_j' + iy_j''.$$

Tedy

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\sum_j (x_j' - y_j')^2 + \sum_j (x_j'' - y_j'')^2}.$$

Jestliže tedy bodu $[x_1', \ldots, x_r', x_1'', \ldots, x_r''] \in E_{2r}$ přiřadím bod $[x_1' + ix_1'', \ldots, x_r' + ix_r''] \in K_r$, dostanu isometrické zobrazení E_{2r} na K_r.

Příklad 3. Zvolme v eukleidovském E_r pevně bod a. Sestrojme zobrazení, které každý bod $x \in E_r$ zobrazuje na bod $x + a$ („posunutí"). To je zřejmě isometrické zobrazení E_r na E_r. Totéž platí ostatně pro K_r při metrice příkl. 2 a totéž platí pro E_r při kterékoliv z metrik (5), (7).

Vyšetřujme nyní všechna isometrická zobrazení eukleidovského E_r do sebe (t. j. do eukleidovského E_r; zde je důležito, že jde právě o metriku (3)). Budiž dáno nějaké zobrazení E_r do E_r při metrice

$$\varrho^2(x, y) = \sum_{j=1}^{r} (x_j - y_j)^2; \tag{30}$$

ptejme se, kdy je isometrické. Obrazy bodů $x, y, \ldots$ značme $x', y', \ldots$ Obrazem bodu o je jistý bod a. Jestliže tedy každému bodu $x \in E_r$ při-

[21]) Při této metrice značí rovnice $\lim x_n = x$ (pro konečná komplexní x_n, x), že $\lim |x_n - x| = 0$, t. j. že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. To je tedy v souhlase s definicí podanou v **DI**, kap. **XV**, def. 35 a věta 181.

[22]) σ je vskutku metrika v $K_r = K \times \ldots \times K$, neboť je z metriky v K (viz příkl. 1) sestrojena podle pravidla příkladu 6 v § 1 [vzorec (13) pro $p = 2$].

řadím místo bodu x' bod $\xi = x' - a$ (posunutí), dostávám nové zobrazení φ, které zobrazuje o na bod o a je zřejmě isometrické tehdy a jen tehdy, bylo-li původní zobrazení isometrické. Obrazy $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$, ... budeme značit $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ Aby φ bylo isometrické, je nutno a stačí, aby pro všechna x, y bylo

$$(31) \qquad \sum_{j=1}^{r} (x_j - y_j)^2 = \sum_{j=1}^{r} (\xi_j - \eta_j)^2 .$$

Volba $y = o$ dává též $\eta = o$, takže z (31) plyne

$$(32) \qquad \sum_{j=1}^{r} x_j^2 = \sum_{j=1}^{r} \xi_j^2 ,$$

načež po umocnění je z (31) vidět, že nutná a postačující podmínka pro isometričnost je

$$(33) \qquad \sum_{j=1}^{r} x_j y_j = \sum_{j=1}^{r} \xi_j \eta_j \quad \text{(pro všechna } x, y) .$$

Budiž $e^{(k)}$ bod, jehož k-tá souřadnice je rovna jedné, ostatní rovny nule; jeho obrazem je bod $\varepsilon^{(k)} = [\varepsilon_1^{(k)}, \ldots, \varepsilon_r^{(k)}]$. Podle (33) má býti (dosadím-li $x = e^{(k)}$, $y = e^{(l)}$)

$$(34) \qquad \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j^{(k)} \varepsilon_j^{(l)} = \delta_{k,l}, \quad \text{kde } \delta_{k,k} = 1 , \ \delta_{k,l} = 0 \quad \text{pro } k \neq l .$$

Podle známé věty o násobení determinantů plyne odtud pro determinant Δ čísel $\varepsilon_j^{(k)}$ rovnice $\Delta^2 = 1$, tedy $\Delta = \pm 1$. Z rovnic (34) plynou ještě rovnice

$$(34a) \qquad \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_j^{(k)} \varepsilon_l^{(k)} = \delta_{j,l} .$$

Důkaz: Značí-li E matici prvků $\varepsilon_j^{(k)}$ (prvek j-tého řádku a k-tého sloupce), značí-li dále $\tilde{E}$ matici transponovanou (výměna řádků za sloupce) a J matici jednotkovou, říkají rovnice (34), že je $\tilde{E}E = J$; odtud, jak známo, plyne, že také $E\tilde{E} = J$; rozepíšeme-li tuto rovnici, dostaneme právě (34a).

Dosadím-li nyní do (33) $y = e^{(k)}$, plyne odtud

$$(35) \qquad x_k = \sum_{j=1}^{r} \xi_j \varepsilon_j^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, r) ,$$

odkudž lze vzhledem k (34a) vypočísti[23])

$$\xi_l = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_l^{(k)} x_k \quad (l = 1, \ldots, r)\,. \tag{36}$$

Naopak, má-li naše zobrazení tento tvar (s podmínkami (34)), napišme ještě rovnici obdobnou k (36) pro obraz η bodu y; vyjde

$$\sum_{l=1}^{r} (\xi_l - \eta_l)^2 = \sum_{l=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_l^{(k)} (x_k - y_k) \Big) \cdot \Big(\sum_{h=1}^{r} \varepsilon_l^{(h)} (x_h - y_h) \Big) =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{r} (x_k - y_k)(x_h - y_h) \sum_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{(k)} \varepsilon_l^{(h)} = \sum_{k=1}^{r} (x_k - y_k)^2$$

(podle (34)), takže zobrazení jest isometrické. Původní zobrazení je pak dáno rovnicí $x' = \xi + a$, takže právě všechna isometrická (a žádná jiná než isometrická) zobrazení E_r do E_r jsou dána takto: Zvolím libovolně $a_1, \ldots, a_r$, dále zvolím libovolně čísla $\varepsilon_j^{(k)}$ $(j, k = 1, \ldots, r)$ tak, aby platilo (34), a definuji pak obraz ξ libovolného bodu x rovnicemi

$$\xi_l = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_l^{(k)} x_k + a_l \quad (l = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{37}$$

Souřadnice bodu ξ jsou tedy lineárními funkcemi souřadnic bodu x, při čemž koeficienty jsou vázány jedině podmínkami (34).[24]) Tyto t. zv. orthogonální lineární substituce (toto jméno se však obyčejně dává systému homogenních rovnic (36)) jsou dobře známy z algebry a z analytické geometrie. Probral jsme je zde, ježto souvisí úzce s předmětem našich úvah.

Obvykle se nazývá eukleidovským r-rozměrným prostorem (reálným) kterýkoliv metrický prostor isometrický s (E_r, ϱ), kde ϱ je metrika, daná rovnicí (30).

§ 4. Ekvivalentní metriky. Budiž P množina, v níž jsou definovány dvě metriky ϱ, σ, takže máme dva metrické prostory (P, ϱ), (P, σ). Rovnice

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{38}$$

[23]) Násobím k-tou rovnici (35) číslem $\varepsilon_l^{(k)}$ a sečtu.

[24]) Ježto $\Delta \neq 0$, lze při libovolných ξ_l nalézti x_k tak, že platí (37); naše zobrazení tedy nutně zobrazuje E_r na celý prostor E_r.

v prostoru (P, ϱ) značí, že $\lim \varrho(x_n, x) = 0$; táž rovnice v prostoru (P, σ) značí obecně něco jiného, totiž $\lim \sigma(x_n, x) = 0$. Metriky ϱ, σ nazýváme **ekvivalentními** v množině P, jestliže rovnice (38) znamená v prostoru (P, ϱ) totéž jako v (P, σ). T. j.: metriky ϱ, σ jsou ekvivalentní v P, když pro jakékoliv body $x, x_1, x_2, \ldots$ množiny P je rovnice (38) splněna v (P, ϱ) tehdy a jen tehdy, když je splněna v (P, σ). Je patrno, že potom všechny vlastnosti a vztahy bodů a množin v (P, ϱ), které lze vysloviti výhradně s použitím pojmu limity (bez explicitního použití metriky ϱ), platí také v prostoru (P, σ).

Poznámka 1. Přímo z definice plyne: I. Je-li $A \subset P$ a jsou-li metriky ϱ, σ ekvivalentní v P, jsou také ekvivalentní v A (vlastně bych měl říci, že parciální funkce $\varrho_{A \times A}$, $\sigma_{A \times A}$ jsou ekvivalentní — tuto neškodnou licenci si často dovolím). II. Jsou-li metriky ϱ, σ „skoro stejné" (viz § 1, pozn. 4), jsou ekvivalentní — na př. metriky (5), (7) v $\mathbf{E}_r$.

Vezměme dva závažné příklady.

Příklad 1. V $\mathbf{E}_1$ známe metriku $\varrho(x, y) = |x - y|$. Je poněkud nepříjemné, že na př. definice 15 nezahrnuje (užijeme-li jí pro prostor $\mathbf{E}_1$) nevlastní limity $+\infty$, $-\infty$. Přidáme k $\mathbf{E}_1$ tyto dva prvky; tím dostaneme množinu $\mathbf{E}_1^*$, do níž chceme zavést metriku.[25]) K tomu cíli sestrojíme nějakou konečnou reálnou funkci φ jedné reálné proměnné, která je rostoucí, spojitá a omezená (všechno ve smyslu známém z **DI**) v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Takovou funkcí je na př. funkce $\operatorname{arctg} x$, ale je zvykem, bráti jednodušší funkci $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Této funkce se přidržíme. Ihned vidíme, že je to v $\langle 0, +\infty)$ rostoucí spojitá funkce, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$; dále je to funkce lichá ($\varphi(-x) = -\varphi(x)$), tedy je rostoucí a spojitá též v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$. Položme ještě $\varphi(+\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = -1$. Nyní je φ funkce, definovaná (a rostoucí) v $\mathbf{E}_1^*$, která zobrazuje $\mathbf{E}_1^*$ na $\langle -1, 1\rangle$, kdežto množinu $\mathbf{E}_1$ zobrazuje na $(-1, 1)$.

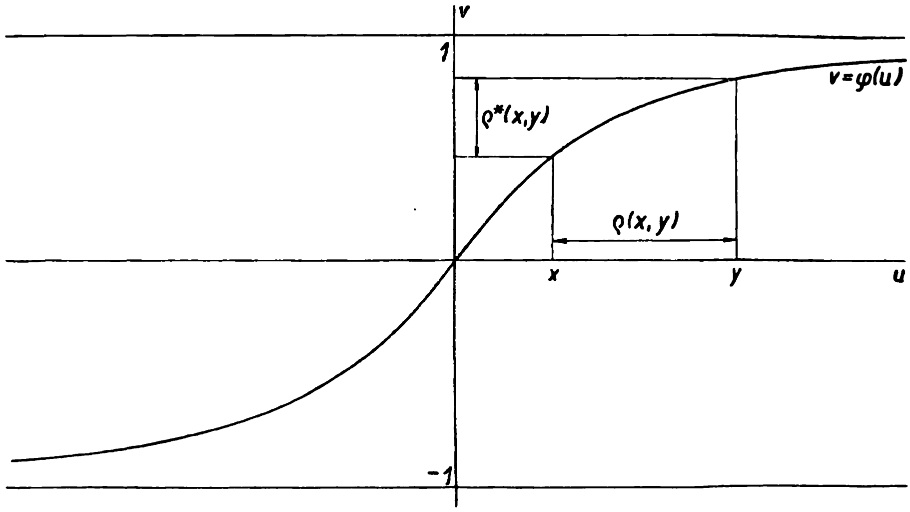
---

[25]) Nesmíme klásti na př. $\varrho(a, +\infty) = +\infty$, ježto ϱ má podle def. 14 být konečná funkce.

Ježto φ je prostá, existuje inversní zobrazení ψ, které, jak ihned spočtete, je

$$\psi(-1) = -\infty\,, \quad \psi(1) = +\infty\,, \quad \psi(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

pro $-1 < y < 1$ (počítejte zvlášť pro $y > 0$ a zvlášť pro $y < 0$).



Obr. 8.

Funkce ψ zobrazuje $\langle -1, 1\rangle$ resp. $(-1, 1)$ na E_1^* resp. na E_1. Definujme nyní v E_1^* metriku ϱ^* rovnicí

$$\varrho^*(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|\,.$$

Vlastnost 1 z def. 14 je zřejmá, vlastnost 2 též (neboť $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$) a rovněž vlastnost 3, ježto

$$|\varphi(x) - \varphi(z)| \leqq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)|\,.$$

Rovnice

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{v} \quad (E_1^*, \varrho^*) \tag{39}$$

značí, že $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| = 0$, t. j. že

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \tag{40}$$

ve smyslu známém z **DI**, kap. II (jde o poslupnost reálných čísel $\varphi(x_n)$ intervalu $\langle -1, 1\rangle$); obrázek 8 nám pak napovídá, že (40) platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{41}$$

ve smyslu známém opět z **DI**, kap. II — nebo přesněji: z této knihy, kap. II, § 1.[26]) Ale dokažme to rychle.

1. Budiž $x = +\infty$ (takže v (41) jde o t. zv. nevlastní limitu). Nechť předně platí (39), t. j. (40). Chci dokázat, že platí (41), t. j. že ke každému $A < +\infty$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $x_n > A$. Jest $\varphi(A) < 1$, ale $\varphi(x) = \varphi(+\infty) = 1$; z (40) tedy plyne, že existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\varphi(x_n) > \varphi(A)$, a tedy $x_n > A$, ježto φ je rostoucí. Tedy vskutku platí (41). Nechť za druhé platí (41) (pro $x = +\infty$); máme dokázat, že platí (40), t. j. $\lim \varphi(x_n) = 1$. Budiž $0 < \varepsilon < 1$; existuje $A > 0$ tak, že $\varphi(A) = 1 - \varepsilon$. Dále existuje podle (41) n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $x_n > A$, a tedy $\varphi(x_n) > \varphi(A) > 1 - \varepsilon$; tedy platí (40).

2. Pro $x = -\infty$ je důkaz obdobný.

3. Budiž x konečné, takže $-1 < \varphi(x) < 1$. Nechť předně platí (39), t. j. (40). Chceme dokázati (41). Budiž tedy $\varepsilon > 0$; jest $\varphi(x - \varepsilon) < \varphi(x) < \varphi(x + \varepsilon)$, a tedy existuje podle (40) takové n_0, že pro $n > n_0$ je $\varphi(x - \varepsilon) < \varphi(x_n) < \varphi(x + \varepsilon)$ a tedy $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ (ježto φ je rostoucí); tedy platí (41). Nechť za druhé platí (41); máme dokázati (39), t. j. (40). Budiž tedy $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\varphi(x - \delta) > \varphi(x) - \varepsilon$, $\varphi(x + \delta) < \varphi(x) + \varepsilon$ (neboť φ je spojitá v bodě x). Podle (41) existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $x - \delta < x_n < x + \delta$, a tedy (ježto φ je rostoucí) $\varphi(x - \delta) < \varphi(x_n) < \varphi(x + \delta)$, tedy $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$, takže platí (40).

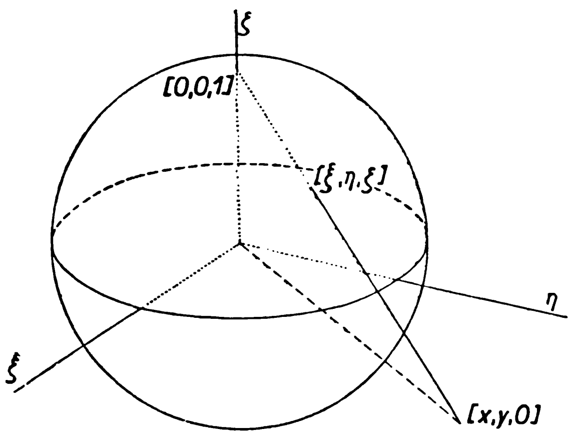
Tedy celkem má metrika ϱ^*, které se říká **redukovaná metrika**, tyto závažné vlastnosti:

---

[26]) Pro x_n připouštíme totiž též hodnoty $+\infty$, $-\infty$.

I. V množině E_1 *je ekvivalentní s eukleidovskou metrikou* $\varrho(x, y) = |x - y|$ (neboť podle textu v § 1 před def. 15 značí rovnice (41) ve smyslu **DI** při konečných x_n, x totéž jako táž rovnice v (E_1, ϱ)).

II. Dovoluje nám však zavésti metriku i do prostoru E_1^*, *při čemž zůstává zachován dřívější smysl pojmu limity* (a to vlastní i nevlastní). Přitom se stírá výjimečný charakter t. zv. „nevlastních" limit. U vlastních i nevlastních limit jde prostě o limitu (39).



Obr. 9.

Příklad 2. V množině všech konečných komplexních čísel K_1 jsme zavedli metriku $\varrho(v, w) = |v - w|$. Přiřadím-li každému bodu $[x, y] \in \mathsf{E}_2$ číslo $x + iy$, dostávám isometrické zobrazení prostoru E_2 (s eukleidovskou metrikou, kterou označme na chvíli ϱ_2) na (K_1, ϱ).

V mnohých odvětvích matematiky (na př. v theorii analytických funkcí) se často jeví účelným doplniti množinu K_1 ještě jedním „nevlastním" číslem (bodem), které nazveme ∞ (na rozdíl od prvků $+\infty$, $-\infty$ v E_1^*). Takto doplněnou množinu $K_1 \cup (\infty)$ označme $^*K_1$.[27]) Pokusme se nyní do této množiny zavést jistou metriku. Učiníme to takto: V prostoru E_3 (s eukleidovskou metrikou ϱ_3) sestrojme kulovou plochu $\mathfrak{K}$ o rovnici $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ (souřadnice bodu v E_3 budu značiti písmeny ξ, η, ζ). Každému číslu $z = x + iy \in K_1$ $(x, y$

[27]) Náběh k tomu jsme udělali již v kap. II, § 3, pozn. 3.

reálná) přiřadím bod na $\mathfrak{K}$ takto: Spojím bod $[x, y, 0]$ přímkou se „severním pólem" koule $[0, 0, 1]$; tato přímka protne $\mathfrak{K}$ v bodě $[0, 0, 1]$, a mimo to ještě v jednom bodě o souřadnicích

$$(42) \qquad \xi = \lambda x\,, \eta = \lambda y\,, \zeta = 1 - \lambda \quad (\lambda \neq 0)\,.$$

Číslo λ najdeme z podmínky $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$, jež dává pro λ jednak kořen 0 (ten nás nezajímá), jednak $\lambda = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + 1} \neq 0$. Číslu $x + iy$ přiřadím právě tento bod $[\xi, \eta, \zeta]$:

$$(43) \quad \xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\,.$$

Naopak, je-li dán libovolný bod $[\xi, \eta, \zeta]$ plochy $\mathfrak{K}$, různý od bodu $[0, 0, 1]$, t. j. je-li

$$(44) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,, \quad \zeta < 1\,,$$

existuje právě jedna dvojice konečných reálných čísel x, y, pro kterou platí (43). Důkaz: Buďte dána ξ, η, ζ tak, že platí (44). Potom třetí rovnice (43) je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $(x^2 + y^2 + 1)\,.\,(\zeta - 1) = -2$, t. j.

$$(45) \qquad x^2 + y^2 + 1 = \frac{2}{1 - \zeta}\,,$$

načež první dvě rovnice (43) jsou ekvivalentní s rovnicemi

$$(46) \qquad x = \frac{\xi}{1 - \zeta}\,, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}\,.$$

Volím-li tedy x, y podle (46), bude platit (43), jakmile ještě dokáži, že platí (45). Ale z (46), (44) plyne vskutku

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + (1 - \zeta)^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{2 - 2\zeta}{(1 - \zeta)^2} = \frac{2}{1 - \zeta}\,.$$

Sestrojme nyní zobrazení f množiny $^*K_1$ na plochu $\mathfrak{K}$ takto: Je-li $z = x + iy \in K_1$, budiž $f(z)$ právě bod $[\xi, \eta, \zeta] \in \mathfrak{K}$, daný vzorci (43). Tím je dáno, jak jsme již ukázali, prosté zobrazení množiny K_1 na $\mathfrak{K} \dot{-} (p)$, kde p značí bod $[0, 0, 1]$.[28]) A konečně klademe $f(\infty) = [0, 0, 1]$. Tím je dáno prosté zobrazení $^*K_1$ na $\mathfrak{K}$. A nyní definuji

[28]) Geometricky velmi názorné: Bod $[x, y, 0]$ je centrálním průmětem bodu $[\xi, \eta, \zeta]$ ze „severního pólu" na „rovinu rovníku".

metriku $^*\varrho$ v $^*\boldsymbol{K}_1$ takto: Jsou-li z, z' dva body v $^*\boldsymbol{K}_1$, definuji

(47) $$^*\varrho(z, z') = \varrho_3(f(z), f(z'))\,.$$

Vlastnosti 1, 2 z def. 14 jsou zřejmé, ježto f je prosté; vlastnost 3 pak plyne takto: Ježto ϱ_3 je metrika, je

$$\varrho_3(f(z), f(z'')) \leqq \varrho_3(f(z), f(z')) + \varrho_3(f(z'), f(z''))\,,$$

t. j. $^*\varrho(z, z'') \leqq {}^*\varrho(z, z') + {}^*\varrho(z', z'')$.

Vyšetřujme, co znamená vztah

(48) $$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{v } (^*\boldsymbol{K}_1, {}^*\varrho)\,.$$

Podle (47) znamená tento vztah totéž jako

(49) $$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z) \quad \text{v } (\boldsymbol{E}_3, \varrho_3)\,.$$

Pišme $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$,[29]) $f(z_n) = [\xi_n, \eta_n, \zeta_n]$, $z = x + \mathrm{i}y$,[29]) $f(z) = [\xi, \eta, \zeta]$. Ptejme se, kdy je

(50) $$\lim z_n = z \quad \text{v } (^*\boldsymbol{K}_1, {}^*\varrho)\,,$$

když $z \in \boldsymbol{K}_1$ (t. j. $z \neq \infty$). To podle (49) a podle pozn. 11 v § 2 značí, že je (v obvyklém smyslu)

(51) $$\lim \xi_n = \xi\,, \quad \lim \eta_n = \eta\,, \quad \lim \zeta_n = \zeta\,.$$

Ježto $\zeta < 1$, plyne odtud podle (46)

$$\lim x_n = \lim \frac{\xi_n}{1 - \zeta_n} = \frac{\xi}{1 - \zeta} = x\,, \quad \lim y_n = y\,.$$

Naopak, platí-li $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, plyne z (43) obdobně (51).

Pokud je tedy $z \in \boldsymbol{K}_1$, značí $\lim z_n = z$ při metrice $^*\varrho$ totéž jako při obvyklé metrice $\varrho(z, z') = |z - z'|$. Tyto metriky jsou tedy ekvivalentní v $\boldsymbol{K}_1$.

Ptejte se ještě, co znamená rovnice

(52) $$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \text{v } (^*\boldsymbol{K}_1, {}^*\varrho)\,,$$

t. j. rovnice

(53) $$\lim \xi_n = 0\,, \quad \lim \eta_n = 0\,, \quad \lim \zeta_n = 1$$

---

[29]) Toto označení ovšem ztrácí smysl pro $z_n = \infty$, po příp. $z = \infty$.

(při čemž první dvě rovnice netřeba psáti, neboť plynou z třetí rovnice a z toho, že $\xi_n^2 + \eta_n^2 = 1 - \zeta_n^2$). Pro stručnost vyjadřování definujme $|\infty| = +\infty$. Platí-li (53), je podle (45)[30] $\lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^2) = +\infty$, t. j. $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$; je-li naopak $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, t. j. $\lim (x_n^2 + y_n^2) = +\infty$, je podle (43) nutně $\lim \zeta_n = 1$.[30])

Tedy: rovnice (52) značí totéž jako rovnice[31])

(54) $$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty .$$

Někdy je účelné užívati prvku ∞ místo prvků $+\infty$ a $-\infty$ i v oboru čísel reálných. Na př. posloupnost $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ nemá limitu (ani $+\infty$, ani $-\infty$) v $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$, ale má limitu ∞ v $(^*\mathbf{K}_1, {}^*\varrho)$. Proto zavedeme ještě symbol $(^*\mathbf{E}_1, {}^*\varrho)$: to je množina $\mathbf{E}_1 \cup (\infty)$ s metrikou $^*\varrho$.

Poznámka 2. V příštích paragrafech poznáme řadu důležitých pojmů, jejichž smysl se nezmění, nahradíme-li metriku (nebo metriky) v nich vystupující metrikou ekvivalentní, ale také řadu pojmů, jejichž smysl se přitom může změnit. Zde uveďme pouze pojem omezené množiny ($d(A) < +\infty$). Nahradím-li metriku metrikou skoro stejnou, nezmění se zřejmě omezenost (nebo neomezenost) množiny. Ale nahradím-li metriku metrikou ekvivalentní, může omezená množina přejít v neomezenou. Na př. $\mathbf{E}_1$ při eukleidovské metrice má průměr $+\infty$, kdežto při metrice ϱ^* má průměr konečný (neboť celý prostor $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$ má průměr 2, ježto $d(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*) = \operatorname{Max}_{x\in\mathbf{E}_1^*, y\in\mathbf{E}_1^*} |\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 2$).

§ 5. Uzávěr, derivace, vnitřek, hranice množiny. Uzavřené a otevřené množiny. V prostoru $\mathbf{E}_1$ jsme tyto pojmy většinou zavedli a do jisté míry studovali již v kap. V, § 1. Proto mohu jistě postupovati stručněji.

[30]) Vlastně se vzorce pro $x_n^2 + y_n^2$ a pro ζ_n [t. j. (45) a třetí rovnice (43)] dají použít jen pro $z_n \neq \infty$ — tedy vlastně jen pro jistou vybranou posloupnost. Ale pro ta n, pro něž je $z_n = \infty$, t. j. $|z_n| = +\infty$, je vše triviální.

[31]) Kterou mohu pojímat buďto jako nevlastní limitu ve smyslu kap. II nebo jako limitu v $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$.

Definice 19. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$. Množinu všech bodů $x \in P$, které mají vzdálenost $\varrho(x, A)$ rovnou nule, nazveme uzávěrem množiny A (v prostoru (P, ϱ)) a označíme ji $\overline{A}$ nebo obšírněji $\overline{A}^P$, $\overline{A}^{(P, \varrho)}$.*

Klademe tedy

$$\overline{A}^{(P, \varrho)} = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in P, \varrho(x, A) = 0) .$$

Poznámka 1. V kap. V šlo tedy o uzávěr v eukleidovském $\mathbf{E}_1$; podobně všechny další pojmy v kap. V, § 1 se vztahovaly k prostoru $\mathbf{E}_1$ (eukleidovskému). Vždy je $\overline{A}^P \subset P$.

Poznámka 2. Zřejmě

$$A \subset \overline{A}^P ; \quad \overline{\emptyset}^P = \emptyset ; \quad \overline{(a)}^P = (a) ; \quad \overline{P}^P = P .$$

Neboť $x \in A \Rightarrow \varrho(x, A) = 0$; pro každé $x \in P$ je $\varrho(x, \emptyset) = + \infty \neq 0$; pro každé $x \neq a$ je $\varrho(x, (a)) \neq 0$; a konečně z prvního vztahu a z pozn. 1 plyne $P \subset \overline{P}^P \subset P$.

Je užitečno vyjádřiti definici 19 ještě jinak. To se stane ve větách 113, 114. Kdy je $x \in \overline{A}$? Tehdy a jen tehdy, když $\inf\limits_{y \in A} \varrho(x, y) = 0$, t. j. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $y \in A$ tak, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Jinak řečeno:

Věta 113. *Budiž $x \in P$, $A \subset P$.*[32] *Potom je $x \in \overline{A}^P$ tehdy a jen tehdy, když každá koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$ (o středu x) obsahuje aspoň jeden bod z A.*

Věta 114. *Budiž $x \in P$, $A \subset P$. Potom jest $x \in \overline{A}^P$ tehdy a jen tehdy, existuje-li posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A taková, že* $\lim x_n = x$.

Důkaz. 1. Existuje-li taková posloupnost, je $\lim \varrho(x_n, x) = 0$ a tedy $\varrho(x, A) = 0$.

2. Je-li $\varrho(x, A) = 0$, existuje ke každému přirozenému n takový bod $x_n \in A$, že $\varrho(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$. Vyberu-li ke každému n jeden takový bod x_n (axiom výběru!), je $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost, mající limitu x.

Poznámka 3. Uvědomte si dobře, že posloupnost nemusí být prostá. Je-li na př. $x \in A$, mohu za onu posloupnost vzít $x, x, x, \ldots$; a je-li

[32]) Znak $\subset$ už teď stále značí vnoření: A je vnořena do metrického prostoru P.

A náhodou na př. konečná množina, nemohu vůbec sestrojit v A prostou posloupnost.

Poznámka 4. Z věty 113 nebo 114 ihned plyne: Je-li $A \subset B \subset P$, je $\bar{A}^P \subset \bar{B}^P$.

Věta 115. $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$.[33]

Odtud úplnou indukcí okamžitě

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n .$$

Důkaz 1. Je-li $x \in \bar{A}_1$ nebo $x \in \bar{A}_2$, je podle pozn. 4 $x \in \overline{A_1 \cup A_2}$.

2. Není-li x ani v $\bar{A}_1$ ani v $\bar{A}_2$, je $\varepsilon_1 = \varrho(x, A_1) > 0$, $\varepsilon_2 = \varrho(x, A_2) > > 0$. Pro $y \in A_1 \cup A_2$ je tedy $\varrho(x, y) \geqq \varepsilon = \text{Min}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, tedy $\varrho(x, A_1 \cup A_2) \geqq \varepsilon > 0$, tedy x neleží v $\overline{A_1 \cup A_2}$.

Definice 20. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$. Množinu A nazýváme* ***uzavřenou*** *v (P, ϱ), je-li $\bar{A}^P = A$ (neboli: je-li $\bar{A}^P \subset A$).*[34]

Poznámka 5. $\emptyset$, (a), P jsou příklady množin uzavřených v P.

Věta 116. *Sjednocení konečného počtu uzavřených množin a rovněž průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina* (vše ovšem míněno v témže metrickém prostoru).[35]

Důkaz. 1. Je-li $\bar{A}_j = A_j$ pro $j = 1, \ldots, n$, je podle věty 115 $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cup \ldots \cup \bar{A}_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

2. Je-li $\bar{A}_z = A_z$ pro každé $z \in Z$, $A = \bigcap\limits_{z \in Z} A_z$, je $A \subset A_z$, tedy i $\bar{A} \subset \bar{A}_z = A_z$ pro každé $z \in Z$, tedy $\bar{A} \subset A$.

Věta 117. *Budiž $A \subset P$. Potom $\bar{A}^P$ je množina uzavřená v P.*

Důkaz. Položme $\bar{A} = B$ (uzávěry beru v P). Máme dokázati, že $\bar{B} \subset B$. Budiž tedy $a \in \bar{B}$; budiž $\varepsilon > 0$. Ježto $\varrho(a, B) = 0$, existuje $x \in B$, t. j. $x \in \bar{A}$ tak, že $\varrho(a, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ježto $\varrho(x, A) = 0$, existuje $y \in A$ tak, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tedy $\varrho(a, y) < \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $\varrho(a, A) = 0$, t. j. $a \in \bar{A} = B$. Tedy každý bod z $\bar{B}$ patří do B.

[33]) Nepíši-li nahoru index P, rozumím všude uzávěr v témž prostoru. Metriku většinou značím ϱ.

[34]) Neboť podle pozn. 2 je vždy $A \subset \bar{A}$.

[35]) Podle pozn. 5 je tedy na př. každá konečná množina uzavřená.

Věta 118. *Množina $\overline{A}^P$ je nejmenší uzavřená (v P) množina, obsahující A. Podrobněji: Je-li $A \subset B$, B uzavřená v P, je $\overline{A}^P \subset B$.*

Poznámka 6. Jinak řečeno: $\overline{A}^P$ je průnik všech množin uzavřených v P a obsahujících A.

Důkaz. Uzavřenost množiny $\overline{A}^P$ byla dokázána ve větě 117. Je-li $A \subset B$, B uzavřená, je $\overline{A} \subset \overline{B} = B$.

Poznámka 7. Uzávěr $\overline{A}^P$ (v prostoru (P, ϱ)) závisí na P a na metrice ϱ. Z věty 114 je vidět, že $\overline{A}^P$ se nezmění, nahradím-li metriku ϱ nějakou metrikou ekvivalentní, neboť rovnice $\lim x_n = x$ znamená při obou metrikách totéž.

Někdy je užitečný tento pojem:

Definice 21. *Budiž (P, ϱ) metrický prostor, $x \in P$, $A \subset P$. Bod x nazývám hromadným bodem množiny A, jestliže každá koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů z A* (t. j. jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ množina $A \, . \, \Omega_P(x, \varepsilon)$ je nekonečná). *Množinu všech bodů z P, jež jsou hromadnými body množiny A, nazýváme derivací množiny A (v prostoru (P, ϱ)), znak A' nebo A'^P, $A'^{(P, \varrho)}$.*

Poznámka 8. Budiž v E_1 dána množina M, složená z bodu 2 a ze všech bodů intervalu $(0, 1)$. Bod $\frac{1}{2}$ patří k M i k M'; bod 1 patří k M' a nepatří k M; bod 3 nepatří ani k M, ani k M'; bod 2 patří k M a nepatří k M'. Definujeme: Bod množiny M, který není hromadným bodem množiny M, nazýváme **isolovaným bodem** množiny M. Je patrno, že tento pojem závisí pouze na metrice v M a ne na tom, do jakého širšího prostoru je snad množina M vnořena.

Derivaci (t. j. hromadné body) lze opět charakterisovati trochu jinak:

Věta 119. *Budiž $x \in P$, $A \subset P$. Potom x je hromadným bodem množiny A tehdy a jen tehdy, když každá koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$ (o středu x) obsahuje aspoň jeden bod z A, různý od x.*

Uvědomte si dobře rozdíl mezi větami 113, 119.

Důkaz. 1. Je-li x hromadným bodem, obsahuje každá taková koule dokonce nekonečně mnoho bodů z A.

2. Není-li x hromadným bodem, existuje podle definice 21 koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$, obsahující jenom konečný počet bodů z A. Je zřejmo, že

potom mohu voliti ε_1 $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$ tak, že $\Omega_P(x, \varepsilon_1)$ už neobsahuje žádného bodu z A, s výjimkou snad bodu x samotného.

Věta 120. *Budiž $x \in P$, $A \subset P$. Potom x je hromadným bodem množiny A tehdy a jen tehdy, jestliže existuje* p r o s t á *posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A taková, že* $\lim x_n = x$.

Uvědomte si dobře rozdíl mezi větami 114, 120.

D ů k a z. 1. Existuje-li taková posloupnost, je x zřejmě hromadným bodem.

2. Je-li x hromadným bodem, potom každá koule $\Omega_P\left(x, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů z A. Jestliže tedy byly již zvoleny body $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, je možno zvoliti $x_n \in A$ tak, že $x_n \neq x_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n-1$ a že $\varrho(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Tak dostávám (axiom výběru!) žádanou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$

P o z n á m k a 9. Z věty 120 je vidět, že smysl pojmu ,,hromadný bod" se nezmění, nahradím-li metriku v P ekvivalentní metrikou.

Větu 120 lze vysloviti ještě trochu jinak:

Věta 120a. *Budiž $x \in P$, $A \subset P$. Potom x je hromadným bodem množiny A tehdy a jen tehdy, jestliže existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A taková, že $x_n \neq x$ pro $n = 1, 2, \ldots$,* $\lim x_n = x$.

D ů k a z. 1. Je-li tato podmínka splněna, obsahuje každá koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ aspoň jeden bod z A, různý od x. Tedy $x \in A'$ podle věty 119.

2. Je-li $x \in A'$, existuje podle věty 120 prostá posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A tak, že $\lim x_n = x$. V této posloupnosti je tedy nejvýše jeden člen roven x; vynechám-li jej, dostanu posloupnost bodů různých od x.

Je zřejmé, že $A' \subset \overline{A}$. Dokažme:

Věta 121. $\overline{A} = A \cup A'$.

D ů k a z. Uzávěr i derivace se bere ovšem v témž prostoru. Ježto $A \subset \overline{A}$, $A' \subset \overline{A}$, je $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Budiž za druhé $x \in \overline{A}$. Buďto je $x \in A$ nebo $x \in \overline{A} \dot{-} A$. V posledním případě podle věty 113 každá koule $\Omega(x, \varepsilon)$ obsahuje bod z A, který je nutně různý od x, takže podle věty 119 je $x \in A'$. Každý bod z $\bar{A}$ leží tedy buďto v A nebo v A', t. j. $\bar{A} \subset A \cup A'$.

Poznámka 10. Podle věty 121 znamená $\bar{A} = A$ totéž jako $A' \subset A$. Tedy: A je uzavřená v (P, ϱ) tehdy a jen tehdy, jestliže všechny hromadné body množiny A (ležící v P) patří k A.

Poznámka 11. Nemá-li množina isolovaných bodů (t. j. jsou-li všechny její body jejími hromadnými body) a je-li neprázdná, nazývá se **hustě rozložená.** Jsou-li naopak všechny body množiny M isolovanými body množiny M, nazývá se množina M **isolovanou.** Na př. při eukleidovské metrice je množina všech racionálních čísel hustě rozložená; množina M všech čísel $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je pak isolovaná: má sice v $\mathbf{E}_1$ hromadný bod 0, ale ten nepatří k M.[36]) Množina M, která je uzavřená v P a hustě rozložená, nazývá se **dokonalou** nebo **perfektní** v P. To tedy znamená, že $M \neq \emptyset$ a že $M = M'^P$ (t. j. že všechny body z M jsou jejími hromadnými body a že jiných hromadných bodů množina v P nemá).

Někteří autoři vynechávají v definici hustě rozložené množiny a dokonalé množiny podmínku $M \neq \emptyset$.

Věta 122. *Je-li* $A \subset B$, *je* $A' \subset B'$; *vždy jest* $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Odtud indukcí okamžitě $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cup \ldots \cup A_n'$.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé na př. z definice. Z něho plyne $A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$, tedy $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Zbývá dokázati toto: Budiž $x \in (A \cup B)'$; potom je buďto $x \in A'$ nebo $x \in B'$. Ale to plyne z věty 120 takto: Existuje prostá posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů množiny $A \cup B$, mající limitu x. Tato posloupnost obsahuje buďto nekonečně mnoho bodů z A nebo nekonečně mnoho bodů z B; tím dostáváme prostou nekonečnou posloupnost buďto bodů z A nebo bodů z B s limitou x, a užijeme věty 120.

Věta 123. A'^P *je uzavřená v* P.

Důkaz. Položme $A' = B$; máme dokázati $\bar{B} \subset B$. Budiž $a \in \bar{B}$,

[36]) Je to jediný hromadný bod množiny M (v $\mathbf{E}_1$). Uzávěr $\bar{M}$ (v $\mathbf{E}_1$) se skládá právě z bodu 0 a ze všech bodů $\frac{1}{n}$.

$\varepsilon > 0$. Existuje tedy $x \in B$ tak, že $\varrho(a, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ježto $x \in A'$, leží v kouli $\Omega_P(x, \frac{1}{2}\varepsilon)$ nekonečně mnoho bodů z A. Ale podle trojúhelníkové nerovnosti je $\Omega_P(x, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset \Omega_P(a, \varepsilon)$. (Neboť pro $y \in \Omega_P(x, \frac{1}{2}\varepsilon)$ je

$$\varrho(a, y) \leqq \varrho(a, x) + \varrho(x, y) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.)$$

Tedy v $\Omega_P(a, \varepsilon)$ leží (pro každé $\varepsilon > 0$) nekonečně mnoho bodů z A. Tedy $a \in A'$, t. j. $a \in B$.

Definice 22. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$. Říkáme, že A jest otevřená (v prostoru (P, ϱ)), jestliže $P \dot{-} A$ jest uzavřená (v (P, ϱ)).*

Na př. $\emptyset$, P, $P \dot{-} (a)$ jsou otevřené v P. Pro $P = \mathsf{E}_1$ je tato definice podle věty 64 v souhlase s definicí v kap. V, § 1. Tam jsme ovšem otevřené množiny definovali názorněji pomocí „vnitřních bodů". Tuto charakterisaci otevřených množin pro obecné P podáme ve větě 126. Definice 22 ukazuje, že je jakási dualita mezi otevřenými a uzavřenými množinami, z které lze často těžit pro zjednodušení důkazů. Tuto dualitu lze vysloviti takto: Je-li $A \subset P$, položme $B = P \dot{-} A$ (takže také $A = P \dot{-} B$). Definice 22 potom říká právě toto: je-li jedna z množin A, B uzavřená, je druhá otevřená; je-li jedna z nich otevřená, je druhá uzavřená.

Věta 124. *Průnik konečného počtu otevřených množin a sjednocení jakéhokoliv systému otevřených množin jsou otevřené množiny.*

Tedy právě naopak než u uzavřených (věta 116).

Důkaz. A_z buďte otevřené v P, takže $P \dot{-} A_z$ jsou uzavřené. Jest

$$P \dot{-} \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (P \dot{-} A_j)\,,$$

$$P \dot{-} \bigcup_{z \in Z} A_z = \bigcap_{z \in Z} (P \dot{-} A_z)\,.$$

Podle věty 116 jsou pravé strany uzavřené, a tedy množiny $\bigcap A_j$, $\bigcup A_z$ otevřené (podle definice 22).

Poznámka 12. Je-li A otevřená, B uzavřená (v P), je $A \dot{-} B$ otevřená, $B \dot{-} A$ uzavřená. Důkaz: $A \dot{-} B = A(P \dot{-} B)$ je průnik dvou otevřených, $B \dot{-} A = B(P \dot{-} A)$ je průnik dvou uzavřených množin.

Udáme nyní názornější charakterisaci otevřených množin.

Definice 23. *Budiž $a \in P$, $A \subset P$. Říkáme, že bod a je vnitřním bodem množiny A (vzhledem k prostoru P), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\Omega_P(a, \varepsilon) \subset A$.*[37] *Vnitřkem množiny A v prostoru P — znak A° nebo $A^{\circ P}$ — nazýváme množinu všech vnitřních bodů (vzhledem k prostoru P) množiny A.*

Poznámka 13. Zřejmě každý vnitřní bod množiny A patří k množině A. Je-li $A \subset B$, je zřejmě $A^\circ \subset B^\circ$.

Věta 125. $A^\circ = P \dot{-} \overline{P \dot{-} A}$; $\overline{A} = P \dot{-} (P \dot{-} A)^\circ$. (Vnitřek i uzávěr v prostoru P.)

Důkaz. $x \in A^\circ$ znamená totéž jako že v jisté kouli $\Omega_P(x, \varepsilon)$ neleží žádný bod z $P \dot{-} A$, t. j. totéž jako že bod x nepatří k $\overline{P \dot{-} A}$ (viz větu 113); tím je dokázán první vzorec.

$x \in \overline{A}$ znamená totéž jako že v každé kouli $\Omega_P(x, \varepsilon)$ leží bod patřící k A, t. j. nepatřící k $P \dot{-} A$, t. j. totéž jako že x nepatří k $(P \dot{-} A)^\circ$; tím je dokázán druhý vzorec.

Věta 126. *Budiž $A \subset P$. Potom platí:* 1. *A° je otevřená v P.*

2. *A° je největší množina otevřená v P, která je obsažena v A; přesně: Je-li $B \subset A$, B otevřená, je $B \subset A^\circ$.*

3. *Množina A je otevřená (v P) tehdy a jen tehdy, je-li každý její bod jejím vnitřním bodem (vzhledem k P), t. j. je-li $A = A^\circ$. Vnitřek A° se ovšem bere v P.*

Poznámka 14. Vlastnost 3 dává velmi názornou charakteristiku otevřených množin.[38]

Důkaz. Bod 1 plyne z věty 125, první vzorec. Bod 3 plyne takto: Je-li A otevřená, je $P \dot{-} A$ uzavřená, a tedy podle 1. vzorce věty 125 je

$$A^\circ = P \dot{-} \overline{P \dot{-} A} = P \dot{-} (P \dot{-} A) = A\,;$$

je-li naopak $A = A^\circ$, je A otevřená podle bodu 1. Důkaz bodu 2: Je-li $B \subset A$, B otevřená, je (viz bod 3) $B = B^\circ \subset A^\circ$.

Poznámka 15. Dokažme, že „otevřená koule“ $\Omega_P(a, \varepsilon)$ je vskutku množina otevřená v P. Důkaz: Budiž $x \in \Omega_P(a, \varepsilon)$, tedy $\varrho(a, x) < \varepsilon$.

[37]) Velmi názorné: všechny body prostoru P, dosti blízké bodu a, leží v A.
[38]) V kap. V, § 1 jsme jí užili přímo k definici otevřených množin (v $\mathbf{E}_1$).

Tedy existuje $\varepsilon' > 0$ tak, že $\varrho(a, x) + \varepsilon' < \varepsilon$. Tedy $\Omega_P(x, \varepsilon') \subset \Omega_P(a, \varepsilon)$ (podle trojúhelníkové nerovnosti), takže x je vnitřním bodem množiny $\Omega_P(a, \varepsilon)$, a užije se věty 126, bod 3.

Definice 24. *Každou množinu otevřenou (v P) a obsahující bod x nazýváme okolím bodu x (v prostoru P). Každou množinu otevřenou (v P) a obsahující množinu M nazýváme okolím množiny M (v prostoru P).*

Poznámka 16. Každá otevřená množina je okolím každého svého bodu a každé své části. Někteří autoři nazývají okolím bodu x (množiny M) obecněji každou množinu, jejíž vnitřek obsahuje bod x (množinu M) a našim okolím ve smyslu definice 24 říkají pak otevřená okolí.

Budiž $A \subset P$. Body metrického prostoru P jsou vzhledem k množině A trojího druhu: 1. Body z A°, t. j. vnitřní body množiny A (vše vzhledem k P). 2. Body z $(P \dot{-} A)^\circ$; to jsou tedy takové body $x \in P$, že lze nalézti kouli $\Omega_P(x, \varepsilon)$, která obsahuje jen body z $P \dot{-} A$, t. j. body neležící v A; říká se jim někdy vnější body množiny A (vzhledem k P); jsou to ovšem vesměs body nepatřící k A. 3. Ostatní body prostoru P nazveme **hraničními** body množiny A (vzhledem k P), a množinu všech hraničních bodů množiny A (vzhledem k P) nazvu **hranicí** množiny A (v prostoru P); znak $H(A)$ nebo $H^P(A)$. Je to množina všech bodů z P, jež nepatří ani k A°, ani k $(P \dot{-} A)^\circ$; t. j. (viz větu 125) jež patří k $\overline{P \dot{-} A}$ i k $\overline{A}$. Tedy:

Věta 127. $H(A) = \overline{A} \,.\, \overline{P \dot{-} A} = H(P \dot{-} A)$. (Všechno v prostoru P; tedy $H(A)$ je uzavřená v P.)

Poznámka 17. Bod x patří tedy k hranici $H^P(A)$ tehdy a jen tehdy, když každá koule $\Omega_P(x, \varepsilon)$ obsahuje bod z A i bod z $P \dot{-} A$ — to je velmi názorné.

Poznámka 18. Poznamenali jsme, že pojem uzávěru v prostoru (P, ϱ) a rovněž pojem hromadného bodu a tedy i pojem derivace se nezmění, nahradíme-li prostor (P, ϱ) prostorem (P, σ), kde metrika ϱ je v P ekvivalentní s metrikou σ. Tedy se nezmění ani smysl pojmů, jež lze z uzávěru a z derivace odvodit: uzavřená množina ($\overline{A} = A$), vnitřek (viz větu 125), otevřená množina ($A^\circ = A$), vnitřní, vnější, isolovaný, hraniční bod množiny, hranice množiny, hustě rozložená množina, isolovaná množina, dokonalá množina. Na př. $\mathbf{H}^{(P,\varrho)}(A) = \mathbf{H}^{(P,\sigma)}(A)$; A je otevřená v (P, ϱ) tehdy a jen tehdy, když je otevřená v (P, σ) atd.

Poznámka 19. Naproti tomu zdůrazňuji, že pojem úplného prostoru a pojem cauchyovské posloupnosti může změnit svůj smysl, přejdu-li k ekvivalentní metrice. Příklad: V $\mathbf{E}_1$ máme eukleidovskou metriku ϱ a s ní ekvivalentní redukovanou metriku ϱ^* (viz § 4, příkl. 1). $(\mathbf{E}_1, \varrho)$ jest úplný, ale $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$ není úplný. Neboť posloupnost 1, 2, 3, 4, ... má v rozšířeném prostoru $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$ limitu $+\infty$, jež neleží v $\mathbf{E}_1$: tedy je cauchyovská, ale nemá limitu v $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$; v $(\mathbf{E}_1, \varrho)$ ovšem tato posloupnost není cauchyovská. To je ostatně vidět přímo:

$$\varrho(m, n) = |m - n| , \quad \varrho^*(m, n) = \frac{|m - n|}{(1 + m)(1 + n)} .$$

Ovšem: přejdu-li k metrice nejenom ekvivalentní, nýbrž dokonce „skoro stejné", nezmění se smysl pojmu cauchyovské posloupnosti ani úplného prostoru.

Budiž nyní $A \subset Q \subset P$; ptejme se, jak se změní uzávěr množiny A, jestliže od prostoru (P, ϱ) přejdeme k prostoru Q (vnořenému do (P, ϱ)).

Věta 128. *Budiž $A \subset Q \subset P$. Potom $\bar{A}^Q = Q \,.\, \bar{A}^P$.*

Důkaz. Levá strana je

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in Q, \varrho(x, A) = 0) = Q \,.\, \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in P, \varrho(x, A) = 0) .$$

Poznámka 20. Podobně $A'^Q = Q \,.\, A'^P$. To plyne na př. ihned z věty 120.

Věta 129. *Budiž $A \subset Q \subset P$. Potom A je uzavřená (po příp. otevřená) v Q tehdy a jen tehdy, existuje-li množina B, uzavřená (po příp. otevřená) v P tak, že $A = QB$.*

Velmi jednoduchá věta, která se snadno pamatuje.

Důkaz. 1. Budiž A uzavřená v Q. Podle věty 128 je $A = \bar{A}^Q = Q\bar{A}^P$, kde $B = \bar{A}^P$ je uzavřená v P.

2. Je-li $A = QB$, kde B je uzavřená v P, je podle věty 128 $\bar{A}^Q \subset \bar{A}^P$,

dále $\overline{A}^P \subset \overline{B}^P = B$, tedy $\overline{A}^Q \subset B$ a současně ovšem $\overline{A}^Q \subset Q$, tedy $\overline{A}^Q \subset BQ = A$, t. j. A uzavřená v Q.

3. Budiž A otevřená v Q, tedy $Q \dot{-} A$ uzavřená v Q, tedy $Q \dot{-} A = QC$, kde C je uzavřená v P; $A = Q \dot{-} C = Q(P \dot{-} C) = QB$, kde $B = P \dot{-} C$ je otevřená v P.

4. Budiž $A = QB$, kde B je otevřená v P; potom $Q \dot{-} A = Q \dot{-} B = Q(P \dot{-} B)$, kde $P \dot{-} B$ je uzavřená v P, tedy podle 2. je $Q \dot{-} A$ uzavřená v Q, t. j. A otevřená v Q.

Poznámka 21. Budiž $A \subset Q \subset P$, budiž A uzavřená (otevřená) v P. Potom A jest uzavřená (otevřená) v Q. Důkaz: Jest $A = QA$, a užije se věty 129.

Poznámka 22. Budiž $A \subset Q \subset P$; budiž A uzavřená v Q, Q uzavřená v P. Potom je A uzavřená v P. Důkaz: Podle věty 129 je $A = QB$ průnikem dvou množin uzavřených v P. Podobný výsledek platí se slovem „otevřený" místo „uzavřený".

Věta 130. *Buďte* $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ *metrické prostory,* $A_j \subset P_j$ $(j = 1, \ldots, r)$, $P = P_1 \times \ldots \times P_r$, $A = A_1 \times \ldots \times A_r$; *metrika v* P *budiž dána vzorcem* (13) *nebo* (14). *Potom platí:*

1. $\overline{A} = \overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_r$.

2. $A^\circ = A_1^\circ \times \ldots \times A_r^\circ$.

3. *Je-li* $A \neq \emptyset$, *potom* A *je uzavřená (resp. otevřená) v* P *tehdy a jen tehdy, je-li každá* A_j $(j = 1, \ldots, r)$ *uzavřená (resp. otevřená) v* P_j. *Uzávěr a vnitřek se u množiny* A *ovšem míní v* P, *u* A_j *v* P_j.

Důkaz. Ježto metriky (13), (14) jsou ekvivalentní, je jedno, kterou vezmeme. Nejpohodlnější bude pro nás metrika

$$\varrho(x, y) = \max_{1 \leq j \leq r} \varrho_j(x_j, y_j), \tag{55}$$

kde $[x_1, \ldots, x_r] = x$, $[y_1, \ldots, y_r] = y$; té užijeme.

1. Budiž předně $x \in \overline{A}$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $y \in A$ tak, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$, tedy i $\varrho_j(x_j, y_j) < \varepsilon$ $(y_j \in A_j)$; tedy $x_j \in \overline{A}_j$, t. j. $x = [x_1, \ldots, x_r] \in \overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_r$. Budiž za druhé $x \in \overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_r$, t. j. $x_j \in \overline{A}_j$ pro každé j $(1 \leq j \leq r)$. Budiž $\varepsilon > 0$; ke každému j existuje $y_j \in A_j$ tak, že $\varrho_j(x_j, y_j) < \varepsilon$. Položíme-li $y = [y_1, \ldots, y_r]$, je $y \in A$ a podle (55) je $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Tedy je $x \in \overline{A}$.

2. Budiž předně $x \in A^\circ$. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$(y \in P,\ \varrho(x, y) < \varepsilon) \Rightarrow y \in A\,. \tag{56}$$

Budiž j některé z čísel $1, \ldots, r$, $y_j \in P_j$, $\varrho_j(x_j, y_j) < \varepsilon$. Potom bod $\xi = [x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_r]$ má od x vzdálenost $< \varepsilon$, tedy leží podle (56) v A, tedy y_j leží v A_j. T. j. $\Omega_{P_j}(x_j, \varepsilon) \subset A_j$, t. j. $x_j \in A_j^\circ$; to platí pro každé j, tedy $x \in A_1^\circ \times \ldots \times A_r^\circ$. Budiž za druhé $x \in A_1^\circ \times \ldots \times A_r^\circ$, t. j. $x_j \in A_j^\circ$; tedy existuje $\varepsilon_j > 0$ tak, že

$$(y_j \in P_j,\ \varrho_j(x_j, y_j) < \varepsilon_j) \Rightarrow y_j \in A_j\,. \tag{57}$$

Budiž nyní $\varepsilon = \operatorname{Min}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) > 0$. Budiž $y \in P$, $\varrho(x, y) < \varepsilon$; potom podle (57) je $y_j \in A_j$, tedy $y \in A$. Tedy $\Omega_P(x, \varepsilon) \subset A$, t. j. $x \in A^\circ$.

3. Podle bodu 1 je $A \neq \emptyset$ uzavřená tehdy a jen tehdy, je-li

$$\emptyset \neq \bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_r = A_1 \times \ldots \times A_r\,.$$

Ale podle kap. I, § 8, pozn. 4 to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $A_1 = \bar{A}_1, \ldots, A_r = \bar{A}_r$. Podobně pro otevřené množiny.

§ 6. Množiny typu F_σ a G_δ. Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina. Ale sjednocení spočetného systému uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. (Příklad: Množina všech racionálních čísel není uzavřená v $\mathbf{E}_1$ s eukleidovskou metrikou.) Podobně průnik spočetného systému otevřených množin nemusí být otevřený.

Definice 25. *Množinu tvaru* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, *kde* F_n *jsou uzavřené (v P), nazýváme množinou typu* F_σ *(v P). Množinu tvaru* $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, *kde* G_n *jsou otevřené (v P), nazýváme množinou typu* G_δ *(v P).*

Poznámka 1. Je-li A typu F_σ v P, je $P \dot{-} A$ typu G_δ v P; je-li A typu G_δ v P, je $P \dot{-} A$ typu F_σ v P. Důkaz ihned z formulí

$$P \dot{-} \bigcup F_n = \bigcap (P \dot{-} F_n)\,, \quad P \dot{-} \bigcap G_n = \bigcup (P \dot{-} G_n)\,.$$

Poznámka 2. Každá uzavřená množina je typu F_σ, každá otevřená je typu G_δ; neboť $A = A \cup A \cup A \cup \ldots = A \,.\, A \,.\, A \ldots$ Ale také každá uzavřená množina je typu G_δ a tedy (podle pozn. 1) každá otevřená je typu F_σ. Důkaz: Je-li $M \subset (P, \varrho)$, $\varepsilon > 0$, označme

$$\Omega_P(M, \varepsilon) = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in P,\ \varrho(x, M) < \varepsilon)\,.$$

Uvažme: Je-li $\varrho(x, M) < \varepsilon$, je $\varrho(x, y) < \varepsilon$ aspoň pro jedno $y \in M$ a naopak, takže

$$\Omega_P(M, \varepsilon) = \bigcup_{y \in M} \Omega_P(y, \varepsilon)\,;$$

podle pozn. 15 v § 5 je tedy $\Omega_P(M, \varepsilon)$ otevřená v P. Zřejmě

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_P\left(M, \frac{1}{n}\right) = \overline{M}$$

(uzávěr v P); neboť levá strana je množina těch bodů, které mají od M vzdálenost rovnou nule. Tedy $\overline{M}$ je vždy typu G_δ. Je-li však M uzavřená, je $\overline{M} = M$.

Poznámka 3. Sjednocení spočetného systému množin typu F_σ je opět typu F_σ. Neboť je-li $A_n = \bigcup_m F_{n,m}$ ($F_{n,m}$ uzavřené), je $\bigcup_n A_n = \bigcup_{m,n} F_{n,m}$. Podobně průnik spočetného systému množin typu G_δ je typu G_δ. Ale průnik spočetného systému množin typu F_σ nemusí být typu F_σ; tak dospíváme k novému typu $F_{\sigma\delta}$; sjednocení spočetného systému množin typu $F_{\sigma\delta}$ nás vede k dalšímu typu $F_{\sigma\delta\sigma}$ atd. — stále složitější typy množin (t. zv. Borelovy třídy množin). Podobně $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$ atd. Ale tím se nebudeme zabývat.

Věta 131. *Budiž A typu F_σ v P. Potom lze psáti $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené v P, $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$*

Důkaz. Budiž $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, kde B_n jsou uzavřené. Stačí položiti $F_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, načež $A = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$

Věta 132. *Budiž A typu G_δ v P. Potom lze psáti $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou otevřené v P, $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ Je-li mimo to A omezená, lze docíliti ještě toho, že i G_n jsou omezené.*

Důkaz. Budiž $A = B_1 B_2, \ldots$, kde B_n jsou otevřené. Stačí psáti $G_n = B_1 B_2 \ldots B_n$, načež $A = G_1 G_2 \ldots$ Je-li A omezená, volme libovolně bod $a \in A$ (pro $A = \emptyset$ je vše triviální) a sestrojme kouli $\Omega_P(a, K)$, kde $K > d(A)$. Zřejmě $A \subset \Omega_P(a, K)$, takže klademe-li $G_n \,.\, \Omega_P(a, K) = H_n$, jest $A = H_1 H_2 \ldots$

Poznámka 4. Smysl pojmů „množina typu F_σ nebo G_δ" se nezmění, přejdu-li k ekvivalentní metrice, neboť tyto pojmy byly zavedeny pomocí pojmů uzavřené a otevřené množiny.

§ 7. Množiny husté a řídké v P. Definice 26. *Budiž $A \subset B \subset P$; P je metrický prostor (P, ϱ). Potom říkáme, že A je hustá v B, jestliže každý bod z B má od A vzdálenost rovnou nule.*

Jinými slovy: Jestliže každá koule v prostoru B (o jakémkoliv středu $y \in B$ a jakémkoliv poloměru $\varepsilon > 0$) obsahuje nějaký bod z A.[39]) Je vidět, že zde záleží pouze na metrice v B; prostor P v definici byl zbytečný — jde zde prostě o vztah mezi množinami A, B.

Poznámka 1. Definice říká prostě, že každý bod z B leží v uzávěru množiny A. Tedy: *Je-li $A \subset B \subset P$, je A hustá v B tehdy a jen tehdy, když $\overline{A}^P \supset B$.* Nebo, vezmu-li přímo B za prostor: *Je-li $A \subset B$, je A hustá v B tehdy a jen tehdy, když $\overline{A}^B \supset B$* (neboli $\overline{A}^B = B$, což znamená totéž).

Příklad 1. V $\mathbf{E}_1$ s eukleidovskou metrikou je množina všech racionálních a rovněž množina všech iracionálních čísel hustá. Vskutku každá koule — t. j. každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — obsahuje racionální i iracionální čísla.

Poznámka 2. Ježto $\overline{\emptyset} = \emptyset$, je prázdná množina hustá v prázdné, ale není hustá v žádné neprázdné množině. Ježto se dá pojem „A husté v B" definovati pomocí uzávěru, má týž smysl pro dvě ekvivalentní metriky.

Věta 133. *Budiž $A \subset B \subset C$.*

1. *Je-li A hustá v C, je A hustá v B a B hustá v C.*

2. *Je-li A hustá v B a B hustá v C, je A hustá v C.*

Důkaz. Uzávěry berme v C.

1. Je-li $\overline{A} \supset C$, je též $\overline{B} \supset C$ a $\overline{A} \supset B$.

2. Je-li $\overline{A} \supset B$, $\overline{B} \supset C$, je (ježto $\overline{B}$ je nejmenší uzavřená množina $\supset B$, viz větu 118) $\overline{A} \supset \overline{B}$, tedy $\overline{A} \supset C$.

---

[39]) Odtud je vidět: Je-li A hustá v B, obsahuje každá neprázdná, v B otevřená množina G nějaký bod z A; neboť G obsahuje nějakou kouli.

Věta 134. *Buďte* $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ *metrické prostory,* $A_j \subset P_j$ $(j = 1, \ldots, r)$*; budiž* $P = P_1 \times \ldots \times P_r$ *(s metrikou* (13) *nebo některou metrikou ekvivalentní),* $A = A_1 \times \ldots \times A_r \neq \emptyset$. *Potom* A *je hustá v* P *tehdy a jen tehdy, jestliže* A_j *je hustá v* P_j *pro každé* $j = 1, 2, \ldots, r$.

Důkaz. Jde o to (viz pozn. 1), kdy je $\bar{A}^P = P$, t. j. (viz větu 130), kdy je $\bar{A}_1^{P_1} \times \ldots \times \bar{A}_r^{P_r} = P_1 \times \ldots \times P_r$. Ale to platí podle kap. I, § 8, pozn. 4 tehdy a jen tehdy, když $\bar{A}_j^{P_j} = P_j$.

Příklad 2. Budiž v E_r dána některá z metrik (5), (7). Budiž M množina všech bodů, jejichž všechny souřadnice jsou racionální (tedy je to spočetná množina podle kap. I, § 5, příkl. 5). Podle příkl. 1 a věty 134 je M hustá v E_r.

V prostoru E_1 s eukleidovskou metrikou je jak množina P všech racionálních čísel, tak množina $\mathsf{E}_1 \dot{-} \mathsf{P}$ hustá. Proto se čtenář asi nepodiví, že nedefinujeme „řídkou" množinu jako doplněk „husté", nýbrž trochu jinak:

Definice 27. *Budiž* $A \subset (P, \varrho)$. *Říkáme, že* A *je řídká v* P, *jestliže* $P \dot{-} \bar{A}$ *je hustá v* P (uzávěr beru v P).

Poznámka 3. Ježto bodová množina je metrický prostor, víme, co znamená výrok „A je řídká v B", když B je bodová množina. Nedělám už takovou zbytečnost jako v def. 26, kde jsem zbytečně psal tři množiny A, B, P. Zřejmě také tento pojem má týž smysl pro ekvivalentní metriky.

Poznámka 4. Podle pozn. 1 je A řídká v P tehdy a jen tehdy, je-li (uzávěry beru v P)

$$\overline{P \dot{-} \bar{A}} = P .$$

Věta 135. *Je-li* $A \subset B$, B *řídká v* P, *je též* A *řídká v* P.

Důkaz. $\overline{P \dot{-} \bar{A}} \supset \overline{P \dot{-} \bar{B}}$, a užije se pozn. 4.

Věta 136. *Je-li* $A \subset B \subset P$, A *řídká v* B, *je též* A *řídká v* P.

Důkaz. Budiž A řídká v B. Ježto (věta 128) $\bar{A}^B = B\bar{A}$ (pruh bez indexu nechť značí uzávěr v P), je $B \dot{-} \bar{A}^B = B \dot{-} \bar{A}$. Tato množina je podle definice 27 hustá v B. Máme dokázat, že množina $P \dot{-} \bar{A}$ je hustá v P, t. j. že každý bod $x \in P$ má od $P \dot{-} \bar{A}$ vzdálenost rovnou nule. Budiž předně $x \in P \dot{-} \bar{B}$; potom je tím spíše $x \in P \dot{-} \bar{A}$, tedy

$\varrho(x, P \dot{-} \overline{A}) = 0$. Budiž za druhé $x \in \overline{B}$ a budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $y \in B$ tak, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ježto $B \dot{-} \overline{A}$ je hustá v B, existuje $z \in B \dot{-} \overline{A} \subset P \dot{-} \overline{A}$ tak, že $\varrho(y, z) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tedy $\varrho(x, z) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$, tedy $\varrho(x, P \dot{-} \overline{A}) < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, tedy opět $\varrho(x, P \dot{-} \overline{A}) = 0$.

Věta 137. *Je-li A řídké v P, je též $\overline{A}$ řídké v P* (uzávěr beru v P).

Důkaz. Položím-li $\overline{A} = B$, je $\overline{B} = \overline{A}$, takže $P \dot{-} \overline{A} = P \dot{-} \overline{B}$ a užiji def. 27.

Definice 27 není příliš názorná; odvodíme si proto názornější charakteristickou vlastnost řídkých množin:

Věta 138. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$. Potom A je řídká v P tehdy a jen tehdy, jestliže platí toto: Každá neprázdná otevřená množina G obsahuje neprázdnou otevřenou množinu G_1 tak, že $G_1A = \emptyset$* („Otevřený" znamená otevřený v P.)

Důkaz. 1. Nechť A je řídká v P, t. j. $P \dot{-} \overline{A}$ je hustá v P. Budiž G neprázdná otevřená. Existuje bod $x \in G$ a koule $\Omega_P(x, \varepsilon) \subset G$. Ježto $P \dot{-} \overline{A}$ je hustá v P, existuje bod $y \in P \dot{-} \overline{A}$ tak, že $y \in \Omega_P(x, \varepsilon)$. Množina $G_1 = (P \dot{-} \overline{A}) \,.\, \Omega_P(x, \varepsilon)$ je otevřená, neprázdná (obsahuje bod y), leží celá v G a neobsahuje bodů z $\overline{A}$, tedy ani bodů z A.

2. Nechť A není řídká v P, takže $P \dot{-} \overline{A}$ není hustá v P, t. j. existuje bod $x \in P$ tak, že $\varrho(x, P \dot{-} \overline{A}) = \varepsilon_0 > 0$. Množina $G = \Omega_P(x, \varepsilon_0)$ je otevřená a neprázdná a nemá společných bodů s $P \dot{-} \overline{A}$, t. j. $G \subset \overline{A}$. Vezmu-li libovolnou neprázdnou množinu otevřenou $G_1 \subset G$, existuje bod $y \in G_1$ a koule $\Omega_P(y, \eta) \subset G_1$. Všechny body této koule, a tedy i bod y, leží v $\overline{A}$, takže koule $\Omega_P(y, \eta)$ a tím spíše množina G_1 obsahuje aspoň jeden bod z A. Tedy: v tomto případě neexistuje otevřená neprázdná množina $G_1 \subset G$ tak, aby bylo $AG_1 = \emptyset$.

Věta 139. *Buďte A, B řídké v P. Potom i $A \cup B$ je řídká v P.*

Poznámka 5. Indukcí plyne ihned: Jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ řídké v P, je $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ řídká v P.

Důkaz se opírá stále o větu 138. Budiž $G \neq \emptyset$ otevřená; mám dokázati, že existuje otevřená $G_1 \subset G$, $G_1 \neq \emptyset$ tak, že $(A \cup B)\, G_1 = \emptyset$. Podle věty 138 existuje neprázdná otevřená $G_2 \subset G$ tak, ze $AG_2 = \emptyset$. Podle téže věty (použité na množinu G_2) existuje neprázdná otevřená $G_1 \subset G_2$ tak, že $BG_1 = \emptyset$. A ovšem je též $AG_1 = \emptyset$, ježto $G_1 \subset G_2$.

Poznámka 6. Množina prázdná je řídká v každé množině. V E_1 při eukleidovské metrice je každá jednobodová a tedy (věta 139) i každá konečná množina řídká. Ale spočetná množina P všech racionálních čísel už není řídká v E_1, neboť $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{E}_1$, a tedy $\mathsf{E}_1 \dot{-} \overline{\mathsf{P}} = \emptyset$ není hustá v E_1. Proto zavádíme nový pojem:

Definice 28. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$. Říkáme, že A je první kategorie v P, lze-li psáti $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou řídké v P.*

Poznámka 7. Množina první kategorie je tedy sjednocení spočetného systému řídkých množin. Každá řídká množina A je první kategorie (stačí psáti $A_n = A$). Každá část množiny 1. kategorie je také první kategorie (je-li $B \subset A = \bigcup A_n$, A_n řídké, je $B = \bigcup BA_n$). Sjednocení spočetného systému množin první kategorie je opět první kategorie (je-li $M_m = \bigcup_n A_{nm}$, A_{nm} řídké, je $\bigcup_m M_m = \bigcup_{n,m} A_{nm}$). *Každá množina 1. kategorie v P je částí množiny 1. kategorie, která je typu F_σ v P.* Důkaz: Je-li $A = \bigcup A_n$, A_n řídké, jsou také $\bar{A}_n$ řídké (věta 137), tedy $B = \bigcup \bar{A}_n$ je 1. kategorie, $A \subset B$. Množiny 1. kategorie jsou důležité hlavně v úplných prostorech (a v některých prostorech příbuzných); viz o tom § 14.

Poznámka 8. Pojmy množiny husté, řídké, 1. kategorie (v P) spočívají na pojmu uzávěru; jejich smysl se proto nezmění, přejdeme-li k ekvivalentní metrice.

Cvičení

1. Všimněte si, že Cantorovo diskontinuum (kap. V, § 1, pozn. 8) je množina řídká v E_1.

2. Budiž B hustě rozložená (viz § 5, pozn. 11), budiž A hustá v B. Potom i A je hustě rozložená (t. j. nemá isolovaných bodů).

3. Budiž B hustě rozložená, A isolovaná, $A \subset B$. Potom A je řídká v B.

4. Budiž a isolovaný bod množiny B. Potom každá množina hustá v B obsahuje bod a. Tedy: Je-li B isolovaná, potom jediná množina hustá v B je množina B sama.

5. Je-li $B \neq \emptyset$, potom žádná množina nemůže být současně hustá a řídká v B.

6. Množina uzavřená v E_1 je řídká v E_1 tehdy a jen tehdy, neobsahuje-li žádný interval (a, b) $(a < b)$.

§ 8. **Intervaly a otevřené množiny v E_r.** Zavedeme pojem intervalu v E_r a odvodíme dvě věty o otevřených množinách v E_r.

Poznámka 1. (Pojem intervalu v E_r.) Začněme s E_1. Dosud jsme užívali zpravidla jen intervalů, zavedených v **DI**, ale již v kap. V jsme poznamenali, že je někdy účelno připustiti také „zvrhlé" intervaly, t. j. prázdnou množinu a jednobodové intervaly. *Od tohoto okamžiku budeme stále slovem „interval" v E_1 rozuměti interval nezvrhlý nebo zvrhlý.* Intervaly v E_1 budou tedy tyto množiny (a, b značí konečná reálná čísla): Předně

1. $(-\infty, +\infty) = E_1$; 2. $(-\infty, b) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x < b)$;[40] 3. $(a, +\infty) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x > a)$; 4. $(-\infty, b\rangle = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \leqq b)$; 5. $\langle a, +\infty) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \geqq a)$.

Za druhé všechny neprázdné množiny tvaru

6. $(a, b) = \underset{x}{\mathcal{E}}(a < x < b)$; 7. $(a, b\rangle = \underset{x}{\mathcal{E}}(a < x \leqq b)$; 8. $\langle a, b) = \underset{x}{\mathcal{E}}(a \leqq x < b)$; 9. $\langle a, b\rangle = \underset{x}{\mathcal{E}}(a \leqq x \leqq b)$ (zde je zahrnut také jednobodový interval $\langle a, a\rangle = (a)$). A konečně 10. prázdná množina $\emptyset$.

Otevřenými intervaly[41]) jsou právě $\emptyset$ a všechny intervaly s kulatými závorkami; uzavřenými intervaly jsou právě $\emptyset$, $\langle a, b\rangle$ a mimo to 1., 4., 5. Uzávěr každého neprázdného intervalu dostanu tak, že závorky nahradím špičatými $\langle\rangle$; pouze vedle symbolu $+\infty$ nebo $-\infty$ nechám závorku kulatou. Vnitřek nezvrhlého intervalu dostanu tak, že jeho závorky nahradím kulatými ( ); je to neprázdná množina. Vnitřek zvrhlého intervalu (t. j. jednobodového nebo prázdného) je prázdná množina.

Každý interval, obsahující více než jeden bod, je hustě rozložená množina.

Intervalem v E_r nazvu každý kartézský součin

$$I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r, \tag{58}$$

kde $i_1, \ldots, i_r$ jsou intervaly v E_1. Jest $I = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, je-li

[40]) x probíhá ovšem jen konečná čísla.

[41]) Slova otevřený, uzavřený, uzávěr, ... znamenají v tomto paragrafu vždy otevřený, ... v E_r; zde tedy prozatím v E_1.

některé $i_m = \emptyset$. Je-li $I \neq \emptyset$, je vyjádření (58) podle kap. I, § 8, pozn. 4 jediné, t. j. i_m jsou jednoznačně určeny intervalem I. Podle věty 130 je

$$(59) \qquad \bar{I} = \bar{i}_1 \times \bar{i}_2 \times \ldots \times \bar{i}_r ,$$

$$(60) \qquad I^\circ = i_1^\circ \times i_2^\circ \times \ldots \times i_r^\circ$$

(a to platí i pro $I = \emptyset$; uzávěr a vnitřek vlevo je v $\mathbf{E}_r$, vpravo v $\mathbf{E}_1$). Odtud je vidět, že $I^\circ = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, je-li některý i_m zvrhlý; takový interval I nazvu zvrhlým, ostatní intervaly jsou nezvrhlé. Z věty 130 je dále patrno: Je-li $I \neq \emptyset$, je I uzavřený (otevřený) tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny i_m uzavřené (otevřené).

Vezměme rovinu $\mathbf{E}_2$ (kreslete!). Intervaly v $\mathbf{E}_2$ jsou: celá rovina, dále „pravé", levé, horní anebo dolní poloroviny (uzavřené nebo otevřené, na př. $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x < b)$).

Dále čtvrtroviny (na př. $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x \leqq b,\ y > c)$), pásy (na př. $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (a < x < < b)$), „poloviny" pásů (na př. $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (a \leqq x < b,\ y > c)$), obdélníky (na př. $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (a < x < b,\ c \leqq y < d)$), a potom zvrhlé intervaly: přímky, polopřímky, úsečky,[42]) body, prázdná množina.

Odvodím nyní dvě obecné věty o otevřených množinách v $\mathbf{E}_r$. Racionálním bodem v $\mathbf{E}_r$ nazvu každý bod $a = [a_1, \ldots, a_r]$ s racionálními $a_1, \ldots, a_r$. Množina všech racionálních bodů je hustá v $\mathbf{E}_r$ a je spočetná (viz § 7, příkl. 2). Každá neprázdná otevřená množina v $\mathbf{E}_r$ obsahuje tedy aspoň jeden racionální bod (viz pozn. [39])).

Věta 140. *Buďte*

$$G_z \quad (z \in Z)$$

neprázdné otevřené množiny v $\mathbf{E}_r$, $G_{z_1} G_{z_2} = \emptyset$ *pro* $z_1 \neq z_2$. *Potom množina* Z *je spočetná.*

Stručněji řečeno: každý disjunktní systém neprázdných otevřených množin v $\mathbf{E}_r$ je spočetný.

Důkaz. V každém G_z leží aspoň jeden racionální bod; vyberu tedy

[42]) Vesměs rovnoběžné s osami souřadnicovými.

pro každé $z \in Z$ jeden racionální bod $a_z \in G_z$.[43]) Pro $z_1 \neq z_2$ je $a_{z_1} \neq a_{z_2}$ (neboť $G_{z_1}G_{z_2} = \emptyset$). Přiřadím-li tedy každému $z \in Z$ bod a_z, dostávám prosté zobrazení množiny Z na spočetnou množinu všech bodů a_z. Tedy Z je spočetná.

Věta 141. *Budiž G otevřená v $\mathbf{E}_r$. Potom lze G psáti jako sjednocení spočetného systému otevřených omezených intervalů.*[44])

Důkaz. Případ $G = \emptyset$ je jasný. Budiž tedy $G \neq \emptyset$. Je-li $x = [x_1, \ldots, x_r]$ libovolný bod z G, je vnitřním bodem množiny G. Zavedu-li tedy metriku σ (viz (7)), existuje jistá „koule" $\Omega(x, \varepsilon)$,[45]) t. j. interval

$$(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \ldots \times (x_r - \varepsilon, x_r + \varepsilon)$$

$(\varepsilon > 0)$ tak, že $\Omega(x, \varepsilon) \subset G$. Ke každému j $(j = 1, \ldots, r)$ existují racionální čísla a_j, b_j tak, že $x_j - \varepsilon < a_j < x_j < b_j < x_j + \varepsilon$; tedy interval $I_x = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_r, b_r)$ obsahuje bod x a leží v G. Tím je každému $x \in G$ přiřazen omezený otevřený interval I_x tak, že $x \in I_x \subset G$. Tedy je zřejmě

$$G = \bigcup_{x \in G} I_x ,$$

neboť každý bod $x \in G$ leží v I_x a naopak každý I_x leží v G. Ježto a_j, b_j jsou racionální, vystupuje mezi intervaly I_x pouze spočetně mnoho intervalů různých; vezmu-li každý z nich jen jednou (podrobně je smysl obdobného rčení vyložen v kap. V, § 1 při důkazu věty 69), dostanu žádané vyjádření.

Cvičení

1. Ve větě 141 nemůžeme (na rozdíl od věty 69 v $\mathbf{E}_1$) požadovati, aby sjednocení bylo disjunktní (ani kdybychom opustili nepodstatný požadavek, že jde o omezené intervaly). Dokážeme to v $\mathbf{E}_2$. Položme (kreslete!) $I = (0,2) \times (0, 1)$, $K = (0, 1) \times (0, 2)$, $G = I \cup K$ a vyjádřeme $G = \bigcup_m I_m$, kde I_m jsou neprázdné otevřené intervaly. Vezměme jeden z intervalů I_m. Dokažte, že aspoň jeden hraniční bod h množiny I_m leží v G. Tedy je $h \in I_p$ pro některé $p \neq m$, načež nutně $I_m I_p \neq \emptyset$. Tedy $\bigcup_m I_m$ nemůže být disjunktní sjednocení.

[43]) Zde se neužívá axiomu výběru: racionální body dovedeme srovnat v posloupnost a za a_z vezmu první člen této posloupnosti, který je obsažen v G_z.

[44]) Viz podobnou, ale ostřejší větu 69 pro $\mathbf{E}_1$.

[45]) Ovšem: koule v prostoru $\mathbf{E}_r$.

2. Neprázdné intervaly v E_1 se rozpadají na 10 „typů", 1. až 9., uvedených v pozn. 1, při čemž jednobodový interval počítám za zvláštní (desátý) typ. Dva neprázdné intervaly $I = i_1 \times \ldots \times i_r$, $J = j_1 \times \ldots \times j_r$ v E_r buďte „téhož typu", jestliže i_1 je téhož typu jako j_1, i_2 téhož typu jako $j_2, \ldots$

Dokažte: Všechny neprázdné intervaly v E_r se rozpadají do 10^r typů, všechny otevřené neprázdné intervaly v E_r se rozpadají do 4^r typů. O intervalu $i_1 \times \times \ldots \times i_r \neq \emptyset$ říkáme, že má dimensi p, jestliže právě p z intervalů $i_1, \ldots, i_r$ je nezvrhlých. Ukažte: Všechny intervaly v E_r dané dimense p $(0 \leqq p \leqq r)$ se rozpadají do $\binom{r}{p} 9^p$ typů. Tedy musí být $10^r = \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} 9^p$; to je vskutku pravda, jak víte odjinud (odkud?).

§ 9. Spojitost a limita zobrazení. Vzpomeňme si na definici 16: Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $a \in A \subset P$. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$(x \in A, \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon \,, \tag{61}$$

říkáme, že zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k A.

Obdobně definujeme:

Definice 29. *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $A \subset P$, budiž $a \in P$ hromadným bodem množiny A (t. j. $a \in A'^P$). Potom říkáme, že zobrazení f má limitu $q \in (Q, \sigma)$ v bodě a vzhledem k A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí*

$$(x \in A, 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), q) < \varepsilon \,. \tag{62}$$

Poznámka 1. Nerovnost $\varrho(x, a) > 0$ značí totéž co $x \neq a$. Na rozdíl od definice spojitosti se zde nemluví vůbec o hodnotě $f(a)$ a také se nepožaduje $a \in A$.

Je tedy jedno, přidám-li k A nebo odstraním-li z A bod a. Tento rozdíl mezi limitou a spojitostí je nám běžný z **DI**. Pojem limity je opět „lokální" (viz pozn. 9 v § 1).

Poznámka 2. Není možno, aby f mělo v a vzhledem k A v témže prostoru (Q, σ) dvě různé limity q, q'. Neboť jsou-li q, q' dvě takové limity, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že platí (62), a číslo $\delta' > 0$ tak, že platí

$$(x \in A, 0 < \varrho(x, a) < \delta') \Rightarrow \sigma(f(x), q') < \varepsilon \,. \tag{63}$$

Ježto $a \in A'$, existuje $x \in A$ tak, že $0 < \varrho(x, a) < \mathrm{Min}\,(\delta, \delta')$, načež podle (62), (63) je

$$\sigma(q, q') \leqq \sigma(q, f(x)) + \sigma(f(x), q') < 2\varepsilon\,.$$

To platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\sigma(q, q') = 0$, $q = q'$. Limitu zobrazení f v bodě a vzhledem k A píšeme

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)\,.$$

Znak $x \in A$ vynecháváme, je-li jasno, o kterou množinu jde.

Poznámka 3. (Vztah mezi limitou a spojitostí.) Je-li a isolovaný bod množiny A a je-li $f(a)$ definováno, je f spojitá v a vzhledem k A. Neboť existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow (x = a)$, načež ovšem $(x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) = 0$. *Je-li však $a \in AA'$, potom f je spojité v a vzhledem k A tehdy a jen tehdy, je-li* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$.

Důkaz. Dosadím-li do (62) $q = f(a)$, je vidět, že z (61) plyne (62), ale také z (62) plyne (61), neboť pro $x = a$ je $\sigma(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

Odtud plyne také toto: Existuje-li

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q \in (Q, \sigma)$$

a pozměním-li zobrazení f tak, že kladu $f(a) = q$ (a jinak nechám f beze změny), stane se f spojitou v bodě a vzhledem k množině $A \cup (a)$. Neboť podle pozn. 1 bude nyní

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup (a)}} f(x) = f(a)\,.$$

Poznámka 4. Je-li $a \in A_1 \subset A$ a je-li f spojité v bodě a vzhledem k A, je též spojité v bodě a vzhledem k A_1 — to je zřejmé z def. 16.

Je-li dále $a \in A_1A_2$, potom f je v bodě a spojité vzhledem k $A_1 \cup A_2$ tehdy a jen tehdy, je-li spojité v bodě a vzhledem k A_1 i vzhledem k A_2.[46]) Důkaz: Položme $A = A_1 \cup A_2$ a napišme implikace

$$(64) \qquad (x \in A_i,\ \varrho(x, a) < \delta_i) \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad (i = 1, 2)\,.$$

[46]) Vzpomeňte si na větu 99 z **DI**: f je spojitá v bodě c („oboustranně") tehdy a jen tehdy, je-li v bodě c spojitá zprava i zleva.

Platí-li (61), platí i (64) pro $i = 1, 2$ s hodnotami $\delta_1 = \delta_2 = \delta$; platí-li (64) pro $i = 1, 2$, platí též (61) s hodnotou $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$.

Poznámka 5. Nechť $a \in A'^P$, $A \subset B \subset P$. Potom zřejmě platí:

$$(\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = q) \Rightarrow (\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q)\,.$$

Poznámka 6. Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ), $a \in P$, $A_1 \subset P$, $A_2 \subset P$; budiž a hromadným bodem množiny A_1 i množiny A_2. Potom v (Q, σ) existuje

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_1 \cup A_2}} f(x) \tag{65}$$

tehdy a jen tehdy, jestliže v (Q, σ) existují a jsou si rovny

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_1}} f(x)\,, \tag{66}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_2}} f(x)\,; \tag{67}$$

limita (65) se potom rovná společné hodnotě limit (66), (67).

Důkaz téměř doslovně jako v pozn. 4, pouze místo $f(a)$ se do (61) dosadí hodnota limity (65) a do (64) hodnota limity (66) (pro $i = 1$) a (67) (pro $i = 2$). Všimněte si speciálního případu, uvedeného v **DI**, věta 102.

Pojem spojitosti a limity zobrazení se dá převést na pojem limity posloupnosti. To je někdy pohodlné; proveďme to.

Věta 142. *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $a \in A \subset P$. Potom f je spojité v bodě a vzhledem k A tehdy a jen tehdy, platí-li implikace*

$$(x_n \in A \text{ pro } n = 1, 2, \ldots, \lim_{n \to \infty} x_n = a) \Rightarrow (\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a))\,. \tag{68}$$

Čti: pro každou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A, mající limitu a, je $\lim f(x_n) = f(a)$. V (68) se ovšem bere vlevo limita při metrice ϱ, vpravo při metrice σ.

Důkaz. 1. Nechť f je spojitá v a vzhledem k A. Buďte $x_n \in A$, $\lim x_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle def. 16 existuje $\delta > 0$ tak, že platí

(61). K tomuto δ existuje n_0 tak, že $n > n_0 \Rightarrow \varrho(x_n, a) < \delta$, takže pro $n > n_0$ je $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$; tedy $\lim f(x_n) = f(a)$.

2. Nechť f není spojitá v a vzhledem k A. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro žádné $\delta > 0$ neplatí (61).[47]) Tedy ke každé hodnotě $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existuje x_n tak, že (61) neplatí pro $x = x_n$; t. j. premisa platí $\left(\text{t. j. } x_n \in A,\ \varrho(x_n, a) < \frac{1}{n}\right)$, ale závěr neplatí (t. j. není $\sigma(f(x_n), f(a)) < < \varepsilon$). Tím dostáváme posloupnost[48]) $x_1, x_2, \ldots$ tak, že sice $x_n \in A$, $\lim x_n = a$, ale pro žádné n není $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, tedy není $\lim f(x_n) = = f(a)$.

Věta 143.[49]) *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $A \subset P$, $a \in A'^P$. Potom f má v bodě a vzhledem k A limitu ležící v (Q, σ) tehdy a jen tehdy, platí-li toto:*

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \textit{Je-li } x_1, x_2, \ldots \textit{ jakákoliv posloupnost bodů } x_n \in A \textit{ taková, že } x_n \neq \\ \neq a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \textit{ potom posloupnost } f(x_1), f(x_2), \ldots \textit{ je konvergentní} \\ v\ (Q, \sigma). \end{array} \right.$$

Je-li tato podmínka splněna, potom pro všechny takové posloupnosti má $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ touž hodnotu, totiž $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

Důkaz. 1. Existuje-li $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = q \quad (q \in (Q, \sigma))$, potom z $x_n \in A$, $\lim x_n = a$, $x_n \neq a$ plyne (jako v 1. části důkazu věty 142) toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí (62); pro všechna $n > n_0$ je však $\varrho(x_n, a) < \delta$, $x_n \neq a$, tedy $\sigma(f(x_n), q) < \varepsilon$; tedy $\lim f(x_n) = q$.

2. Nechť je splněna podmínka (V). Je-li $x_n \neq a$, $x_n \in A$, $\lim x_n = a$ a rovněž $y_n \neq a$, $y_n \in A$, $\lim y_n = a$, má též posloupnost $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ tyto vlastnosti, takže podle (V) existuje v (Q, σ) limita posloupnosti $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$, takže je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ (vybrané posloupnosti!). Tedy všechny posloupnosti $f(x_1), f(x_2), \ldots$, kde

---

[47]) T. j. pro žádné $\delta > 0$ není pravda, že by (61) platila pro všechna x.
[48]) Ovšem: opět se užívá axiomu výběru.
[49]) Srovnej speciální případ $P = \mathsf{E}_1$, $Q = \mathsf{E}_1^*$ ve větě 72, kap. V.

$x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$, mají v (Q, σ) *touž* limitu $q \in (Q, \sigma)$. Tvrdím, že

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q \, .$$

Kdyby to nebylo pravda, existovalo by $\varepsilon > 0$ takové, že pro žádné $\delta > 0$ by neplatila implikace (62). T. j. ke každé hodnotě $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ by existoval bod x_n tak, že by sice bylo $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\varrho(x_n, a) < \frac{1}{n}$, ale současně by nebylo $\sigma(f(x_n), q) < \varepsilon$ (pro žádné n), takže by nebylo $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = q$, což je ve sporu s tím, co už bylo dokázáno.

Poznámka 7. Věty 142, 143 ukazují, že smysl pojmů „spojitost zobrazení" a „limita zobrazení" se nezmění, nahradím-li metriku ϱ nebo metriku σ ekvivalentní metrikou; neboť se tím nezmění smysl symbolů $\lim x_n$ (v (P, ϱ)), $\lim f(x_n)$ (v (Q, σ)).

Poznámka 8. (Spojitost složených zobrazení.) Nechť f je zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); nechť g je zobrazení z (Q, σ) do (R, τ). Nechť $a \in A \subset P$, $b = f(a) \in B \subset Q$. Nechť f je spojité v a vzhledem k A, nechť g je spojité v b vzhledem k B. Nechť existuje $\Delta > 0$ tak, že

$$x \in \Omega_A(a, \Delta) \Rightarrow f(x) \in B \, . \tag{69}$$

Definujme zobrazení h (z (P, ϱ) do (R, τ)) rovnicí $h(x) = g(f(x))$, pokud pravá strana má smysl. Potom zobrazení h je spojité v bodě a vzhledem k A.

Znění věty je dlouhé, ale je to velmi názorné (nejlépe, když si to nakreslíte pro $P = Q = R = \mathbf{E}_2$) a je to bezprostřední zobecnění věty 98 z **DI**.

Důkaz. Budiž $x_n \in A$, $\lim x_n = a$; máme dokázati, že $\lim h(x_n) = h(a)$. Podle věty 142 je $\lim f(x_n) = f(a)$, a podle (69) je (aspoň pro všechna $n > n_0$) $f(x_n) \in B$. Ježto g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B, je opět podle věty 142 $\lim g(f(x_n)) = g(f(a))$, což bylo dokázati.

Zvláště jednoduchý je tento případ: *Je-li f spojité v $A \subset (P, \varrho)$,* *g spojité v $B \subset (Q, \sigma)$ a je-li konečně $f(A) \subset B$, je složené zobrazení h ($h(x) = g(f(x))$) spojité* v A. Důkaz: Užiji věty, uvedené na počátku této poznámky, na každý bod a množiny A.

Poznámka 9. Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $A \subset P$. Ptáme se, kdy je f spojité v A. Použijeme-li věty 142 na každý bod $x \in A$, vidíme: f je spojité v A tehdy a jen tehdy, jestliže pro každý bod $x \in A$ a každou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z A platí

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)\,. \tag{70}$$

Poznámka 10. Věnujme se nyní homeomorfním zobrazením (viz konec § 1). Budiž f homeomorfní zobrazení (P, ϱ) na (Q, σ);[50]) budiž g homeomorfní zobrazení (Q, σ) na (R, τ). *Potom zobrazení h prostoru P na R, dané rovnicí $h(x) = g(f(x))$, je též homeomorfní.* Důkaz: h je prosté, inversní zobrazení je dáno rovnicí $h_{-1}(z) = f_{-1}(g_{-1}(z))$ pro $z \in R$ a pozn. 8 o spojitosti složených zobrazení zaručuje spojitost zobrazení h, h_{-1}. Tedy má homeomorfie tuto vlastnost: je-li (P, ϱ) homeomorfní s (Q, σ), (Q, σ) homeomorfní s (R, τ), je (P, ϱ) homeomorfní s (R, τ). Dále je (P, ϱ) homeomorfní s (P, ϱ) (identické zobrazení $f(x) = x$ prostoru (P, ϱ) na (P, ϱ) je zřejmě homeomorfní). Konečně: Je-li (P, ϱ) homeomorfní s (Q, σ), je (Q, σ) homeomorfní s (P, ϱ). To dovoluje dělení metrických prostorů do tříd prostorů homeomorfních.

Zřejmé je, že každé parciální zobrazení homeomorfního zobrazení je opět homeomorfní.

Poznámka 11. Budiž f prosté zobrazení prostoru (P, ϱ) na (Q, σ), takže existuje inversní zobrazení f_{-1}. Poznámka 9 říká, kdy je f spojité, t. j. spojité v P (t. j. místo A je nutno psáti P). Podobně: f_{-1} je spojité tehdy a jen tehdy, když pro každý bod $y \in Q$ a každou posloupnost bodů $y_n \in Q$ platí implikace

$$\lim y_n = y \Rightarrow \lim f_{-1}(y_n) = f_{-1}(y)\,. \tag{71}$$

Ježto však každý bod $y \in Q$ lze psáti ve tvaru $y = f(x)$, a to pro jediné $x \in P$[51]) (a naopak, $f(x)$ je bod z Q pro každé $x \in P$), lze též říci: f_{-1}

[50]) T. j. prosté spojité zobrazení, jehož inversní zobrazení je také spojité.
[51]) Načež $f_{-1}(y) = x$.

je spojité tehdy a jen tehdy, když pro každý bod $x \in P$ a každou posloupnost bodů $x_n \in P$ platí implikace

$$\lim f(x_n) = f(x) \Rightarrow \lim x_n = x \,. \tag{72}$$

Tedy celkem: *Prosté zobrazení f prostoru (P, ϱ) na (Q, σ) je homeomorfní tehdy a jen tehdy, když pro každý bod $x \in P$ a každou posloupnost bodů $x_n \in P$ platí ekvivalence*

$$\lim x_n = x \Leftrightarrow \lim f(x_n) = f(x) \,. \tag{73}$$

Vlevo je ovšem limita při metrice ϱ, vpravo při metrice σ. Speciálně: Zaveďme do množiny P dvě metriky ϱ, σ a sestrojme t. zv. *identické zobrazení* f prostoru (P, ϱ) na (P, σ), t. j. zobrazení takové, že $f(x) = x$. Aby (73) nevedla k nejasnosti, poznamenejme, že ji lze psáti

$$(\lim \varrho(x_n, x) = 0) \Leftrightarrow (\lim \sigma(f(x_n), f(x)) = 0) \,. \tag{74}$$

Píšeme-li nyní speciálně $f(x) = x$, vidíme odtud: *Identické zobrazení (P, ϱ) na (P, σ) je homeomorfní tehdy a jen tehdy, jestliže metriky ϱ, σ jsou ekvivalentní* (viz počátek § 4).

Poznámka 12. Budiž f homeomorfní zobrazení (P, ϱ) na (Q, σ). Ze (73) je patrno, že ty vztahy bodů $x, y, \ldots$ a bodových množin M, $N, \ldots$ prostoru (P, ϱ), které závisí pouze na pojmu limity posloupnosti v (P, ϱ), zůstanou zachovány, nahradíme-li tyto body a množiny jejich obrazy $f(x), f(y), \ldots, f(M), f(N), \ldots$ Na př. kdy patří bod $x \in P$ do $\overline{A}$?[52]) Tehdy a jen tehdy, když existují $x_n \in A$ tak, že $\lim x_n = x$; t. j. (viz (73)) když existují body $f(x_n) = y_n \in f(A)$ tak, že $\lim y_n = f(x)$; t. j. když $f(x) \in \overline{f(A)}$ (uzávěr v Q). Tedy

$$\overline{f(A)} = f(\overline{A}) : \tag{75}$$

uzávěr obrazu (v Q) rovná se obrazu uzávěru (v P). Kdy je A uzavřená v P? Tehdy a jen tehdy, když množina $B = \overline{A}$ je rovna A, t. j. když $f(B) = f(A)$,[53]) t.j. (viz (75)) když $\overline{f(A)} = f(A)$, t. j. když $f(A)$ jest uzavřená v $Q = f(P)$. Podobně: vnitřek obrazu je obrazem vnitřku; A je otevřená (hustá, řídká) v P tehdy a jen tehdy, když $f(A)$ je ote-

[52]) Uzávěr v P.

[53]) Poněvadž f je prosté, platí
$$(A = B) \Leftrightarrow (f(A) = f(B)) \,.$$
Jinak by to nemusilo platit.

vřená (hustá, řídká) v $Q = f(A)$ atd., proveďte to! Pozor ovšem na to, že obraz cauchyovské posloupnosti *nemusí* býti cauchyovská posloupnost. Rovněž, je-li P úplné resp. omezené, *nemusí* Q být úplné resp. omezené.

Vlastnosti prostoru, které zůstávají zachovány při homeomorfním (neboli topologickém) zobrazení, se nazývají topologickými vlastnostmi. Jimi se zabývá topologie.

Poznámka 13. Všimněme si zobrazení φ z § 4, příkl. 1.

Toto zobrazení zobrazuje prostě $\mathbf{E}_1^*$ na $\langle -1, 1\rangle$; „redukovanou metriku" ϱ^* v $\mathbf{E}_1^*$ jsme definovali rovnicí $\varrho^*(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Tedy φ je isometrické (a tedy homeomorfní) zobrazení $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$ na interval $\langle -1, 1\rangle$ s eukleidovskou metrikou. V $\langle -1, 1\rangle$ můžeme zavésti ovšem také ekvivalentní metriku ϱ^*, a zobrazení zůstane homeomorfní. Podobně zobrazení f z § 4, příkl. 2 je isometrické zobrazení prostoru $({}^*\mathbf{K}_1, {}^*\varrho)$ na kouli $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ v eukleidovském $\mathbf{E}_3$ (dokažte!).

Poznámka 14. Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); nechť $t \in Q$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q \in (Q, \sigma) .$$

Potom

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \sigma(f(x), t) = \sigma(q, t) \tag{76}$$

(v (76) jde o konečnou limitu reálné konečné funkce, t. j. o limitu v $\mathbf{E}_1$). Důkaz:

$$|\sigma(f(x), t) - \sigma(q, t)| \leqq \sigma(f(x), q) .$$

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje podle def. 29 $\delta > 0$ tak, že pro $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $\sigma(f(x), q) < \varepsilon$, tedy $|\sigma(f(x), t) - \sigma(q, t)| < \varepsilon$, kde levá strana je vzdálenost (v $\mathbf{E}_1$) čísla $\sigma(f(x), t)$ (což je funkce x) od bodu $\sigma(q, t)$. Tedy platí (76). Viz též cvič. 2.

Věta 144. *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do úplného prostoru (Q, σ). Budiž $A \subset P$, $a \in P$; budiž a hromadným bodem množiny A. Potom platí: limita*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \tag{77}$$

v (Q, σ) *existuje tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

$$(78) \quad \begin{aligned} &(x' \in A, x'' \in A, 0 < \varrho(x', a) < \delta, 0 < \varrho(x'', a) < \delta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon . \end{aligned}$$

Důkaz. 1. Nechť v (Q, σ) existuje limita (77). Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A, 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), q) < \tfrac{1}{2}\varepsilon ,$$

kde q značí limitu (77). Odtud podle trojúhelníkové nerovnosti plyne (78). Tato část věty platí ještě pro jakýkoliv metrický prostor Q, i když není úplný.

2. Nechť je splněna podmínka věty 144. Podle věty 143 stačí dokázati, že pro každou posloupnost bodů $x_n \in A$, pro kterou $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$, existuje $\lim f(x_n) \in (Q, \sigma)$. Budiž tedy $x_1, x_2, \ldots$ taková posloupnost. Budiž $\varepsilon > 0$. Volme $\delta > 0$ tak, aby platila implikace (78). Zřejmě existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $0 < \varrho(x_n, a) < \delta$. Je-li tedy $n > n_0$, $m > n_0$, platí podle (78) $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$; posloupnost $f(x_1), f(x_2), \ldots$ je tedy cauchyovská, a tedy má limitu v úplném prostoru (Q, σ).

Poznámka 15. Podmínce, vyslovené ve větě 144, se říká i zde Bolzano-Cauchyova podmínka. Naše věta tedy říká toto: Je-li (Q, σ) úplný prostor (na př. eukleidovský E_r), je tato podmínka nutnou a postačující podmínkou pro existenci limity (77) v (Q, σ) — prostor (P, ϱ) může být při tom jakýkoliv metrický prostor.

Podmínky tohoto „bolzanovsko-cauchyovského“ typu jsou často velmi důležité; dá se jich užíti ovšem jen tehdy, je-li příslušný prostor (u věty 144 to byl prostor (Q, σ)) úplný. Proto úplnost je velmi důležitá vlastnost a my jí v dalším věnujeme zvláštní paragraf (§ 14).

Důležitá je tato věta:

Věta 145. *Budiž* f *zobrazení z* (P, ϱ) *do* (Q, σ), *definované v množině* $A \subset P$ *(to značí, že obor zobrazení* f *obsahuje* A*). Potom* f *je spojité v* A *tehdy a jen tehdy, když pro každou množinu* N, *otevřenou v* Q, *je množina* $Af_{-1}(N)$ *otevřená v* A.

Ekvivalentní tvar podmínky je tento: … když pro každou množinu M, *uzavřenou v* Q, *je množina* $Af_{-1}(M)$ *uzavřená v* A.

Důkaz provádějme napřed pro podmínku s otevřenými množinami.

1. Budiž f spojité v A, N otevřená v Q. Budiž $a \in Af_{-1}(N)$, tedy $b = f(a) \in N$. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\Omega_Q(f(a), \varepsilon) \subset N$. Ze spojitosti f v bodě a vzhledem k A plyne: Existuje $\delta > 0$ tak, že z $x \in A$, $\varrho(x, a) < < \delta$ (t. j. z $x \in \Omega_A(a, \delta)$) plyne $\sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$, tedy $f(x) \in N$, tedy $x \in f_{-1}(N)$. T. j. $\Omega_A(a, \delta) \subset Af_{-1}(N)$, takže bod a, t. j. libovolný bod z $Af_{-1}(N)$, je vnitřním bodem této množiny vzhledem k prostoru A.

2. Budiž podmínka splněna. Budiž $a \in A$, $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace (61). Sestrojme kouli $\Omega_Q(f(a), \varepsilon) = N$. To je množina otevřená v Q, tedy $Af_{-1}(N)$ je množina otevřená v A, obsahující bod a (neboť $f(a) \in N$). Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega_A(a, \delta) \subset Af_{-1}(N)$. T. j.: je-li $x \in A$, $\varrho(x, a) < \delta$, je $x \in Af_{-1}(N)$, tedy $f(x) \in N$, tedy $\sigma(f(a), f(x)) < \varepsilon$, takže vskutku platí implikace (61).

A teď ještě, že podmínka s uzavřenými množinami je ekvivalentní podmínce s otevřenými množinami. To plyne ihned z těchto poznámek:

1. Ježto f je definována v A, je $f_{-1}(Q) \supset A$, tedy

$$Af_{-1}(Q \dot{-} M) = Af_{-1}(Q) \dot{-} Af_{-1}(M) = A \dot{-} Af_{-1}(M)\,.$$

2. Množina $M \subset Q$ je uzavřená (v Q) tehdy a jen tehdy, když $Q \dot{-} M$ je otevřená.

3. $Af_{-1}(M)$ je uzavřená v A tehdy a jen tehdy (viz 1), když $Af_{-1}(Q \dot{-} \dot{-} M)$ je otevřená v A.

Poznámka 16. Této věty můžeme použíti jednak, abychom dokázali spojitost zobrazení, jednak také — naopak — abychom dokázali uzavřenost nebo otevřenost jistých množin, máme-li k disposici nějaké spojité zobrazení. Na př. každý mnohočlen neboli polynom f ve dvou proměnných je funkce spojitá v $\mathbf{E}_2$[54]) (viz **DI**, kap. XIII, § 2, příkl. 4; je na první pohled vidět, že tamější spojitost v bodě $[x_0, y_0]$ (def. 31) znamená totéž jako spojitost v bodě $[x_0, y_0]$ vzhledem k $\mathbf{E}_2$ podle def. 16).[55]) Ježto intervaly $(-\infty, a)$ (a, b) jsou otevřené (v $\mathbf{E}_1$),

---

[54]) Je to zobrazení $\mathbf{E}_2$ do $\mathbf{E}_1$.
[55]) V def. 31 v **DI** bylo užito v $\mathbf{E}_2$ metriky σ [viz (7)].

kdežto $(-\infty, a\rangle$, (a) jsou uzavřené, jsou i jejich „vzory" otevřené, resp. uzavřené v E_2 (věta 145). Tedy na př. množiny

$$\mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ([x, y] \in \mathsf{E}_2,\ x^2 + 3y^3 - x < 7)\,,$$
$$\mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ([x, y] \in \mathsf{E}_2,\ 2 < x^5 + 4y^6 - x^3y^2 < 3)$$

jsou otevřené v E_2, množiny

$$\mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ([x, y] \in \mathsf{E}_2,\quad x^2 - y^3 \leqq 5)\,,\quad \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} ([x, y] \in \mathsf{E}_2,\quad x^2 + 2y^2 = 1)$$

jsou uzavřené v E_2.

Poznámka 17. Budiž f prosté zobrazení (P, ϱ) na (Q, σ). Zobrazení inversní k f je f_{-1}, zobrazení inversní k f_{-1} je f. Tvrdím: *f je homeomorfní tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky:*

1. *Je-li N uzavřená v Q, je $f_{-1}(N)$ uzavřená v P.*
2. *Je-li M uzavřená v P, je $f(M)$ uzavřená v Q.*

Důkaz: Užiji věty 145. Podmínka 1. je podmínka pro spojitost f; podmínka 2. je podmínka pro spojitost f_{-1}. Současně je vidět, že buďto v 1. nebo v 2. (nebo v obou) lze místo „uzavřená" říkati „otevřená".

Poznámka 18. Velmi často se vyskytují zobrazení z prostoru (P, ϱ) do prostoru (Q, σ), který je dán jako kartézský součin prostorů $(Q_1, \sigma_1), \ldots, (Q_r, \sigma_r)$. Je-li f takové zobrazení, potom pro každé x z jeho oboru je $f(x) \in Q$, t. j. $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_r(x)]$, kde $f_j(x) \in Q_j$. Dáti f znamená tedy totéž jako dáti zobrazení $f_1, \ldots, f_r$, při čemž f_j je zobrazení z (P, ϱ) do (Q_j, σ_j). (Příklad: Chci-li popsat pohyb bodu v E_3, musím pro každý okamžik t udati jeho tři souřadnice — to jsou tedy tři reálné konečné funkce (t. j. zobrazení do E_1).) Tvrdím: *f je spojité v bodě a vzhledem k A tehdy a jen tehdy, je-li každé f_j spojité v bodě a vzhledem k A.* Důkaz: Je-li $x_n \in A$, $\lim x_n = a$, jde o to (viz větu 142), zda $\lim f(x_n) = f(a)$. Ale to podle pozn. 11 v § 2 nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $\lim f_j(x_n) = f_j(a)$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$. Obdobně: *f má v bodě a vzhledem κ A limitu $q = [q_1, \ldots, q_r] \in (Q, \sigma)$ tehdy a jen tehdy, jestliže f_j má v a vzhledem k A limitu $q_j \in (Q_j, \sigma_j)$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$.* Důkaz zcela obdobný (užije se teď věty 143).

Poznámka 19. Je-li množina A dána nějakými podmínkami (na př. nerovnostmi nebo rovnostmi), vypisují se často do symbolu limity místo znaku $x \in A$ tyto podmínky. Na př. jde-li o funkci dvou reálných proměnných, píšeme leckdy na př. $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x \neq y,\ x^2-y^2<1}} f(x, y)$ místo symbolu $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ [x,y]\in A}} f(x, y)$, kde $A = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x \neq y, x^2 - y^2 < 1)$.

Cvičení

1. Jde o reálné proměnné x, y. Vypočtěte

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=ax}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2a}{1+a^2}\,; \quad \lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x=0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0\,;$$

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x^2+y^2-2x+3y=0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{12}{13}\,.$$

(K poslednímu případu: z podmínky $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ dostanete v počátku $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$, takže $\lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$; viz **D I**, kap. XIV, § 1, pozn. 4.)

2. Budiž f zobrazení z (P_1, ϱ_1) do (Q, σ); budiž g zobrazení z (P_2, ϱ_2) do (Q, σ) (body $[x, y]$, kde $x \in P_1$, $y \in P_2$, vyplňují tedy metrický prostor $P = P_1 \times P_2$). Budiž $A \subset P_1$, $a \in A'$ (derivace v P_1), $B \subset P_2$, $b \in B'$ (derivace v P_2), a nechť existují

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = q \in (Q, \sigma)\,, \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x\in B}} g(x) = t \in (Q, \sigma)\,.$$

Potom

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[a,b]\\ [x,y]\in(A \dot- (a))\times(B \dot- (b))}} \sigma(f(x)\,,\ g(y)) = \sigma(q, t)\,.$$

(Proč nesmím zde psáti $[x, y] \in A \times B$?) To je zobecnění pozn. 14 a současně zobecnění pozn. 5 z § 2.

3. Zaveďme ještě jeden pojem. Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ), $A \subset P$, $a \in \overline{A}^P$. Budeme psáti

$$\operatorname*{LIM}_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = q \ (q \in (Q, \sigma))\,, \tag{79}$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ \varrho(a, x) < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sigma(f(x), q) < \varepsilon$. Ukažte: I. Je-li $a \in A$, znamená existence LIM v (79) totéž jako spojitost v bodě a vzhledem k A (nutně pak $q = f(a)$). II. Je-li $a \in A'$, znamená symbol $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ totéž jako $\operatorname*{LIM}\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A \dot{-} (a)}} f(x)$. Lze tedy spojitost a limitu zahrnouti pod jediný pojem (79), jak někteří autoři činí. Neučinil jsem to, ježto v praxi diferenciálního počtu (kap. VII—XII) se vyšetřování případů I, II od sebe značně liší.

Jako příklad na užití pojmu LIM uveďme toto: Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ), budiž g zobrazení z (Q, σ) do (R, τ); budiž $A \subset P$, $a \in \overline{A}^P$, $B \subset Q$, $b \in \overline{B}^Q$, $c \in R$. Nechť existuje $\Delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ \varrho(x, a) < \Delta) \Rightarrow f(x) \in B$. Potom platí: Je-li $\operatorname*{LIM}\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$, $\operatorname*{LIM}\limits_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g(y) = c$, je $\operatorname*{LIM}\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(f(x)) = c$. To jsou vlastně čtyři věty o limitě a spojitosti složených zobrazení (podle toho, zda a leží či neleží v A a zda b leží či neleží v B). Vyslovte je! Uvědomte si, jak je nutná opatrnost při limitě (se symbolem lim) — viz **DI**, věta 108 a text před ní.

§ 10. Limita a spojitost v některých speciálních prostorech. Dvojné posloupnosti a řady. Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $A \subset P$, $a \in A'^P$, $q \in Q$. Potom vzorec

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q \tag{80}$$

znamená toto: (I) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), q) < \varepsilon\,. \tag{81}$$

Je-li f funkce[56]) jedné reálné nebo komplexní proměnné, a konečné číslo, píšeme $\varrho(x, a) = |x - a|$ (mohli bychom — vzhledem k ekvivalenci metrik — psáti též $\varrho^*(x, a)$ resp. ${}^*\varrho(x, a)$). Podobně: je-li f reálná nebo komplexní funkce, q konečné číslo, píšeme $\sigma(f(x), q) = |f(x) - q|$. Ale jak to vypadá, jde-li o „nevlastní limity" nebo o „limitu v bodě $+\infty$" a pod.? Zde musíme ovšem užíti redukované metriky ϱ^* resp. ${}^*\varrho$ (§ 4). Obraťme se napřed k metrice ϱ^*, dané rovnicí $\varrho^*(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, kde $\varphi(-\infty) = -1$, $\varphi(+\infty) = 1$, $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ pro $x \in \mathbf{E}_1$. Odtud plyne: $\varrho^*(x, +\infty) < 1 \Leftrightarrow x > 0$; pro $0 < x < +\infty$ je pak $\varrho^*(x, +\infty) = \dfrac{1}{1 + x}$. Dále je jasno: Jestliže danému ε $(0 < \varepsilon < 1)$ přiřadíte K rovnicí

[56]) Myšleno obecně, ve smyslu „zobrazení".

$$(82) \qquad \varepsilon = \frac{1}{1 + K} \quad \text{neboli} \quad K = \frac{1}{\varepsilon} - 1\,,$$

je tím dáno prosté klesající zobrazení intervalu $0 < \varepsilon < 1$ na interval $0 < K < +\infty$. Odtud je pak patrno: Je-li $0 < \varepsilon < 1$ (resp. $0 < K < < +\infty$) a je-li K (resp. ε) určeno rovnicí (82), platí

$$(83) \qquad 0 < \varrho^*(x, +\infty) < \varepsilon \Leftrightarrow K < x < +\infty.$$ [57])

Je-li f reálná funkce, znamená rovnice

$$(84) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = +\infty$$

toto (podle (I)): Ke každému $\varepsilon \in (0, 1)$[58]) existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \varrho^*(f(x), +\infty) < \varepsilon\,.$$

Podle (82), (83) lze to vysloviti také takto (uvážíme-li, že probíhá-li ε interval $(0, 1)$, probíhá K interval $(0, +\infty)$ a naopak): (II) Ke každému konečnému $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(85) \qquad (x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow f(x) > K\,.$$ [59])

To je význam symbolu (84) (tak jsme jej ve speciálním případě definovali v **DI**, def. 21. nebo v kap. V. § 3).

Za druhé budiž Q libovolné, ale f budiž funkce[56]) jedné reálné proměnné. Ptáme se, co znamená vzorec

$$(86) \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in A}} f(x) = q\,.$$

Podle (I) to znamená: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(87) \qquad (x \in A,\ 0 < \varrho^*(x, +\infty) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), q) < \varepsilon\,.$$

Podle (82), (83) to zase můžeme psáti takto:[59a]) (III) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečné $K > 0$ [59]) tak, že

$$(88) \qquad (x \in A,\ K < x < +\infty) \Rightarrow \sigma(f(x), q) < \varepsilon\,.$$

---

[57]) Kdybychom vlevo psali $0 \leqq$, musili bychom vpravo psát $\leqq +\infty$.
[58]) Omezení na hodnoty $\varepsilon < 1$ nemění ovšem smysl výroku (I).
[59]) Omezení na kladné hodnoty K není ovšem nutné.
[59a]) Omezíme se na hodnoty $\delta < 1$ (což smíme) a klademe

$$\delta = \frac{1}{1 + K}, \quad K = \frac{1}{\delta} - 1\,.$$

Kdyby v (84), (86) stálo $-\infty$ místo $+\infty$, psal bych ovšem v (II) $f(x) < -K$ a v (III) $-\infty < x < -K$ (kdybych vynechal požadavek $K > 0$, mohl bych psát také K místo $-K$). Důkaz mohu jistě přenechati čtenáři (ježto φ je lichá funkce, je $\varrho^*(x, +\infty) = \varrho^*(-x, -\infty)$ a úvaha je skoro doslovně táž).

Všimněme si ještě prostoru $^*K_1$. Budiž $z = x + iy$ (x, y konečná reálná) a počítejme $^*\varrho(z, \infty)$. Podle § 4, příkl. 2 přiřadíme bodu z bod $[\xi, \eta, \zeta] \in E_3$ rovnicemi (43) z § 4, bodu ∞ pak bod $[0, 0, 1]$ a $^*\varrho(z, \infty)$ definujeme jako eukleidovskou vzdálenost (v E_3) těchto dvou bodů, t. j. jako $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (1 - \zeta)^2}$. Snadno vychází $^*\varrho(z, \infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$. Jestliže každé hodnotě $\varepsilon \in (0, 2\rangle$ přiřadím hodnotu $K \geqq 0$ rovnicí

(89) $$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{1 + K^2}} \quad \text{neboli} \quad K = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} - 1}\,,$$

je opět patrno, že probíhá-li ε interval $(0, 2\rangle$, probíhá K (klesajíc) interval $\langle 0, +\infty)$. Dále je ihned vidět, že

(90) $$0 < {}^*\varrho(z, \infty) < \varepsilon \Leftrightarrow K < |z| < +\infty\,.$$

Podobně jako dříve je odtud patrno: Je-li f komplexní funkce, znamená vzorec

(91) $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \infty$$

toto: (IV) Ke každému konečnému $K \geqq 0$ [60]) existuje $\delta > 0$ tak, že

(92) $$(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f(x)| > K\,.$$

Je-li pak f funkce[56]) jedné komplexní proměnné, znamená vzorec

(93) $$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A}} f(z) = q$$

toto: (V) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečné $K \geqq 0$ [60]) tak, že

(94) $$(z \in A,\ +\infty > |z| > K) \Rightarrow \sigma(f(z), q) < \varepsilon$$

(místo $0 < {}^*\varrho(z, \infty) < \delta$ píši v premise $+\infty > |z| > K$, kde $K = \sqrt{4\delta^{-2} - 1}$ — stačí, když se omezím na kladná $\delta \leqq 2$).

[60]) Požadavek $K \geqq 0$ lze vynechati.

Tyto výsledky lze ovšem kombinovati. Na př. budiž f komplexní funkce jedné reálné proměnné. Potom vzorec

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in A}} f(x) = \infty$$

znamená: Ke každému $K_1 \in \mathbf{E}_1$ existuje $K_2 \in \mathbf{E}_1$ tak, že

$$(x \in A, -\infty < x < K_2) \Rightarrow |f(x)| > K_1 .$$

Čtenář si dovede jistě tyto případy v případě potřeby sám rozebrati.

Vidíte, že formulace (II)—(V) jsou velmi přirozené (některých z nich jsme již ve speciálních případech užili dříve jako definic), kdežto metriky ϱ^*, $^*\varrho$ byly zavedeny způsobem přece jen trochu umělým. K čemu tedy vlastně jsou prostory $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$, $(^*\mathbf{K}_1, {}^*\varrho)$? Slouží k tomu, abychom všechny tyto „nevlastní limity" $+\infty$, $-\infty$, ∞ a „limity v nevlastních bodech" $+\infty$, $-\infty$, ∞ mohli pojímati jako speciální případ limit v metrických prostorech a aplikovat na ně celou theorii této kapitoly — tím ztrácejí do značné míry svůj výjimečný charakter.

Podobně: Bolzano-Cauchyova podmínka pro limitu funkce[56]) jedné reálné proměnné v bodě $+\infty$ (při úplném (Q, σ)) se dá psát ve tvaru: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $K \in \mathbf{E}_1$ tak, že

(95) $$(x_1 \in A, x_2 \in A, K < x_1 < +\infty, K < x_2 < +\infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon .$$

Při limitě funkce jedné komplexní[61]) proměnné v bodě ∞ bychom vlevo psali $K < |x_j| < +\infty$; při limitě v bodě $-\infty$ bychom psali $-\infty < x_j < K$ $(j = 1, 2)$.

Poznámka 1. Vezměme speciální případ rovnice (93), když $A = \mathbf{N}$; podle (V) znamená (93) toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $K \in \mathbf{E}_1$ tak, že[62])

(96) $$(n \in \mathbf{N}, n > K) \Rightarrow \sigma(f(n), q) < \varepsilon .$$

Ale to znamená totéž, jako že posloupnost $f(1), f(2), \ldots$ bodů z Q má limitu $q \in Q$. Uvážíme-li, že posloupnost není nic jiného než funkce[56]) přirozeného čísla, vidíme, že označení pro limitu funkce

[61]) Speciálně může jít o reálnou proměnnou.
[62]) Pro $n > 0$ lze místo $|n|$ psáti n.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in N}} a(n) = q$$

je ve shodě se starým označením pro limitu posloupnosti, zavedeným v § 1

$$\lim_{n \to \infty} a_n = q$$

(smluvili jsme se totiž, že znak $x \in A$ vynecháváme, je-li jasno, o kterou množinu A jde). Z (96) je také patrno, že nevadí, jestliže konečný počet hodnot $f(n)$ není definován: tedy i úmluva z § 1 (viz text po def. 15), která se tam jevila jen jako pohodlná konvence, se zde ukazuje organickou součástí naší obecné theorie.

Z (96) je konečně patrno, že místo $^*\varrho$ lze užíti i metriky ϱ^* a psáti (což vypadá ještě přirozeněji)

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in N}} a(n) = q\,.$$

Poznámka 2. Jestliže Q je kartézským součinem prostorů (Q_j, σ_j) $(j = 1, \ldots, s)$, píšeme v (81) vpravo $\underset{1 \leq j \leq s}{\mathrm{Max}}\, \sigma_j(f_j(x), q_j) < \varepsilon$, kde značí $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_s(x)]$, $q = [q_1, \ldots, q_s]$ (viz § 1, příkl. 6, vzorec (14)).

Jestliže P je kartézským součinem prostorů (P_j, ϱ_j) $(j = 1, \ldots, r)$, píšeme v (81) vlevo $0 < \underset{1 \leq j \leq r}{\mathrm{Max}}\, \varrho_j(x_j, a_j) < \delta$, kde značí $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $a = [a_1, \ldots, a_r]$.

Poznámka 3. (Dvojné posloupnosti.) Každé dvojici $m \in N$, $n \in N$ budiž přiřazen bod $a_{m,n} \in (Q, \sigma)$. To je zobrazení s oborem $N \times N$. Limitou této „dvojné posloupnosti“ nazýváme limitu — existuje-li —

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} a_{m,n} = a \in (Q, \sigma)\,, \tag{97}$$

čímž rozumíme limitu v bodě $[\infty, \infty]$ vzhledem k množině $N \times N$, při čemž za prostor (P, ϱ) beru prostor $(^*E_1, {}^*\varrho) \times (^*E_1, {}^*\varrho)$.[63]) Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o limitě v bodě ∞ a v pozn. 2, je

[63]) Také bych mohl brát limitu v bodě $[+\infty, +\infty]$ a klásti $(P, \varrho) = (E_1^*, \varrho^*) \times (E_1^*, \varrho^*)$.

snadno vidět, že (97) znamená toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že

$$(98) \qquad (m \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{N}, m \geqq n_0, n \geqq n_0) \Rightarrow \sigma(a_{m,n}, a) < \varepsilon .$$

To je už velmi srozumitelné. Lze ovšem přepsati též Bolzano-Cauchyovu podmínku na vhodnou formu, viz cvič. 3.

Poznámka 4. Budiž dána dvojná posloupnost konečných komplexních čísel $a_{m,n}$. Znakem $s_{m,n}$ označíme „částečný součet" $s_{m,n} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{h,k}$. Existuje-li $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{m,n} = s$, nazýváme číslo s součtem „dvojné řady" $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$; je-li s konečné číslo, říkáme, že dvojná řada je konvergentní.[64]) Tento pojem konvergence je odlišný od pojmu absolutní konvergence zobecněné řady v kap. III, § 3. Tam pořadí členů bylo lhostejné; zde indexy m, n určují „umístění" členů. Viz k tomu cvič. 4.

Zobecnění na trojné posloupnosti a řady atd. je nasnadě.

Poznámka 5. Mluvil jsem dosud o limitě a měl bych promluviti o spojitosti zobrazení. Ale spojitost lze okamžitě převésti na pojem limity (viz § 9, pozn. 3), takže věc mohu přenechati čtenáři.

Poznámka 6. Nechť f, g jsou speciálně reálné funkce; nemusí být konečné, proto vezměme f, g jako zobrazení z (P, ϱ) do $(\boldsymbol{E}_1^*, \varrho^*)$. Předpokládejme, že existují limity

$$(99) \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = p\,, \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} g(x) = q$$

$(p \in \boldsymbol{E}_1^*, q \in \boldsymbol{E}_1^*)$. Potom existují též limity (nepíši již $x \to a$, $x \in A$) $\lim |f(x)| = |p|$, $\lim(f(x) + g(x)) = p + q$, $\lim f(x)\, g(x) = pq$, $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p}{q}$, $\lim \operatorname{Max}(f(x), g(x)) = \operatorname{Max}(p, q)$, $\lim \operatorname{Min}(f(x), g(x)) = \operatorname{Min}(p, q)$, pokud pravá strana příslušné rovnice má smysl. Důkaz. Budiž $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$. Potom podle věty 143 $\lim f(x_n) = p$,

[64]) Není-li řada konvergentní, můžeme ji vyšetřovati v $({}^*\boldsymbol{K}_1, {}^*\varrho)$ a ptáti se po součtu ∞; má-li reálné členy, můžeme ji (podrobněji) vyšetřovati v $(\boldsymbol{E}_1{}^*, \varrho^*)$ a ptáti se po součtu $+\infty$ nebo $-\infty$.

$\lim g(x_n) = q$, tedy podle věty 13 je $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{p}{q}$, má-li pravá strana smysl. Ale odtud plyne podle věty 143, že $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}$. Podobně v ostatních případech.

Zcela obdobně: Jsou-li f, g reálné funkce, spojité v a vzhledem k A, jsou také funkce $|f|$, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\mathrm{Max}(f, g)$, $\mathrm{Min}(f, g)$ spojité v a vzhledem k A, pokud příslušná funkce je v bodě a definována. Důkaz z věty 142 (nebo se tento případ převede na limitu podle pozn. 3 v § 9).

Jde-li o konečné funkce a o konečné limity, můžeme ovšem za vzdálenost $\sigma(f(x), p)$ nebo $\sigma(f(x), f(a))$ místo redukované metriky ϱ^* vzít ekvivalentní metriku eukleidovskou.

Podobně pro komplexní funkce s metrikou $\sigma(x, y) = |x - y|$ nebo s metrikou $^*\varrho$ (viz § 4, příkl. 2), jde-li o nekonečné funkce nebo nekonečné limity. Projděme jen stručně počítání s nevlastní limitou ∞. Budiž $\lim f(x) = \infty$, $\lim g(x) = q$ (q konečné; znak $x \to a$, $x \in A$ vynechávám). Potom $\lim (f(x) + g(x)) = \infty$; $\lim f(x)\, g(x) = \infty$, je-li $q \neq 0$; $\lim f(x)\, h(x) = \infty$, je-li $\lim h(x) = \lim f(x) = \infty$; $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = 0$; $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, je-li $q \neq 0$;[65] $\lim |f(x)| = +\infty$ (nebo ∞, podle toho, beru-li hodnoty $|f(x)|$ v $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$ nebo v $(^*\mathbf{K}_1, {}^*\varrho)$). Příslušné věty o posloupnostech viz kap. II, § 3, pozn. 3. Jest poznamenati, že i při reálných funkcích je někdy účelno vyšetřovati „nevlastní limity" v $(^*\mathbf{E}_1, {}^*\varrho)$ místo v $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$. Viz připojená cvičení.

Poznámka 7. (Množiny $M^{a,*}$.) Budiž $(P, \varrho) = (P_1, \varrho_1) \times \times (P_2, \varrho_2)$;[66] budiž $M \subset P$. Je-li $a \in P_1$, označili jsme v kap. I, § 8, pozn. 3 znakem $M^{a,*}$ množinu $\underset{y}{\mathcal{E}}(y \in P_2, [a, y] \in M)$. *Budiž M otevřená v P; potom $M^{a,*}$ je otevřená v P_2.* Důkaz: Budiž $b \in M^{a,*}$, t. j. $[a, b] \in M$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega_P([a, b], \delta) \subset M$. Pro $y \in P_2$,

[65]) Je-li $q = 0$, ale $g(x) \neq 0$ pro $x \in A\Omega_P(a, \delta) \dot{-} (a)$, kde δ je nějaké kladné číslo, je rovněž $\lim f(x) : g(x) = \infty$.

[66]) Stále užívám metriky $\varrho([a, b], [a', b']) = \mathrm{Max}\,(\varrho_1(a, a'), \varrho_2(b, b'))$.

$\varrho_2(b, y) < \delta$ je $[a, y] \in M$, t. j. $y \in M^{a,*}$. Tedy b je vnitřním bodem (vzhledem k P_2) množiny $M^{a,*}$. *Budiž M uzavřená v P; potom $M^{a,*}$ je uzavřená v P_2.* Důkaz: Budiž $y_n \in M^{a,*}$, $y \in P_2$, $\lim y_n = y$, t. j. $\lim \varrho_2(y_n, y) = 0$. Máme dokázati, že $y \in M^{a,*}$. Jest $[a, y_n] \in M$, $\varrho([a, y_n], [a, y]) = \varrho_2(y_n, y)$. Tedy $\lim [a, y_n] = [a, y]$. Tedy $[a, y] \in M$ (ježto M je uzavřená), tedy $y \in M^{a,*}$.

Poznámka 8. (Projekce.) Označení jako v pozn. 7. Označme $\mathfrak{P}$ (nebo podrobněji $\mathfrak{P}_{P_1}$) zobrazení v oboru P, definované rovnicí $\mathfrak{P}([x, y]) = x$ („projekce do prostoru P_1"). Je to zobrazení *spojité*, ježto $\varrho_1(x, x') \leqq \varrho([x, y], [x', y'])$. Obraz $\mathfrak{P}(M)$ je t. zv. projekce množiny M do P_1.[67]) *Je-li M otevřená v P, je $\mathfrak{P}(M)$ otevřená v P_1.* Důkaz: Budiž $a \in \mathfrak{P}(M)$. Existuje tedy b tak, že $[a, b] \in M$. Tedy jisté okolí $\Omega_P([a, b], \delta) \subset M$. Zřejmě potom $\Omega_{P_1}(a, \delta) \subset \mathfrak{P}(M)$.

Poznámka 9. (Zobrazení $f^{a,*}$). Označení jako v pozn. 7, 8. Budiž f zobrazení z $P_1 \times P_2$ do (Q, σ), definované v M. Je-li $a \in P_1$, označili jsme v kap. I, § 8 znakem $f^{a,*}$ zobrazení množiny $M^{a,*}$ do (Q, σ), definované rovnicí $f^{a,*}(y) = f(a, y)$. Je zřejmo toto: *Je-li f spojitá v bodě $[a, b]$ vzhledem k M, je $f^{a,*}$ spojitá v bodě b vzhledem k $M^{a,*}$.*[68])

Poznámka 10. (Zobrazení „nezávislá na y".) Označení jako v pozn. 7 až 9. Budiž f zobrazení (definované v $M \subset P$) do množiny Q a nechť existuje zobrazení g množiny $\mathfrak{P}_{P_1}(M)$ tak, že

$$(100) \qquad [x, y] \in M \Rightarrow f(x, y) = g(x)\,;$$

potom říkáme, že „$f(x, y)$ nezávisí na y" (v množině M). Nechť Q je metrický prostor (Q, σ). Tvrdím: *Je-li $[x, y] \in M$ a je-li g spojité v bodě x vzhledem k $\mathfrak{P}_{P_1}(M)$, je f spojité v bodě $[x, y]$ vzhledem k M.* Důkaz (užívá se věty 142). Budiž $[x_n, y_n] \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim [x_n, y_n] = [x, y]$. Tedy $\lim x_n = x$, a tedy $\lim g(x_n) = g(x)$, t. j. (podle (100)) $\lim f(x_n, y_n) = f(x, y)$.

---

[67]) Viz kap. I, § 8, pozn. 3.

[68]) $f^{a,*}$ se vůbec jen zcela nepodstatně liší od parciálního zobrazení f_A, kde A je množina všech bodů $[x, y] \in M$, kde $x = a$. Neboť $f^{a,*}(y) = f_A(a, y)$, $\varrho([a, y], [a, y']) = \varrho_2(y, y')$. Odtud je jasno, že všechny vlastnosti f_A se beze změny přenášejí na $f^{a,*}$.

Cvičení

V cvič. 1—5, pokud se mluví o komplexních číslech, myslím vždy na prostor $(^*K_1, {}^*\varrho)$. Pokud se mluví o reálných číslech, míním buďto (E_1^*, ϱ^*) („nevlastní" prvky $+\infty$, $-\infty$) nebo $(^*E_1, {}^*\varrho)$ („nevlastní" prvek ∞).

1. Je-li $\lim f(x) = +\infty$ nebo $-\infty$, je též $\lim f(x) = \infty$; obrátit se to ovšem nedá.

Pro reálná x máme[69] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ (nebo ∞); $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (nebo ∞); $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (nebo ∞); $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ (ale nesmím psát $+\infty$ nebo $-\infty$).
Podobně proberte $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^3$.

2. Buďte a, b, c, d konečná komplexní čísla, $ad - bc \neq 0$; $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ pro všechna $x \in K_1$, pro něž zlomek má smysl. Je-li $c = 0$, kladme ještě $f(\infty) = \infty$. Je-li $c \neq 0$, kladme $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$. Potom f je homeomorfní zobrazení $(^*K_1, {}^*\varrho)$ na $(^*K_1, {}^*\varrho)$. Jsou-li a, b, c, d reálná, lze se omezit na $x \in {}^*E_1$ a dostaneme homeomorfní zobrazení $(^*E_1, {}^*\varrho)$ na $(^*E_1, {}^*\varrho)$. S prostorem (E_1^*, ϱ^*) by to pro $c \neq 0$ nešlo — proč?

3. Napište „Bolzano-Cauchyovu" nutnou a postačující podmínku pro existenci limity (97) (při úplném (Q, σ)).

4. Je-li dvojná řada z pozn. 4 absolutně konvergentní ve smyslu kap. III, § 3, je též konvergentní ve smyslu pozn. 4 a její součet je v obojím smyslu totéž číslo.

5. Často se vyskytují symboly tvaru $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n$; součtem takovéto řady (s konečnými komplexními členy) se rozumí limita

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} (a_{-n} + a_{-n+1} + \dots + a_{-1} + a_0 + a_1 + \dots + a_m)\,; \tag{101}$$

pro konečné limity a rovněž pro limity $+\infty$, $-\infty$ (ne však pro ∞) to znamená (dokažte!) totéž jako součet součtů dvou řad: $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}$. Někdy (méně často) se rozumí součtem uvedené řady limita „symetrického" součtu

$$\lim_{n\to\infty} (a_{-n} + a_{-n+1} + \dots + a_{-1} + a_0 + a_1 + \dots + a_n)\,, \tag{102}$$

[69]) Nepřipisuji-li symbol $x \in A$, míním $x \in E_1$ nebo $x \in K_1$.

což není nic jiného než součet řady $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{-n})$. (Na př. je-li $a_n = 1$ pro $n > 0$, $a_n = -1$ pro $n < 0$, neexistuje limita (101), ale existuje limita (102).)

§ 11. Dvojné limity. Příklad 1.[70]) Budiž $f(x, y)$ konečná reálná funkce dvou reálných proměnných. Buďte a, b konečná reálná čísla. Budiž Δ nějaké konečné kladné číslo; položme

$$A = (a - \Delta, a + \Delta) \dot{-} (a), \quad B = (b - \Delta, b + \Delta) \dot{-} (b).$$

Nechť existuje vlastní limita

(103) $$\lim_{\substack{[x,y]\to[a,b] \\ [x,y]\in A \times B}} f(x, y) = q .$$[71])

Pro každé $x \in A$ nechť existuje[72])

(104) $$\lim_{y\to b} f(x, y) = \varphi(x) .$$

Potom existuje též

(105) $$\lim_{x\to a} \varphi(x) = q .$$

Existuje-li tedy pro každé $y \in B$

(106) $$\lim_{x\to a} f(x, y) = \psi(y) ,$$

je z důvodů symetrie též

(107) $$\lim_{y\to b} \psi(y) = q .$$

Jde tedy o vztah mezi „dvojnou limitou" a „opakovanými limitami". Existuje-li dvojná limita (103) a vnitřní limity (104), (106), je dvojná limita (103) rovna číslu

(108) $$\lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x, y)) = \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x, y)) .$$

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje (podle (103)) $\delta > 0$ tak, že (volme hned $\delta \leqq \Delta$)

(109) $$(0 < |x - a| < \delta,\ 0 < |y - b| < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - q| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

---

[70]) Je umyslně podán tak, aby jej mohl čísti i čtenář, neznající jinak kap. VI.
[71]) Prostě: neuvažují se body $[x, y]$ na přímkách $x = a$, $y = b$; kreslete!
[72]) Znak $y \in \mathsf{E}_1$ vynechávám. Při zvoleném x se $f(x, y)$ jeví funkcí proměnné y.

Zvolme x tak, že $0 < |x - a| < \delta$. Potom podle (109) $(0 < |y - b| < < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - q| < \frac{1}{2}\varepsilon$, načež limitní přechod $y \to b$ dává $|\varphi(x) - - q| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Tedy $(0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |\varphi(x) - q| < \varepsilon$. Tedy platí (105).

Vyslovme to obecně:

Věta 146. *Budiž f zobrazení z $(P_1, \varrho_1) \times (P_2, \varrho_2)$ do (Q, σ).*[73]) *Budiž $A \subset P_1$, $a \in A'^{P_1} \dot{-} A$, $B \subset P_2$, $b \in B'^{P_2} \dot{-} B$.*

I. Nechť existuje

(110) $$\lim_{\substack{[x,y]\to[a,b]\\ [x,y]\in A\times B}} f(x, y) = q \in (Q, \sigma)\,.$$

II. Nechť existuje $\Delta > 0$ tak, že pro každé $x \in A$, $0 < \varrho_1(x, a) < \Delta$ existuje

$$\lim_{\substack{y\to b\\ y\in B}} f(x, y) = \varphi(x) \in (Q, \sigma)\,.^{74})$$

Potom existuje též

(111) $$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \varphi(x) = q\,.$$

Druhou symetrickou polovinu je jistě zbytečno vyslovovati. Také důkaz přenechávám čtenáři (v důkazu příkl. 1 pište místo $|x - a|$, $|y - b|$, $|f(x, y) - q|$ atd. příslušné vzdálenosti při metrikách ϱ_1, ϱ_2, σ).

Příklad 2. Budiž $a_{m,n}$ dvojná posloupnost ($a_{m,n} \in (Q, \sigma)$ pro $m, n = = 1, 2, 3, 4, \ldots$). Nechť existuje[75]) $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{m,n} = q \in (Q, \sigma)$. Nechť pro každé $m \in \boldsymbol{N}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n} = b_m \in (Q, \sigma)$. Potom existuje i

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{m,n}) = \lim_{m\to\infty} b_m = q\,.$$

Za symetrických předpokladů (vyměnit m, n) je $\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,n}) = q$.

---

[73]) Obraz bodu $[x, y]$ $(x \in P_1, y \in P_2)$ značím ovšem $f(x, y)$.
[74]) Jde vlastně o limitu zobrazení $f^{x,*}$, definovaného rovnicí $f^{x,*}(y) = f(x, y)$; viz kap. I, § 8.
[75]) Ve smyslu § 10, pozn. 3.

Příklad 3. Budiž $a_{m,n}$ dvojná posloupnost konečných komplexních čísel. Nechť

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} = s$$

je konvergentní.[76]) Nechť pro každé $m \in \boldsymbol{N}$ je řada

$$(112) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sigma_m$$

(součet členů „m-tého řádku") konvergentní. Potom je konvergentní i řada

$$(113) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = s$$

(sčítá se „napřed podle řádků, potom podle sloupců").

Důkaz. Položme (částečné součty) $s_{m,n} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{h,k}$, $\sigma_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}$, takže $s_{m,n} = \sum_{h=1}^{m} \sigma_{h,n}$. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje n_0 tak, že

$$(m \geqq n_0,\ n \geqq n_0) \Rightarrow |s_{m,n} - s| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\ ,$$

t. j.

$$(m \geqq n_0,\ n \geqq n_0) \Rightarrow \left| \sum_{h=1}^{m} \sigma_{h,n} - s \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\ .$$

Zvolme nějaké $m \geqq n_0$; ježto poslední nerovnost platí pro všechna $n \geqq n_0$, plyne ze (112) pro $n \to \infty$ nerovnost $\left| \sum_{h=1}^{m} \sigma_h - s \right| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Tedy $m \geqq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{h=1}^{m} \sigma_h - s \right| < \varepsilon$. Ale to právě značí, že platí (113). Za obdobných předpokladů ovšem je $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = s$.

Cvičení

1. (Řešte až po přečtení paragrafu 12.) Je-li f ve větě 146 reálná funkce, lze vynechati předpoklad II, ale (111) je nutno nahraditi rovnicemi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \left(\limsup_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) \right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \left(\liminf_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) \right) = q\ .$$

[76]) Ve smyslu § 10, pozn. 4.

§ 12. Limes superior a inferior reálné funkce. Budiž $A \subset (P, \varrho)$, $a \in P$, $a \in A'$. Budiž f reálná (nikoliv nutně konečná) funkce, definovaná pro $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \Delta$, kde Δ je jisté kladné číslo. Jako v kap. V, § 6 položíme pro $0 < \delta \leqq \Delta$

$$\Phi_f(\delta) = \sup_{\substack{0<\varrho(x,a)<\delta \\ x\in A}} f(x)\,, \quad \varphi_f(\delta) = \inf_{\substack{0<\varrho(x,a)<\delta \\ x\in A}} f(x)\,. \tag{114}$$

Zřejmě je φ_f nerostoucí, Φ_f neklesající v $(0, \Delta\rangle$. Opět definujeme

$$\limsup_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \Phi_f(\delta) = \inf_{0<\delta\leqq\Delta} \Phi_f(\delta)\,, \tag{115}$$

$$\liminf_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \varphi_f(\delta) = \sup_{0<\delta\leqq\Delta} \varphi_f(\delta)\,. \tag{116}$$

Vše je tak nepodstatným zobecněním § 6 v kap. V, že stačí několik slov.[77]) Zřejmě je vždy $\liminf f(x) \leqq \limsup f(x)$.

Poznámka 1. Zachováme v dalším symboliku (114); mimo to budeme psáti stále $S_f = \limsup\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x)$, $s_f = \liminf\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x)$.

Poznámka 2. (Viz kap. V, § 6, pozn. 1.) Je-li $\beta' > S_f$, existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow f(x) < \beta'$. Je-li však $\beta' < S_f$, neexistuje takové $\delta > 0$. T. j. ke každému $\delta > 0$ existuje x tak, že $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \delta$, $f(x) \geqq \beta'$.

Poznámka 3. (Viz větu 79.) $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x)$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li $S_f = s_f$; všechna tato tři čísla jsou si pak rovna.

Poznámka 4. $\limsup\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} (-f(x)) = -\liminf\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x)$. Pro konečné $c > 0$ je $\limsup cf(x) = c \limsup f(x)$; pro $-\infty < c < 0$ je $\limsup cf(x) = c \liminf f(x)$.

Poznámka 5. Je-li $a \in A'$, $a \in B'$, je $\limsup\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A\cup B}} f(x) = \mathrm{Max}\,(\limsup\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x)$, $\limsup\limits_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x))$. Podobně pro lim inf (ale s Min místo Max). Důkaz:

[77]) Místo $0 < |x - a| < \delta$ se prostě píše $0 < \varrho(x, a) < \delta$.

$$\sup_{\substack{x \in A \cup B \\ 0 < \varrho(x,a) < \delta}} f(x) = \operatorname{Max}\left(\sup_{\substack{x \in A \\ 0 < \varrho(x,a) < \delta}} f(x), \sup_{\substack{x \in B \\ 0 < \varrho(x,a) < \delta}} f(x)\right)$$ a limitní přechod $\delta \to 0+$.

Poznámka 6. Budiž speciálně $a = +\infty$, $A = \boldsymbol{N}$, $\varrho = \varrho^*$ (metrika z § 4, příkl. 1), takže jde o posloupnost reálných čísel

$$(117) \qquad f(1), f(2), \ldots$$

Podle poznámky 2 platí toto: Je-li $\alpha' > S_f$, existuje $\delta > 0$ tak, že[78]) $(n \in \boldsymbol{N},\ 0 < \frac{1}{1+n} < \delta) \Rightarrow f(n) < \alpha'$. T. j. v (117) je jen konečný počet členů větších než α'. Je-li však $\alpha'' < S_f$, existuje ke každému $\delta > 0$ číslo n tak, že $n \in \boldsymbol{N}$, $0 < \frac{1}{1+n} < \delta$, $f(n) \geqq \alpha''$. Tedy je $f(n) \geqq \alpha''$ pro nekonečně mnoho $n \in \boldsymbol{N}$. Podle věty 21 je tedy S_f právě limes superior posloupnosti (117) ve smyslu definice, podané ve větě 20, která se takto jeví speciálním případem naší definice z tohoto paragrafu.

Poznámka 7. Odvodíme pravidlo pro lim sup, lim inf součtu. Nechť $f(x)$, $g(x)$, $f(x) + g(x)$ (reálné funkce) jsou definovány pro $x \in A$, $0 < \varrho(x, a) < \Delta$ $(\Delta > 0)$, takže S_f, S_g, S_{f+g}, s_f mají smysl. Potom platí:

I. $S_{f+g} \leqq S_f + S_g$, má-li pravá strana smysl.

II. $S_{f+g} \geqq s_f + S_g$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. I. Nechť $S_f + S_g$ má smysl; potom pro dosti malá $\delta > 0$ má i $\Phi_f(\delta) + \Phi_g(\delta)$ smysl, takže pro $0 < \varrho(x, a) < \delta$ je $f(x) + g(x) \leqq \Phi_f(\delta) + \Phi_g(\delta)$, tedy (přechodem k supremu vlevo) $\Phi_{f+g}(\delta) \leqq \Phi_f(\delta) + \Phi_g(\delta)$; limita pro $\delta \to 0+$ dává I.

II. Budiž $s_f + S_g > -\infty$ (jinak je II zřejmá). Pro dosti malá δ (na př. pro $0 < \delta < \delta_0$) je potom $\varphi_f(\delta) + \Phi_g(\delta) > -\infty$. Budiž $-\infty < \alpha < \Phi_g(\delta)$. Existuje x tak, že $0 < \varrho(x, a) < \delta$, $x \in A$, $g(x) > \alpha$; současně ovšem $f(x) \geqq \varphi_f(\delta)$, takže $f(x) + g(x) \geqq \varphi_f(\delta) + \alpha$;[78a]) tedy $\Phi_{f+g}(\delta) \geqq \varphi_f(\delta) + \alpha$. To platí pro každé konečné $\alpha < \Phi_g(\delta)$, takže zřejmě $\Phi_{f+g}(\delta) \geqq \varphi_f(\delta) + \Phi_g(\delta)$; limita pro $\delta \to 0+$ dává II.

---

[78]) Uvažte, že $\varrho^*(n, +\infty) = \frac{1}{1+n}$.

[78a]) Platí, i když se někde vyskytne $+\infty$.

Poznámka 8. Podobně pro lim inf, takže dostáváme tyto čtyři nerovnosti (nutno ovšem vynechati ty, které nemají smysl):

$$s_f + s_g \leqq s_{f+g} \leqq s_f + S_g{}^{79)} \leqq S_{f+g} \leqq S_f + S_g .$$

Poznámka 9. Je-li $A = \mathbf{N}$, $a = +\infty$ a $\varrho = \varrho^*$ (redukovaná metrika z § 4), dostáváme pravidla pro posloupnosti:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqq \dots ,$$

t. j. větu 24.

§ 13. Symboly O, o. Budiž f reálná nebo komplexní (a to *konečná*) funkce, jejíž obor leží v (P, ϱ). Budiž $A \subset P$, $a \in A'^P$. Budiž g funkce konečná, která je kladná pro všechna $x \in A \,.\, \Omega_P(a, \Delta) \dot{-} (a)$, kde Δ je jisté číslo kladné. Symbol[80])

(118) $$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro } x \to a, x \in A$$

bude značit, že

(119) $$\limsup_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty .$$

T. j. (viz def. z § 12): Existuje $\delta > 0$ tak, že $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ je omezená v množině $A \,.\, \Omega_P(a, \delta) \dot{-} (a)$. Neboli: Existuje $\delta > 0$ a $C \in \mathbf{E}_1$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow |f(x)| < Cg(x) .$$

Podobně symbol

(120) $$f(x) = o(g(x)) \quad \text{pro } x \to a, x \in A$$

bude značit, že

(121) $$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.^{81)}$$

---

[79]) Zde ovšem lze též psáti $S_f + s_g$.

[80]) Dodatek „pro $x \to a$" po příp. „$x \in A$" vynecháváme, je-li jasno, které a nebo A míníme.

[81]) Neboli, což je totéž,

$$\limsup_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0 .$$

Symboly O, o (není nutno se obávati nedorozumění se symbolem o na př. pro „počátek souřadnic") srovnávají tedy funkci f s funkcí g.

Platí vztahy: Součet dvou funkcí, které jsou $O(g(x))$, je rovněž $O(g(x))$; součin dvou funkcí, z nichž jedna je $O(g(x))$ a druhá $O(h(x))$, je $O(g(x)\,h(x))$ atd. Symbolicky to píšeme takto:

$$O(g(x)) + O(g(x)) = O(g(x))\,;$$
$$o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))\,;$$
$$O(g(x))\,.\,O(h(x)) = O(g(x)\,h(x))\,;$$
$$O(g(x))\,.\,o(h(x)) = o(g(x)\,h(x))\,;$$
$$o(g(x)) = O(g(x))\,.$$

Tyto „rovnice" je nutno číst zleva doprava; na př. poslední značí: každá funkce f, která je $o(g(x))$ (t. j. která splňuje (121)), je také $O(g(x))$ (t. j. splňuje (119)). Nazpátek se to číst nesmí! Dokažme třeba třetí a čtvrtou „rovnici": Jsou-li $\frac{|f_1(x)|}{g(x)}$, $\frac{|f_2(x)|}{h(x)}$ omezené, je i jejich součin omezený; jestliže nad to jeden z těchto výrazů má limitu 0, má i jejich součin limitu 0.

Za funkci g můžeme vzít také konstantu 1. Symbol $O(1)$ značí tedy funkci omezenou v $A\,.\,\Omega_P(a, \delta) \dot{-} (a)$, symbol $o(1)$ značí funkci, mající limitu 0.

Příklady: Pro $x \to 0$, $x \in \mathbf{E}_1$ je $\sin x = o(1)$, $\sin x = O(|x|)$,[82] $\cos x = O(1)$, $e^{ix} = O(1)$, $x^2 = o(|x|)$. Pro $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$ je $e^{ix} = O(1)$, $x = o(x^2)$, $\sqrt{x^2+1} = O(x)$, $\frac{x+1}{x^2-1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x^{10} = o(e^x)$, $\lg x = o(x)$. Pro $x = [x_1, \ldots, x_r] \in \mathbf{E}_r$, $x \to o$ jest $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_r^2} = O\,(\operatorname{Max}_{1 \leq j \leq r} |x_j|)$, $\sin(x_1 + \ldots + x_r) = o(1)$, $\sin(x_1 + \ldots + x_r) = O\,(\operatorname{Max}_{1 \leq j \leq r} |x_j|)$.

Příklad 1. V celém tomto příkladu jde o reálné konečné funkce jedné reálné proměnné; znamení O, o se vztahují na $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$. „Malá" funkce může míti „velkou" derivaci; na př. funkce $\sin(e^x) = O(1)$ má derivaci $e^x \cos(e^x)$, která pro $x = \lg 2k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) nabývá hodnot e^x. Ale znám-li odhad funkcí f, f'', dovedu odhadnouti f':

[82]) Pro $x \to 0+$ bych mohl psáti $O(x)$.

Budiž $-\infty < \alpha < \beta + 2 < +\infty$. *Budiž*

$$f(x) = O(x^\alpha)\,, \quad f''(x) = O(x^\beta)\,. \tag{122}$$

Potom

$$f'(x) = O(x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)})\,. \tag{123}$$

Platí-li v jednom ze vztahů (122) *dokonce znamení o, lze i v* (123) *psát o.*

Důkaz. Ježto podle předpokladu existuje vlastní $f''(x)$ pro všechna dosti velká x, lze pro všechna dosti velká x a všechna $h > 0$ užíti Taylorovy formule (**DI**, kap. XII, § 1, pozn. 3, t. j. věta 153 ve tvaru vzorců (7), (9) pro $n = 1$) a vychází $(0 < \vartheta < 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{h} f(x+h) - \frac{1}{h} f(x) - \tfrac{1}{2} h f''(x + \vartheta h)\,. \tag{124}$$

Zvolím-li $h > 0$ jako funkci x tak, aby bylo $h \leqq x$, bude podle (122) a (124)

$$f'(x) = \frac{1}{h} O(x^\alpha) + hO(x^\beta)\,.^{83)} \tag{125}$$

I. Nyní stanovíme h jako funkci x tak, aby pravá strana měla co nejnižší „řád" pro $x \to +\infty$. Ježto součet obou členů je nejvýše téhož řádu jako větší z nich, snažím se volit h tak, aby

$$\operatorname{Max}\,(h^{-1}x^\alpha, hx^\beta) \tag{126}$$

bylo co nejmenší. Ježto s rostoucím h první člen klesá, druhý roste, dostaneme v (126) nejmenší hodnotu, volíme-li h tak, že $h^{-1}x^\alpha = hx^\beta$, $h = x^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ (vskutku je potom $0 < h < x$ pro $x > 1$).[84] Dosadíme-li za h do (125), plyne (123).

II. Nechť nyní dokonce $f(x) = o(x^\alpha)$, takže v (122) v prvním členu vpravo lze psáti o. Budiž $0 < \varepsilon < 1$; potom pro všechna dosti velká x a pro $0 < h \leqq x$ plyne z (124)

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{h} x^\alpha + Chx^\beta\,, \tag{127}$$

---

[83] Na př.: $|f''(x + \vartheta h)| < C(x + \vartheta h)^\beta$, kde C je konstanta; tedy pro $\beta \geqq 0$ je $|f''(x + \vartheta h)| < C(2x)^\beta$, pro $\beta < 0$ je $|f''(x + \vartheta h)| < Cx^\beta$.

[84] Tohoto triku se často užívá při hledání co nejvýhodnějšího odhadu; uvědomte si jej proto dobře!

kde $C > 0$ je konstanta (nezávislá na x, h, ε). Ježto první člen vpravo se zmenšil (je tam činitel ε), mohu volit h trochu menší (abych zmenšil i druhý člen); volme tedy $h = \sqrt{\varepsilon} \, . \, x^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$, načež (127) dává

$$|f'(x)| < (1 + C) \sqrt{\varepsilon} \, x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \, . \tag{128}$$

T. j.: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 tak, že pro $x > x_0$ platí (128); t. j.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}} = 0 \, , \quad f'(x) = o(x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}) \, . \tag{129}$$

III. Nechť nyní $f''(x) = o(x^\beta)$. Budiž $0 < \varepsilon < 1$. Potom pro všechna dosti velká x a pro $0 < h \leqq x$ plyne z (124)

$$|f'(x)| < \frac{C}{h} x^\alpha + \varepsilon h x^\beta \, . \tag{130}$$

Druhý člen vpravo nás uspokojuje; abych první člen zmenšil, volím h trochu větší: $h = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} x^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ (pro dosti velká x bude opět $0 < h < x$). Dosazením této hodnoty h do (130) plyne opět (128) a odtud (129).

Poznámka 1. Dosti často se užívá znaku (při konečném komplexním f a konečném kladném g)

$$f(x) = \Omega(g(x)) \quad \text{pro } x \to a, x \in A \, .$$

Ten znamená, že $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0$ (je to tedy — za uvedených předpokladů o f, g, a, A — logický zápor vztahu (120)).

Znaku O se někdy užívá (stále pro konečné komplexní f a konečné kladné g) ještě v trochu jiném smyslu: Je-li M libovolná množina, znamená symbol

$$f(x) = O(g(x)) \text{ v } M \, ,$$

že funkce $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ je omezená v M.

Cvičení[85])

1. Nechť v intervalu $\langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ je $|f'(x)| < g'(x) < +\infty$.

[85]) Jde o konečné reálné funkce jedné reálné proměnné.

Potom $|f(b) - f(a)| < g(b) - g(a)$. Návod: Užijte věty o přírůstku funkce (**DI**, věta 133) na funkce $g(x) \pm f(x)$.

2. Budiž $\alpha \in \mathbf{E}_1$, $f'(x) = O(x^\alpha)$.[86]) Potom platí:

a) Je-li $\alpha > -1$, je $f(x) = O(x^{\alpha+1})$. Návod: Odhadněte $f(x) - f(a)$ (a pevné, dosti velké) podle cvič. 1, kladouce $g(x) = Cx^{\alpha+1}$ s vhodným C.

b) Je-li $\alpha = -1$, je $f(x) = O(\lg x)$. Návod: Analogicky pro $g(x) = C \lg x$.

c) Je-li $\alpha < -1$, existuje $c \in \mathbf{E}_1$ tak, že $f(x) = c + O(x^{\alpha+1})$. Návod: Odhadněte $f(x) - f(y)$ jako v a). Odtud předně dokažte, že f splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku pro existenci $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$. Limitním přechodem $y \to +\infty$ potom odhadněte $f(x) - c$.

3. Obdobné cvičení se znakem o místo O. Na př. pro $\alpha = -1$: Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $b = b(\varepsilon)$ tak, že $x \geqq b \Rightarrow |f'(x)| < \varepsilon : x$. Odtud podle cvič. 1 plyne pro $x > b$ nerovnost $|f(x)| < |f(b)| + \varepsilon \lg x - \varepsilon \lg b$, tedy $|f(x)| < 2\varepsilon \lg x$ pro $x > c(\varepsilon)$.

§ 14. Úplné prostory. Dosud jsme zavedli pouze definici úplného prostoru (def. 18), podotkli jsme, že $\mathbf{E}_1$ je úplný prostor (to plyne z věty 26), dokázali jsme, že kartézský součin úplných prostorů je úplný, a z toho jsme usoudili, že $\mathbf{E}_r$ je úplný. Nyní si všimněme úplných prostorů trochu podrobněji.

Věta 147. *Je-li $A \subset (P, \varrho)$, A úplná množina,*[87]) *je A uzavřená v P.*

Jinými slovy: Každý úplný prostor je, jak se říká, „absolutně uzavřený", t. j. je uzavřený v každém (širším) metrickém prostoru, do něhož jej vnoříme.

Důkaz. Budiž $x \in \bar{A}$ (uzávěr v P). Existuje tedy posloupnost taková, že $x_n \in A$, $\lim x_n = x$. Tato posloupnost jest konvergentní v P, tedy je cauchyovská, tedy je konvergentní v úplném prostoru A, tedy $x \in A$.

V úplném prostoru lze tuto větu obrátit:

Věta 148. *Budiž (P, ϱ) úplný, $A \subset P$. Potom A je uzavřená v P tehdy a jen tehdy, je-li A úplná.*

Důkaz. 1. Je-li A úplná, je uzavřená v P (věta 147).

---

[86]) Rozuměj: pro $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$.

[87]) A je bodová množina, tedy metrický prostor. Předpokládám, že tento prostor je úplný.

2. Budiž A uzavřená v P, t. j. $A = \bar{A}$. Budiž $x_1, x_2, \ldots$ cauchyovská posloupnost bodů z A. Ježto P je úplný, existuje $\lim x_n = x$, $x \in P$. Jest ovšem $x \in \bar{A}$, tedy $x \in A$, t. j. $x_1, x_2, \ldots$ je konvergentní v A.

Poznámka 1. Za chvíli (věta 151) dokážeme velmi důležitou větu, která mimo jiné říká, že každý metrický prostor lze vnořiti do úplného prostoru. Odtud plyne: *Metrický prostor* (P, ϱ) *je úplný tehdy a jen tehdy, je-li absolutně uzavřený.* Důkaz: 1. Budiž P úplný, potom je absolutně uzavřený podle věty 147. 2. Budiž P absolutně uzavřený; vnořme jej do úplného prostoru Q (věta 151). Potom P je uzavřený v Q, tedy úplný podle věty 148.

Jednou ze základních vět o úplných prostorech je tato věta:

Věta 149. *Budiž P úplný; buďte $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ množiny neprázdné a uzavřené v P; budiž* $\lim_{n \to \infty} d(P_n) = 0$. *Potom* $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ *je jednobodová množina.*

Důkaz. Označme ten průnik Q. Je-li $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q$, je $\varrho(x_1, x_2) \leqq d(P_n)$ pro každé n, tedy $\varrho(x_1, x_2) = 0$. Tedy Q neobsahuje více než jeden bod.

Zbývá dokázati, že $Q \neq \emptyset$. Zvolme bod $x_n \in P_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $d(P_{n_0}) < \varepsilon$. Pro $n > n_0$, $m > n_0$ je pak $x_n \in P_{n_0}$, $x_m \in P_{n_0}$, tedy $x_1, x_2, \ldots$ je cauchyovská. Ježto P je úplný, existuje $\lim x_n = x$. Vezměme libovolné n; body x_n, $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ leží v P_n, tedy $x \in \bar{P}_n = P_n$. Tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$, $x \in Q$, tedy $Q \neq \emptyset$.

Vynechám-li podmínku $\lim d(P_n) = 0$, může býti $Q = \emptyset$. Viz cvič. 1.

Věta 150. *Budiž P úplný, $P \neq \emptyset$. Potom P nemůže býti* 1. *kategorie v P.*

Poznámka 2. Je-li tedy A první kategorie v úplném $P \neq \emptyset$, je $P \dot{-} A \neq \emptyset$, ba dokonce $P \dot{-} A = B$ není první kategorie v P; neboť jinak by též $P = A \cup B$ bylo první kategorie v P.

Důkaz. Budiž A množina 1. kategorie v P, tedy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou řídké v P. Použiji nyní věty 138. Z ní plyne toto: Je-li

$\Omega(a, \varepsilon)$ libovolná koule (v P), a je-li n libovolné přirozené číslo, potom existuje koule $\Omega(b, \eta)$ tak, že je

$$\eta \leqq \frac{1}{n}, \quad \overline{\Omega(b, \eta)} \subset \Omega(a, \varepsilon), \quad \overline{\Omega(b, \eta)}\, A_n = \emptyset .$$

Důkaz. Podle věty 138 existuje množina $G_1 \neq \emptyset$ otevřená v P tak, že $G_1 \subset \Omega(a, \varepsilon)$, $A_n G_1 = \emptyset$. Existuje bod $b \in G_1$ a k němu koule $\Omega(b, \varepsilon') \subset \subset G_1$. Volme $\eta = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}\varepsilon', \frac{1}{n}\right)$. Potom $\overline{\Omega(b, \eta)} \subset \Omega(b, \varepsilon')$.[88]) Tedy je $\overline{\Omega(b, \eta)} \subset G_1 \subset \Omega(a, \varepsilon)$, $\overline{\Omega(b, \eta)}\, A_n \subset G_1 A_n = \emptyset$.

Použijeme toho, co jsme právě dokázali, k úplné indukci. Vezmu libovolnou kouli $\Omega(a_0, \eta_0)$ a volím po řadě koule $\Omega(a_n, \eta_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) tak, že

$$(131) \qquad \eta_n \leqq \frac{1}{n}, \quad \overline{\Omega(a_n, \eta_n)} \subset \Omega(a_{n-1}, \eta_{n-1}), \quad \overline{\Omega(a_n, \eta_n)}\, A_n = \emptyset .$$

Ježto $d(\overline{\Omega(a_n, \eta_n)}) \leqq 2\eta_n \leqq \frac{2}{n}$, tvoří množiny

$$(132) \qquad \overline{\Omega(a_n, \eta_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

posloupnost, splňující všechny požadavky věty 149. Tedy existuje bod $x \in P$, ležící ve všech množinách (132), tedy (viz (131)) neležící v žádné z množin A_n. Tedy $P \dot{-} A \neq \emptyset$, což bylo dokázati: množina, která je první kategorie v P, nemůže obsahovati všechny body z P.

Tato věta má velmi mnoho aplikací v nejrůznějších partiích matematiky. Viz k tomu ještě cvič. 2.

Věta 151. *Budiž (P, ϱ) metrický prostor. Potom existuje úplný metrický prostor (Q, σ) takový, že*

A. *(P, ϱ) je vnořen do (Q, σ).*

B. *P je hustý v Q.*

Je-li (Q_1, σ_1) další úplný prostor s vlastnostmi A, B, *potom existuje isometrické zobrazení f prostoru (Q, σ) na (Q_1, σ_1) tak, že každý bod z P se zobrazuje na sebe: $f(x) = x$ pro každé $x \in P$.*

---

[88]) Každý bod $x \in \overline{\Omega(b, \eta)}$ lze psáti jako $x = \lim x_n$, $x_n \in \Omega(b, \eta)$, tedy $\varrho(b, x) = \lim \varrho(b, x_n) \leqq \eta < \varepsilon'$. Současně je z trojúhelníkové nerovnosti patrno, že $d(\overline{\Omega(b, \eta)}) \leqq 2\eta$.

Důkaz. Budiž $P \neq \emptyset$ (jinak je vše zřejmé). Všechny cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$[88a]) bodů z P rozdělím do tříd takto: Jsou-li $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dvě cauchyovské posloupnosti, budu psáti $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, je-li $\lim\limits_{n\to 0} \varrho(x_n, y_n) = 0$. Zřejmě $\{x_n\} \sim \{x_n\}$; za druhé: je-li $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, je $\{y_n\} \sim \{x_n\}$; za třetí: je-li $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, je $\{x_n\} \sim \{z_n\}$. Neboť $\varrho(x_n, z_n) \leqq \varrho(x_n, y_n) + \varrho(y_n, z_n)$, takže $\lim \varrho(x_n, z_n) = 0$.

Jestliže tedy nazvu $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ekvivalentními, když platí $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, jsou splněny podmínky kap. I, § 7 a tedy se množina všech cauchyovských posloupností rozpadá ve třídy tím způsobem, že dvě posloupnosti počítám do téže třídy tehdy a jen tehdy, jsou-li ekvivalentní.

Tvrdím: *Má-li cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ limitu v P, má každá ekvivalentní posloupnost $\{y_n\}$ touž limitu.* Neboť je-li $\lim \varrho(x_n, x) = 0$, $\lim \varrho(x_n, y_n) = 0$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti $\lim \varrho(y_n, x) = 0$.

Třídy cauchyovských posloupností jsou tedy dvojího druhu:

I. Třídou prvního druhu nazveme takovou třídu cauchyovských posloupností, které mají v P limitu (načež mají všechny touž limitu).

II. Třídou druhého druhu nazveme třídu cauchyovských posloupností, které nemají v P limitu.[89]) Těmto třídám budeme také říkati „ideální body". Množinu těchto ideálních bodů nazveme R a položme $Q = P \cup R$.

Provedu nyní vzájemně jednoznačné přiřazení tříd a bodů z Q takto:

Je-li $a \in P$, označím znakem $[a]$ onu třídu, v níž leží posloupnost $a, a, a, \ldots$ To je tedy třída posloupností s ní ekvivalentních, t. j. třída těch posloupností $\{x_n\}$, pro něž je $\lim \varrho(x_n, a) = 0$, t. j. $\lim x_n = a$. Pro $a \neq b$ je tedy $[a] \neq [b]$.

Je-li $a \in R$, potom a je samo třídou posloupností (cauchyovských, ale divergentních v P) a položím $[a] = a$.

Tím je tedy dáno prosté zobrazení (t. j. vzájemně jednoznačné přiřazení) množiny $Q = P \cup R$ na množinu všech tříd.

[88a]) Tohoto označení se často užívá pro posloupnost $x_1, x_2, \ldots$

[89]) Takové třídy existují, není-li P úplný. Naším cílem je, rozšířiti prostor P tak, aby i posloupnosti z tříd druhého druhu (jakož i všechny nové cauchyovské posloupnosti, které tím rozšířením vzniknou) měly limitu.

Je-li $a \in Q$, nazveme „representantem bodu a" kteroukoliv posloupnost z třídy $[a]$. Zavedeme nyní do Q metriku σ takto: Budiž $a \in Q$, $b \in Q$; vyberme jakéhokoliv representanta $\{x_n\}$ bodu a a representanta $\{y_n\}$ bodu b a klaďme

$$\sigma(a, b) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) . \tag{133}$$

Musíme dokázati:

I. *Tato limita existuje a je konečná a nezáporná.* Důkaz:

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m)$$

(podle (25) v § 2). Ježto $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou cauchyovské, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové n_0, že pro $n > n_0$, $m > n_0$ je pravá strana menší než ε. Tedy $\{\varrho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku,[90]) takže podle věty 26 existuje konečná limita v (133), zřejmě nezáporná.

II. *Limita v* (133) *se nezmění, nahradím-li* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *jinými representanty* $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ *bodů* a, b. Důkaz:

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x'_n, y'_n)| \leqq \varrho(x_n, x'_n) + \varrho(y_n, y'_n) ,$$

a pravá strana má limitu 0. Tedy $\lim \varrho(x_n, y_n) = \lim \varrho(x'_n, y'_n)$. Číslo (133) tedy vskutku závisí *jen* na a, b; t. j. rovnice (133) definuje funkci σ (konečnou a nezápornou) v $Q \times Q$.

III. *Je* $\sigma(a, a) = 0$, neboť mohu v (133) volit $y_n = x_n$.

IV. *Je-li* $a \neq b$, *je* $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$ (zřejmě), $\sigma(a, b) > 0$. Důkaz: Kdyby $\lim \varrho(x_n, y_n) = 0$, byly by $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ekvivalentní, t. j. representanty téhož bodu.

V. $\sigma(a, c) \leqq \sigma(a, b) + \sigma(b, c)$. Důkaz: $\varrho(x_n, z_n) \leqq \varrho(x_n, y_n) + \varrho(y_n, z_n)$ a provede se limita pro $n \to \infty$. Tedy: σ je metrika v Q; (Q, σ) je metrický prostor.

VI. (P, ϱ) *je vnořen do* (Q, σ), t. j. pro $a \in P$, $b \in P$ je $\sigma(a, b) = \varrho(a, b)$. To je zřejmé, vezmu-li za representanty posloupnosti $a, a, \ldots; b, b, \ldots$, načež $\sigma(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a, b) = \varrho(a, b)$.

Nyní budeme dokazovati, že Q je úplný (a že P je husté v Q). To bude trochu delší.

---

[90]) Je to posloupnost reálných čísel!

VII. Každá cauchyovská posloupnost bodů z P patří do některé třídy, a tato třída má tvar $[a]$, t. j. je přiřazena bodu $a \in Q$. Tvrdím: *Patří-li* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *do třídy* $[a]$, *je* $\lim x_n = a$ (v (Q, σ)). Důkaz: Za representanta bodu a vezmu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, za representanta bodu x_m vezmu posloupnost $x_m, x_m, x_m, \ldots$, takže (viz (133))

$$\sigma(a, x_m) = \lim_{n \to \infty} \varrho(x_n, x_m)\,. \tag{134}$$

Ale $\{x_n\}$ je cauchyovská: t. j. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje m_0 tak, že $(n > m_0, m > m_0) \Rightarrow \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Tedy: Je-li $m > m_0$, je $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pro všechna $n > m_0$, tedy $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho(x_n, x_m) \leqq \varepsilon$, tedy (viz (134)) $\sigma(a, x_m) \leqq \varepsilon$. Tedy vskutku $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = a$.

VIII. *P je husté v Q* — to plyne z VII: Je-li $a \in Q$, zvolím $\{x_n\}$ z třídy $[a]$, načež $\lim x_n = a$; ježto $x_n \in P$, je $a \in \overline{P}^Q$. T. j. $\overline{P}^Q = Q$.

IX. V VII jsme dokázali, že každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní v Q. Tvrdím konečně: *Každá cauchyovská posloupnost bodů z Q je konvergentní v Q, t. j. Q je úplný.* Důkaz: Budiž $a_1, a_2, \ldots$ cauchyovská posloupnost bodů z Q. Podle VIII existuje ke každému n bod $b_n \in P$ tak, že $\sigma(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$. Ježto tedy

$$\sigma(b_n, b_m) < \sigma(a_n, a_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\,,$$

je patrno, že $\{b_n\}$ je také cauchyovská; ježto $b_n \in P$, existuje podle VII $\lim b_n = c \in Q$. Ale $\sigma(a_n, c) < \sigma(b_n, c) + \dfrac{1}{n}$, a pravá strana má limitu 0; tedy $\lim a_n = c$, což bylo dokázati.

Existence úplného prostoru (Q, σ) s vlastnostmi A, B je dokázána.[91]) Budiž (Q_1, σ_1) další takový prostor. Definujme zobrazení f prostoru Q do Q_1 takto: Budiž $x \in Q$; potom (ježto $\overline{P}^Q = Q$) existují $a_n \in P$ tak, že $\lim a_n = x$ (v Q). Ježto tedy $\{a_n\}$ je cauchyovská[92]) a Q_1 úplný, existuje též v (Q_1, σ_1) limita, kterou označím $f(x)$, t. j.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n \quad (\text{v } (Q_1, \sigma_1))\,. \tag{135}$$

---

[91]) Jiný důkaz viz v cvič. 3.

[92]) Ježto $a_n \in P$ a P je vnořen do (Q, σ) i do (Q_1, σ_1), je $\varrho(a_n, a_m) = \sigma(a_n, a_m) = \sigma_1(a_n, a_m)$.

Ovšem musím ukázati, že tato limita závisí jen na x, ne na výběru posloupnosti $\{a_n\}$. Budiž tedy $b_1, b_2, \dots$ další posloupnost bodů z P, mající v (Q, σ) limitu x. Potom $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ má v (Q, σ) též limitu x; tedy je to cauchyovská posloupnost, a tedy má též limitu v Q_1. Tedy (vybrané posloupnosti!) $\lim a_n = \lim b_n$ (v Q_1). Tedy máme zde skutečně zobrazení f prostoru Q do Q_1. Budiž nyní $y \in Q_1$; ježto $\bar{P}^{Q_1} = Q_1$, existují $b_n \in P$ tak, že $\lim b_n = y$ (v Q_1). Tedy je $\{b_n\}$ cauchyovská, tedy má limitu v (úplném) Q: $\lim b_n = x$ (v Q). Ale podle definice zobrazení f je $f(x) = y$. Tedy každý bod $y \in Q_1$ je obrazem některého bodu $x \in Q$; f je zobrazení Q na Q_1.

Je-li speciálně $x \in P$, máme $\lim a_n = x$ v P, tedy to platí i v Q i v Q_1 (do nichž je P vnořeno); t. j. *pro* $x \in P$ *je* $f(x) = x$. Konečně budiž $x \in Q$, $y \in Q$. Existují $a_n \in P$, $b_n \in P$ tak, že $\lim a_n = x$, $\lim b_n = y$ v Q, načež v Q_1 platí $\lim a_n = f(x)$, $\lim b_n = f(y)$. Je tedy (viz § 2, pozn. 5) $\sigma(x, y) = \lim \sigma(a_n, b_n)$, $\sigma_1(f(x), f(y)) = \lim \sigma_1(a_n, b_n)$. Ale (P, ϱ) je vnořen do (Q, σ) i do (Q_1, σ_1); tedy $\sigma(a_n, b_n) = \sigma_1(a_n, b_n) = \varrho(a_n, b_n)$, a tedy $\sigma(x, y) = \sigma_1(f(x), f(y))$, t. j. f *je isometrické.* Tím je věta úplně dokázána.

Tato věta je velmi důležitá. Úplné prostory jsou takové, kde se dá o existenci limity posloupnosti rozhodnouti podle vnitřní struktury té posloupnosti, t. j. podle čísel $\varrho(x_n, x_m)$ (t. j. podle toho, zda posloupnost je cauchyovská); podobně u limity funkce (viz větu 144, která platí pro úplný prostor Q). Je proto velmi důležito, že můžeme každý metrický prostor vnořit do úplného. Úplný prostor Q, v němž prostor P je hustý, se nazývá *úplným obalem* prostoru P. Podle věty 151 dva úplné obaly Q, Q_1 prostoru P jsou „téměř stejné“: je možno zobrazit Q isometricky na Q_1 tak, že každý bod z P zůstane na svém místě, takže body z $Q \dot{-} P$ jsou mezi sebou a s body z P v týchž metrických vztazích jako jejich obrazy v $Q_1 \dot{-} P$.

Odtud plyne také, že pojem

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q \in (Q, \sigma) \tag{136}$$

(kde f je zobrazení z nějakého prostoru (P, ϱ) do nějakého prostoru (Q, σ)[93]) je daleko méně závislý na prostoru Q, než by se zdálo z def. 29.

[93]) Označení P, Q nemá nic společného s dosavadním označením tohoto paragrafu: jsou to dva libovolné metrické prostory.

Zobrazení f určuje především prostor $(Q_0, \sigma) = (f(A), \sigma)$[94] ($f$ budiž definováno v celém A — to není podstatná újma obecnosti). Existuje-li limita (136), sestrojme úplný obal R prostoru Q. Zřejmě $\overline{Q}_0^R$ je úplný obal prostoru Q_0 (každá množina je hustá ve svém uzávěru) a bod q nutně leží v $\overline{Q}_0^R = U$, t. j. v úplném obalu prostoru Q_0.[95]) Kdyby v nějakém jiném nadprostoru (Q_1, σ_1) prostoru (Q_0, σ) existovala

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q_1 \in (Q_1, \sigma_1)\,, \tag{137}$$

ležel by bod q_1 opět v jistém úplném obalu U_1 prostoru Q_0. Ale existuje isometrické zobrazení φ prostoru U na U_1, při kterém $\varphi(z) = z$ pro $z \in Q_0$. Z (136) plyne pak snadno (isometrie!)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \varphi(f(x)) = \varphi(q)\,; \tag{138}$$

ježto $\varphi(f(x)) = f(x)$ pro $x \in A$ (a tedy $f(x) \in Q_0$), plyne z (137), (138) $q_1 = \varphi(q)$. T. j. existuje-li limita (136) v nějakém nadprostoru Q prostoru Q_0, existuje tato limita už v úplném obalu U prostoru Q_0. Jsou-li pak U, U_1 dva takové úplné obaly, liší se příslušné limity q, q_1 jen nepodstatně: existuje isometrické zobrazení prostoru U na U_1, které zobrazuje každý prvek z Q_0 sám v sebe, a toto zobrazení potom nutně zobrazuje q na q_1.

Cvičení

1. V $\mathbf{E}_1$ (s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$) tvoří intervaly $P_n = \langle n, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$ klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin. Přes to je jejich průnik prázdný. Zde ovšem není splněna podmínka $\lim d(P_n) = 0$ z věty 149.

2. Budiž P úplný metrický prostor; budte $M_1, M_2, \ldots$ množiny typu G_δ v P, které jsou husté v P. Potom i $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ je množina hustá v P (to je důležitá věta). Návod: Každé M_n je průnik posloupnosti množin hustých a otevřených v P. Lze tedy psáti $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou husté a otevřené v P. Není-li M husté v P, existuje koule $\Omega_P(a, \varepsilon)$ tak, že $\overline{\Omega_P(a, \varepsilon)} \,.\, M = \emptyset$. Množiny

[94]) To je prostor vnořený do (Q, σ).
[95]) Při tom tento úplný obal i prostor Q jsou vnořeny do R.

G_nK (kde $K = \overline{\Omega_P(a, \varepsilon)}$) jsou otevřené a husté v K; množiny $F_n = K \dot{-} G_n$ jsou tedy uzavřené a řídké v úplném prostoru $K \neq \emptyset$. Podle věty 150 nemůže býti $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = K$, t. j. nemůže býti $\bigcap_{n=1}^{\infty} KG_n = \emptyset$ — spor. (T. zv. věta Baireova.)

3. Jiný důkaz existence úplného obalu (věta 151). Budiž (P, ϱ) neprázdný metrický prostor. Budiž B množina všech reálných funkcí v oboru P, které jsou omezené v P. V B zaveďme metriku $\sigma(x, y) = \sup_{\tau \in P} |x(\tau) - y(\tau)|$. Snadno ukážete, že B je úplný. Zvolme pevně $a \in P$ a sestrojme zobrazení φ prostoru P do B takto: každému $t \in P$ přiřadíme (jakožto $\varphi(t)$) funkci (proměnné τ) $\varrho(t, \tau) - \varrho(a, \tau)$; tuto funkci označme f_t (tedy $f_t(\tau) = \varrho(t, \tau) - \varrho(a, \tau)$ pro $\tau \in P$). Je to funkce omezená (takže patří do B): $|f_t(\tau)| \leqq \varrho(t, a)$. Dále $\sigma(f_{t_1}, f_{t_2}) = \sup_{\tau \in P} |\varrho(t_1, \tau) - \varrho(t_2, \tau)| = \varrho(t_1, t_2)$ (nerovnost $|\varrho(t_1, \tau) - \varrho(t_2, \tau)| \leqq \varrho(t_1, t_2)$ je jasná, a pro $\tau = t_2$ platí rovnost). Tedy zobrazení φ je isometrické. Jestliže nyní v prostoru B nahradíme každý prvek $\varphi(t)$ (t. j. funkci f_t) prvkem $t (t \in P)$, dostaneme nový prostor B_1, do něhož je P vnořen. Zřejmě také B_1 je úplné (B_1 se od B liší jen formálně: místo f_t píši t). Uzávěr množiny P v prostoru B_1 je pak zřejmě úplným obalem prostoru (P, ϱ).

Poznámka. Vezmeme-li ve větě 151 za P množinu všech racionálních čísel, můžeme podobně jako v důkazu věty dospět k theorii reálných čísel: Prvky z Q nazveme reálnými čísly; jsou-li a, b reálná čísla, existují posloupnosti racionálních čísel a_n, b_n tak, že $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$, načež lze definovati $a + b = \lim (a_n + b_n)$, $ab = \lim a_n b_n$ a pod.; dále bychom definovali: jest $a < b$, je-li $a \neq b$ a současně $a_n < b_n$ od jistého n počínaje. Tím bychom dosti snadno vybudovali theorii reálných čísel, zcela ekvivalentní theorii Dedekindově, vyložené v **DI**, kap. I. Naproti tomu důkaz, naznačený v cvič. 3, nám tuto možnost nedává, neboť při sestrojování prostoru B musíme již reálná čísla znáti (potřebujeme pojem suprema — a mimo to musíme pro funkce $x \in B$ připouštěti všechny reálné hodnoty, má-li B býti úplný).

§ 15. Separabilní prostory.

Eukleidovský $\mathbf{E}_r$ je *nespočetná* množina, ale obsahuje *spočetnou* množinu A všech bodů s racionálními souřadnicemi, která je *hustá* v $\mathbf{E}_r$. Tato okolnost je velmi důležitá, a budeme ji vyšetřovati obecně.

Definice 30. *Metrický prostor* (P, ϱ) *nazýváme separabilním, jestliže existuje spočetná množina* A *hustá v* P.

Poznámka 1. Zřejmě je to pojem topologický: prostor homeomorfní se separabilním je sám separabilní.

Speciálně $\mathbf{E}_r$ (při kterékoliv z metrik (5), (7)) je separabilní.

Věta 152. *Každá část*[96]) *separabilního prostoru je separabilní.*

Důkaz. Budiž M vnořena do separabilního (P, ϱ), kde $P \neq \emptyset$ (případ $P = \emptyset$ je zřejmý). Existuje spočetná množina A, hustá v P. Body množiny A srovnám v posloupnost

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{139}$$

Znakem $\Omega_{m,n}$ označím kouli $\Omega_P\left(x_m, \frac{1}{n}\right)$ $(m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$.

V každé kouli $\Omega_{m,n}$, pro kterou $M\Omega_{m,n} \neq \emptyset$, zvolím bod $\xi_{m,n} \in M$. Množina B všech těchto bodů $\xi_{m,n}$ je spočetná a je $B \subset M$ (jestliže pro některý pár m, n je $M\Omega_{m,n} = \emptyset$, není $\xi_{m,n}$ ovšem definováno). Tvrdím, že B je hustá v M — tím bude dokázána věta. Budiž tedy $x \in M$; mám dokázati, že $\varrho(x, B) = 0$. Vezměme libovolné přirozené číslo n; ježto A je husté v P, existuje m tak, že $\varrho(x, x_m) < \frac{1}{n}$. Tedy $x \in \Omega_{m,n}$, tedy $M\Omega_{m,n} \neq \emptyset$, a tedy bod $\xi_{m,n} \in B$ je definován. Ježto $\xi_{m,n} \in \Omega_{m,n}$, je $\varrho(x_m, \xi_{m,n}) < \frac{1}{n}$, tedy $\varrho(x, \xi_{m,n}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, a tedy $\varrho(x, B) < \frac{2}{n}$. A to platí pro každé přirozené n, tedy $\varrho(x, B) = 0$.

Věta 153. *Nechť množiny G_z $(z \in Z)$ tvoří disjunktní systém neprázdných množin, otevřených v separabilním prostoru (P, ϱ). Potom Z je spočetná.*[97])

Krátce: Disjunktní systém otevřených neprázdných množin v separabilním prostoru je spočetný.

Důkaz. Budiž A spočetná množina hustá v P. Každému $z \in Z$ můžeme přiřaditi bod $x_z \in A$, ležící v G_z (viz pozn. [39])). Všechny tyto body x_z tvoří spočetnou množinu $B \subset A$. Různým z odpovídají též různé body x_z (neboť $x_{z_1} = x_{z_2} \Rightarrow G_{z_1}G_{z_2} \neq \emptyset \Rightarrow z_1 = z_2$). Tedy Z je zobrazeno *prostě* na B, tedy Z je spočetná.

Věta 154 (t. zv. pokrývací věta Lindelöfova). *Budiž P metrický prostor, M separabilní, $M \subset P$. Buďte G_z $(z \in Z)$ množiny otevřené v P, které pokrývají M, t. j.*

[96]) Slovem „část“ míním ovšem podprostor.
[97]) To je zobecnění věty 140.

(140) $$M \subset \bigcup_{z \in Z} G_z .$$

Potom existuje spočetná část $Y \subset Z$ tak, že

$$M \subset \bigcup_{z \in Y} G_z .$$

Jinými slovy: V jakémkoliv systému otevřených množin, pokrývajícím separabilní M, existuje spočetný podsystém, který také pokrývá celou množinu M.

Důkaz. Budiž A spočetná množina, hustá v M. Body množiny A srovnám v posloupnost

(139) $$x_1, x_2, \dots$$

a sestrojím všechny koule

$$\Omega_{m,n} = \Omega_P\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Systém těchto koulí je spočetný. Tvrdím především: *Ke každému bodu $x \in M$ existuje koule $\Omega_{m,n}$, která obsahuje x a je obsažena v některé z množin G_z.* Důkaz: Budiž $x \in M$; existuje $z \in Z$ tak, že $x \in G_z$. Tedy existuje (ježto G_z je otevřené v P) přirozené n tak, že $\Omega_P\left(x, \frac{2}{n}\right) \subset G_z$. Ježto A je hustá v M, existuje přirozené m tak, že $\varrho(x_m, x) < \frac{1}{n}$. Tvrdím, že $\Omega_{m,n}$ má žádané vlastnosti. Neboť předně zřejmě $x \in \Omega_{m,n}$. Za druhé: je-li $y \in \Omega_{m,n}$, je $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_m) + \varrho(x_m, y) < \frac{2}{n}$; tedy $\Omega_{m,n} \subset \Omega_P\left(x, \frac{2}{n}\right) \subset G_z$. Tím je dokázáno tvrzení, vytištěné kursivou (ležatě).

Každému $x \in M$ přiřaďme určitou kouli $\Omega_{m,n}$ s uvedenými vlastnostmi ($x \in \Omega_{m,n} \subset G_z$ pro některé $z \in Z$); tuto kouli označme $\Omega^{(x)}$. Zřejmě je

(141) $$M \subset \bigcup_{x \in M} \Omega^{(x)}$$

Ale systém všech koulí $\Omega_{m,n}$ (mezi nimiž byly $\Omega^{(x)}$ vybrány) je spočetný. Proto lze všechny koule $\Omega^{(x)}$ srovnati v posloupnost

$$K_1, K_2, \ldots, \text{[98]})$$

takže $M \subset K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ Ale každá K_p je částí některé G_z. Přiřaďme (zde intervenuje axiom výběru) každé kouli K_p index $z_p \in Z$ tak, že $K_p \subset G_{z_p}$. Potom je zřejmě

$$M \subset G_{z_1} \cup G_{z_2} \cup \ldots,$$

čímž věta dokázána.

Poznámka 2. Separabilní jsou na př. $\mathbf{E}_r$ (jak víme), dále $\mathbf{K}_r$ s metrikou z § 3, příkl. 2; tedy i každá množina v $\mathbf{E}_r$ nebo $\mathbf{K}_r$ je separabilní (věta 152). Dále prostor $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$ (isometrický s $\langle -1, 1 \rangle$, viz pozn. 13 v § 9) a prostor $({}^*\mathbf{K}_1, {}^*\varrho)$ (isometrický s kulovou plochou v $\mathbf{E}_3$, viz pozn. 13 v § 9) a tedy i všechny bodové množiny v těchto prostorech jsou separabilní.

Poznámka 3. *Budiž (P, ϱ) separabilní, $A \subset P$, A isolovaná* (viz § 5, pozn. 11). *Potom A je spočetná.* Důkaz: Budiž M množina spočetná, hustá v P. Ke každému bodu $a \in A$ existuje kladné číslo $\delta(a)$ tak, že průnik $A \,.\, \Omega_P(a, 2\delta(a))$ se skládá z jediného bodu a. Přiřaďme každému $a \in A$ bod $x(a) \in M$ tak, že $\varrho(a, x(a)) < \delta(a)$. Je-li $a \in A$, $b \in A$, $a \neq b$, je $\varrho(a, b) \geqq 2\delta(a)$, $\varrho(a, b) \geqq 2\delta(b)$, tedy (sečtením) $\varrho(a, b) \geqq \delta(a) + \delta(b)$. Kdyby bylo $x(a) = x(b)$, bylo by $\varrho(a, b) \leqq \varrho(a, x(a)) + \varrho(x(b), b) < \delta(a) + \delta(b)$, což není možno. Tedy $a \neq b \Rightarrow x(a) \neq x(b)$. Přiřadím-li tedy každému $a \in A$ bod $x(a) \in M$, dostávám prosté zobrazení množiny A na část spočetné množiny M; tedy je A spočetná.

Tato poznámka nám dovoluje sestrojiti prostor, který není separabilní. Budiž M nespočetná množina a definujme $\varrho(a, b) = 1$ pro $a \neq b$, $\varrho(a, a) = 0$ (pro $a \in M$, $b \in M$). Potom M je metrický nespočetný prostor, jehož všechny body jsou isolované — tedy není separabilní.

Poznámka 4. Jsou-li prostory $(P_1, \varrho_1), \ldots, (P_r, \varrho_r)$ separabilní, je $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_r$ separabilní. Důkaz: Budiž A_j spočetná a hustá v P_j $(j = 1, \ldots, r)$. Potom $A_1 \times \ldots \times A_r$ je spočetná a hustá v $P_1 \times \ldots \times P_r$ (věta 134).

[98]) V sjednocení (141) se ovšem některá koule K_p může vyskytovat nekonečně (ba i nespočetně) mnohokráte.

Cvičení

1. Budiž $M \subset P$, M separabilní. Potom i $\overline{M}^P$ je separabilní.

2. Ve cvič. 2—6 z kap. V, § 1 klaďte místo E_1 libovolný metrický prostor P a M budiž libovolný separabilní podprostor prostoru P. Zobecněte citovaná cvičení 2—6 na tento případ. Návod: místo intervalů (a, b) s racionálními a, b berte nyní koule $\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right)$, kde n probíhá všechna přirozená čísla, x probíhá jistou množinu spočetnou, hustou v M.

3. Budiž $P \neq \emptyset$ metrický prostor. Systém množin

$$A_z \quad (z \in Z)$$

neprázdných a otevřených v P nazýváme otevřenou basí prostoru P, jestliže každou neprázdnou množinu, otevřenou v P, lze vyjádřiti jako sjednocení některých A_z. Dokažte: P je separabilní tehdy a jen tehdy, má-li spočetnou otevřenou basi (t. j. takovou, kde Z je spočetná). Návod: I. Má-li P spoč. otevř. basi, zvolte v každé A_z jeden bod — dostanete množinu spočetnou a hustou v P. II. Existuje-li množina M, spočetná a hustá v P, volte za množiny A_z všechny koule $\Omega_P\left(x, \frac{1}{n}\right)$, kde $x \in M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

§ 16. Kompaktní prostory. Definice 31. *Metrický prostor (P, ϱ) nazýváme kompaktním, jestliže každá posloupnost bodů z P obsahuje vybranou posloupnost, konvergentní v P.*

Poznámka 1. Z definice je vidět, že prostor homeomorfní s kompaktním je kompaktní; ale dokážeme daleko více (věta 169).

Věta 155. *Každý kompaktní prostor je úplný, omezený a separabilní.*

Důkaz. Budiž P kompaktní. 1. Vezmu libovolnou cauchyovskou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z P. Ta obsahuje (ježto P je kompaktní) vybranou posloupnost konvergentní v P. Tedy (podle pozn. 13 v § 2) je celá posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ konvergentní v P. Tedy P jest úplný.

2. Nechť P není omezený. Zvolme bod $x_0 \in P$. Podle § 2, pozn. 1 existuje ke každému přirozenému n bod x_n tak, že $\varrho(x_n, x_0) > n$. Existuje vybraná posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, mající limitu $x \in P$. Tedy (viz pozn. 5 v § 2) $\lim \varrho(x_{k_n}, x_0) = \varrho(x, x_0)$. Ale $\varrho(x_{k_n}, x_0) > k_n \geqq n$, tedy $\lim \varrho(x_{k_n}, x_0) = +\infty$ — spor. Tedy P jest omezený.

3. Tvrdím předně: *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná bodová množina $K(\varepsilon) \subset P$ tak, že pro každé $x \in P$ je $\varrho(x, K(\varepsilon)) < \varepsilon$.* Předpoklá-

dejme totiž, že k určitému $\varepsilon > 0$ taková $K(\varepsilon)$ neexistuje. Zvolme libovolně $x_1 \in P$ (pro $P = \emptyset$ je vše triviální). Dále volme postupně $x_2, x_3, \ldots$ takto: Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ již zvolena, existuje podle předpokladu bod x_{n+1} (a takový bod zvolme) tak, že $\varrho(x_{n+1}, x_j) \geqq \varepsilon$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ (kdyby takový bod x_{n+1} neexistoval, byla by množina $(x_1, \ldots, x_n)$ takovou množinou $K(\varepsilon)$). Tím dostáváme posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ takovou, že pro každou dvojici $m \neq n$ je $\varrho(x_m, x_n) \geqq \varepsilon$. V této posloupnosti zřejmě neexistuje žádná vybraná posloupnost cauchyovská, a tedy žádná konvergentní, což je ve sporu s kompaktností P.

Tím je existence množiny $K(\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$ dokázána. Zvolme množiny $K(1), K(\frac{1}{2}), \ldots$; tvrdím, že spočetná množina

$$A = K(1) \cup K(\tfrac{1}{2}) \cup K(\tfrac{1}{3}) \cup \ldots$$

je hustá v P. Budiž tedy $x \in P$; je-li n libovolné přirozené číslo, má x od $K\left(\frac{1}{n}\right)$ a tím spíše od A vzdálenost menší než $\frac{1}{n}$. Tedy $\varrho(x, A) = 0$, A je hustá v P, P je separabilní.

Poznámka 2. Obrátit se věta nedá: prostor úplný, omezený a separabilní nemusí být kompaktní; viz cvič. 6 k § 17. Ale v $\mathbf{E}_r$ se věta dá obrátit, jak ukazuje důležitá

Věta 156. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená v $\mathbf{E}_r$ a omezená.*

Důkaz. 1. Je-li M kompaktní, je podle věty 155 omezená a úplná, tedy (věta 147) uzavřená v $\mathbf{E}_r$.

2. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ uzavřená v $\mathbf{E}_r$ a omezená. Každá posloupnost $\mathfrak{P}$ bodů z M je omezená, tedy (viz pozn. 14 v § 2) obsahuje vybranou posloupnost konvergentní v $\mathbf{E}_r$. Limita této vybrané posloupnosti leží ovšem v $\overline{M}$, tedy v M. T. j. M je kompaktní.

Poznámka 3. Velmi jednoduché je charakterisovati kompaktní části kompaktního prostoru. *Je-li P kompaktní, $M \subset P$, potom M je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená v P.* Důkaz: 1. Je-li M kompaktní, je uzavřená (v P) podle věty 155 a 147. 2. Budiž M uzavřená v P. Budiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost bodů z M. Ježto P je kompaktní, existuje vybraná posloupnost x_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$, mající limitu $x \in P$.

Ovšem $x \in \overline{M}$ a tedy $x \in M$. Tedy: $x_1, x_2, \ldots$ obsahuje vybranou posloupnost konvergentní v M. Tedy M je kompaktní.

Poznámka 4. *Budiž P kompaktní nekonečná množina. Potom P není isolovaná* (t. j. aspoň jeden bod množiny P je jejím hromadným bodem). Důkaz. Podle věty 6 obsahuje P nekonečnou spočetnou část, jejíž prvky lze tedy srovnati v prostou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ Ježto P je kompaktní, existuje vybraná (ovšem prostá) posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ konvergentní v P, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in P$. Podle věty 120 je x hromadným bodem množiny P.

Poznámka 5. (Velmi důležitá.) *Každá nekonečná omezená množina $M \subset \mathbf{E}_r$ má v $\mathbf{E}_r$ aspoň jeden hromadný bod.* Důkaz. Podle věty 6 můžeme jako v pozn. 4 sestrojiti prostou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z M, která je ovšem omezená, takže podle § 2, pozn. 14 existuje vybraná posloupnost (ovšem prostá) $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ konvergentní v $\mathbf{E}_r$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in \mathbf{E}_r$. Podle věty 120 je x hromadným bodem množiny M.

Velmi důležité jsou následující dvě věty.

Věta 157. *Buďte $P_1, P_2, \ldots$ neprázdné a kompaktní, $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \supset \ldots$; potom*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset .$$

Proti obdobné větě 149 o úplných množinách není zde nutno činiti žádný předpoklad o $d(P_n)$.

Důkaz. Zvolme body $x_1, x_2, \ldots$ tak, že $x_n \in P_n$. Existuje vybraná posloupnost x_{k_n} $(n = 1, 2, \ldots)$, mající limitu v P_1:

$$\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = x \in P_1 . \tag{142}$$

Zvolme libovolně n; pro všechna m od jistého počínaje je $k_m > n$, tedy $x_{k_m} \in P_{k_m} \subset P_n$; z (142) tedy plyne (ježto P_n je uzavřené v P_1) $x \in P_n$, a to pro všechna n. Věta je dokázána.

Věta 158. (T. zv. Borelova pokrývací věta.)[99]) *Budiž P metrický prostor, M kompaktní, $M \subset P$. Buďte G_z ($z \in Z$) množiny otevřené v P, které pokrývají M, t. j.*

[99]) Také se říká Heine-Borelova, Borel-Lebesgueova a pod. Viz kap. V, § 2 pro $P = \mathbf{E}_1$.

$$M \subset \bigcup_{z \in Z} G_z .$$

Potom existuje **konečná** *část $X \subset Z$ tak, že*

$$M \subset \bigcup_{z \in X} G_z .$$

Všimněte si rozdílu proti větě 154: místo separabilní, spočetný stojí zde kompaktní, konečný.

Důkaz. Podle věty 155 je M separabilní; podle věty 154 existuje tedy spočetná část $Y \subset Z$ tak, že $M \subset \bigcup_{z \in Y} G_z$. Je-li Y konečná, je důkaz hotov. Je-li Y nekonečná, srovnejme množiny G_z $(z \in Y)$ v posloupnost $H_1, H_2, \ldots$, takže

$$M \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p . \tag{143}$$

Položme $K_n = H_1 \cup \ldots \cup H_n$, $L_n = M \dot{-} K_n$. Ježto M je uzavřená v P, K_n otevřená v P, je $M \dot{-} K_n = M(P \dot{-} K_n)$ uzavřená v P, tedy uzavřená v M (viz pozn. 21 v § 5), tedy kompaktní. Dále $L_1 \supset L_2 \supset \ldots$ a konečně $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = M \dot{-} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, neboť platí (143). Podle věty 157 nemůže tedy býti $L_n \neq \emptyset$ pro všechna n; existuje tedy n tak, že $L_n = \emptyset$, t. j. $M \subset K_n = H_1 \cup \ldots \cup H_n$, což bylo dokázati.

Poznámka 6. Často se užívá trochu jiného názvosloví. Je-li $A \subset P$, říkává se, že A je kompaktní v P, jestliže každá posloupnost bodů z A obsahuje vybranou posloupnost, konvergentní v P. Dodatek „v P" se často vynechává, je-li jasno, o který prostor P jde. Zde by tedy mohla nastati kolise s názvoslovím, zavedeným v def. 31. Množina A je kompaktní ve svém úplném obalu tehdy a jen tehdy, jestliže každá posloupnost bodů z A obsahuje posloupnost cauchyovskou (neboť ta je konvergentní v úplném obalu). My se přidržíme názvosloví, zavedeného v def. 31.

Povíme si ještě něco o vzdálenosti dvou množin. Dvě disjunktní úplné (tedy absolutně uzavřené) množiny mohou míti vzdálenost nulovou. Příklad v $\mathbf{E}_2$: Hyperbola $xy = 1$ a osa $x = 0$. Zde hraje jistou úlohu kompaktnost.

Věta 159. *Budiž $A \subset (P, \varrho)$, $B \subset (P, \varrho)$; buďte A, B kompaktní neprázdné množiny. Potom existují body $x \in A$, $y \in B$, $\xi \in A$, $\eta \in B$ tak, že*

$\varrho(x, y) = \varrho(A, B)$; $\varrho(\xi, \eta) = d(A, B)$. *Speciálně pro* $B = A$: *Existují* $\xi \in A$, $\eta \in A$ *tak, že* $\varrho(\xi, \eta) = d(A)$.

Důkaz. Existují $x_n \in A$, $y_n \in B$ tak, že $\lim \varrho(x_n, y_n) = \varrho(A, B)$. Ježto A, B jsou kompaktní, existuje posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \dots$ tak, že $\lim x_{k_n} = x \in A$ existuje. Existuje dále posloupnost $l_1 < l_2 < \dots$ vybraná z $k_1, k_2, \dots$ tak, že existuje $\lim y_{l_n} = y \in B$. Potom ovšem $\varrho(x, y) = \lim \varrho(x_{l_n}, y_{l_n}) = \varrho(A, B)$. Podobně pro ξ, η.

Věta 160. *Budiž* $\emptyset \neq A \subset (P, \varrho)$, $\emptyset \neq B \subset (P, \varrho)$, *budiž* A *kompaktní. Potom existuje* $x \in A$ *tak, že* $\varrho(x, B) = \varrho(A, B)$.

Důkaz. Existují $x_n \in A$ tak, že $\lim \varrho(x_n, B) = \varrho(A, B)$. Existuje konvergentní vybraná posloupnost: $\lim x_{k_n} = x \in A$. Tedy (viz pozn. 6 v § 2)

$$\varrho(x, B) = \lim \varrho(x_{k_n}, B) = \varrho(A, B) .$$

Věta 161. *Budiž* $A \subset P$, $B \subset P$, $AB = \emptyset$, A *kompaktní*, B *uzavřená v* P. *Potom* $\varrho(A, B) > 0$.

Důkaz. Budiž $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (ostatní případy jsou jasné). Vezmu bod x z věty 160 a uvážím, že $\varrho(x, B) > 0$, ježto x neleží v $\overline{B} = B$.

V $\mathbf{E}_r$ lze větu 160 zostřit:

Věta 162. *Budiž* $\emptyset \neq A \subset \mathbf{E}_r$, $\emptyset \neq B \subset \mathbf{E}_r$; A *kompaktní*, B *uzavřená v* $\mathbf{E}_r$. *Potom existují body* $a \in A$, $b \in B$ *tak, že* $\varrho(a, b) = \varrho(A, B)$.

Důkaz. Existuje (věta 160) $a \in A$ tak, že $\varrho(a, B) = \varrho(A, B)$. Existují $x_n \in B$ tak, že $\lim \varrho(a, x_n) = \varrho(a, B)$. Posloupnost $x_1, x_2, \dots$ jest omezená,[100]) obsahuje tedy (viz pozn. 14 v § 2) vybranou posloupnost x_{k_n} $(n = 1, 2, \dots)$, jež má limitu $b \in \overline{B} = B$. Ježto $\lim \varrho(a, x_{k_n}) = \varrho(a, b)$, je zřejmě $\varrho(a, b) = \varrho(a, B) = \varrho(A, B)$.

§ 17. Normální systémy spojitých funkcí. Budiž $-\infty < a < b < +\infty$. Budiž M nějaká množina konečných reálných funkcí v oboru $\langle a, b \rangle$, které jsou spojité v $\langle a, b \rangle$. Množinu M budeme nazývat **normální**, jestliže každá posloupnost $x_1, x_2, x_3, \dots$ prvků z M (jde tedy o posloupnost funkcí $x_1(t), x_2(t), \dots$ kde x_n patří do M) obsahuje

[100]) Neboť čísla $\varrho(a, x_n)$ tvoří konvergentní (a tedy omezenou) posloupnost.

vybranou posloupnost, která je v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně konvergentní (def. 9).

Otázka, kdy množina M je normální, je důležitá v mnoha otázkách analysy (při existenčních theorémech, týkajících se diferenciálních rovnic obyčejných nebo parciálních nebo při variačních problémech theoretické fysiky a pod.). Dáme zde na ni částečnou odpověď (t. j. udáme postačující podmínku), při čemž použijeme theorie metrických prostorů — snad bude věc takto přehlednější; zároveň uvidí čtenář, že i obecnější prostory než $\mathbf{E}_r$ a prostory do něho vnořené mohou být významné i ve zcela konkretních otázkách.

Označme znakem C množinu *všech* konečných spojitých reálných funkcí v oboru $\langle a, b\rangle$, takže $M \subset C$. V C definujeme metriku ϱ rovnicí

$$\varrho(x, y) = \operatorname*{Max}_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \tag{144}$$

(spojitá funkce $|x(t) - y(t)|$ nabývá někde v $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty podle věty 128 v **DI**). Že je to vskutku metrika, je vidět z nerovnosti

$$|x(t) - z(t)| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)\,,$$

načež vlevo přejdu k maximu.[101])

Rovnice $\lim x_n = x$ znamená v prostoru C, že $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname*{Max}\limits_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x(t)| = 0$, t. j. (viz kap. IV, § 2, pozn. 2) že je

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{stejnoměrně v } \langle a, b\rangle\,. \tag{145}$$

Mějme nyní nějakou množinu $M \subset C$. Každá funkce $x \in M$ je omezená, t. j. existuje $K < +\infty$ tak, že $|x(t)| \leq K$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Jestliže smíme vzít totéž K pro všechna $x \in M$, t. j. jestliže existuje $K < +\infty$ tak, že pro každé $x \in M$ je

$$|x(t)| \leq K \tag{146}$$

pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$, budeme říkati, že funkce z M jsou *stejně omezené*.

Každá funkce $x \in M$ je dále podle věty 63 stejnoměrně spojitá; to značí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že

[101]) Prostor C s touto metrikou je ostatně zřejmě vnořen do prostoru B z § 1, příklad 2.

$$(t_1 \in \langle a, b\rangle, t_2 \in \langle a, b\rangle, |t_1 - t_2| \leqq \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \leqq \varepsilon\,.$$

Toto $\delta(\varepsilon)$ je tedy funkce (kladná) proměnné ε definovaná pro $\varepsilon > 0$.[101a]) Jestliže smíme vzíti touž funkci $\delta(\varepsilon)$ pro všechna $x \in M$, t. j. jestliže existuje funkce δ, kladná v intervalu $(0, +\infty)$ a taková, že pro každé $x \in M$ platí

$$(147)\qquad (0 < \varepsilon < +\infty, t_1 \in \langle a, b\rangle, t_2 \in \langle a, b\rangle, |t_1 - t_2| \leqq \delta(\varepsilon)) \Rightarrow \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \leqq \varepsilon\,,$$

říkáme, že funkce z M jsou *stejně spojité.* Tvrdím nyní:

Věta 163 (Arzelova). *Budiž $M \subset C$. Nechť funkce z M jsou stejně omezené a stejně spojité. Potom M je normální.*

Důkaz. Existuje $K < +\infty$ a funkce δ, kladná v $(0, +\infty)$ tak, že platí (146), (147) pro každé $x \in M$. Budiž N množina všech funkcí $x \in C$, pro něž platí (146), (147); tedy $M \subset N \subset C$. Tvrdím, že N je uzavřená v C. Důkaz: Budiž $x \in \overline{N}^C$, takže existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ ($x_n \in N$) tak, že $\lim x_n = x$, t. j. platí (145). Vezměme $t \in \in \langle a, b\rangle$: pro každé n je $|x_n(t)| \leqq K$, tedy (limitním přechodem) $|x(t)| \leqq K$, t. j. x splňuje podmínku (146). Vezměme za druhé ε, t_1, t_2 tak, aby platila premisa v (147). Potom pro každé n je $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| \leqq \leqq \varepsilon$, tedy (limitním přechodem) $|x(t_1) - x(t_2)| \leqq \varepsilon$; t. j. x splňuje i podmínku (147). Tedy $x \in N$. Tedy $\overline{N} \subset N$, t. j. N je uzavřené v C.

Tvrdím nyní, že N je kompaktní. Tím bude věta 163 dokázána. Budiž totiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost funkcí z M, tedy z N. Ježto N je kompaktní, existuje vybraná posloupnost konvergentní v N, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$, $x \in N$; to však znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}(t) = x(t) \quad \text{stejnoměrně v } \langle a, b\rangle\,,$$

takže M je normální.

Důkaz, že N je kompaktní. Všechna racionální čísla intervalu $\langle a, b\rangle$ srovnejme v prostou posloupnost

$$(148)\qquad \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

[101a]) Při daném ε lze ovšem $\delta(\varepsilon)$ voliti různým způsobem; vybereme-li pro každé $\varepsilon > 0$ jednu takovou hodnotu $\delta(\varepsilon)$, je tím funkce δ proměnné ε určena. To lze provésti na př. tak, že při daném ε označíme supremum přípustných hodnot δ znakem $\Delta(\varepsilon)$ a položíme $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon)$.

Uvažme, že všechny hodnoty všech funkcí z N jsou v absolutní hodnotě nejvýše rovny K. Budiž

(149) $$x_1, x_2, \ldots$$

posloupnost funkcí z N. Podle vět 17, 19 lze z ní vybrati posloupnost

(150) $$x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \ldots,$$

která je konvergentní v bodě τ_1, t. j. posloupnost čísel $x_{1,1}(\tau_1)$, $x_{1,2}(\tau_1), \ldots$ je konvergentní. Ze (150) vyberu posloupnost

(151) $$x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \ldots,$$

která je konvergentní v bodě τ_2; ze (151) vyberu posloupnost

(152) $$x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \ldots,$$

konvergentní v bodě τ_3 atd. Konečně sestrojím „diagonální posloupnost"

(153) $$x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, \ldots;$$

ta je konvergentní v **každém** bodě τ_k. Neboť od k-tého členu počínaje jsou všichni členové posloupnosti (153) obsaženi v posloupnosti $x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}, \ldots$, která je konvergentní v bodě τ_k. Tím jsme dostali posloupnost (153) — kterou kratčeji označím

(154) $$y_1, y_2, \ldots,$$

jež je vybrána ze (149) a je konvergentní v každém bodě τ_k. Dokáži nyní, že (154) je **stejnoměrně** konvergentní v $\langle a, b\rangle$;[102]) teprve nyní použiji stejné spojitosti.

Budiž $\varepsilon > 0$; tím je dáno číslo $\delta(\varepsilon) > 0$. Ježto množina čísel τ_k je hustá v $\langle a, b\rangle$, lze zvoliti číslo ν tak, že každé z čísel intervalu $\langle a, b\rangle$ je od některého z čísel

(155) $$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$$

[102]) Tím bude důkaz hotov: limita $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$ je podle věty 56 spojitá v $\langle a, b\rangle$; tedy $y \in C$. Ježto $y_n \in N$, je $y \in \overline{N}^C$, tedy $y \in N$ (N je uzavřená!). Tedy (149) obsahuje vybranou posloupnost (154) konvergentní v N: $\lim y_n = y$; tedy N je kompaktní.

vzdáleno o méně než $\delta(\varepsilon)$.[103]) Ježto (154) je konvergentní v každém z bodů (148), existuje n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ je

$$(156) \qquad |y_n(\tau_k) - y_m(\tau_k)| < \varepsilon \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, \nu\,.^{104})$$

Budiž nyní $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$, $t \in \langle a, b\rangle$; tvrdím, že

$$(157) \qquad |y_n(t) - y_m(t)| < 3\varepsilon\,.$$

Tím bude dokázáno, že (154) splňuje „Bolzano-Cauchyovu podmínku" z věty 51, čímž bude stejnoměrná konvergence dokázána. (157) pak plyne takto: K bodu t najdu bod τ_k ($k \leqq \nu$) tak, že $|t - \tau_k| < \delta(\varepsilon)$. Ježto y_n, y_m patří do N, je podle (147)

$$|y_n(t) - y_n(\tau_k)| \leqq \varepsilon\,, \quad |y_m(t) - y_m(\tau_k)| \leqq \varepsilon\,.$$

Odtud a ze (156) plyne (157).

Důkaz je snad dosti poučný: složitá otázka v jednoduchém prostoru E_1 (stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $y_n(t)$, t. j. spojitých zobrazení z E_1 do E_1) byla převedena na jednodušší otázku v složitějším prostoru C (konvergence posloupnosti bodů v C). Tímto způsobem se často postupuje. Výhoda (vedle větší přehlednosti) spočívá v tom, že některé jednoduché vlastnosti — jak jsme viděli v této kapitole — jsou společné všem, i velmi složitým metrickým prostorům (nebo aspoň všem úplným, nebo všem separabilním atd. prostorům). V našem příkladě tato výhoda není dosti zřetelná — bez užití prostoru C by se důkaz věty dal vésti dokonce rychleji (pokuste se o to!), ale snad je poučno, že náš problém vedl na zcela přirozenou otázku: nalézti nějaké jednoduše charakterisované kompaktní podprostory prostoru C.

Cvičení

1. Budiž $M \subset C$ množina funkcí, jež mají v (a, b) stejně omezené derivace (t. j. existuje $K < +\infty$ tak, že $(x \in M,\ a < t < b) \Rightarrow |x'(t)| \leqq K$). Potom funkce z M jsou stejně spojité v $\langle a, b\rangle$.

2. Ve větě 163 lze předpoklad stejné omezenosti nahraditi tímto mírnějším

[103]) Rozdělím $\langle a, b\rangle$ na intervaly délky menší než $\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$ a v každém z nich zvolím jeden bod τ_k.

[104]) Každému z těchto k přísluší jedno takové n_0 a vezmeme z nich největší.

předpokladem: Existuje $K < +\infty$ a číslo $t_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $|x(t_0)| \leqq K$ pro všechna $x \in M$.

3. Celý obsah tohoto paragrafu[105]) zůstane v platnosti, jestliže interval $\langle a, b\rangle$ nahradíte jakýmkoliv kompaktním metrickým prostorem. (Návod: posloupnost $\tau_1, \tau_2, \ldots$ z důkazu věty 163 nahraďte množinou $K(1) \cup K(\frac{1}{2}) \cup K(\frac{1}{3}) \cup \cup \ldots$ z důkazu věty 155.)

Studujme ještě prostor C.

4. C je úplný.

5. C je separabilní. Návod: Budiž $x \in C$ (t. j. $x(t)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$), $\varepsilon > 0$. Rozdělte $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílů a sestrojte funkci y, spojitou v $\langle a, b\rangle$, která je lineární v každém z těchto n dílů a v dělicích bodech má racionální hodnoty, lišící se od příslušných hodnot funkce x o méně než $\frac{1}{2}\varepsilon$. Snadno zjistíte, že je $\varrho(x, y) < \varepsilon$, je-li n dosti velké. Funkce y popsaného typu tvoří množinu spočetnou, hustou v C.

6. Množina N všech funkcí $x \in C$, pro něž $\max\limits_{a \leqq t \leqq b} |x(t)| \leqq 1$, je uzavřená v C (tedy úplná) a omezená, ale není kompaktní. K důkazu poslouží posloupnost funkcí x_n ($n = 1, 2, \ldots$) s těmito vlastnostmi: $x_n(t) = 0$ pro $a \leqq t \leqq a + \dfrac{b-a}{n+1}$ a pro $a + \dfrac{b-a}{n} \leqq t \leqq b$; $\max\limits_{a \leqq t \leqq b} x_n(t) = 1$; $\min\limits_{a \leqq t \leqq b} x_n(t) = 0$.

§ 18. Oddělené množiny. Souvislé množiny. Definice 32. *Budiž* $A \subset (P, \varrho)$, $B \subset (P, \varrho)$. *Jestliže* $A\bar{B} = B\bar{A} = \emptyset$, *říkáme, že množiny* A, B *jsou oddělené.*

Poznámka 1. To znamená: každý bod $x \in A$ má kladnou vzdálenost od B a každý bod $x \in B$ má kladnou vzdálenost od A. Odtud je vidět, že oddělenost množin A, B závisí jen na prostoru $A \cup B$ (a ne na ostatních bodech prostoru P). Dále: Je-li f homeomorfní zobrazení prostoru $A \cup B$ a jsou-li A, B oddělené, jsou i $f(A)$, $f(B)$ oddělené — to je vidět z definice a z pozn. 12 v § 9.

Poznámka 2. Oddělené množiny A, B jsou ovšem disjunktní. Buďte naopak A, B disjunktní množiny.[106]) Podmínka $A\bar{B} = \emptyset$ (vezmu uzávěr v prostoru $A \cup B$) značí, že $\bar{B} \subset (A \cup B) \dot{-} A$, t. j. $\bar{B} \subset B$; podobně pro podmínku $B\bar{A} = \emptyset$. Tedy: A, B *jsou oddělené tehdy a jen tehdy, jsou-li disjunktní a uzavřené v* $A \cup B$. *Místo „uzavřené" mohu též říci „otevřené"; neboť* $A = (A \cup B) \dot{-} B$.

[105]) Nikoliv ovšem cvičení 1, 2!
[106]) Ležící v témž metrickém prostoru, za nějž mohu vzíti $A \cup B$.

Poznámka 3. Z definice plyne: Jsou-li A, B oddělené, $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, jsou i A_1, B_1 oddělené.

Příklad 1. Intervaly $(-\infty, a\rangle$, $(a, +\infty)$ jsou disjunktní, ale nejsou oddělené, poněvadž $\varrho(a, (a, +\infty)) = 0$.

Definice 33. *Metrický prostor P nazýváme souvislým, je-li $P \neq \emptyset$ a není-li P sjednocením dvou neprázdných oddělených množin.*[106a])

Poznámka 4. Lze též říci: ... a není-li P sjednocením dvou množin neprázdných, disjunktních, uzavřených v P (místo uzavřených lze říci otevřených). Jednobodová množina je tedy souvislá; prázdná množina nikoliv. Prostor homeomorfní se souvislým je souvislý (ale ve větě 171 dokážeme více).

Poznámka 5. *Neprázdná množina v $\mathbf{E}_1$ je souvislá tehdy a jen tehdy, je-li intervalem* (po příp. i zvrhlým).

Důkaz. Budiž M množina v $\mathbf{E}_1$, mající více než jeden bod (pro jednobodové M je vše jasné). 1. Nechť M není interval. Pišme $\alpha = \inf M$, $\beta = \sup M$. Existuje jistě číslo c ($\alpha < c < \beta$), nepatřící k M (ježto M není interval). Potom $M \,.\, (-\infty, c)$, $M \,.\, (c, +\infty)$ jsou neprázdné, oddělené množiny se sjednocením M. Tedy M není souvislé. 2. Nechť M je interval. Předpokládejme, že M není souvislé, takže existují $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ tak, že $A\overline{B} = B\overline{A} = \emptyset$, $A \cup B = M$. Zvolme $a \in A$, $b \in B$; volme označení tak, že $a < b$ a položme $\sigma = \sup(A \,.\, \langle a, b\rangle)$. Jest $a \leqq \sigma \leqq b$. Je-li $\sigma \in A$, je $\sigma \neq b$, tedy $\sigma < b$ a $(\sigma, b\rangle \subset B$, tedy $\sigma \in \overline{B}$; ale to není možné, ježto $A\overline{B} = \emptyset$. Je-li $\sigma \in B$, uvažme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x \in A \,.\, \langle a, b\rangle$ tak, že $\sigma - \varepsilon < x \leqq \sigma$ (podle definice suprema). Tedy $\sigma \in \overline{A}$. Ale to také není možné, ježto $B\overline{A} = \emptyset$. Tedy σ nemůže ležeti v A ani v B, t. j. σ neleží v M. Ale čísla $a < \sigma$, $b > \sigma$ leží v M. Tedy M není intervalem — spor. Souvislé množiny v $\mathbf{E}_1$ jsou tedy úplně popsány. Ale už v $\mathbf{E}_2$ je situace nesrovnatelně složitější.

Věta 164. *Pro každé $z \in Z$ budiž M_z souvislá množina, $M_z \subset (P, \varrho)$. Budiž $\bigcap_{z \in Z} M_z \neq \emptyset$. Potom $\bigcup_{z \in Z} M_z$ je souvislá.*

[106a]) Kompaktní souvislá množina, obsahující více než jeden bod, se obyčejně nazývá *kontinuum*.

Důkaz. Nechť $M = \bigcup_{z \in Z} M_z$ není souvislá, tedy $M = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné oddělené. Existuje bod $a \in \bigcap M_z$; označení množin A, B volme tak, že $a \in A$. Existuje bod $b \in B$; tedy existuje z tak, že $b \in M_z$. Potom $M_z = AM_z \cup BM_z$. Jest $a \in AM_z \subset A$, $b \in BM_z \subset B$, takže AM_z, BM_z jsou neprázdné a oddělené, tedy M_z není souvislá — spor.

Věta 165. *Budiž $P \neq \emptyset$ metrický prostor. Nechť ke každé dvojici bodů $a \in P$, $b \in P$ existuje souvislá množina $M \subset P$ tak, že $a \in M$, $b \in M$. Potom P je souvislý.*

Důkaz. Nechť P není souvislý, tedy $P = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, A, B oddělené. Zvolme $a \in A$, $b \in B$. Existuje souvislá $M \subset P$, obsahující a, b. Potom $M = AM \cup BM$ je rozklad množiny M na neprázdné oddělené množiny (jest $a \in AM \subset A$, $b \in BM \subset B$). Tedy M není souvislá — spor.

Věta 166. *Budiž $M_1, M_2, \ldots$ konečná nebo nekonečná posloupnost souvislých množin (v metrickém prostoru P). Nechť $M_n M_{n+1} \neq \emptyset$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom $M_1 \cup M_2 \cup \ldots$ je souvislá.*

Důkaz. 1. $M_1 \cup M_2$ je souvislá podle věty 164.

2. Je-li $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ souvislá, je $(M_1 \cup \ldots \cup M_k) M_{k+1} \neq \emptyset$ (pokud M_{k+1} ještě má smysl) a tedy $M_1 \cup \ldots \cup M_{k+1}$ je souvislá podle věty 164.

3. Tím je věta už dokázána pro konečné posloupnosti (indukcí). Je-li $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$ nekonečná posloupnost, uvažme: Je-li $a \in M$, $b \in M$, je $a \in M_k$, $b \in M_l$ pro jistá k, l. Volím-li tedy $p = \mathrm{Max}\,(k, l)$, je patrno, že body a, b leží v souvislé množině $M_1 \cup \ldots \cup M_p \subset M$. Podle věty 165 je tedy M souvislá.

Věta 167. *Budiž $M \subset N \subset \overline{M}^P$. Budiž M souvislá. Potom je i N souvislá.*

Důkaz. Nechť N není souvislá, tedy $N = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A\overline{B} = B\overline{A} = \emptyset$ (uzávěr v P). Jest $M = MA \cup MB$, kde sčítanci jsou oddělení. Ježto M je souvislé, nemůže být současně $MA \neq \emptyset$, $MB \neq \emptyset$. Tedy na př. $MA = \emptyset$. Tedy $M \subset MB$, t. j. $M \subset B$, tedy $\overline{M} \subset \overline{B}$, tedy $N \subset \overline{B}$, tedy $NA \subset \overline{B}A = \emptyset$. Současně však $A \subset N$, tedy $A = NA = \emptyset$ — spor.

Poznámka 6. Důležitý je pojem komponenty, viz cvič. 1.

Cvičení

1. Budiž P metrický prostor; zvolme $a \in P$. Sjednocení všech souvislých množin $M \subset P$, obsahujících bod a, je největší souvislá množina $K_a \subset P$, obsahující a. Je-li $b \neq a$, $b \in P$, je buďto $K_a = K_b$ nebo $K_a K_b = \emptyset$. Tedy: každý neprázdný metrický prostor je disjunktním sjednocením takových maximálních souvislých částí, kterým se říká komponenty prostoru P. Prostor má jedinou komponentu tehdy a jen tehdy, je-li souvislý. Množina $M \subset P$ nemůže být souvislá, má-li neprázdný průnik aspoň se dvěma různými komponentami. Komponenty prostoru P jsou uzavřené v P (věta 167). Má-li P jen konečný počet komponent, jsou tyto komponenty také otevřené v P.

2. Prostor C z § 17 je souvislý. Obecněji: Budiž $M \subset C$ množina neprázdná, mající tuto vlastnost: je-li $x \in M$, $y \in M$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, je $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$;[107]) potom M je souvislá. Návod: Nechť A, B jsou oddělené, neprázdné, $A \cup B = M$. Zvolme $x \in A$, $y \in B$. Budiž β infimum oněch $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž $\alpha x + (1 - \alpha) y \in A$. Snadno zjistíte, že $\beta x + (1 - \beta) y$ je obsaženo v $\overline{A}$ i v $\overline{B}$ — spor.

§ 19. Spojitá zobrazení s kompaktním nebo souvislým oborem.

Definice 34. *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ); budiž $A \subset P$. Říkáme, že f je stejnoměrně spojité v A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí*

$$(x \in A, y \in A, \varrho(x, y) < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon . \tag{158}$$

Poznámka 1. Číslo δ závisí tedy (při daném f, A, ϱ, σ) jen na ε. Viz speciální případ v kap. IV, § 4. Zřejmé je: I. Je-li f stejnoměrně spojité v A, je spojité v A. II. Je-li $A_1 \subset A$ a je-li f stejnoměrně spojité v A, je f stejnoměrně spojité v A_1. III. Smysl pojmu „stejnoměrná spojitost" se nezmění, nahradím-li ϱ nebo σ metrikou „skoro stejnou". Ale smysl se může změnit, nahradím-li ϱ nebo σ ekvivalentní metrikou (není to tedy topologický pojem). Příklad: V $\mathbf{E}_1$ máme eukleidovskou metriku — pišme ji ϱ — a „redukovanou metriku" ϱ^* (viz § 4, příkl. 1). Vezměme identické zobrazení $\mathbf{E}_1$ na $\mathbf{E}_1$, definované rovnicí $f(x) = x$. Pojímám-li f jako zobrazení $(\mathbf{E}_1, \varrho)$ na $(\mathbf{E}_1, \varrho)$ nebo jako zobrazení $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$ na $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$, je f stejnoměrně spojité v $\mathbf{E}_1$ (stačí v (158) voliti $\delta = \varepsilon$). Ale pojímám-li f jako zobrazení $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$ na $(\mathbf{E}_1, \varrho)$, není f stejnoměrně spojité. Neboť pro velmi velká kladná x, y, je

[107]) $\alpha x + (1 - \alpha) y$ značí ovšem funkci, která v každém bodě $t \in \langle a, b \rangle$ má hodnotu $\alpha x(t) + (1 - \alpha) y(t)$.

$$\varrho^*(x, y) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}$$

velmi malé, ale $\varrho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y|$ může býti velmi velké.

Věta 168. *Zobrazení f z (P, ϱ) do (Q, σ) je stejnoměrně spojité v $A \subset P$ tehdy a jen tehdy, když platí*

$$(159) \quad \begin{cases} (x_n \in A, y_n \in A \text{ pro } n = 1, 2, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f(x_n), f(y_n)) = 0 . \end{cases}$$

Důkaz. 1. Budiž f stejnoměrně spojité v A. Budiž $x_n \in A$, $y_n \in A$, $\lim \varrho(x_n, y_n) = 0$. Budiž $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta > 0$ tak, že platí (158). Dále existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\varrho(x_n, y_n) < \delta$, a tedy (podle (158)) $\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Tedy $\lim \sigma(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

2. Nechť f není stejnoměrně spojité v A. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro žádné $\delta > 0$ neplatí implikace (158). T. j. k hodnotě $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existují $x_n \in A$, $y_n \in A$ tak, že sice jest $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, ale není $\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Tedy je $\lim \varrho(x_n, y_n) = 0$, ale není $\lim \sigma(f(x_n), f(y_n)) = 0$ — implikace (159) neplatí.

Věta 169. *Budiž f spojité zobrazení (P, ϱ) do (Q, σ). Budiž P kompaktní. Potom platí:*

1. *$f(P)$ je kompaktní.*
2. *f je stejnoměrně spojité v P.*
3. *Je-li f prosté, je též f_{-1} spojité (tedy f homeomorfní).*

Důkaz. 1. Nechť $y_n \in f(P)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Tedy existují $x_n \in P$ tak, že $y_n = f(x_n)$. Existuje konvergentní vybraná posloupnost: $\lim x_{k_n} = x \in P$. Ze spojitosti plyne $\lim y_{k_n} = \lim f(x_{k_n}) = f(x) \in f(P)$. Tedy je $f(P)$ kompaktní.

2. Nechť f není stejnoměrně spojité v P. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

[107a]) Místo A v (158) piš P.

pro žádné $\delta > 0$ neplatí (158).[107a]) T. j. ke každému $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existují $x_n \in P$, $y_n \in P$ tak, že sice je $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, ale současně

$$\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geqq \varepsilon\,. \tag{160}$$

Existuje konvergentní vybraná posloupnost: $\lim x_{k_n} = x \in P$; potom však také $\lim y_{k_n} = x$, ježto $\varrho(x, y_{k_n}) < \varrho(x, x_{k_n}) + \frac{1}{n}$. Tedy musí býti (věta 142) $\lim f(x_{k_n}) = \lim f(y_{k_n}) = f(x)$, tedy $\lim \sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) = \sigma(f(x), f(x)) = 0$. Ale to je ve sporu se (160). Tedy f je stejnoměrně spojité.

3. Budiž f prosté. Podle věty 145 stačí dokázat toto: Nechť N je uzavřené v P; potom $(f_{-1})_{-1}(N)$ (t. j. $f(N)$) je uzavřené v $f(P)$. Ale to je jasné: neboť N je kompaktní (pozn. 3 v § 16), tedy $f(N)$ je kompaktní (podle bodu 1), tedy $f(N)$ je absolutně uzavřené.

Pro reálné funkce odtud plyne:

Věta 170. *Budiž f reálná spojitá funkce v kompaktním oboru $P \neq \emptyset$ (t. j. zobrazení (P, ϱ) do $(\mathbf{E}_1^*, \varrho^*)$). Potom $f(P)$ obsahuje největší a nejmenší číslo (t. j. mezi hodnotami $f(x)$ $(x \in P)$ existuje největší a nejmenší). Je-li tedy f nadto konečná, je $f(P)$ (jakožto množina v $\mathbf{E}_1$ s eukleidovskou metrikou) omezená.*

Srovnej speciální případy ve větách 127, 128 v **DI**.

Důkaz. Položme $\alpha = \inf f(P)$, $\beta = \sup f(P)$. Zřejmě $\varrho^*(f(P), \alpha) = 0$, tedy $\alpha \in \overline{f(P)} = f(P)$ (uzavřenost této množiny plyne z vět 169, 155, 147). Podobně $\beta \in f(P)$.

Věta 171. *Budiž f zobrazení z (P, ϱ) do (Q, σ), spojité v souvislé množině $A \subset P$. Potom $f(A)$ je souvislá.*

Heslo: Spojitý obraz souvislé množiny je souvislý.

Důkaz. Nechť $f(A)$ není souvislé, tedy $f(A) = M \cup N$, kde M, N jsou disjunktní, neprázdné, uzavřené v $f(A)$. Jest

$$A = Af_{-1}(M) \cup Af_{-1}(N)\,. \tag{161}$$

Podle věty 145 (kde za P, Q vezmu A, $f(A)$) jsou oba sčítanci v (161) množiny uzavřené v A, a ovšem disjunktní a neprázdné. Tedy by A nebylo souvislé — spor.

Věta 171 spolu s pozn. 5 v § 18 obsahuje větu 130 z **DI**.

§ 20. Souvislé množiny v E_r. Hvězdovité a konvexní množiny v E_r.

Poznámka 1. Věta 171 spolu s větami § 18 nám dovoluje konstruovati souvislé množiny. Na př. každý neprázdný interval v E_1 je souvislá množina (§ 18, pozn. 5), tedy i jeho spojitý obraz je souvislý. Na př. v E_2 je kružnice $x^2 + y^2 = 1$ souvislá: Neboť je to spojitý obraz intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, vytvořený spojitým zobrazením $x = \cos t$, $y = \sin t$ (t. j. $f(t) = [\cos t, \sin t]$). Atd.

Speciálně: Buďte dány v E_r dva různé body a, b; definujme zobrazení f eukleidovského E_1 do E_r tak, že klademe

$$f(t) = (1 - t)\, a + tb \tag{162}$$

pro každé reálné t. Probíhá-li tedy t jakýkoliv neprázdný interval I v E_1, probíhá bod (162) souvislou množinu M v E_r. Vezmu-li $I = (-\infty, +\infty)$, říká se množině M přímka (určená body a, b); vezmu-li $I = \langle 0, +\infty)$ nebo $I = (0, +\infty)$, říká se množině M polopřímka (o počátečním bodu a, obsahující bod b); vezmu-li $I = \langle 0, 1 \rangle$, říká se množině M úsečka $\overline{ab}$ o krajních bodech a, b. To jsou všechno souvislé množiny.

Poznámka 2. Budiž $M \subset E_r$; budiž $x \in M$. Říkáme, že M je **hvězdovitá** vzhledem k bodu x, platí-li toto: Je-li y libovolný bod z M, $y \neq x$, potom celá úsečka $\overline{xy}$ leží v M. Tvrdím, že potom *M je souvislá.* Důkaz: Obsahuje-li M více než jeden bod, je M sjednocením souvislých množin: $M = \bigcup_{y \in M} \overline{xy}$, jejichž průnik obsahuje bod x, načež viz větu 164.

Poznámka 3. Je-li neprázdná $M \subset E_r$ hvězdovitá vzhledem ke každému svému bodu, říká se jí **konvexní** množina. To tedy značí: *Jest $M \neq \emptyset$, a je-li $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y$, potom $\overline{xy} \subset M$.* Podle pozn. 2 *je každá konvexní množina souvislá.*

---

[108]) Neboť je-li na př. $a \leq b$, je zřejmě $a = (1 - t)\, a + ta \leq x \leq (1 - t)\, b + tb = b$.

Poznámka 4. V $\mathbf{E}_1$ je jasno: leží-li dva body a, b v intervalu I, leží i každý bod $x = (1 - t)\,a + tb$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ v I.[108]) Odtud je jasno: Je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$ neprázdný interval v $\mathbf{E}_r$ a je-li $a \in I$, $b \in I$, je též

$$x = (1 - t)\,a + tb \in I$$

pro $0 \leqq t \leqq 1$. Neboť j-tá souřadnice $(1 - t)\,a_j + tb_j$ leží v i_j. Tedy celá úsečka $\overline{ab}$ leží v I (je-li $a \neq b$). Tedy *každý neprázdný interval v $\mathbf{E}_r$ je konvexní.*

Poznámka 5. Řetězcem otevřených intervalů v $\mathbf{E}_r$ nazvu konečnou posloupnost neprázdných otevřených intervalů $I_1, \ldots, I_p$ $(p \geqq 1)$ takovou, že $I_k I_{k+1} \neq \emptyset$ pro $1 \leqq k \leqq p - 1$. Potom je $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p$ podle věty 166 souvislá množina. Říkáme, že řetězec *spojuje* body a, b, jestliže $a \in I_1$, $b \in I_p$ (smí býti i $a = b$).

Věta 172. *Budiž $M \neq \emptyset$ otevřená v $\mathbf{E}_r$. Potom M je souvislá tehdy a jen tehdy, když kterékoliv body $a \in M$, $b \in M$ lze spojiti řetězcem otevřených intervalů, obsažených v M.*

Důkaz. 1. Nechť podmínka je splněna. Ježto sjednocení intervalů řetězce je souvislá množina, je M souvislá podle věty 165.

2. Nechť M je souvislá. Zvolme bod $a \in M$ a označme N množinu oněch bodů z M, jež lze spojiti s a řetězcem otevřených intervalů, ležících v M. Mám dokázati, že $N = M$.

Předně: $N \neq \emptyset$, neboť $a \in N$. Za druhé: N je otevřená v $\mathbf{E}_r$ (a tedy v M). Důkaz: budiž $b \in N$ a budiž $I_1, \ldots, I_p$ příslušný řetězec: $a \in I_1$, $b \in I_p$, $I_j \subset M$ $(1 \leqq j \leqq p)$. Zřejmě je $I_p \subset N$, takže b je vnitřním bodem množiny N. Za třetí: N je uzavřená v M. Důkaz: Budiž $b \in M\overline{N}$. Máme dokazat, že $b \in N$. Existuje otevřený interval I tak, že $b \in I \subset M$. Existuje bod $x \in N$ tak, že $x \in I$. Ježto $x \in N$, existuje řetězec $I_1, I_2, \ldots, I_m$ $(a \in I_1, x \in I_m, I_j \subset M)$. Potom však $I_1, I_2, \ldots, I_m, I$ je řetězec, spojující a s b. Tedy $b \in N$. Pišme nyní $M = N \cup (M \dot{-} N)$. Zde jsou N i $M \dot{-} N$ uzavřené v M, dále je $N \neq \emptyset$. Kdyby bylo také $M \dot{-} N \neq \emptyset$, nebyla by M souvislá. Tedy nutně $N = M$.

Poznámka 6. Budiž $M \neq \emptyset$ otevřená v $\mathbf{E}_r$. Potom M je souvislá tehdy a jen tehdy, když ke každým dvěma bodům $a \in M$, $b \in M$ existují v M body $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$ tak, že

(163) $\overline{x_1x_2} \cup \overline{x_2x_3} \cup \ldots \cup \overline{x_{n-1}x_n} \subset M$

(názorně: když kterékoliv dva body z M lze spojit lomenou čarou, ležící v M). Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, je M souvislá podle věty 165, ježto levá strana v (163) je souvislá podle věty 166 a pozn. 1. II. Je-li M souvislá, lze každé dva body $a \in M$, $b \in M$ spojit řetězcem otevřených intervalů $I_1, \ldots, I_{n-1}$, ležících v M. Položme $x_1 = a$, $x_n = b$ a zvolme body $x_i \in I_{i-1}I_i$ $(i = 2, \ldots, n-1)$. Ježto I_i je konvexní, je $\overline{x_ix_{i+1}} \subset I_i \subset M$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, takže platí (163).

Konvexní množiny v $\mathbf{E}_r$ jsou tak důležité, že je vhodno jim věnovat několik poznámek.

Poznámka 7. Budiž f zobrazení $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_s$ takto definované: Rovnice $y = f(x)$ nechť značí, že

$$y_j = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}x_k + a_j \quad (j = 1, \ldots, s), \tag{164}$$

kde a_{jk}, a_j jsou konstanty (reálné). Budiž $A \subset \mathbf{E}_r$ konvexní; potom $f(A)$ je také konvexní. Důkaz: Buďte $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$ body z $f(A)$ $(x' \in A, x'' \in A)$. Budiž $0 \leqq t \leqq 1$. Ze (164) ihned zjistíte, že $ty' + (1-t)\,y'' = f(tx' + (1-t)\,x'')$; ježto $tx' + (1-t)\,x'' \in A$, je $ty' + (1-t)\,y'' \in f(A)$.

Poznámka 8. Jsou-li $M_z \subset \mathbf{E}_r$ konvexní pro $z \in Z$, je $M = \bigcap_{z \in Z} M_z$ též konvexní nebo prázdná. Důkaz: Je-li $x \in M$, $y \in M$, $0 \leqq t \leqq 1$, leží bod $tx + (1-t)\,y$ v každém (konvexním!) M_z, tedy též v M.

Poznámka 9. Budiž $M \neq \emptyset$ libovolná množina v $\mathbf{E}_r$. Průnik všech konvexních množin, obsahujících M (na př. $\mathbf{E}_r$ je konvexní a obsahuje M), značme na chvíli $M^{(K)}$; je to nejmenší konvexní množina, obsahující M; název: *konvexní obal množiny* M. Zřejmě $M \subset N \Rightarrow M^{(K)} \subset N^{(K)}$.

Poznámka 10. Buďte $a_1, \ldots, a_r$, a čísla z $\mathbf{E}_1$, $|a_1| + \ldots + |a_r| > 0$. Potom jsou konvexní tyto množiny:

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(a_1x_1 + \ldots + a_rx_r + a \geqq 0) \quad \text{(uzavřený poloprostor)},$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(a_1x_1 + \ldots + a_rx_r + a > 0) \quad \text{(otevřený poloprostor)},$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(a_1x_1 + \ldots + a_rx_r + a = 0) \quad \text{(nadrovina)}.$$

Jestliže průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů je omezený (a tedy kompaktní) a má vnitřní bod, nazývá se *konvexním r-rozměrným polyedrem.*

Poznámka 11. Budiž $M = (a', \ldots, a^{(n)})$ konečná množina bodů z E_r $(n > 0)$. Potom $M^{(K)}$ je množina všech bodů tvaru

$$(165) \qquad a = t_1 a' + \ldots + t_n a^{(n)} \,,$$

kde $t_1 \geqq 0, \ldots, t_n \geqq 0, t_1 + \ldots + t_n = 1$.

Důkaz. I. Je-li vedle (165) dán další bod $b = v_1 a' + \ldots + v_n a^{(n)}$ $(v_j \geqq 0,\ v_1 + \ldots + v_n = 1)$, má bod $c = ua + (1 - u)\, b\, (0 \leqq u \leqq 1)$ opět obdobný tvar

$$(t_1 u + v_1(1 - u))\, a' + \ldots + (t_n u + v_n(1 - u))\, a^{(n)} \,,$$

kde koeficienty jsou nezáporné a mají součet 1. Tedy množina bodů (165) je konvexní.

II. Dokážeme za druhé, že každá konvexní množina, obsahující M, musí obsahovati všechny body tvaru (165). To je jasné pro $n = 1$, $n = 2$. Budiž tedy $n > 2$ a tvrzení budiž správné až do hodnoty $n - 1$ (místo n). Budiž $N \supset M = (a', \ldots, a^{(n)})$, budiž N konvexní. Budiž $t_j \geqq 0, t_1 + \ldots + t_n = 1$. Je-li $t_1 + \ldots + t_{n-1} = 0$, leží bod (165) v M, tedy v N. Je-li $t_1 + \ldots + t_{n-1} > 0$, položme $b = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{t_j}{t_1 + \ldots + t_{n-1}}\, a^{(j)}$; podle indukčního předpokladu je $b \in N$. Z konvexity množiny N a z toho, že $a^{(n)} \in M \subset N$, plyne, že také

$$(t_1 + \ldots + t_{n-1})\, b + t_n a^{(n)} = t_1 a' + \ldots + t_n a^{(n)} \in N \,;$$

tím je důkaz hotov. Ve spojení s I odtud plyne, že množina bodů (165) je skutečně nejmenší konvexní množina obsahující M.

Poznámka 12. Budiž $\emptyset \neq M \subset \mathsf{E}_r$. Potom $M^{(K)}$ je množina všech bodů $a = t_1 a' + \ldots + t_n a^{(n)}$, kde $n > 0$, $a^{(j)} \in M$, $t_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $t_1 + \ldots + t_n = 1$. Důkaz: Že tato množina je konvexní, plyne jako v pozn. 11, bod I. Ježto $M_1 = (a', \ldots, a^{(n)}) \subset M$ pro každou volbu bodů $a^{(j)} \in M$, je $M_1^{(K)} \subset M^{(K)}$ a tedy — podle pozn. 11 — obsahuje $M^{(K)}$ všechny body uvedeného tvaru.

Poznámka 13. Jestliže body $a', \ldots, a^{(r+1)}$ (ležící v E_r) neleží v žádné nadrovině (viz pozn. 10), nazývá se konvexní obal množiny

$(a', \ldots, a^{(r+1)})$ simplexem (nezvrhlým) v $\mathbf{E}_r$. (Pro $r = 1, 2, 3$ je to po řadě úsečka, trojúhelník, čtyřstěn — ovšem obecně ne pravidelný).

Cvičení

1. Poznámka 7 se dá takto obrátit: f budiž opět dáno rovnicemi (164). Je-li $B \subset \mathbf{E}_s$ konvexní, je též $f_{-1}(B) \subset \mathbf{E}_r$ konvexní (f nemusí být prosté; $f_{-1}(B)$ je bráti ve smyslu kap. I, konec § 3).

2. Je-li $\alpha \geq 1$, je množina oněch bodů $[y_1, \ldots, y_s] \in \mathbf{E}_s$, pro něž $|y_1|^\alpha + \ldots + |y_s|^\alpha \leq C$ (C kladná konstanta), konvexní. (Užijte vzorce (128) z kap. V.) $\alpha = 2$ dává „s-rozměrnou kouli“.

3. Pomocí cvič. 1 zobecněte cvič. 2.

§ 21. Stejnoměrná konvergence. Především zobecníme nepodstatně definici 9 z kap. IV, § 2. Tam šlo o reálné konečné funkce, zde půjde o zobrazení do libovolného metrického prostoru.

Definice 35. *Budiž M množina. Pro $n = 1, 2, \ldots$ budiž f_n zobrazení do metrického prostoru (Q, σ). Nechť pro každé $x \in M$ existuje limita posloupnosti*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in (Q, \sigma)\,. \tag{166}$$

Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$(x \in M, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0) \Rightarrow \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\,, \tag{167}$$

říkáme, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje **stejnoměrně** *v M.*[109])

Ale již v kap. IV, § 3, pozn. 2 jsme řekli, že tento pojem lze ještě dále zobecniti. V def. 35 bychom mohli místo $f_n(x)$ psáti $f(x, n)$; je docela přirozeno vyšetřovati případ, že n místo množiny $\mathbf{N}$ probíhá jiný metrický prostor R a že místo limitního přechodu $n \to \infty$ jde o limitní přechod $n \to b$, kde $b \in R$. Pišme y místo n (aby to vypadalo symetričtěji) a definujme:

Definice 36. *Budiž M množina; buďte (R, τ), (Q, σ) metrické prostory. Budiž f zobrazení z množiny $M \times R$ do Q. Budiž $B \subset R$, $b \in B'^R$. Nechť pro každé $x \in M$ existuje*

[109]) Ze (167) plyne, že všechna zobrazení f_n pro $n \geq n_0$ jsou definována v celé množině M. Ježto konečný počet členů nemá vliv na stejnoměrnou konvergenci, budu ve větách často předpokládat, že všechna f_n jsou definována v celé množině M.

(168) $$\lim_{\substack{y\to b\\ y\in B}} f(x, y) = F(x) \in (Q, \sigma)\,.$$[110]

Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

(169) $$(y \in B,\ 0 < \tau(y, b) < \delta,\ x \in M) \Rightarrow \sigma(f(x, y), F(x)) < \varepsilon\,,$$

říkáme, že

(170) $$\lim_{\substack{y\to b\\ y\in B}} f(x, y) = F(x) \quad \textit{stejnoměrně v } M.$$

Poznámka 1. I. Ze (169) implicite plyne, že f je definována v množině $M \times (B\Omega_R(b, \delta) \dot{-} (b))$. II. Definice 35 je speciálním případem definice 36: stačí, položíme-li v def. 36 $(R, \tau) = ({}^*\mathbf{E}_1, {}^*\varrho)$, $B = \mathbf{N}$, $b = \infty$, takže jde (píši-li $f_n(x)$ místo $f(x, n)$) o limitu $\lim\limits_{\substack{n\in \mathbf{N}\\ n\to\infty}} f_n(x)$, t. j. o limitu posloupnosti. III. Jestliže (170) platí stejnoměrně v M i stejnoměrně v N, platí (170) stejnoměrně v $M \cup N$. IV. Je-li $b \in B'$, $C \supset B$ a platí-li $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in C}} f(x, y) = F(x)$ stejnoměrně v M, platí i (170). To je ihned vidět ze (169). V případě posloupností tomu odpovídá fakt, že posloupnost vybraná z posloupnosti stejnoměrně konvergentní v M je stejnoměrně konvergentní v M. V. Obsahuje-li znak pro f vedle x, y (nebo f_n vedle n, x) ještě jiná písmena, třeba $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{1 + n^2x^2 + z^2}$, p. tom místo „stejnoměrně v M" říkáme „stejnoměrně pro $x \in M$" nebo podobně, abychom zdůraznili, že z hraje roli konstanty.

Poznámka 2. Nahradíme-li v definicích metriku σ metrikou „skoro stejnou", nezmění se zřejmě smysl pojmu „stejnoměrná konvergence". Avšak nahradíme-li metriku σ metrikou ekvivalentní, může se smysl tohoto pojmu změnit. Příklad: Je-li $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)x$, je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x = f(x)$ pro každé $x \in \mathbf{E}_1$. Vezmu-li za Q eukleidovský

---

[110]) Obraz bodu $[x, y]$ $(x \in M, y \in R)$ — pokud existuje — značím ovšem $f(x, y)$. V (168) (a podobně dále) jde o limitu $f(x, y)$ „při pevném x". T. j.: definuji-li (při daném x) zobrazení $f^{x,*}$ rovnicí $f^{x,*}(y) = f(x, y)$ (viz kap. I, § 8, pozn. 3), znamená (168), že $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in B}} f^{x,*}(y) = F(x)$.

$\mathbf{E}_1$, není konvergence stejnoměrná v $\mathbf{E}_1$, neboť $|f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{n}|x|$ nabývá — ať si zvolím n jakkoliv — libovolně velkých hodnot, je-li $|x|$ dosti velké. Vezmu-li však za Q prostor $(\mathbf{E}_1, \varrho^*)$, je konvergence stejnoměrná v $\mathbf{E}_1$, neboť $\varrho^*(f(x), f_n(x)) =$

$$= \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)|x|} \right| = \frac{\frac{1}{n}|x|}{(1 + |x|)\left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)|x|\right)},$$

tedy $\varrho^*(f(x), f_n(x)) \leqq \frac{1}{n} \leqq \varepsilon$, jakmile $n \geqq \frac{1}{\varepsilon}$, a to pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$. Stejnoměrnost konvergence není tedy „topologický pojem" vzhledem k prostoru (Q, σ). Zřejmé je také, že v definici 36 mohu i metriku τ nahraditi metrikou „skoro stejnou", aniž by se smysl změnil. Ale zde platí více, viz cvič. 3.

Poznámka 3. V def. 36 budiž (Q, σ) kartézským součinem $(Q_1, \sigma_1) \times \times (Q_2, \sigma_2)$, takže $f(x, y)$ je dvojice $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ a rovněž $F(x) = = [F_1(x), F_2(x)]$. Vezmu-li na př. $\sigma(a, b) = \text{Max}\,(\sigma_1(a_1, b_1), \sigma_2(a_2, b_2))$, je patrno ihned, že $f(x, y)$ konverguje stejnoměrně k $F(x)$ (v M) tehdy a jen tehdy, když konverguje stejnoměrně (v M) f_1 k F_1 a f_2 k F_2. Tak stejnoměrnou konvergenci komplexních funkcí ke konečné komplexní funkci mohu pojímati jako stejnoměrnou konvergenci reálných a imaginárních částí a pod.

Odvodíme nyní „bolzanovsko-cauchyovskou" podmínku pro stejnoměrnou konvergenci:

Věta 173. *Budiž M množina, (R, τ) metrický prostor, (Q, σ) úplný (to je podstatné!) metrický prostor. Budiž f zobrazení z $M \times R$ do Q. Budiž $B \subset R$, $b \in B'^R$. Potom existuje*

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) \in (Q, \sigma) \tag{171}$$

stejnoměrně v M tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(y_1 \in B,\ 0 < \tau(y_1, b) < \delta,\ y_2 \in B,\ 0 < \tau(y_2, b) < \delta,\ x \in M) \Rightarrow \Rightarrow \sigma(f(x, y_1), f(x, y_2)) < \varepsilon\,. \tag{172}$$

Poznámka 4. Pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ v M výpadá ovšem podmínka takto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$(173) \qquad (n \in \mathbf{N},\, n \geqq n_0,\, m \in \mathbf{N},\, m \geqq n_0,\, x \in M) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon\,.$$

Důkaz. [111]) I. Existuje-li limita (171) stejnoměrně v Q — označme ji $F(x)$ — zvolme k danému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby platilo (169), ale s hodnotou $\frac{1}{2}\varepsilon$ místo ε vpravo. Použitím (169) na body y_1, y_2, x, splňující premisu v (172), plyne ihned

$$\sigma(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leqq \sigma(f(x, y_1), F(x)) + \sigma(F(x), f(x, y_2)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

II. Je-li splněna podmínka věty 173, je pro každé $x \in M$ splněna podmínka věty 144, takže existuje[112]) $\lim\limits_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) = F(x)$. Budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo (172). Zvolme libovolné $x \in M$ a $y_1 \in B$ $(0 < \tau(y_1, b) < \delta)$. Máme dokázati, že $\sigma(f(x, y_1), F(x)) \leqq \varepsilon$. Pro každé $y_2 \in B$ $(0 < \tau(y_2, b) < \delta)$ máme podle (172) $\sigma(f(x, y_1), f(x, y_2)) < \varepsilon$. Ježto $\lim\limits_{\substack{y_2 \to b \\ y_2 \in B}} f(x, y_2) = F(x)$, je (podle pozn. 14 v § 9) $\sigma(f(x, y_1), F(x)) =$
$= \lim\limits_{\substack{y_2 \to b \\ y_2 \in B}} \sigma(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leqq \varepsilon$, což bylo dokázati.

Je-li také M metrickým prostorem, lze mluviti také o spojitosti nebo limitě zobrazení F. Zobecníme v tomto smyslu věty 56, 59, ale shrneme je v jednu větu. Přitom větu 56 budeme „lokalisovat", t. j. budeme mluvit i o spojitosti v jednotlivých bodech.

Věta 174. *Buďte (P, ϱ), (Q, σ), (R, τ) metrické prostory; budiž f zobrazení z $P \times R$ do Q. Budiž $B \subset R$, $b \in B'^R$, $M \subset P$ a nechť*

$$(174) \qquad \lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y) = F(x) \in (Q, \sigma) \quad \textit{stejnoměrně v } M.$$

Potom platí:

I. Budiž $a \in A \subset M$ a při každém $y \in B \dot{-} (b)$ budiž $f(x, y)$ spojité

[111]) Viz na př. důkaz věty 51.

[112]) Neboť (Q, σ) je úplný.

v bodě a vzhledem k A.[113]) *Potom F je spojité v a vzhledem k A. Speciálně: jsou-li uvedená zobrazení* $f^{*,y}$ (viz pozn. [113])) *spojitá v M, je F spojité v M.*

II. Budiž (Q, σ) úplný. Budiž $A \subset M$, $a \in A'^{\Gamma}$ a nechť pro každé $y \in B \dot{-} (b)$ existuje

(175) $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x, y) = G(y) \in (Q, \sigma)\,.$$ [114])

Potom

(176) $$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} G(y) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} F(x) \in (Q, \sigma)\,,$$

t. j.

(177) $$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} (\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x, y)) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} f(x, y)) \in (Q, \sigma)\,.$$

Krátce řečeno: existují-li obě „vnitřní" limity (174), (175), a přitom první limita stejnoměrně v A (bylo napsáno: stejnoměrně v M, ale pro M jsme měli jen podmínku $M \supset A$, tedy lze klásti $M = A$), existují v Q také obě opakované limity v (177) a jsou si rovny. Důkaz je podobný důkazům vět 56, 59.

Důkaz. I. $\sigma(F(x), F(a)) \leqq \sigma(F(x), f(x, y)) + \sigma(f(x, y), f(a, y)) + \sigma(f(a, y), F(a))$. Budiž $\varepsilon > 0$; vzhledem k stejnoměrné konvergenci existuje $y_0 \in B \dot{-} (b)$ tak, že pro všechna $x \in M$ (tedy i pro $x = a$) je $\sigma(F(x), f(x, y_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$, tedy $\sigma(F(x), F(a)) < \frac{2}{3}\varepsilon + \sigma(f(x, y_0), f(a, y_0))$. Vzhledem k spojitosti f^{*,y_0} existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in A$, $\varrho(x, a) < \delta$ je $\sigma(f(x, y_0), f(a, y_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$, tedy $\sigma(F(x), F(a)) < \varepsilon$, t. j. F je spojité v a vzhledem k A.

II. $\sigma(G(y), G(y')) \leqq \sigma(G(y), f(x, y)) + \sigma(f(x, y), f(x, y')) + \sigma(f(x, y'), G(y'))$. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že pro

(178) $$0 < \tau(y, b) < \delta,\ y \in B,\ 0 < \tau(y', b) < \delta,\ y' \in B$$

---

[113]) Jde o spojitost „při pevném y", t. j. o spojitost zobrazení $f^{*,y}$, definovaného rovnicí $f^{*,y}(x) = f(x, y)$.

[114]) Jinak psáno: $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f^{*,y}(x) = G(y)$.

a pro každé $x \in M$ je $\sigma(f(x, y), f(x, y')) < \frac{1}{3}\varepsilon$ (viz (172)), takže

$$\sigma(G(y), G(y')) \leqq \tfrac{1}{3}\varepsilon + \sigma(G(y), f(x, y)) + \sigma(G(y'), f(x, y')) . \tag{179}$$

Zvolme dva takové body y, y'. Podle (175) lze voliti $x \in A$, $x \neq a$ (tedy $x \in M$) tak, že poslední dva členy v (179) jsou menší než $\frac{2}{3}\varepsilon$. Tedy: platí-li (178), je $\sigma(G(y), G(y')) < \varepsilon$. Tedy (viz větu 144) existuje

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} G(y) = \gamma \in (Q, \sigma) . \tag{180}$$

Budiž opět $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (180) a k stejnoměrné konvergenci v (174) existuje y_0 ($y_0 \neq b$, $y_0 \in B$) tak, že $\sigma(G(y_0), \gamma) < \frac{1}{3}\varepsilon$ a že pro všechna $x \in M$ je $\sigma(f(x, y_0), F(x)) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Odtud pro všechna $x \in M$ plyne $\sigma(\gamma, F(x)) < \sigma(G(y_0), f(x, y_0)) + \frac{2}{3}\varepsilon$. Podle (175) existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \neq a$, $x \in A$, $\varrho(x, a) < \delta$ je $\sigma(G(y_0), f(x, y_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$, tedy $\sigma(\gamma, F(x)) < \varepsilon$; tedy $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} F(x) = \gamma$.

Příklad 1. Mějme dvojnou posloupnost konečných komplexních čísel $a_{n,m}$ ($n, m = 1, 2, \ldots$). Nechť pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje konečná limita

$$\lim_{m \to \infty} a_{n,m} = b_n \tag{181}$$

a nechť pro každé $m \in \mathbf{N}$ existuje konečná limita

$$\lim_{n \to \infty} a_{n,m} = c_m , \tag{182}$$

přitom nechť jedna z obou limit je stejnoměrná v $\mathbf{N}$ (ovšem ve smyslu metriky $|x - y|$; t. j. na př.: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že

$$(m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}, n \geqq n_0) \Rightarrow |c_m - a_{n,m}| < \varepsilon) .$$

Potom existují také tyto konečné limity:

$$\lim_{m \to \infty} (\lim_{n \to \infty} a_{n,m}) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{m \to \infty} a_{n,m}) . \tag{183}$$

Důkaz z věty 174, II: pojímám posloupnost jako zobrazení $(\mathbf{N}, {}^*\varrho) \times$ $\times (\mathbf{N}, {}^*\varrho)$ do prostoru $(\mathbf{K}_1, \sigma)$, kde $\sigma(x, y) = |x - y|$.

Poznamenejme ještě toto: Předpokládejme, že existují konečné limity (181), (182); potom můžeme tvrdit, že platí rovnice (183) (vše s konečnými limitami), jestliže buďto jedna z limit (181), (182) je stejnoměrná, nebo jestliže existuje „dvojná limita" $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{n,m}$ (viz § 11, příkl. 2). Podobný vztah platí mezi obecnými větami 146, 174. (Symbol $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}}$ znamená ovšem totéž jako symbol $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A \dot{-} (a)}}$).

Poznámka 5. Zavedeme ještě tento pojem. Budiž f zobrazení z $(P, \varrho) \times (R, \tau)$ do (Q, σ); budiž $M \subset P$, $B \subset R$, $b \in B'^R$. Nechť pro každé $x \in M$ existuje

$$\lim_{\substack{y\to b \\ y\in B}} f(x, y) = F(x) \in (Q, \sigma) . \tag{184}$$

Budeme říkati, že tato konvergence je **stejnoměrná uvnitř** M, jestliže je stejnoměrná v každé kompaktní množině $K \subset M$. Tento pojem je zvlášť důležitý, jestliže (P, ϱ) je eukleidovský $\mathbf{E}_r$[115]) a M je otevřená v $\mathbf{E}_r$. Potom totiž platí věta: *Jestliže pro každé $y \in B \dot{-} (b)$ je zobrazení $f(x, y)$* (při pevném y, t. j. zobrazení $f^{*,y}$) *spojité v M a je-li konvergence v* (184) *stejnoměrná uvnitř M, je F spojité v M.*

Důkaz. Budiž $a \in M$; máme dokázati, že F je spojité v bodě a vzhledem k M (neboli vzhledem k $\mathbf{E}_r$, ježto a je vnitřní bod). Existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega(a, 2\delta) \subset M$ (míní se ovšem koule v $\mathbf{E}_r$, uzávěry v $\mathbf{E}_r$ atd.). Potom zřejmě uzávěr $\overline{\Omega(a, \delta)} = K$ leží v M. Ale K je kompaktní,[116]) tedy (podle věty 174) F je spojité v K (neboť konvergence v (184) je stejnoměrná v K). Ale a je vnitřním bodem K; tedy F je spojité v bodě a vzhledem k $\mathbf{E}_r$.

Čtenář asi poznal, že k provedení důkazu není třeba předpokládati, že $M \subset \mathbf{E}_r$ a že M je otevřená v $\mathbf{E}_r$: stačí předpokládati, že každý bod $a \in M$ je vnitřním bodem (vzhledem k prostoru M) jisté kompaktní množiny, obsažené v M.

Poznámka 6. Nechť opět (ve smyslu pozn. 5) (P, ϱ) je eukleidovský $\mathbf{E}_r$ a M je otevřená v $\mathbf{E}_r$. Potom platí: *Existuje-li ke každému bodu $a \in M$ okolí Ω_a*[117]) *tak, že* (184) *platí stejnoměrně uvnitř Ω_a, potom*

[115]) Místo eukleidovské metriky lze ovšem vzíti metriku „skoro stejnou".
[116]) T. j. uzavřená a omezená.
[117]) T. j. množina otevřená v $\mathbf{E}_r$, obsahující a.

(184) *platí stejnoměrně uvnitř* M.[118]) Důkaz: Budiž K kompaktní, $K \subset M$. Každému bodu $a \in K$ lze zřejmě přiřaditi okolí N_a tak, že N_a je omezené, $\overline{N}_a \subset \Omega_a$ (uzávěr v E_r). Tedy $\overline{N}_a$ je kompaktní a tedy (184) platí stejnoměrně v $\overline{N}_a$ a tedy v N_a. Jest $K \subset \bigcup_{a \in K} N_a$; podle Borelovy věty existuje tedy konečný počet bodů $a_1, \ldots, a_n$ $(a_j \in K)$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} N_{a_j}$. Konvergence v (184) je stejnoměrná v každé z konečného počtu množin N_{a_j} $(j = 1, \ldots, n)$, tedy (zřejmě) i v jejich sjednocení (viz pozn. 1, III), tedy i v množině K.

Cvičení

1. Ve větách 57, 58, 61, 62 (kap. IV) můžete vynechati předpoklad, že interval (a, b) je omezený, nahradíte-li všude slova „stejnoměrně konvergentní v (a, b)" slovy „stejnoměrně konvergentní uvnitř (a, b)".

2. Dokažte: (170) platí tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou posloupnost $y_1, y_2, \ldots$ s vlastnostmi: $y_n \in B$, $y_n \neq b$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ je posloupnost $f(x, y_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stejnoměrně konvergentní v M; limita této posloupnosti je pak nutně funkce $F(x)$ z (170). Srovnej větu 143.

3. Dokažte (nejsnáze z cvič. 2): Smysl definice 36 se nezmění, nahradíme-li metriku τ metrikou ekvivalentní.

§ 22. Rozšíření oboru spojité funkce.

Věta 175. *Budiž (P, ϱ) metrický prostor, $\emptyset \neq M \subset (P, \varrho)$, M uzavřená v P. Budiž f reálná funkce (ne nutně konečná), spojitá v M. Potom existuje reálná funkce F v oboru P s těmito vlastnostmi:*

1. *$F(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$.*
2. *F je spojitá v P.*
3. *F je konečná v $P \dot{-} M$.*
4. *Je-li $B = \inf\limits_{x \in M} f(x) < +\infty$, $A = \sup\limits_{x \in M} f(x) > -\infty$,[119]) je $\sup\limits_{x \in P} F(x) = \sup\limits_{x \in M} f(x)$, $\inf\limits_{x \in P} F(x) = \inf\limits_{x \in M} f(x)$.*

[118]) Přechod z „lokální" vlastnosti k vlastnosti „ve velkém".
[119]) To znamená: není-li ani $f(x) = +\infty$ pro všechna $x \in M$ ani $f(x) = -\infty$ pro všechna $x \in M$.

Funkce F dává tedy „spojité rozšíření“ spojité funkce f z oboru M na obor P, při čemž v $P \dot{-} M$ je F konečná (tedy speciálně: je-li f konečná v M, je F konečná v P). A konečně: nehledíme-li k dvěma jednoduchým případům z pozn. [119]), lze F podle 4. volit ještě tak, že nenabývá žádných „zbytečně velkých“ a „zbytečně malých“ hodnot, t. j. tak, že je stále $B \leqq F(x) \leqq A$. Důkazu této věty předešleme tři věty pomocné.[120])

1. pomocná věta. *Buďte A, B disjunktní množiny uzavřené v (P, ϱ). Buďte $a \leqq b$ konečná reálná čísla. Potom existuje reálná funkce f, spojitá v P a mající tyto tři vlastnosti:*

$$x \in A \Rightarrow f(x) = a\,;\; x \in B \Rightarrow f(x) = b\,;\; x \in P \Rightarrow a \leqq f(x) \leqq b\,.$$

Důkaz. Je-li $A = \emptyset$, má konstanta b tyto vlastnosti; je-li $B = \emptyset$, má konstanta a tyto vlastnosti. Je-li $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, je

$$F(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)}$$ [121])

spojitá v P, rovná 0 (resp. 1) pro $x \in A$ (resp. $x \in B$), vždy je $0 \leqq \leqq F(x) \leqq 1$. Tedy funkce $f(x) = (b - a)\,F(x) + a$ má žádané vlastnosti.

2. pomocná věta. *Budiž $M \neq \emptyset$ uzavřená v (P, ϱ). Budiž μ konečné kladné číslo. Budiž f reálná funkce spojitá v M, $|f(x)| \leqq \mu$ pro všechna $x \in M$. Potom existují reálné funkce g, h s těmito vlastnostmi:*

1. *g je spojitá v P a pro všechna $x \in P$ je $|g(x)| \leqq \frac{1}{3}\mu$.*

2. *h je funkce v oboru M, definovaná rovnicí*

(185) $$h(x) = f(x) - g(x) \quad \text{pro} \quad x \in M\,,$$

(tedy spojitá v M) a pro všechna $x \in M$ je $|h(x)| \leqq \frac{2}{3}\mu$.

Důkaz. Budiž $A = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \leqq -\frac{1}{3}\mu)$, $B = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \geqq \geqq \frac{1}{3}\mu)$. Množiny A, B jsou disjunktní a uzavřené v M (věta 145 a pozn. 16 v § 9)), tedy v P. Podle 1. pomocné věty existuje g spojitá v P tak, že

[120]) Podaný důkaz pochází v podstatě od geniálního sovětského topologa Urysona.

[121]) Pro každé x je buďto x non $\in A$ a tedy (A je uzavřené) $\varrho(x, A) > 0$ nebo x non $\in B$ a tedy $\varrho(x, B) > 0$; jmenovatel je tedy vždy kladný.

$$x \in A \Rightarrow g(x) = -\tfrac{1}{3}\mu\,, \quad x \in B \Rightarrow g(x) = \tfrac{1}{3}\mu\,,$$
$$x \in P \Rightarrow -\tfrac{1}{3}\mu \leqq g(x) \leqq \tfrac{1}{3}\mu\,.$$

Zřejmě g má žádané vlastnosti, a funkce h, definovaná rovnicí (185), rovněž (neboť na př. pro $x \in A$ je $-\mu \leqq f(x) \leqq -\frac{1}{3}\mu = g(x)$, pro $x \in M \dot{-} (A \cup B)$ je $|f(x)| \leqq \frac{1}{3}\mu$, $|g(x)| \leqq \frac{1}{3}\mu$).

3. pomocná věta.[122]) *Budiž $M \neq \emptyset$ uzavřená v (P, ϱ). Budiž μ konečné kladné číslo. Budiž f reálná funkce spojitá v M, $|f(x)| \leqq \mu$ pro všechna $x \in M$. Potom existuje reálná funkce F v oboru P s těmito vlastnostmi:*

F je spojitá v P; pro všechna $x \in P$ je $|F(x)| \leqq \mu$; pro všechna $x \in M$ je $F(x) = f(x)$.

Důkaz. Podle 2. pomocné věty existuje posloupnost reálných funkcí $f_0, f_1, f_2, \ldots$ spojitých v M a posloupnost reálných funkcí $g_0, g_1, g_2, \ldots$ spojitých v P s těmito vlastnostmi:

$$(186) \qquad \begin{cases} f_0 = f\,;\ f_{n+1} = f_n - g_n \text{ v } M \ (n = 0, 1, \ldots)\,; \\ |f_n(x)| \leqq (\frac{2}{3})^n \mu \quad \text{pro } x \in M\,; \\ |g_n(x)| \leqq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n \mu \quad \text{pro } x \in P\,. \end{cases}$$

To je ihned vidět úplnou indukcí: mám-li již f_n (kladli jsme $f_0 = f$), položím v 2. pomocné větě f_n, $(\frac{2}{3})^n \mu$ místo f, μ, a dostanu funkce g, h, jež označím g_n, f_{n+1}.

Položme

$$(187) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,;$$

to je funkce spojitá v P, ježto řada vpravo konverguje stejnoměrně v P;[123]) jest pak

$$(187a) \qquad |F(x)| \leqq \tfrac{1}{3}\mu \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^n = \mu\,.$$

Pro $x \in M$ je pak podle (186) $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$, tedy $g_0(x) +$

[122]) Tato pomocná věta tvoří jádro důkazu. Co následuje po ní, jsou jen početní úpravy.

[123]) Stejnoměrná konvergence plyne z věty 54 (řada v (187a) je konvergentní majorantou); spojitost funkce F plyne pak z věty 174, I (kde $B = \mathbf{N}$; místo $f(x, y)$ v (174) pišme $s_n(x)$, což značí n-tý částečný součet řady (187)).

$+ \ldots + g_n(x) = f_0(x) - f_{n+1}(x)$, tedy pro $n \to \infty$ (ježto $f_{n+1}(x)$ má limitu 0 podle (186))

$$F(x) = f_0(x) = f(x)\,.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

Důkaz věty 175. Znakem φ označme známé nám spojité zobrazení $(\mathsf{E}_1^*, \varrho^*)$ na eukleidovský interval $\langle -1, 1\rangle$:

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{pro } x \in \mathsf{E}_1\,,\ \varphi(+\infty) = 1\,,\ \varphi(-\infty) = -1$$

(viz § 4, příkl. 1.); ψ budiž zobrazení inversní k φ. Nechť f, M, P vyhovují podmínkám věty 175. Položme $f_1(x) = \varphi(f(x))$ pro $x \in M$, takže f_1 je spojitá v M, $|f_1(x)| \leqq 1$ pro $x \in M$. Podle 3. pomocné věty ($\mu = 1$) existuje reálná funkce F_1 v oboru P s těmito vlastnostmi:

α) F_1 je spojitá v P;
β) $x \in P \Rightarrow |F_1(x)| \leqq 1$;
γ) $x \in M \Rightarrow F_1(x) = f_1(x) = \varphi(f(x))$.

Položme $F_2(x) = \dfrac{1}{1 + \varrho(x, M)} F_1(x)$. Jest $\varrho(x, M) = 0$ pro $x \in M$, $\varrho(x, M) > 0$ pro $x \in P \dot{-} M$. Tedy F_2 má opět vlastnosti α, β, γ, ale mimo to ještě vlastnost δ): $x \in P \dot{-} M \Rightarrow |F_2(x)| < 1$. Je nyní zřejmo, že funkce $F_3(x) = \psi(F_2(x))$ (pro $x \in P$) má již vlastnosti 1., 2., 3. z věty 175. Jestliže konečně jest $A = \sup\limits_{x \in M} f(x) > -\infty$, $B = \inf\limits_{x \in M} f(x) < +\infty$, potom položme

(188) $\qquad F_4(x) = \text{Min}\,(F_3(x), A)$, $F(x) = \text{Max}\,(F_4(x), B)$[124])

pro každé $x \in P$. Pro $x \in M$ je zřejmě $f(x) = F_3(x) = F_4(x) = F(x)$; pro $x \in P \dot{-} M$ je $-\infty < F_3(x) < +\infty$, a tedy zřejmě $-\infty < F_4(x) < +\infty$ a konečně $-\infty < F(x) < +\infty$. Tedy F má vlastnosti 1., 2., 3. z věty a podle (188) též vlastnost 4.

Je-li nyní A libovolná (ne nutně uzavřená) a chci-li rozšířiti funkci spojitou v A spojitě na celý prostor (P, ϱ), stačí provésti rozšíření na obor $\overline{A}^P$ (neboť rozšíření z $\overline{A}$ na P je možné podle věty 175). Kdy je to možné? To zodpovídá věta 176, kde obecněji jde o rozšíření

[124]) F vzniká z F_3 takto: Každou hodnotu $F_3(x) > A$ nahradím hodnotou A a každou hodnotu $F_3(x) < B$ nahradím hodnotou B.

z oboru A na obor B takový, že A je husté v B (to nastane speciálně pro $B = \overline{A}$) a místo reálné funkce jde obecněji o zobrazení do libovolného metrického prostoru.

Věta 176. *Budiž A hustá v B (metrika ϱ). Budiž f zobrazení A do (Q, σ), spojité v A. Ptáme se, zda existuje zobrazení F množiny B do (Q, σ) tak, že platí:*

1. *Pro $x \in A$ je $F(x) = f(x)$.*
2. *F je spojité v B.*

Odpověď: Takové F existuje tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé $a \in B \dot{-} A$ existuje

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \in (Q, \sigma)\,, \tag{189}$$

načež existuje jen jedno takové F.

Důkaz. Uvažme, že každý bod z $B \dot{-} A$ je nutně hromadným bodem A. Existuje-li takové F, potom pro $a \in B \dot{-} A$ musí být (spojitost!)

$$F(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} F(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)\,,$$

t. j. F je jednoznačně určeno hodnotami $f(x)$ a (189) existuje. Nechť naopak (189) existuje pro každé $a \in B \dot{-} A$. Položme $F(a)$ rovno limitě (189) pro $a \in B \dot{-} A$, $F(a) = f(a)$ pro $a \in A$. Jde ještě o to, dokázati, že F je spojité v B. Budiž tedy $a \in B$ a budiž $\varepsilon > 0$. Tvrdím, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ \varrho(x, a) < \delta) \Rightarrow \sigma(F(a),\ f(x)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{190}$$

Neboť je-li $a \in A$, tedy $F(a) = f(a)$, plyne to ze spojitosti f; je-li $a \in B \dot{-} A$, plyne to z toho, že $F(a)$ je limita (189).

Tvrdím nyní, že

$$(y \in B,\ \varrho(y, a) < \tfrac{1}{2}\delta) \Rightarrow \sigma(F(a),\ F(y)) < \varepsilon \tag{191}$$

(tím bude důkaz hotov). Je-li $y \in A$, plyne (191) z (190). Je-li však $y \in B \dot{-} A$, $\varrho(a, y) < \frac{1}{2}\delta$, je $F(y) = \lim\limits_{\substack{x \to y \\ x \in A}} f(x)$, takže existuje $x \in A$ tak, že

$$\varrho(x, y) < \tfrac{1}{2}\delta\,,\ \sigma(f(x),\ F(y)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{192}$$

Tedy $\varrho(a, x) < \delta$, takže podle (192), (190) je vskutku

$$\sigma(F(a), F(y)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Pro případ, že $A \subset \mathbf{E}_r$, $B = \overline{A}$ (uzávěr v $\mathbf{E}_r$), odvodíme ještě jinou podmínku:

Věta 177. *Budiž f zobrazení množiny $A \subset \mathbf{E}_r$ do úplného prostoru (Q, σ); budiž f spojité v A. Ptejme se, kdy existuje spojité zobrazení F množiny $\overline{A}$ (uzávěr v $\mathbf{E}_r$) do (Q, σ) tak, aby pro $x \in A$ bylo $F(x) = f(x)$. Odpověď: Tehdy a jen tehdy, je-li f stejnoměrně spojité v každé omezené množině $M \subset A$.*

Důkaz. I. Nechť takové F existuje a nechť $M \subset A$ je omezená, takže $\overline{M}$ jest omezená, tedy kompaktní. Tedy (věta 169) F je stejnoměrně spojité v $\overline{M}$ a tedy i v M.

II. Nechť naopak podmínka je splněna. A je husté v $B = \overline{A}$. Budiž $a \in B \dot{-} A$. Budiž $x_n \in A$ (tedy $x_n \neq a$), $\lim x_n = a$. Všechny body x_n od jistého indexu n_1 počínajíc leží v omezené množině $M = A\Omega_{\mathbf{E}_r}(a, 1)$. Ale v M je f podle předpokladu stejnoměrně spojitá. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(193) \qquad (x' \in M,\ x'' \in M,\ \varrho(x', x'') < \delta) \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon .$$

Ale $\lim x_n = a$; tedy existuje $n_0 > n_1$ tak, že $n > n_0 \Rightarrow \varrho(x_n, a) < \tfrac{1}{2}\delta$; podle (193) tedy platí

$$(194) \qquad (n > n_0,\ m > n_0) \Rightarrow \sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon .$$

Tedy $f(x_1), f(x_2), \ldots$ je cauchyovská a tedy má limitu $\lim f(x_n) \in (Q, \sigma)$. ($Q$ je úplné!)

T. j.: Je-li $x_n \neq a$, $x_n \in A$, $\lim x_n = a$, existuje $\lim f(x_n) \in (Q, \sigma)$. Tedy (věta 143) existuje limita (189). Tedy žádané zobrazení F existuje podle věty 176.

§ 23. Polynomy v r proměnných.

Buďte $n_1, n_2, \ldots, n_r$ celá nezáporná čísla. Výraz[125])

$$(195) \qquad \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_r=0}^{n_r} c_{j_1 \ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_r^{j_r} = P(x_1, \ldots, x_r) = P(x) ,$$

[125]) Píši opět $x = [x_1, \ldots, x_r]$ a pod.

kde $c_{j_1 \dots j_r}$ jsou komplexní (konečná) čísla, nazýváme **polynomem** nebo **mnohočlenem** (v proměnných $x_1, \dots, x_r$);[126]) říkáme, že je stupně nejvýše n_1 v proměnné x_1, stupně nejvýše n_2 v proměnné x_2 atd. Budeme studovati polynom P jako funkci komplexních čísel $x_1, \dots, x_r$.

Vedle „stupně" v jednotlivých proměnných mluvíme také o „stupni" souhrnně. O členu

$$c_{j_1 \dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_r^{j_r}, \tag{196}$$

kde $c_{j_1 \dots j_r} \neq 0$, říkáme, že je stupně $j_1 + j_2 + \dots + j_r$; je-li $c_{j_1 \dots j_r} = 0$ nepřipisujeme mu žádný stupeň. O polynomu P říkáme, že je stupně n-tého, obsahuje-li aspoň jeden člen stupně n-tého, ale žádný člen stupně vyššího. Slovy „polynom stupně nejvýše n-tého" označujeme polynom, který je buďto „nulový" (všechny koeficienty rovny nule) nebo má stupeň 0 (konstanta různá od nuly) nebo 1, ..., nebo n. Polynom (195) nazýváme homogenním n-tého stupně nebo **formou** n-tého stupně, jestliže všichni členové s koeficientem $c_{j_1 \dots j_r} \neq 0$ mají stupeň n, t. j. $j_1 + \dots + j_r = n$.[127]) Příklady: Jde o polynom ve třech proměnných x, y, z:

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dz^3 + ex^2y + fz + g$$

je polynom nejvýše 4. stupně; je-li aspoň jedno z čísel a, b, c různé od nuly, je to polynom 4. stupně; je-li $a = b = c = 0$, je to polynom nejvýše 3. stupně; je-li $d = e = f = g = 0$, je to forma 4. stupně (zde náhodou nezávislá na třetí proměnné).

Z kap. V, § 7, pozn. 5 víme toto: Jestliže polynom

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

se rovná nule pro $n + 1$ různých komplexních hodnot x, je nutně $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Zobecníme tuto větu na polynomy v r proměnných. Buďte $n_1, \dots, n_r$ celá nezáporná čísla. Zvolme libovolně

[126]) Členy, u nichž příslušný koeficient $c_{j_1 \dots j_r}$ je roven nule, často vynecháváme.

[127]) Není tedy vyloučen případ nulového polynomu; polynom 0 jest formou 4. stupně, ac podle naší terminologie není polynomem 4. stupně; jest ovšem polynomem nejvýše 4. stupně. Tato zdánlivá nedůslednost terminologie je účelná v praxi.

r množin $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$, přičemž $\mathfrak{H}_j$ je množina $n_j + 1$ komplexních čísel (navzájem různých):

(197) $\quad \mathfrak{H}_1 = (\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n_1)}), \ldots, \mathfrak{H}_r = (\xi_r^{(0)}, \xi_r^{(1)}, \ldots, \xi_r^{(n_r)})$.

Budiž $\mathfrak{H}$ množina všech bodů $\eta = [\eta_1, \ldots, \eta_r]$, kde η_1 je zvoleno libovolně v $\mathfrak{H}_1, \ldots, \eta_r$ je zvoleno libovolně v $\mathfrak{H}_r$; tedy má $\mathfrak{H}$ celkem $q = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_r + 1)$ prvků.

Věta 178. *Nechť polynom* (195) *je roven nule v každém bodě množiny* $\mathfrak{H}$, *t. j.*

$$\eta \in \mathfrak{H} \Rightarrow P(\eta) = 0 . \tag{198}$$

Potom všechny koeficienty $c_{j_1 \ldots j_r}$ *jsou rovny nule.*

Důkaz. Pro $r = 1$ je věta správná podle kap. V, § 7, pozn. 5. Budiž tedy $r > 1$ a předpokládejme, že věta je správná s hodnotou $r - 1$ místo r. Srovnejme polynom P podle mocnin x_r:

$$P(x) = x_r^{n_r} Q_{n_r}(x_1, \ldots, x_{r-1}) + x_r^{n_r - 1} Q_{n_r - 1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) + \ldots + \\ + Q_0(x_1, \ldots, x_{r-1}) ;$$

Q_k je polynom stupně nejvýše n_1 v $x_1, \ldots, n_{r-1}$ v x_{r-1}. Zvolme libovolně $\eta_1 \in \mathfrak{H}_1, \ldots, \eta_{r-1} \in \mathfrak{H}_{r-1}$ a sestrojme polynom (v proměnné x_r)

$$P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{r-1}, x_r) = x_r^{n_r} Q_{n_r}(\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}) + \ldots + Q_0(\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}) .$$

Podle předpokladu je tento polynom roven nule pro $x_r = \xi_r^{(h)}$ ($h = 0, 1, \ldots, n_r$), t. j. pro $n_r + 1$ různých hodnot x_r. Podle kap. V, § 7, pozn. 5 jsou tedy jeho koeficienty rovny nule, t. j.

$$Q_k(\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}) = 0$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n_r$, a to pro každý bod $[\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}]$, kde $\eta_1 \in \mathfrak{H}_1, \ldots, \eta_{r-1} \in \mathfrak{H}_{r-1}$. Podle indukčního předpokladu jsou tedy všechny koeficienty každého Q_k rovny nule — ale to jsou právě všechny koeficienty $c_{j_1 \ldots j_r}$.

Poznámka 1. Zvolíte-li místo konečných množin $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$ jakékoliv *nekonečné* množiny komplexních čísel $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ a označíte-li $\mathfrak{K}$ množinu všech bodů $\eta = [\eta_1, \ldots, \eta_r]$, kde $\eta_1 \in \mathfrak{K}_1, \ldots, \eta_r \in \mathfrak{K}_r$, dostáváte ihned tento výsledek: *Je-li P polynom a platí-li*

$$\eta \in \mathfrak{K} \Rightarrow P(\eta) = 0 ,$$

jsou všechny koeficienty P rovny nule. (Důkaz: Má-li P stupeň nejvýše n_j v x_j $(j = 1, \dots, r)$, stačí za $\mathfrak{H}_j$ vzíti jakoukoliv část $\mathfrak{K}_j$ o $n_j + 1$ prvcích a užíti věty 178.)

Speciálně: Jestliže pro dva polynomy P, Q platí $P(\eta) = Q(\eta)$ pro všechna $\eta \in \mathfrak{K}$ (na př. pro všechna $\eta \in \mathbf{E}_r$ — ale $\mathfrak{K}$ může býti mnohem „menší" množina), mají P, Q stejné koeficienty.[128]) Je tedy jedno, pojímám-li rovnost $P = Q$ dvou polynomů ve smyslu algebry (rovnost koeficientů) či ve smyslu nauky o funkcích (rovnost $P(x_1, \dots, x_r) = Q(x_1, \dots, x_r)$ pro všechna $x_1, \dots, x_r$).[129])

Poznámka 2. Zobecníme nyní konstrukči Lagrangeova interpolačního polynomu (viz kap. V, § 7, příklad 1). Buďte dána $n_1, \dots, n_r$, $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r, \mathfrak{H}$ jako dříve. Vezměme libovolný bod z $\mathfrak{H}$:

$$\zeta = [\xi_1^{(k_1)}, \dots, \xi_r^{(k_r)}] \in \mathfrak{H} \tag{199}$$

a sestrojme polynom

$$R_{k_1, \dots, k_r}(x_1, \dots, x_r) = \prod_{\substack{j_1 = 0 \\ j_1 \neq k_1}}^{n_1} \frac{x_1 - \xi_1^{(j_1)}}{\xi_1^{(k_1)} - \xi_1^{(j_1)}} \cdots \prod_{\substack{j_r = 0 \\ j_r \neq k_r}}^{n_r} \frac{x_r - \xi_r^{(j_r)}}{\xi_r^{(k_r)} - \xi_r^{(j_r)}} . \tag{200}$$

Je zřejmo, že tento polynom — který budeme kratčeji značiti $R_\zeta(x)$ — má tyto vlastnosti:

1. Je stupně n_1 v $x_1, \dots$, stupně n_r v x_r.

2. V bodě ζ má hodnotu 1, ve všech ostatních bodech z $\mathfrak{H}$ má hodnotu 0.

Věta 179. *Nechť $n_1, \dots, n_r$ jsou celá nezáporná čísla. Nechť $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}$, R_ζ mají význam popsaný v tomto paragrafu. Každému bodu $\zeta \in \mathfrak{H}$ přiřaďme určité komplexní číslo $f(\zeta)$. Potom existuje jeden a jen jeden polynom $Q(x) = Q(x_1, \dots, x_r)$ s těmito dvěma vlastnostmi:*

I. Q je stupně nejvýše n_1 v $x_1, \dots$, nejvýše n_r v x_r.

II. Pro všechna $\zeta \in \mathfrak{H}$ je $Q(\zeta) = f(\zeta)$.

Tento polynom je dán vzorcem

$$Q(x) = \sum_{\zeta \in \mathfrak{H}} f(\zeta)\, R_\zeta(x) . \tag{201}$$

[128]) Důkaz: píši rovnici ve tvaru $P(\eta) - Q(\eta) = 0$.

[129]) Stačí ovšem, je-li tato rovnost splněna na př. pro všechna $x_1 \in I_1, \dots, x_r \in I_r$, kde $I_1, \dots, I_r$ jsou nějaké nezvrhlé intervaly v $\mathbf{E}_1$.

Důkaz. Podle vlastností 1, 2 polynomu R_ζ je jasno, že Q má žádané vlastnosti. Podle věty 178 je jasno, že existuje jen jeden takový polynom.

Poznámka 3. (Této poznámky použijeme v kap. VII, § 8). Budiž P polynom (195); $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r, \mathfrak{H}, R_\zeta$ nechť mají dosavadní význam. Za hodnoty $f(\zeta)$ dosaďme nyní speciálně $P(\zeta)$. Potom polynom Q z (201) má v bodech $\zeta \in \mathfrak{H}$ tytéž hodnoty jako P. Ježto však takový polynom Q je pouze jeden, je nutně $Q = P$, t. j. *pro každý polynom P stupně nejvýše n_1 v $x_1, \ldots,$ nejvýše n_r v x_r platí rovnice*

$$P(x) = \sum_{\zeta \in \mathfrak{H}} P(\zeta)\, R_\zeta(x) \tag{202}$$

pro všechna $x \in \mathbf{E}_r$.

Odtud plyne, že koeficienty polynomu vlevo jsou tytéž jako stejnolehlé koeficienty polynomu vpravo. Podíváme-li se na definici polynomu R_ζ v (200), vidíme toto:

Jsou-li dána celá nezáporná čísla $n_1, \ldots, n_r$ a volíme-li množiny $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$ tak, že $\mathfrak{H}_j$ je množina $n_j + 1$ komplexních čísel, potom koeficienty každého polynomu (195) (stupně nejvýše n_1 v $x_1, \ldots,$ nejvýše n_r v x_r) jsou lineárními kombinacemi hodnot $P(\zeta)$:

$$c_{j_1 \ldots j_r} = \sum_{\zeta \in \mathfrak{H}} \gamma_{j_1 \ldots j_r \zeta} P(\zeta), \tag{203}$$

kde koeficient $\gamma_{j_1 \ldots j_r \zeta}$ závisí pouze na $j_1, \ldots, j_r, \zeta$, na $n_1, \ldots, n_r$ a na volbě množin $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$ (tedy nikoliv na koeficientech polynomu P).

Poznámka 4. Polynom je funkce spojitá v $\mathbf{K}_r$. Neboť konstanta je spojitá, dále polynom $P(z) = P(z_1, \ldots, z_r) = z_j$ je spojitý; neboť z $\lim [z_1^{(n)}, \ldots, z_r^{(n)}] = [z_1, \ldots, z_r]$ plyne $\lim z_j^{(n)} = z_j$, t. j. $\lim P(z^{(n)}) = P(z)$; obecný polynom se pak dostane z konstant a ze $z_1, \ldots, z_r$ sčítáním a násobením.

Cvičení

V těchto cvičeních se polynom $P(x) = P(x_1, \ldots, x_r)$ pojímá jako funkce r reálných proměnných $x_1, \ldots, x_r$; klademe $\|x\| = \mathrm{Max}\,(|x_1|, \ldots, |x_r|)$.

1. Budiž P forma n-tého stupně. Potom je zřejmě $P(x) = O(\|x\|^n)$ pro $x \to o$. Jestliže aspoň jeden koeficient je různý od nuly, není $P(x) = o(\|x\|^n)$

pro $x \to o$. Návod: Existuje $\xi \neq o$ tak, že $P(\xi) \neq 0$. Potom pro $t > 0$ je[130])

$$\frac{|P(t\xi)|}{\|t\xi\|^n} = \frac{|P(\xi)|}{\|\xi\|^n}$$

a limitní přechod $t \to 0 +$ dává výsledek.

2. Budiž P polynom, $n \geqq 0$ celé. Je-li $P(x) = o(\|x\|^n)$ pro $x \to o$, neobsahuje P žádný člen stupně $\leqq n$ s koeficientem od nuly různým. Návod: O „řádu" funkce P rozhodují členové nejnižšího stupně, a na ty se užije cvič. 1.

3. Odvoďte výsledky obdobné k cvič. 1, 2 pro $\|x\| \to +\infty$. Zobecněte všechny výsledky také na komplexní x_j.

§ 24. Weierstrassova věta o aproximaci spojitých funkcí polynomy.

Věta 180. *Budiž $f(x_1, \ldots, x_r)$ konečná reálná funkce r reálných proměnných, jež je spojitá v omezené uzavřené množině $A \subset \mathbf{E}_r$. Potom existuje ke každému číslu $\varepsilon > 0$ mnohočlen $P(x_1, \ldots, x_r)$ s reálnými součiniteli tak, že pro všechna $x \in A$ jest $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Poznámka 1. Volíte-li po řadě $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, dostáváte posloupnost mnohočlenů $P_1(x), P_2(x), \ldots$, jež konverguje k $f(x)$ stejnoměrně v A; neboť pro $x \in A$ jest $|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Položíte-li $Q_1(x) = P_1(x)$, $Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$, dostáváte řadu mnohočlenů $Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots$, jež v A konverguje stejnoměrně k $f(x)$. Je tedy jistě velmi důležito, že lze každou funkci spojitou v A aproximovati velmi jednoduchými funkcemi — totiž mnohočleny — tak, jak je vyloženo ve větě 180. Velmi jednoduchý důkaz věty 180, který podám, pochází od akademika S. N. Bernštejna.

Důkaz. I. Budiž předně $A = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \ldots \times \langle 0, 1\rangle$. Pro $0 \leqq y \leqq 1$, $n > 1$, $0 \leqq \nu \leqq n$ (n, ν celá) položme

$$\varphi_\nu(n, y) = \binom{n}{\nu} y^\nu (1 - y)^{n-\nu}.$$

Tedy

$$(204) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(n, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} y^\nu (1 - y)^{n-\nu} = (y + (1 - y))^n = 1$$

[130]) $t\xi$ je ovšem bod $[t\xi_1, \ldots, t\xi_r]$; viz kap. I, § 10, příkl. 2.

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu\varphi_\nu(n, y) = \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu + 1)\, \varphi_{\mu+1}(n, y) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n}{\mu + 1} (\mu + 1) \,.$$

$$. \, y^{\mu+1}(1 - y)^{n-1-\mu} = ny \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n - 1}{\mu} y^\mu (1 - y)^{n-1-\mu} = ny \,,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu - 1)\, \varphi_\nu(n, y) = \sum_{\mu=0}^{n-2} (\mu + 2)\,(\mu + 1)\, \varphi_{\mu+2}(n, y) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n-2} (\mu + 2)\,(\mu + 1) \binom{n}{\mu + 2} y^{\mu+2}(1 - y)^{n-2-\mu} =$$

$$= n(n - 1)\, y^2 \sum_{\mu=0}^{n-2} \binom{n - 2}{\mu} y^\mu (1 - y)^{n-2-\mu} = n(n - 1)\, y^2$$

a odtud

$$(205) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - ny)^2\, \varphi_\nu(n, y) = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu^2 - 2ny\nu + n^2y^2)\, \varphi_\nu(n, y) =$$

$$= n(n - 1)\, y^2 + ny - 2ny \,.\, ny + n^2y^2 = ny - ny^2 = ny(1 - y) \,.$$

Podle věty 169 je f omezená v A; zvolme tedy $K < +\infty$ tak, že $x \in A \Rightarrow |f(x)| < K$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$; podle věty 169 existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(206) \qquad ([x_1, \ldots, x_r] \in A,\ [z_1, \ldots, z_r] \in A,\ |x_j - z_j| \leqq$$
$$\leqq \delta\ (1 \leqq j \leqq r)) \Rightarrow |f(x_1, \ldots, x_r) - f(z_1, \ldots, z_r)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.$$

Zvolme takové $\delta > 0$ a potom zvolme přirozené n tak, že

$$(207) \qquad n > 1,\ n > \frac{4Kr}{\varepsilon\delta^2} \,.$$

Sestrojme tento mnohočlen v $x_1, \ldots, x_r$:

$$P(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0}^{n} f\left(\frac{\nu_1}{n}, \ldots, \frac{\nu_r}{n}\right) \varphi_{\nu_1}(n, x_1) \ldots \varphi_{\nu_r}(n, x_r) \,.$$

Podle (204) jest

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0}^{n} f(x_1, \ldots, x_r)\, \varphi_{\nu_1}(n, x_1) \ldots \varphi_{\nu_r}(n, x_r) \,.$$

Pro $[x_1, \ldots, x_r] \in A$ je tedy

$$|f(x_1, \ldots, x_r) - P(x_1, \ldots, x_r)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0} \left| f(x_1, \ldots, x_r) - f\left(\frac{\nu_1}{n}, \ldots, \frac{\nu_r}{n}\right)\right| \varphi_{\nu_1}(n, x_1) \ldots \varphi_{\nu_r}(n, x_r) .$$

Součet vpravo se rozpadá na dvě části $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$; při tom jest $\mathfrak{S}_1$ součet přes ony systémy $\nu_1, \ldots, \nu_r$, pro něž jest

$$\left|\frac{\nu_1}{n} - x_1\right| \leqq \delta, \ldots, \left|\frac{\nu_r}{n} - x_r\right| \leqq \delta ;$$

$\mathfrak{S}_2$ pak jest součet přes ony systémy $\nu_1, \ldots, \nu_r$, u nichž aspoň pro jednu hodnotu j $(1 \leqq j \leqq r)$ jest $\left|\frac{\nu_j}{n} - x_j\right| > \delta$, t. j. $(\nu_j - nx_j)^2 > n^2\delta^2$. Zřejmě jest (podle (206), (204))

$$\mathfrak{S}_1 \leqq \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0}^{n} \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot \varphi_{\nu_1}(n, x_1) \ldots \varphi_{\nu_r}(n, x_r) = \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Dále jest

$$\mathfrak{S}_2 \leqq 2K . \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{0 \leqq \nu_j \leqq n \\ (\nu_j - nx_j)^2 > \delta^2 n^2}} \varphi_{\nu_j}(n, x_j) \tag{208}$$

(neboť součin všech součtů $\sum_{\nu_k = 0}^{n} \varphi_{\nu_k}(n, x_k)$ pro $1 \leqq k \leqq r$, $k \neq j$ je roven 1 podle (204)). Je však zřejmě

$$\sum_{\substack{0 \leqq \nu_j \leqq n \\ (\nu_j - nx_j)^2 > \delta^2 n^2}} \varphi_{\nu_j}(n, x_j) \leqq \sum_{\substack{0 \leqq \nu_j \leqq n \\ (\nu_j - nx_j)^2 > \delta^2 n^2}} \frac{(\nu_j - nx_j)^2}{\delta^2 n^2} \varphi_{\nu_j}(n, x_j) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{\nu_j = 0}^{n} (\nu_j - nx_j)^2 \varphi_{\nu_j}(n, x_j) =$$

$$= \frac{nx_j(1 - x_j)}{\delta^2 n^2} {}^{131)} < \frac{1}{\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{4Kr} {}^{132)},$$

tedy $\mathfrak{S}_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$ (viz (208)), takže vskutku $|P(x) - f(x)| \leqq \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 < \varepsilon$.

[131]) Viz (205).
[132]) Viz (207).

II. Budiž nyní A libovolná uzavřená omezená množina; existuje tedy c $(0 < c < +\infty)$ tak, že $A \subset D$, kde klademe $D = \langle -c, c\rangle \times \times \ldots \times \langle -c, c\rangle$. Podle věty 175 existuje reálná konečná funkce g, spojitá v D (ba dokonce v E_r) tak, že pro $x \in A$ je $g(x) = f(x)$. Definujme konečně funkci h v intervalu $B = \langle 0, 1\rangle \times \ldots \times \langle 0, 1\rangle$ rovnicí $h(y) = g(2cy - y_0)$, kde y_0 je bod $[c, c, \ldots, c]$.

Budiž dáno $\varepsilon > 0$; podle bodu I existuje mnohočlen Q tak, že pro $y \in B$ je $|Q(y) - h(y)| < \varepsilon$. Položíme-li tedy[132a] $Q\left(\frac{y_0 + x}{2c}\right) = P(x)$, jest P mnohočlen. Je-li nyní $x \in A$, položme $y = \frac{y_0 + x}{2c}$, tedy $y \in B$, $x = 2cy - y_0$ a tedy $f(x) = g(x) = g(2cy - y_0) = h(y)$,
$$\left|Q\left(\frac{y_0 + x}{2c}\right) - f(x)\right| = |Q(y) - h(y)| < \varepsilon, \text{ t. j. vskutku } |P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Cvičení

1. Budiž $M \subset \mathsf{E}_r$ otevřená, budiž $f(x_1, \ldots, x_r)$ reálná, konečná a spojitá v M. Potom existuje posloupnost $P_1, P_2, \ldots$ mnohočlenů, jež konverguje stejnoměrně k f uvnitř M. Návod: Budiž M_n množina oněch x, pro něž $\varrho(o, x) \leqq n$, $\varrho(x, \mathsf{E}_r \dot{-} M) \geqq \frac{1}{n}$. Každá uzavřená omezená část množiny M jest obsažena v některé množině M_n. Mnohočlen P_n volme tak, aby pro $x \in M_n$ bylo $|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$.

§ 25. Polynomy nejlepší aproximace. Pro jednoduchost se omezme na funkce jedné reálné proměnné. Budiž f konečná reálná funkce, spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Zvolme celé číslo $n \geqq 0$, vezměme libovolný polynom stupně $\leqq n$

(209) $$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0 \quad (c_j \text{ reálná})$$

a sestrojme „odchylku“

(210) $$\varrho(P, f) = \max_{a \leqq x \leqq b} |P(x) - f(x)|$$

[132a]) Je-li $x \in \mathsf{E}_r$, $a \in \mathsf{E}_1$, $a \neq 0$, kladu ovšem $\frac{x}{a} = \frac{1}{a}x$.

(viz text okolo vzorce (144)). Infimum všech čísel $\varrho(P, f)$ pro všechny polynomy tvaru (209) označme $E_n(f)$. Pro žádný polynom tvaru (209) není $\varrho(P, f) < E_n(f)$. Tvrdím nyní:

Věta 181. *Existuje polynom tvaru* (209), *pro nějž* $\varrho(P, f) = E_n(f)$. To je tedy polynom stupně $\leqq n$, který dává nejlepší aproximaci funkce f v $\langle a, b\rangle$ ve smyslu odchylky (210).

Pomocná věta. *Budiž dáno* a, b, n *jako dosud a* $n + 1$ *čísel* $a \leqq \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqq b$. *Dále budiž* $0 < K < \infty$. *Potom existuje číslo* $L < +\infty$ *s touto vlastností: Jestliže polynom tvaru* (209) *vyhovuje nerovnostem*

$$|P(x_0)| < K, |P(x_1)| < K, \ldots, |P(x_n)| < K\,, \tag{211}$$

potom je

$$|c_0| < L, |c_1| < L, \ldots, |c_n| < L \tag{212}$$

Důkaz. Podle poznámky 3 v § 23 (použité na případ $r = 1, \mathfrak{H}_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$) existují čísla γ_{jk} tak, že pro každý polynom (209) je $c_j = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{jk} P(x_k)$, tedy $|c_j| \leqq (n + 1)\, CK$, kde $C = \max_{0 \leqq j, k \leqq n} |\gamma_{jk}|$.

Důkaz věty 181. Budiž $n \geqq 0$ celé. Zvolme čísla $a \leqq x_0 < x_1 < < \ldots < x_n \leqq b$. Podle definice infima existuje ke každému přirozenému p polynom

$$P_p(x) = c_{n,p}x^n + \ldots + c_{1,p}x + c_{0,p}$$

tak, že

$$E_n(f) \leqq \varrho(P_p, f) < E_n(f) + \frac{1}{p}\,.$$

Ježto $|P_p(x) - f(x)| < E_n(f) + \dfrac{1}{p}$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, je pro $x \in \langle a, b\rangle$ (a tedy speciálně pro $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$)

$$|P_p(x)| < \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| + E_n(f) + 1 = K\,,$$

takže podle pomocné věty existuje konečné L tak, že

$$|c_{n,p}| < L, \quad |c_{n-1,p}| < L, \ldots, |c_{0,p}| < L$$

pro každé přirozené p. Lze tedy vybrati (viz § 2, pozn. 14) posloupnost přirozených čísel $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ tak, že existují limity

$$\lim_{k\to\infty} c_{n,p_k} = c_n, \ldots, \lim_{k\to\infty} c_{0,p_k} = c_0 ,$$

načež zřejmě platí

$$\lim_{k\to\infty} P_{p_k}(x) = P(x) , \quad \text{kde } P(x) = c_n x^n + \ldots + c_0 ,$$

a to stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$.[133])

Tedy $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(P_{p_k}, P) = 0$; dále

$$\varrho(P, f) \leqq \varrho(P, P_{p_k}) + \varrho(P_{p_k}, f) < E_n(f) + \frac{1}{p_k} + \varrho(P, P_{p_k}) .$$

Pro $k \to \infty$ má pravá strana limitu $E_n(f)$, tedy $\varrho(P, f) \leqq E_n(f)$, což bylo dokázati (platí ovšem znamení rovnosti).

Věta Weierstrassova říká, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom s odchylkou (210) menší než ε, t. j. že existuje n tak, že $E_n(f) < \varepsilon$. Ježto zřejmě $E_n(f) \geqq E_{n+1}(f)$ (každý polynom stupně $\leqq n$ je též stupně $\leqq n + 1$), plyne z Weierstrassovy věty, že $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f) = 0$. Jak rychlá je tato konvergence, závisí na vlastnostech funkce f. Nauka o aproximaci spojitých funkcí mnohočleny je zřejmě velmi důležitá theoreticky i prakticky. Jejím zakladatelem je Čebyšev, který také její základy (již před objevením Weierstrassovy věty) s podivuhodnou dokonalostí vybudoval. Od té doby si škola ruská a později sovětská (vedená S. N. Bernštejnem) zachovala nesporné prvenství v této nauce, která bohužel přesahuje rámec této knihy. Dokonalé poučení najde čtenář v knize Natansonově,[134]) kde najde též bohatý seznam další literatury.

Cvičení

1. Budiž $n \geqq 0$ celé; budiž dána posloupnost polynomů stupně $\leqq n$:

$$P_m(x) = c_{mn}x^n + \ldots + c_{m1}x + c_{m0} \; (m = 1, 2, \ldots) ,$$

---

[133]) $P_{p_k} - P$ je polynom stupně $\leqq n$, jehož koeficienty pro $k \to \infty$ konvergují k nule. Ježto každá mocnina x^r je omezená v $\langle a, b\rangle$, plyne odtud stejnoměrná konvergence.

[134]) И. П. Натансон, Конструктивная теория функций (1949).

která je konvergentní v $n+1$ různých bodech $x_0, \ldots, x_n$ (t. j. existují vlastní limity $\lim\limits_{m\to\infty} P_m(x_j)$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$).

Podobným způsobem jako v pomocné větě dokažte, že existují vlastní limity $\lim\limits_{m\to\infty} c_{mk} = c_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, načež zřejmě je

$$\lim_{m\to\infty} P_m(x) = c_m x^m + \ldots + c_1 x + c_0$$

stejnoměrně uvnitř E_1.

2. Z tohoto cvičení odvodíme zajímavé zobecnění věty 57:

Budiž k přirozené číslo, $J \subset \mathsf{E}_1$ otevřený interval. Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ navzájem různé body intervalu J; budiž

$$f_1(x), f_2(x), \ldots \tag{213}$$

posloupnost konečných reálných funkcí jedné reálné proměnné v intervalu J, jež je konvergentní v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Pro každé $x \in J$ nechť existují vlastní derivace

$$f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots \tag{214}$$

a posloupnost (214) budiž stejnoměrně konvergentní uvnitř J. Potom každá z posloupností

$$\begin{matrix} f_1(x), & f_2(x), \ldots \\ f_1'(x), & f_2'(x), \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_1^{(k-1)}(x), & f_2^{(k-1)}(x), \ldots \\ f_1^{(k)}(x), & f_2^{(k)}(x), \ldots \end{matrix} \tag{215}$$

je stejnoměrně konvergentní uvnitř J; položíme-li $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, jest $f^{(j)}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(j)}(x)$ pro $x \in J$, $j = 1, 2, \ldots, k$. (Pro $k = 1$ viz větu 57.)

Návod. Zvolme bod $a \in J$ a položme $p_n(x) = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \dfrac{(x-a)^l}{l!} f_n^{(l)}(a)$, takže $p_n^{(j)}(a) = f_n^{(j)}(a)$ pro $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Klademe-li $g_n(x) = f_n(x) - p_n(x)$, je $g_n^{(j)}(a) = 0$ pro $j = 0, 1, \ldots, k-1$; $g_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(x)$. Podle věty 57 je posloupnost

$$g_1^{(k-1)}(x),\ g_2^{(k-1)}(x), \ldots$$

stejnoměrně konvergentní uvnitř J;[135]) podle téže věty je

$$g_1^{(k-2)}(x),\ g_2^{(k-2)}(x), \ldots$$

stejnoměrně konvergentní uvnitř J atd.; konečně je

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots$$

[135]) Pokud se týče nepatrného formálního rozdílu proti větě 57, viz § 21, cvič. 1.

stejnoměrně konvergentní uvnitř J. Speciálně je tedy posloupnost

$$p_1(x),\ p_2(x), \dots\ (p_n(x) = f_n(x) - g_n(x))$$

konvergentní v bodech $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Pišme $p_n(x) = \sum_{l=0}^{k-1} c_{l,n} x^l$; podle cvič. 1 existují vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} c_{l,n} = c_l$ $(l = 0,\ 1, \dots, k - 1)$; klademe-li $p(x) = \sum_{l=0}^{k-1} c_l x^l$, je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^{(j)}(x) = p^{(j)}(x)$ pro $j = 0, 1, 2, \dots, k$ a konvergence je stejnoměrná uvnitř J. Vzhledem k stejnoměrné konvergenci posloupností $g_1^{(j)}(x),\ g_2^{(j)}(x), \dots$ jsou tedy i posloupnosti (215) stejnoměrně konvergentní uvnitř J a z věty 57 plyne, že jest $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$, nato $\lim\limits_{n\to\infty} f''_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) = f''(x)$ atd. až do $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ pro $x \in J$.