Kapitola II

POSLOUPNOSTI

§ 1. Definice limity. Budiž dána posloupnost čísel

(1) $$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Příklad: budiž $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, obecně $a_n = \dfrac{1}{n}$ pro každé přirozené n, takže máme posloupnost

(2) $$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, \ldots$$

Čtenáři je asi již jasno, co rozumíme slovy „posloupnost čísel“; řekněme to však obšírně: Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno jisté číslo a_n, potom říkáme, že $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je posloupnost čísel; a_n je n-tý člen té posloupnosti (např. stopatnáctý člen posloupnosti (2) je $\frac{1}{115}$). Dvě posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$ považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, je-li $a_n = b_n$ pro každé přirozené n; např. posloupnost (2) a posloupnost

(3) $$\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{7}, \ldots$$

jsou dvě různé posloupnosti. (Posloupnost (3) je posloupnost $a_1, a_2, \ldots$, definovaná takto: $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{2n-1}$ pro každé přirozené n.) V definici posloupnosti není nikde řečeno, že čísla a_n musí být navzájem různá; a také skutečně nemusí být různá. Tak např.

(4) $$1, -1, 1, -1, \ldots \; (n\text{-tý člen je } (-1)^{n-1})$$

je také posloupnost. Nebo: přiřadíme-li každému přirozenému n číslo 2, tj. volíme-li $a_n = 2$ pro každé přirozené n, dostáváme posloupnost

(5) $$2, 2, 2, 2, \ldots$$

Uveďme ještě několik příkladů posloupností:

(6) $$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots \; (a_n = n^2);$$

(7) $$-1, -3, -5, -7, \ldots \; (a_n = -(2n-1));$$

$$(8) \qquad -1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots (a_n = (-1)^n n);$$

$$(9) \qquad 1, 1, 2, \tfrac{1}{2}, 3, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{4}, \ldots \left(a_{2n-1} = n, a_{2n} = \frac{1}{n}\right);$$

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots \left(a_n = \frac{n}{n+1}\right);$$

$$(11) \qquad -1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots \left(a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right).$$

Podíváme-li se např. na posloupnost (2), vidíme – řečeno prozatím populárně a dosti neurčitě – že její členové s rostoucím n se neomezeně blíží nule; totéž vidíme u posloupností (3), (11). U posloupnosti (10) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots$ vidíme obdobně, že její členové s rostoucím n se neomezeně blíží jedničce. Vyjadřujeme to slovy, že posloupnost (2) (a rovněž (3), (11)) má limitu 0, posloupnost (10) pak má limitu 1. Tomuto rčení nutno dát ovšem přesný smysl, aby se mohlo stát předmětem matematických úvah. Všimněme si např. podrobněji posloupnosti (10). Výroku „členové posloupnosti (10) se s rostoucím n neomezeně blíží jedničce" dáme teď přesný smysl; budeme jím rozumět toto: předepíše-li mně někdo libovolné kladné číslo ε, dovedu mu udat v posloupnosti (10) jistý člen, od něhož počínaje se už všichni další členové této posloupnosti liší od jedničky o méně než ε; tj. dovedu udat číslo n_0 takové, že všichni členové a_n, jejichž „index" n je větší než n_0, splňují nerovnost $|a_n - 1| < \varepsilon$. A tomu je vskutku tak: v posloupnosti (10) je $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ a tedy $|a_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$. Je-li třeba $\varepsilon = \frac{1}{100}$, položím $n_0 = 99$; vskutku, je-li $n > 99$, je $n + 1 > 100$, $\dfrac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$. Aby mě můj protivník potrápil, zvolí ε menší, třeba $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ a žádá opět, abych mu udal n_0 tak, aby výraz $|a_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$ byl menší než $\frac{1}{1000}$ pro všechna n, jež jsou větší než n_0.[1] Zase dovedu takové n_0 udat, třeba $n_0 = 999$. Vskutku: je-li $n > 999$, je $n + 1 > 1000$, $\dfrac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$. Může mně předepsat ještě menší kladné číslo ε; ale vždy, ať mi předepíše jakékoliv kladné číslo ε, dovedu udat příslušné číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $|a_n - 1| < \varepsilon$, tj. $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Stačí totiž volit n_0 tak, že $\dfrac{1}{n_0+1} = \varepsilon$, tj. $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$;[2] pro $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ bude

[1]) Číslo n (nikoliv však n_0, n_1 apod.) bude v této kapitole značit vždy přirozené číslo; proto budeme krátce říkat „n" místo „přirozené číslo n".

[2]) Mohli bychom za n_0 zvolit ovšem též kterékoliv číslo větší než $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

pak vskutku $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Číslo n_0 závisí ovšem na ε; čím je ε menší, tím větší musím volit n_0. To je pochopitelné: čím menší je ε, tím dále musím v posloupnosti (10) jít, abych měl zaručeno, že se dále už setkám jen s takovými členy, které se od jedničky liší o méně než ε. Rčení „posloupnost (10) má limitu 1" dáme tedy tento přesný význam:

(A) $\left\{\begin{array}{l}\text{Ke každému kladnému číslu } \varepsilon \text{ dovedu nalézt číslo } n_0 \text{ tak, že pro všechna } n, \\ \text{jež jsou větší než } n_0, \text{ platí nerovnost } |a_n - 1| < \varepsilon.\end{array}\right.$

Tímto způsobem budeme limitu definovat obecně, jenom ještě s jednou změnou: může se stát, že dnes takové číslo n_0 nalézt neumím, ale zítra to budu umět: potom by taková posloupnost dnes limitu neměla, ale zítra by ji měla. Takový subjektivní prvek se nehodí do matematických úvah: nezáleží na tom, že já nebo někdo jiný dovede ke každému kladnému ε takové číslo n_0 nalézt, nýbrž záleží pouze na tom, že ke každému kladnému ε takové číslo n_0 existuje. Nahradíme tedy ve výroku (A) slova „dovedu nalézt" slovem „existuje" a definujeme obecně:

Definice 6. *Říkáme, že číslo a je limitou posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots,$* [3]) *jestliže má číslo a tuto vlastnost: Ke* **každému** *číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 tak, že pro každé přirozené číslo n, jež je větší než n_0, platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.* (podle věty 28) *nerovnosti $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.*

Všechny úvahy, jež jsem před touto definicí o posloupnosti (10) prováděl, měly pouze orientační význam: měly čtenáře připravit na definici 6 a objasnit mu její smysl. Podle této definice má posloupnost (10) vskutku limitu 1; vlastně jsme to již spočetli, ale zopakujme to: Zde je $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$. Je-li ε libovolné kladné číslo, zvolme n_0 tak, že $\frac{1}{n_0 + 1} = \varepsilon$, tj. $n_0 + 1 = \frac{1}{\varepsilon}$. Pro $n > n_0$ je potom vskutku $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Dokažme obdobně, že posloupnosti (2), (11) mají limitu 0. Zde je $a_n = \pm \frac{1}{n}$, $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$; je-li $\varepsilon > 0$, zvolme n_0 tak, že $\frac{1}{n_0} = \varepsilon$, tj. $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Pro $n > n_0$ bude potom vskutku $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dokažme ještě, že posloupnost (3) má limitu 0. V této posloupnosti je $a_n = \frac{1}{n+1}$ pro liché n, $a_n = \frac{1}{n-1}$ pro sudé n; pro každé $n > 1$ je tedy $0 < a_n \leqq \frac{1}{n-1}$ a tedy $|a_n - 0| = a_n \leqq \frac{1}{n-1}$. Je-li $\varepsilon > 0$,

[3]) Místo toho říkáme také, že posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ má limitu a. Místo „posloupnost čísel" říkám kratčeji „posloupnost", pokud není třeba se obávat nedorozumění.

zvolme n_0 tak, že $\dfrac{1}{n_0 - 1} = \varepsilon$, tj. $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$. Je-li $n > n_0$, je vskutku $n > \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$ (tedy $n > 1$), $n - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|a_n - 0| \leqq \dfrac{1}{n - 1} < \varepsilon$. Dokažme ještě, že posloupnost (4) nemá limitu. Důkaz provedeme nepřímo: předpokládejme, že posloupnost má limitu a. Potom k číslu $\varepsilon = 1$ existuje číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < 1$. Zvolme číslo n, větší než n_0; potom je též $n + 1 > n_0$, tedy $|a_{n+1} - a| < 1$. Odtud plyne

$$|a_n - a_{n+1}| = |(a_n - a) + (a - a_{n+1})| \leqq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 2\,;$$

ale to je spor, neboť v posloupnosti (4) je zřejmě $|a_n - a_{n+1}| = 2$.

O posloupnosti, jež má limitu, říkáme, že je *konvergentní*; nemá-li limitu, nazývá se *divergentní*. Příklad: posloupnosti (2), (3), (10), (11) jsou konvergentní, (4) je divergentní.

Názor nás vede k domněnce, že dvě různá čísla nemohou být současně limitami téže posloupnosti; tato domněnka je správná, jak ukazuje tato věta:

Věta 51. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu* (tj. buďto žádnou nebo právě jednu).

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost (1) $a_1, a_2, \ldots$ má aspoň dvě různé limity a, b, přičemž znakem a značme menší z těchto čísel, takže $a < b$ (předpokládáme tedy, že číslo a i číslo b má vlastnosti vytčené v definici 6). Z toho odvodíme spor. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$, takže $\varepsilon > 0$. Ježto číslo a je limitou posloupnosti (1), existuje číslo n_1 tak, že pro $n > n_1$ (rozuměj: pro každé n, jež je větší než n_1) je

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\,. \tag{12}$$

Ježto také číslo b je limitou posloupnosti (1), existuje číslo n_2 tak, že pro $n > n_2$ je

$$|a_n - b| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon\,. \tag{13}$$

Zvolme číslo n větší než $\mathrm{Max}\,(n_1, n_2)$, což je možno; potom platí (12) i (13), takže $b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $b - \varepsilon < a + \varepsilon$, $b - a < 2\varepsilon$, což je spor, neboť $b - a = 2\varepsilon$. (Viz cvičení 4.)

Limitu posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — existuje-li ovšem — označujeme pro zkrácení zvláštním znakem, a to znakem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{nebo též} \quad \lim_{n=\infty} a_n\,; \tag{14}$$

my budeme užívat prvního označení. Čtenář se snad nezalekl znaků $\to$, ∞. Celý znak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ je prostě nedělitelný symbol značící ono číslo, jež je limitou posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ Mohli bychom zavést libovolný jiný symbol, třeba $n \,\square\, a_n$; ale symbol (14) je všeobecně běžný a má mimoto tu výhodu, že jeho tvar velmi důtklivě připomíná, oč jde. Je-li n-tý člen a_n dán nějakým početním výrazem, píšeme v symbolu

(14) často tento výraz místo a_n. Např. píšeme limitu posloupnosti (10) takto: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ $\left(\text{neboť } n\text{-tý člen této posloupnosti je právě } \frac{n}{n+1}\right)$.

Rovnice $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ obsahuje vlastně dvojí tvrzení: 1. Limita posloupnosti (1) existuje. 2. Tato limita je právě číslo a. Např. lze naše výsledky o posloupnostech (2), (10), (11), (3) psát ve tvaru

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n . \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$ $\left(\text{zjistěte sami, že } n\text{-tý člen posloupnosti (3) je } \frac{1}{n-(-1)^n}\right)$.

„Index" n obecného členu a_n nemusíme ovšem značit vždy písmenem n; místo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ můžeme psát např. $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, $\lim_{q\to\infty} \frac{q}{q+1} = 1$ apod.[4])

Není vhodno vynechávat u znaku $\lim a_n$ znak $n \to \infty$; tím by mohla vzniknout nedorozumění. Příklad: pro přirozená k, m klaďme $a_{k,m} = \frac{m}{m+1} + \frac{1}{k}$. Zvolím-li k pevné a nechám m probíhat přirozená čísla, dostanu posloupnost

$$a_{k,1}, a_{k,2}, a_{k,3}, \ldots, \text{ tj. } \frac{1}{2} + \frac{1}{k}, \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{k}, \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{k}, \ldots$$

$\left(m\text{-tý člen je } \frac{m}{m+1} + \frac{1}{k}\right)$. Tato posloupnost má limitu $1 + \frac{1}{k}$ $\left(\text{neboť } \left|\frac{m}{m+1} + \frac{1}{k} - \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right| = \frac{1}{m+1} < \varepsilon, \text{ je-li } \varepsilon > 0,\ m > m_0, \text{ kde třeba } m_0 = \frac{1}{\varepsilon}\right)$; tedy

$$\lim_{m\to\infty} a_{k,m} = \frac{k+1}{k}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{k}. \tag{15}$$

Zvolíme-li naopak m pevné a necháme k probíhat přirozená čísla, dostaneme posloupnost

$$a_{1,m}, a_{2,m}, a_{3,m}, \ldots, \text{ tj. } \frac{m}{m+1} + 1, \quad \frac{m}{m+1} + \frac{1}{2}, \quad \frac{m}{m+1} + \frac{1}{3}, \ldots.$$

[4]) V posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ značí n „pořadové číslo" členu a_n; tak a_{12}, a_k, a_n značí dvanáctý, k-tý, n-tý člen. Definici 6 lze vyslovit takto: Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ má limitu a, jestliže ke každému kladnému číslu existuje druhé číslo tak, že všichni členové posloupnosti, jejichž pořadové číslo je větší než to druhé číslo, se od čísla a liší o méně než to první (kladné) číslo. Smysl tohoto výroku zůstává týž, ať si označíme to první číslo ε, to druhé n_0 a pořadové číslo n (jak jsme to v definici učinili), nebo ať to první číslo označíme třeba δ, to druhé X a pořadové číslo k.

$\left(k\text{-tý člen je } \dfrac{m}{m+1} + \dfrac{1}{k}\right)$, jež má limitu $\dfrac{m}{m+1}$ $\left(\text{neboť} \left|\dfrac{m}{m+1} + \dfrac{1}{k} - \dfrac{m}{m+1}\right| = \right.$ $\left. = \dfrac{1}{k} < \varepsilon \text{ pro } \varepsilon > 0,\ k > k_0, \text{ kde } k_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$; tedy

$$(16) \qquad \lim_{k\to\infty} a_{k,m} = \frac{m}{m+1}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{k\to\infty}\left(\frac{m}{m+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{m}{m+1}.$$

Kdybychom v (15), (16) vynechali znaky $m \to \infty$, $k \to \infty$, byly by tyto rovnice nesrozumitelné. Přesto budeme někdy pro úsporu místa znak $n \to \infty$ v symbolu (14) vynechávat, ale jen tam, kde nehrozí nedorozumění. Kde je v této kapitole tento znak vynechán, je třeba vždy doplnit $n \to \infty$ (a nikoliv $k \to \infty$ nebo podobně).

Skoro samozřejmé jsou následující dvě věty:

Věta 52. *Jsou-li všechny členy posloupnosti* (1) *od jistého indexu* n_1 *rovny jednomu a témuž číslu* a (tj. je-li $a_n = a$ pro všechna $n \geqq n_1$), *je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; položme $n_0 = n_1$. Potom pro $n > n_0$ je $a_n = a$, tedy vskutku $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$.

Např. posloupnost (5) má limitu 2, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$. Toto označení (jež snad na první pohled zarazí) je úplně ve shodě s naší úmluvou; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ značí totiž limitu posloupnosti, jejíž n-tý člen (pro každé n) je a_n; speciálně tedy $\lim\limits_{n\to\infty} 2$ značí limitu posloupnosti, jejíž n-tý člen pro každé n je 2.

Věta 53. *Posloupnost* (1) $a_1, a_2, a_3, \dots$ *má limitu tehdy a jen tehdy, má-li posloupnost*

$$(17) \qquad a_2, a_3, a_4, \dots$$

limitu; obě limity jsou pak stejné.

Důkaz. První člen posloupnosti (17) je a_2, druhý a_3, n-tý a_{n+1}. Položíme-li $b_n = a_{n+1}$, je (17) tato posloupnost: $b_1, b_2, b_3, \dots$

I. Nechť existuje $\lim a_n = a$. Je-li ε libovolné kladné číslo, existuje číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Je-li $n > n_0$, je tím spíše $n + 1 > n_0$ a tedy $|b_n - a| = |a_{n+1} - a| < \varepsilon$; tato nerovnost platí tedy pro všechna $n > n_0$ a tedy je $\lim b_n = a$. II. Nechť existuje $\lim b_n = a$. Je-li ε libovolné kladné číslo, existuje číslo n_1 tak, že pro $m > n_1$ je $|b_m - a| < \varepsilon$. Položme $n_0 = n_1 + 1$; je-li $n > n_0$, je $n - 1 > n_1$ a tedy $|a_n - a| = |b_{n-1} - a| < \varepsilon$; tato nerovnost platí tedy pro všechna $n > n_0$, a tedy je $\lim a_n = a$.

Vlastnosti posloupnosti, jež nás nyní zajímají (konvergence, divergence, hodnota limity) se tedy nezmění, přidám-li nebo uberu-li na začátku posloupnosti jeden člen.

Opakováním tohoto postupu vidíme, že se tyto vlastnosti nezmění, přidáme-li, vynecháme-li nebo změníme-li *konečný* počet členů. Např. posloupnost $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots$ má tytéž vlastnosti jako posloupnost $b_1, a_4, b_2, a_7, a_8, a_9, \ldots$ (vynechám v první posloupnosti po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a přidám potom po řadě b_2, a_4, b_1).

Poznámka 1. Tento výsledek nás vede k následující celkem málo závažné, ale pro praxi leckdy důležité poznámce. Předpis, kterým je určen n-tý člen a_n posloupnosti, je někdy takový, že jím nejsou určeny *všechny* členy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ této posloupnosti, nýbrž pouze všechny členy *až na konečný počet.* Klademe-li např. $a_n = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$, je tím definováno $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{6}$ atd., kdežto a_2, a_3 nemají smyslu (nula ve jmenovateli). Ale i v takovém případě mluvíme o konvergenci, divergenci a limitě posloupnosti, a to v tomto smyslu: ty scházející členy nějak doplníme (v našem příkladě klademe třeba $a_2 = 12$, $a_3 = \sqrt{2}$ nebo jinak) a tuto doplněnou posloupnost vyšetřujeme; podle poslední věty víme, že je lhostejné, *jakým* způsobem jsme toto doplnění provedli, takže se o ně vůbec nemusíme starat. Ve smyslu této poznámky je např. $\lim \frac{1}{(n-2)(n-3)} = 0$. Neboť pro $n > 3$ je $\left|\frac{1}{(n-2)(n-3)}\right| < \frac{1}{n-3}$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$ a definujeme-li n_0 rovnicí $\frac{1}{n_0 - 3} = \varepsilon$, tj. $n_0 = 3 + \frac{1}{\varepsilon}$, platí pro $n > n_0$ nerovnosti

$$\left|\frac{1}{(n-2)(n-3)} - 0\right| < \frac{1}{n-3} < \frac{1}{n_0-3} = \varepsilon .$$

Poznámka 2. Mluvili jsme o posloupnosti čísel $a_1, a_2, \ldots$, jestliže každému přirozenému n bylo přiřazeno jisté číslo a_n; obšírněji se taková posloupnost nazývá také nekonečnou posloupností čísel, na rozdíl od tzv. konečných posloupností čísel, čímž rozumíme toto: budiž např. každému přirozenému číslu $n \leqq 12$ přiřazeno jisté číslo a_n; potom říkáme, že $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ je konečná posloupnost čísel o dvanácti členech. Mimoto je možno zobecnit pojem posloupnosti (nekonečné nebo konečné) též na případ, že $a_1, a_2, \ldots$ jsou věci jakéhokoliv rázu (nemusí to být zrovna čísla: může být dána třeba nějaká posloupnost trojúhelníků apod.). V této knize bude však slovo „posloupnost“ vždy znamenat nekonečnou posloupnost čísel, pokud výslovně nezdůrazním, že připouštím i jiné případy.

Cvičení

1. Rozvažte si tyto drobnosti k definici 6:

A) Smysl definice se nezmění, píší-li v ní $n \geqq n_0$ místo $> n_0$ (platí-li totiž nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna $n \geqq n_0$, platí tím spíše pro všechna $n > n_0$; platí-li pro všechna $n > n_0$, platí např. pro všechna $n \geqq n_0 + 1$, takže stačí zvětšit n_0 o jedničku).

B) Smysl definice se nezmění, požaduji-li v ní, aby n_0 bylo přirozené číslo (nahradím třeba n_0 nejblíže vyšším přirozeným číslem).

C) Smysl definice se nezmění, omezím-li se v ní na ona kladná ε, jež jsou menší (nebo $\leqq$) než jakékoliv předem dané kladné číslo ε_0 (uvažte: platí-li nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro jistou hodnotu ε, platí tím spíše pro každou větší hodnotu ε).

Těchto a podobných poznámek budu v této knize často bez další zmínky používat.

2. Položme $a_n = 100\,000$ pro $0 < n \leqq 1\,000\,000$, $a_n = \frac{1}{n}$ pro $n > 1\,000\,000$. Podle věty 53 je $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$, ačkoliv se posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ počíná dlouhou řadou velkých čísel. Určete ke každému $\varepsilon > 0$ nejmenší přirozené číslo n_0 tak, aby pro všechna $n \geqq n_0$ bylo $|a_n - 0| < \varepsilon$. (Pro $\varepsilon > 100\,000$ vyjde $n_0 = 1$, pro $\frac{1}{1000001} < \varepsilon \leqq 100\,000$ vyjde $n_0 = 1\,000\,001$, pro $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{1000001}$ vyjde $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (symbol [ ] viz ve větě 46).

3. Je-li $a_n = \frac{1000}{n}$, $b_n = 3 - \frac{1000}{n}$, je $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 3$. Pro všechna dosti velká n je tedy $a_n < b_n$ (proč?). Pro malá n je ovšem a_n mnohem větší než b_n. Najděte nejmenší (ovšem přirozené) n, pro něž je $a_n < b_n$ ($n = 667$).

4. Číslo a nazveme „hromadnou hodnotou" posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje nekonečně mnoho hodnot n tak, že $|a_n - a| < \varepsilon$. Pro tento pojem neplatí věta, obdobná větě 51; např. posloupnost (4) má hromadné hodnoty $-1, 1$ (neboť při kladném ε je $|a_n - 1| < \varepsilon$ pro všechna lichá n, $|a_n - (-1)| < \varepsilon$ pro všechna sudá n). Podrobně budeme pojem hromadné hodnoty vyšetřovat v 2. svazku tohoto díla.

Hojnější a zajímavější cvičení najdete v následujících paragrafech.

§ 2. **Věty o limitách.** Budiž dána posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{18}$$

Množinu všech čísel, jež vystupují jako členové v posloupnosti (18), nazveme *množinou všech členů posloupnosti* (18); označme ji na okamžik písmenem M. Číslo x je tedy tehdy a jen tehdy prvkem množiny M, existuje-li alespoň jedno přirozené číslo n tak, že je $a_n = x$. Např. u posloupnosti (2) se množina M skládá ze všech čísel tvaru $\frac{1}{n}$ (kde n je libovolné přirozené číslo); u posloupnosti (3) je množina M táž jako u posloupnosti (2); u posloupnosti (4) se množina M skládá pouze ze dvou čísel $-1, 1$ (je tedy konečná, ač jde o nekonečnou posloupnost), u posloupnosti (5) se skládá dokonce z jediného čísla 2. Je-li množina M (tj. množina všech členů posloupnosti (18)) shora omezená, tj. existuje-li číslo k tak, že pro všechna n je $a_n \leqq k$, budeme říkat, že posloupnost (18) je shora omezená. V tom případě existuje supremum množiny M (značka sup M, viz definici 4 a větu 39). Tomuto číslu budeme říkat též supremum posloupnosti (18); znak $\sup\limits_{n=1,2,3,\ldots} a_n$. Toto číslo má podle věty 39 a definice 4 tyto vlastnosti: 1. Žádný člen posloupnosti (18) není větší než $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. 2. Je-li G'

libovolné číslo menší než $\sup\limits_{n=1,2,\dots} a_n$, existuje v posloupnosti (18) aspoň jeden člen, jenž je větší než G'.[5]) Podobně (vyjadřuji se již stručněji): Je-li M zdola omezená, říkám, že posloupnost (18) je zdola omezená. Číslo $\inf M$ nazývám potom „infimum posloupnosti (18)", znak $\inf\limits_{n=1,2,\dots} a_n$. Toto číslo má tyto dvě vlastnosti: 1. Pro každé přirozené k je $a_k \geqq \inf\limits_{n=1,2,\dots} a_n$. 2. Je-li $g' > \inf\limits_{n=1,2,\dots} a_n$, existuje aspoň jedno přirozené k tak, že $a_k < g'$. Posloupnost, jež je shora i zdola omezená, se nazývá krátce *omezená*.[6])

Věta 54. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Budiž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Podle definice 6 (viz též cvič. 1 k § 1) existuje k číslu $\varepsilon = 1$ přirozené číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < 1$. Položme

$$K = \mathrm{Max}\,(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a + 1);\; k = \mathrm{Min}\,(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a - 1).$$

Je-li $n > n_0$, je $a - 1 < a_n < a + 1$ a tedy $k < a_n < K$; je-li však $n \leqq n_0$, je zřejmě $k \leqq a_n \leqq K$. Vskutku je tedy $k \leqq a_n \leqq K$ pro všechna n.

Poznámka. Všimněte si však, že omezená posloupnost nemusí být konvergentní, viz posloupnost (4) v § 1.

Věta 55. *Je-li*

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b, \tag{19}$$

je

$$\lim (a_n + b_n) = a + b, \tag{20}$$

$$\lim a_n b_n = ab \tag{21}$$

a v případě $b \neq 0$ též

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \tag{22}$$

Důkaz. Předpokládejme, že platí (19).

I. Máme dokázat, že posloupnost, jejíž n-tý člen je $a_n + b_n$, má limitu $a + b$. Jest

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqq |a_n - a| + |b_n - b|. \tag{23}$$

Budiž ε libovolné kladné číslo; položme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle (19) existuje předně číslo n_1 tak, že pro $n > n_1$ je

$$|a_n - a| < \delta \tag{24}$$

[5]) Stačí si všimnout toho, že prvky množiny M jsou právě čísla $a_1, a_2, \dots$

[6]) Místo $\sup\limits_{n=1,2,\dots} a_n$ lze ovšem psát též $\sup\limits_{q=1,2,\dots} a_q$ apod.

a dále existuje číslo n_2 tak, že pro $n > n_2$ je

(25) $$|b_n - b| < \delta.$$

Položme $n_0 = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$; pro každé $n > n_0$ je současně $n > n_1$ i $n > n_2$, takže platí (24), (25) a z (23) plyne $|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\delta = \varepsilon$. Tedy platí (20).

II. Podle věty 54 a podle (19) existuje $k > 0$ tak, že pro všechna n je $|b_n| < k$; položme $K = \operatorname{Max}(k, |a|)$, takže $K > 0$. Jest

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)\, b_n + (b_n - b)\, a$$

(všimněte si tohoto rozkladu, často se podobného obratu užívá) a tedy

(26) $$|a_n b_n - ab| \leqq K(|a_n - a| + |b_n - b|).$$

Budiž $\varepsilon > 0$; zvolme δ tak, že $2K\delta = \varepsilon$, tj. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2K}$. Podle (19) existují čísla n_1, n_2 tak, že jest

(27) $$|a_n - a| < \delta \text{ pro } n > n_1; \quad |b_n - b| < \delta \text{ pro } n > n_2.$$

Položme $n_0 = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$; tím je každému $\varepsilon > 0$ přiřazeno jisté n_0; pro $n > n_0$ je pak podle (26), (27) $|a_n b_n - ab| < 2K\delta = \varepsilon$ a tedy platí (21).

III. Budiž nyní $b \neq 0$, takže $|b| > 0$. Dokažme napřed, že

(28) $$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Podle (19) existuje číslo n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ a tedy podle vzorce (14), kap. I $|b_n| = |b - (b - b_n)| \geqq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$.

Pro $n > n_1$ je tedy

(29) $$|b_n| > \tfrac{1}{2}|b| > 0$$

a tedy $b_n \neq 0$, takže $\dfrac{1}{b_n}$ má smysl $\left(\text{že pro } n \leqq n_1 \text{ nemusí } \dfrac{1}{b_n} \text{ mít smysl, nevadí, viz poznámku 1 ke konci § 1}\right)$. Pro $n > n_1$ je dále podle (29)

(30) $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leqq \frac{|b_n - b|}{\frac{1}{2}|b| \cdot |b|} = \frac{2\,|b_n - b|}{b^2}.$$

Budiž $\varepsilon > 0$ a volme δ tak, že $2\delta b^{-2} = \varepsilon$, tj. $\delta = \frac{1}{2}b^2\varepsilon$. Existuje n_2 tak, že pro $n > n_2$ je $|b_n - b| < \delta$. Klademe-li $n_0 = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$, je pro $n > n_0$ podle (30) $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| <$

$< \frac{2\delta}{b^2} = \varepsilon$; tedy platí (28). Podle (19), (28) je $\lim a_n = a$, $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$; podle II je tedy

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b},$$

čímž je (22) dokázáno.

Poznámka 1. Je-li $\lim a_n = a$ a je-li c libovolné číslo, je $\lim c = c$ a tedy podle (21) $\lim a_n c = ac$; speciálně $\lim (-a_n) = -a$ (pro $c = -1$). Platí-li (19), je $\lim (-b_n) = -b$ a tedy $\lim (a_n - b_n) = \lim (a_n + (-b_n)) = a + (-b) = a - b$. Všechny tyto výsledky (i s větou 55) lze tedy shrnout přehledně do těchto rovnic:

$$\begin{gathered}\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n\,; \quad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n\,; \\ \lim ca_n = c \lim a_n\,; \quad \lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n\,; \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.\end{gathered} \tag{31}$$

Přitom je nutno rovnicm (31) rozumět takto: má-li pravá strana některé z těchto rovnic smysl,[7]) má smysl i levá strana a rovná se pravé straně. Úplnou indukcí lze ovšem rovnice (20), (21) rozšířit na větší počet sčítanců nebo činitelů; např.: je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $\lim c_n = c$, $\lim d_n = d$, je $\lim (a_n + b_n + c_n + d_n) = a + b + c + d$.

Příklad 1. Opětovným použitím rovnic (31) můžeme řešit i složitější příklady. Hledejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 2}$$

(tj. ptejme se, zda tato limita existuje a — jestliže existuje — jaká je její hodnota). Jest $n^2 - 3n + 2 = n(n-3) + 2 \geqq 2$ pro $n \geqq 3$, takže napsaný zlomek má pro $n \geqq 3$ smysl (jmenovatel $\neq 0$). Čitatel nemá limitu (není totiž shora omezen), rovněž jmenovatel. Proto upravme pro $n \geqq 3$ takto:

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 2} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n^2}}.$$

Víme, že $\lim c = c$, $\lim \frac{1}{n} = 0$. Podle (31) dostáváme postupně: $\lim \left(-3 \cdot \frac{1}{n}\right) = -3 \cdot 0 = 0$, $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim 2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \lim \frac{1}{n^2} = 0$,

[7]) To znamená ovšem: existují-li limity vpravo a — jde-li o poslední rovnici — je-li $\lim b_n \neq 0$ (naproti tomu *smí* ovšem být $\lim a_n = 0$, i v poslední rovnici).

$\lim\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2+0=2$, $\lim\left(1-3\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)=1+0+0=1$; limita jmenovatele je $\neq 0$ a tedy hledaná limita existuje a je rovna $\frac{2}{1}=2$.

Příklad 2. $\lim\frac{n+2}{n^2-n}=0$. Důkaz: $n^2-n=n(n-1)\neq 0$ pro $n>1$.

Upravím-li zlomek na tvar $\dfrac{1+\frac{2}{n}}{n-1}$, nemá ještě jmenovatel limitu (není totiž omezen).

Proto jej upravme na tvar $\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}$; zde je $\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0$ (to nevadí), $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=$ $=1\neq 0$, tedy hledaná limita existuje a je rovna $\frac{0}{1}=0$.

Věta 56. *Nechť existuje* $\lim a_n=a$. *Potom existuje též* $\lim|a_n|=|a|$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon>0$; podle předpokladu existuje n_0 tak, že pro $n>n_0$ je $|a_n-a|<\varepsilon$; pro $n>n_0$ je tedy

$$|a_n|=|a+(a_n-a)|\leqq|a|+|a_n-a|<|a|+\varepsilon,$$
$$|a|=|a_n+(a-a_n)|\leqq|a_n|+|a-a_n|<|a_n|+\varepsilon,$$

tj. $|a_n|>|a|-\varepsilon$, tedy celkem $|a|-\varepsilon<|a_n|<|a|+\varepsilon$; tedy vskutku $\lim|a_n|=$ $=|a|$.

Poznámka 2. Obrátit se věta nedá: existuje-li $\lim|a_n|$, *nemusí* existovat $\lim a_n$. Příklad: volme $a_n=(-1)^{n+1}$, takže máme posloupnost $1, -1, 1, -1, \ldots$, jež je divergentní, ač posloupnost $|a_1|, |a_2|, \ldots$, tj. posloupnost $1, 1, 1, \ldots$ je konvergentní. Ale v jednom speciálním případě se věta 56 přece dá obrátit, totiž tehdy, jde-li o limitu rovnou nule:

Věta 57. *Rovnice* $\lim a_n=0$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $\lim|a_n|=0$.

Důkaz. První rovnice znamená: „ke každému $\varepsilon>0$ existuje n_0 tak, že pro $n>n_0$ je $|a_n-0|<\varepsilon$“. Druhá rovnice znamená: „ke každému $\varepsilon>0$ existuje n_0 tak, že pro $n>n_0$ je $||a_n|-0|<\varepsilon$“. Ale oba tyto výroky znamenají totéž, neboť $|a_n-0|=||a_n|-0|$ (levá strana této rovnice je číslo $|a_n|$, pravá strana je prostá hodnota čísla $|a_n|$, tedy opět číslo $|a_n|$).

Věta 58. *Nechť* $\lim a_n=0$; *nechť existuje číslo* n_1 *tak, že pro* $n>n_1$ *je* $|b_n|\leqq$ $\leqq|a_n|$. *Potom je též* $\lim b_n=0$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon>0$; potom existuje n_2 tak, že pro každé $n>n_2$ je $|a_n-0|<$ $<\varepsilon$, tj. $|a_n|<\varepsilon$. Budiž $n_0=\mathrm{Max}(n_1,n_2)$. Pro každé $n>n_0$ je pak $|b_n-0|=$ $=|b_n|\leqq|a_n|<\varepsilon$, tedy $\lim b_n=0$.

Příklad 3 (důležitý). *Budiž* $|a| < 1$, tj. $-1 < a < 1$. *Potom je* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Důkaz. 1. Pro $a = 0$ je $a^n = 0$, $\lim 0 = 0$. 2. Budiž $0 < a < 1$, tedy $\frac{1}{a} > 1$. Kladme $h = \frac{1}{a} - 1$, tedy $h > 0$, $\frac{1}{a} = 1 + h$. Pro $n > 1$ je

$$(32) \qquad (1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n > 1 + nh$$

(neboť vynechané členy jsou kladné; nerovnosti (32), jež platí pro každé kladné h a každé celé $n > 1$, se často užívá). Tedy je pro $n > 1$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (1 + h)^n > 1 + nh > nh\,, \quad a^n < \frac{1}{hn}\,.$$

Jest $\lim \frac{1}{nh} = \frac{1}{h} \lim \frac{1}{n} = 0$. Ježto je vše kladné, je $|a^n| < \left|\frac{1}{nh}\right|$ pro $n > 1$ a podle věty 58 je $\lim a^n = 0$.

3. Budiž $-1 < a < 0$; tedy $0 < |a| < 1$; podle případu 2 je $\lim |a^n| = \lim |a|^n = 0$, tedy (podle věty 57) $\lim a^n = 0$.

Příklad 4 (rovněž důležitý). *Budiž* $x > 0$; *potom je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Důkaz. 1. Případ $x = 1$ je jasný.

2. Budiž $x > 1$, takže též $\sqrt[n]{x} > 1$ (viz cvič. 1 k § 8, kap. I nebo větu 45). Položme $\sqrt[n]{x} = 1 + h_n$, takže $h_n > 0$. Podle (32) je $x = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n > nh_n$ pro $n > 1$, tedy $0 < h_n < \frac{x}{n}$. Ježto $\lim \frac{x}{n} = x \,.\, \lim \frac{1}{n} = 0$, plyne jako v příkladu 3 $\lim h_n = 0$, tj. $\lim \sqrt[n]{x} = 1$.

3. Budiž $0 < x < 1$; kladme $y = \frac{1}{x}$, tedy $y > 1$. Jest $\sqrt[n]{y}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{1} = 1$, $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$. Podle případu 2 a podle (31) je tedy

$$\lim \sqrt[n]{x} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Z nerovnosti mezi limitami plynou nerovnosti mezi členy posloupností:

Věta 59. *Budiž* $\lim a_n < \lim b_n$. *Potom existuje* n_0 *tak, že pro* $n > n_0$ *jest* $a_n < b_n$.

Důkaz. Položme $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$, tedy $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon = b - \varepsilon$. Existují čísla n_1, n_2 tak, že je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro $n > n_1$, $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ pro $n > n_2$. Klademe-li $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$, platí pro každé $n > n_0$ nerovnosti $a_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < b_n$, tedy $a_n < b_n$.

Poznámka 3. Klademe-li speciálně $b_n = b$, dostáváme (ježto $\lim b = b$): je-li $\lim a_n < b$, existuje n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $a_n < b$. Obdobně (klaďme $a_n = a$): je-li $\lim b_n > a$, existuje n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $b_n > a$.

Z nerovností mezi členy posloupnosti plynou naopak nerovnosti mezi limitami:

Věta 60. *Nechť existují* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *a nechť existuje* n_1 *tak, že pro* $n > n_1$ *je* $a_n \leqq b_n$. *Potom je* $a \leqq b$.

Důkaz. Nechť je naopak $a > b$; položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$, takže $\varepsilon > 0$, $b + \varepsilon = a - \varepsilon$. Existují čísla n_2, n_3 tak, že je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro $n > n_2$, $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ pro $n > n_3$. Zvolíme-li n větší než $\text{Max}(n_1, n_2, n_3)$, vychází $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$, což je ve sporu s nerovností $a_n \leqq b_n$.

Poznámka 4. Klademe-li jednou $b_n = b$, po druhé $a_n = a$, dostáváme: existuje-li $\lim a_n$ a je-li $a_n \leqq b$ pro všechna $n > n_1$, je též $\lim a_n \leqq b$; existuje-li $\lim b_n$ a je-li $b_n \geqq a$ pro všechna $n > n_1$, je též $\lim b_n \geqq a$.

Poznámka 5. Existují-li $\lim a_n$, $\lim b_n$ a je-li $a_n < b_n$ pro všechna $n > n_1$, je podle věty 60 $\lim a_n \leqq \lim b_n$; *nemusí však být* $\lim a_n < \lim b_n$ (tj. může platit znamení rovnosti). Např. je $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, ale $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{2}{n} = 0$. Pamatujme si toto upozornění třeba pod heslem „nerovnost může v limitě přejít v rovnost". Začátečník snadno na tuto okolnost zapomene, což může být zdrojem nejhrubších chyb.

Věta 61. *Budiž* $\lim a_n = \lim b_n = a$; *nechť existuje číslo* n_1 *tak, že pro* $n > n_1$ *je* $a_n \leqq c_n \leqq b_n$. *Potom existuje též* $\lim c_n$ *a jest* $\lim c_n = a$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují čísla n_2, n_3 tak, že je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro $n > n_2$, $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$ pro $n > n_3$. Položme $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2, n_3)$; pro $n > n_0$ je potom $a - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < a + \varepsilon$ a tedy $|c_n - a| < \varepsilon$; tedy $\lim c_n = a$.

Poznámka 6. Nejpodstatnější rozdíl mezi větou 60 a větou 61 je ten, že věta 61 zaručuje *existenci* jisté limity, totiž $\lim c_n$. Budiž $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$; budiž $c_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, je-li n prvočíslo, $c_n = 1 + \frac{1}{n}$, není-li n prvočíslo. Je-li n velké, je leckdy dosti obtížné vypočíst c_n (tj. zjistit, zda n je prvočíslo). Přesto z věty 61 ihned plyne $\lim c_n = 1$, neboť $a_n \leqq c_n \leqq b_n$, $\lim a_n = \lim b_n = 1$.

Budiž opět dána posloupnost

$$(18) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots ;$$

budiž $k_1, k_2, \ldots$ posloupnost přirozených čísel taková, že $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ (obecně $k_n < k_{n+1}$). Potom posloupnost

$$(33) \qquad a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots \text{ (n-tý člen je } a_{k_n})$$

nazýváme posloupností *vybranou* z posloupnosti (18). Posloupnost (33) vzniká tedy tím, že z posloupnosti (18) podržíme pouze členy s indexy $k_1, k_2, \ldots$ Poznamenejme, že $k_n \geqq n$. (Neboť $k_1 \geqq 1$, tedy $k_2 > 1$, a tedy $k_2 \geqq 2$ (neboť k_2 je celé číslo); obecně: je-li již dokázáno, že $k_n \geqq n$, dostáváme $k_{n+1} > n$ a tedy $k_{n+1} \geqq n + 1$.) Příklady vybraných posloupností:

(34) $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots (k_1 = 2, k_2 = 4, \ldots,$ obecně $k_n = 2n)$;

(35) $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots (k_1 = 1, k_2 = 3, \ldots,$ obecně $k_n = 2n - 1)$;

(36) $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots (k_1 = 1, k_2 = 4, \ldots,$ obecně $k_n = n^2)$;

(37) $a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, a_{17}, \ldots$ (obecně $k_n = p_n$, kde p_n značí n-té prvočíslo; snad víte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, takže dostáváme vskutku nekonečnou posloupnost);

(38) $a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots (k_1 = 5, k_2 = 6, \ldots,$ obecně $k_n = n + 4)$.

Věta 62. *Nechť posloupnost* (18) *má limitu a; potom každá vybraná posloupnosi má limitu a* (takže všechny vybrané posloupnosti jsou konvergentní a mají touž limitu).

Důkaz. Budiž (33) vybraná posloupnost; její n-tý člen označme pro zkrácení b_n, takže $b_n = a_{k_n}$. Máme dokázat, že $\lim b_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$; ježto $\lim a_n = a$, existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Je-li $n > n_0$, je $k_n > n_0$ (neboť $k_n \geqq n$) a tedy $|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$; tedy vskutku $\lim b_n = a$.

Příklad 5. Položme $a_n = \dfrac{1}{n}$, takže $\lim a_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$. Vytvoříme-li vybrané posloupnosti, uvedené v (34) až (38), dostaneme $\lim \dfrac{1}{2n} = \lim \dfrac{1}{2n - 1} = \lim \dfrac{1}{n^2} =$
$= \lim \dfrac{1}{p_n} = \lim \dfrac{1}{n + 4} = 0.$

Příklad 6. Položme $a_n = (-1)^{n+1}$, takže máme posloupnost $1, -1, 1, -1, \ldots$ Vybraná posloupnost (35) je $1, 1, 1, \ldots$ a má limitu 1, kdežto vybraná posloupnost (34) je $-1, -1, -1, \ldots$ a má tedy *jinou* limitu -1. Posloupnost $1, -1, 1, -1, \ldots$ je tedy divergentní (podle věty 62), což jsme jiným způsobem zjistili již v § 1.

Cvičení

1. Je-li k celé kladné, $\lim a_n = a$, je $\lim a_n^k = a^k$; totéž platí pro k celé záporné, je-li $a \neq 0$.

2. Z cvičení 1 odvoďte: pro každé celé k je $\lim \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k = 1$; pro každé celé *kladné* k je $\lim n^{-k} = 0$.

3. Je-li k přirozené číslo, $a_n > 0$, $\lim a_n = a$, je $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$. (Návod: budiž $\varepsilon > 0$; kdyby bylo $\sqrt[k]{a_n} \geqq \sqrt[k]{a} + \varepsilon$, bylo by podle binomické věty $a_n \geqq a + \varepsilon^k$, což je pro velká n nemožné. Podobně nemůže být $\sqrt[k]{a} \geqq \sqrt[k]{a_n} + \varepsilon$ pro velká n. Pro dosti velká n je tedy $\sqrt[k]{a} - \varepsilon < \sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{a} + \varepsilon$.)

4. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (pro $n > 1$ položme $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, tedy $h_n > 0$; binomická věta dává $n > \frac{1}{2}n(n-1)\,h_n^2$, odtud $\lim h_n^2 = 0$ a podle cvičení 3 též $\lim h_n = 0$).

5. Nechť existuje číslo $\delta < 1$ a přirozené číslo n_1 tak, že pro každé $n \geqq n_1$ je $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \delta$; potom je $\lim a_n = 0$ (užij příkl. 3 a věty 58).

6. Nechť existuje $\delta < 1$ a přirozené n_1 tak, že pro každé $n \geqq n_1$ je $|a_{n+1}| < \delta |a_n|$; potom je $\lim a_n = 0$ (pro $n > n_1$ je $|a_n| \leqq \delta^n . \delta^{-n_1} |a_{n_1}|$; užij příkl. 3, (31) a věty 58).

7. Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je $\lim a_n = 0$ (budiž l hodnota té limity; pro dosti velká n je $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2}(l+1)$; užij cvičení 5).

8. Obdobně: je-li $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, je $\lim a_n = 0$.

9. Z cvičení 8 odvoďte $\lim (a^n : n!) = 0$, $\lim ((n!)^2 : (2n)!) = 0$.

10. Z cvičení 6 odvoďte $\lim (n! : n^n) = 0$ (klademe-li $a_n = n! : n^n$, je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{ježto} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqq 1 + n . \frac{1}{n}\bigg).$$

11. Je-li $|x| < 1$, k celé, je $\lim n^k x^n = 0$ (užij cvičení 2, 8).

12. Je-li $a_1, a_2, \ldots$ omezená posloupnost, je $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n \leqq \sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. Znamení rovnosti platí jen tehdy, jsou-li si všechny členy rovny.

13. Je-li $a_1, a_2, \ldots$ shora omezená, je $-a_1, -a_2, \ldots$ zdola omezená a je $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} (-a_n) = -\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. Obdobně, vyměníme-li slova „shora“ a „zdola“.

14. Je-li $a_1, a_2, \ldots$ shora omezená a je-li $b_n \leqq a_n$ pro všechna n, je též $b_1, b_2, \ldots$ shora omezená a je $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} b_n \leqq \sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. Obdobně pro zdola omezené posloupnosti.

15. Je-li $a_1, a_2, \ldots$ shora (zdola) omezená, je i každá vybraná posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ shora (zdola) omezená a jest $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_{k_n} \leqq \sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ $\left(\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_{k_n} \geqq \inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n\right)$.

16. Zjistěte, které z posloupností (2) až (11) jsou shora (zdola) omezené a najděte jejich supremum (infimum).

§ 3. Nevlastní limity. Posloupnosti (6), (7), (8), (9) z § 1 jsou divergentní, ježto nejsou omezené. Přesto některé z nich mají zvláště jednoduché vlastnosti. Všimněme si např. posloupnosti

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots (a_n = n^2)\,. \tag{6}$$

Vidíme, že členy této posloupnosti „s rostoucím indexem vzrůstají nad každé číslo“; přesně řečeno: ke každému číslu A existuje číslo n_0 tak, že pro každé přirozené číslo $n > n_0$ je $a_n > A$. Vskutku: je-li předně $A \leqq 0$, stačí volit $n_0 = 0$, neboť pro $n > 0$ je $n^2 > 0 \geqq A$; je-li však za druhé $A > 0$, stačí volit $n_0 = \sqrt{A}$,[8]) neboť pro $n > n_0$ je $n^2 > n_0^2 = A$. Je přirozené: čím větší je A, tím větší musíme volit n_0, chceme-li, aby pro všechna $n > n_0$ bylo $n^2 > A$.

Podobnou vlastnost (jenže s opačným znamením) má posloupnost

$$-1, -3, -5, -7, \dots (a_n = -2n + 1)\,. \tag{7}$$

Zde platí toto: ať je A jakékoliv číslo, existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n < A$. Stačí vskutku volit n_0 tak, že $-2n_0 + 1 = A$, tj. $n_0 = \frac{1}{2}(1 - A)$; pro $n > n_0$ je pak $-2n + 1 < -2n_0 + 1 = A$. Přirozeně: volím-li A daleko vlevo na číselné ose (tj. volím-li A záporné s velmi velkou prostou hodnotou), vyjde n_0 velmi veliké; např. pro $A = -1000$ vyjde $n_0 = 500 + \frac{1}{2}$, pro $A = -100\,000$ vyjde $n_0 = 50\,000 + \frac{1}{2}$ atd.

Vlastnosti posloupností (6), (7), jež jsme právě probrali, vyjadřujeme krátce slovy: posloupnost (6) má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost (7) má nevlastní limitu $-\infty$. Definujeme pak obecně:

Definice 7. *Nechť ke každému číslu A existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n > A$. Potom říkáme, že posloupnost $a_1, a_2, \dots$ má nevlastní limitu $+\infty$* (čti: plus nekonečno) *a vyjadřujeme to znakem*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,. \tag{39}$$

Definice 8. *Nechť ke každému číslu A existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n < A$. Potom říkáme, že posloupnost $a_1, a_2, \dots$ má nevlastní limitu $-\infty$* (čti: minus nekonečno) *a vyjadřujeme to znakem*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,. \tag{40}$$

Čtenář se nemusí lekat toho, že se v (39), (40) vyskytuje $+\infty$, $-\infty$, ačkoliv jsme tyto dvě věci dosud nedefinovali. Vzorec (39) (a podobně (40)) je pro nás prostě nedělitelný symbol, který neznamená nic jiného, než že posloupnost $a_1, a_2, \dots$ má

[8]) Mohli bychom ovšem za n_0 volit též kterékoliv číslo větší než $\sqrt{A}$.

vlastnost, popsanou obšírně v definici 7 (nebo 8).[9]) Rovněž snad čtenáři nevadí, že „nevlastní limita" podle def. 7, 8 není „limitou" ve smyslu definice 6.[10]) Ostatně se limitě ve smyslu definice 6 říkává často „vlastní limita", aby se odlišila od nevlastní limity. Slovem „limita" bez další poznámky budeme v této knize rozumět vždy vlastní limitu; kde připouštím též nevlastní limitu, připomenu to výslovně. Slov „konvergentní posloupnost" užíváme jen pro posloupnosti, jež mají vlastní limitu; ostatní posloupnosti nazýváme divergentními, i když mají nevlastní limitu.

Příklad 1. Již jsme zjistili, že $\lim n^2 = +\infty$, $\lim(-2n + 1) = -\infty$.

Příklad 2. Je-li dána posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, \tag{41}$$

jsou zřejmě možné jenom tyto případy:

1) Existuje vlastní $\lim a_n$.
2) Jest $\lim a_n = +\infty$.
3) Jest $\lim a_n = -\infty$.
4) Neexistuje ani vlastní ani nevlastní $\lim a_n$.

Tvrdím, že se tyto čtyři možnosti navzájem vylučují. Že čtvrtá možnost vylučuje první tři, je jasné: Že se první tři možnosti navzájem vylučují, bude zřejmě dokázáno, dokážeme-li tato tři tvrzení: A) Má-li posloupnost (41) vlastní limitu, je omezená (shora i zdola). B) Je-li $\lim a_n = +\infty$, je posloupnost (41) zdola omezená, ale není shora omezená. C) Je-li $\lim a_n = -\infty$, je posloupnost (41) shora omezená, ale není zdola omezená. Tvrzení A) bylo dokázáno ve větě 54. Budiž nyní $\lim a_n = +\infty$; budiž K libovolné číslo. Potom existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $a_n > K$. Tedy není posloupnost (41) shora omezená. Za druhé je pro každé n platna nerovnost $a_n \geqq \mathrm{Min}(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, K)$, takže (41) je zdola omezená. Tím je dokázáno tvrzení B); tvrzení C) se dokáže obdobně.

Příklad 3. Z příkladu 2 ihned následuje, že věta „každá posloupnost má nejvýše jednu limitu" (věta 51) zůstává v platnosti i tehdy, připouštíme-li též nevlastní limity.

Příklad 4. Má-li posloupnost (41) vlastní nebo nevlastní limitu, má každá vybraná posloupnost

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots \tag{42}$$

---

[9]) Mohli bychom též rozšířit množinu reálných čísel o dvě „věci", zvané $+\infty$, $-\infty$ a pojímat vzorce (39), (40) skutečně jako rovnost mezi levou a pravou stranou; později tak skutečně učiníme, nikoli však v této elementární knize.

[10]) Také v obecné mluvě se vyskytují podobné úkazy. Definujeme-li pojem „matka" slovy „matka osoby A je žena, která osobu A porodila" (což je obvyklý smysl slova matka), není nevlastní matka osoby A matkou osoby A.

touž limitu. Důkaz: Pro vlastní limitu viz větu 62. Budiž za druhé $\lim a_n = +\infty$. Budiž A libovolné číslo; existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $a_n > A$. Je-li $n > n_0$, je $k_n > n_0$ (ježto $k_n \geqq n$) a tedy $a_{k_n} > A$; tedy $\lim a_{k_n} = +\infty$. Případ $\lim a_n = -\infty$ se řeší obdobně.

Příklad 5. Příklady ke čtvrté možnosti příkladu 2: posloupnosti

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \tag{4}$$

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots \tag{8}$$

$$1, 1, 2, \tfrac{1}{2}, 3, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{4}, \dots \tag{9}$$

nemají ani vlastní ani nevlastní limitu,[11]) neboť z každé z nich lze vybrat dvě posloupnosti s různými (popř. nevlastními) limitami:

Z posloupnosti (4):

$$1, 1, 1, \dots;\ -1, -1, -1, \dots;\ \text{limity } 1, -1\,.$$

Z posloupnosti (8):

$$-1, -3, -5, \dots;\ 2, 4, 6, \dots;\ \text{limity } -\infty, +\infty\,.$$

Z posloupnosti (9):

$$1, 2, 3, 4, \dots;\ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots;\ \text{limity } +\infty, 0\,.$$

Příklad 6. Budiž dána posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \dots \tag{P}$$

a budiž dána jakákoliv posloupnost přirozených čísel $r_1, r_2, r_3, \dots$ Sestrojme posloupnost (P′) takto: napřed přijde r_1-kráte člen a_1, potom r_2-kráte člen a_2 atd. Je-li např. $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 4$, $r_4 = 2, \dots$, vypadá (P′) takto:

$$a_1, a_1, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3, a_4, a_4, a_5, \dots$$

Tvrdím: má-li jedna z posloupností (P), (P′) limitu (vlastní nebo nevlastní), mají obě limitu, a to touž.

Důkaz. I. Nechť má (P′) limitu (stále připouštím i nevlastní); ježto (P) je vybraná posloupnost z (P′), má i (P) touž limitu. II. Nechť má (P) limitu, napřed třeba vlastní: $\lim a_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje přirozené n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Položme $n_0 = r_1 + r_2 + \dots + r_{n_1}$. Prvních n_0 členů posloupnosti (P′) jsou právě $a_1, \dots, a_{n_1}$ (první z nich r_1-kráte atd.); za nimi přijdou již členy a_m s indexem $m > n_1$. Je-li tedy $n > n_0$, liší se n-tý člen posloupnosti (P′) od čísla a o méně než ε. Tedy má posloupnost (P′) limitu a. Podobně se řeší případy $\lim a_n = +\infty$, $\lim a_n = -\infty$ (pouze místo $|a_n - a| < \varepsilon$ se píše nerovnost $a_n > A$, popř. $a_n < A$).

[11]) U posloupnosti (8) to plyne též z toho, že není shora ani zdola omezená.

Příklad 7. Je-li $\lim a_n = +\infty$, je $\lim(-a_n) = -\infty$ a naopak, je-li $\lim a_n = -\infty$, je $\lim(-a_n) = +\infty$. Důkaz: Budiž $\lim a_n = +\infty$; budiž dáno A. K číslu $-A$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $a_n > -A$, tj. $-a_n < A$. Tedy $\lim(-a_n) = -\infty$. Druhá část obdobně.

Příklad 8 (důležitý). Pro $|a| < 1$ je podle § 2, příkl. 3 $\lim a^n = 0$. Proberme ještě ostatní případy. I. Je-li $a = 1$, je $\lim a^n = 1$. II. Je-li $a > 1$, položme $h = a - 1$, tedy $h > 0$, $a = 1 + h$, $a^n = (1 + h)^n \geqq 1 + nh > nh$. Budiž A libovolné číslo, položme $n_0 h = A$, tj. $n_0 = \frac{A}{h}$. Pro $n > n_0$ je $a^n > nh > n_0 h = A$; tedy $\lim a^n = +\infty$. III. Je-li $a < -1$, je $|a| > 1$ a tedy $\lim |a|^n = +\infty$. Vezměme vybrané posloupnosti

$$a^2, a^4, a^6, \ldots; a^1, a^3, a^5, \ldots,$$

tj.

$$|a|^2, |a|^4, |a|^6, \ldots; -|a|^1, -|a|^3, -|a|^5, \ldots;$$

první má limitu $+\infty$, druhá $-\infty$. Tedy neexistuje $\lim a^n$ (vlastní ani nevlastní). IV. Obdobný výsledek platí pro $a = -1$ (posloupnost $-1, 1, -1, 1, \ldots$). Tedy celkem: $\lim a^n = 0$ pro $-1 < a < 1$, $\lim a^n = 1$ pro $a = 1$, $\lim a^n = +\infty$ pro $a > 1$. Pro $a \leqq -1$ neexistuje vlastní ani nevlastní limita.

Cvičení

1. K definicím 7, 8 lze učinit obdobné poznámky A), B), C), jako byly učiněny k definici 6 ve cvičení 1, § 1. Poznámka C) má nyní tento tvar: Smysl definice 7 se nezmění, omezíme-li se na ona A, jež jsou větší než jakékoliv předem dané číslo A_0; podobně se v definici 8 smíme omezit na hodnoty $A < A_0$.

2. Věta 53 platí i pro nevlastní limity; proto můžeme (a také budeme) o nevlastních limitách mluvit i tehdy, když *konečný* počet členů posloupnosti není definován.

3. Je-li $\lim a_n = +\infty$ (popř. $-\infty$) a existuje-li n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $b_n \geqq a_n$ (popř. $b_n \leqq a_n$), je též $\lim b_n = +\infty$ (popř. $-\infty$).

4. Je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $-\infty$, je $\lim |a_n| = +\infty$. Obrátit se tato věta nedá: je-li $a_n = (-1)^n n$, je $\lim |a_n| = +\infty$, ale $\lim a_n$ (vlastní ani nevlastní) neexistuje.

5. Nevlastní limita $\lim a_n$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li $\lim |a_n| = +\infty$ a jsou-li pro $n > n_1$ všechna a_n kladná (potom je $\lim a_n = +\infty$) nebo všechna a_n záporná (potom je $\lim a_n = -\infty$). Srovnej s cvičením 4.

Rovnice (31) obsahují věty o $\lim(a_n \pm b_n)$, $\lim a_n b_n$, $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Následující cvičení obsahují obdobné věty pro nevlastní limity.

6. Je-li $\lim a_n = +\infty$ a je-li posloupnost $b_1, b_2, \ldots$ zdola omezená, je $\lim(a_n + b_n) = +\infty$ (návod: $b_n > k$; budiž dáno A; existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $a_n > A - k$, tedy $a_n + b_n > A$). Speciálně: existuje-li $\lim b_n \neq -\infty$ a je-li $\lim a_n = +\infty$, je $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

7. Je-li však $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$, jsou možné nejrůznější případy: budiž třeba $a_n = n$; je-li $b_n = -n + a$, je $\lim (a_n + b_n) = a$; je-li $b_n = -\frac{1}{2}n$, je $\lim (a_n + b_n) = +\infty$; je-li $b_n = -2n$, je $\lim (a_n + b_n) = -\infty$; je-li $b_n = -n + (-1)^n$, neexistuje $\lim (a_n + b_n)$ (vlastní ani nevlastní).

8. Proberte obdobně k cvičení 6 případ $\lim a_n = -\infty$.

9. Je-li $\lim a_n = +\infty$ a existuje-li *kladné* číslo b tak, že pro $n > n_1$ je $b_n \geqq b$, je $\lim a_n b_n = +\infty$; platí-li $b_n \leqq -b$ místo $b_n \geqq b$, vyjde $\lim a_n b_n = -\infty$. Speciálně: je-li $\lim a_n = +\infty$ a existuje-li $\lim b_n$ (vlastní nebo nevlastní) *různá od nuly*, existuje nevlastní $\lim a_n b_n$; snadno zjistíte, kdy $+\infty$ a kdy $-\infty$. Obdobně pro $\lim a_n = -\infty$.

10. Je-li však $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = 0$, jsou možné nejrůznější případy: sestrojte příklady, v nichž $\lim a_n b_n$ je $+\infty$, $-\infty$, 0, vlastní kladná, vlastní záporná, popř. vůbec neexistuje.

11. Je-li $c > 0$, $\lim a_n = \pm\infty$, je $\lim ca_n = \pm\infty$, $\lim(-ca_n) = \mp\infty$, kde platí buďto všechna horní nebo všechna dolní znamení.

12. Ježto ovládáme násobení (cvičení 9, 10, 11), stačí, když místo podílu vyšetříme převrácenou hodnotu. Dokažte: tehdy a jen tehdy je $\lim |a_n| = +\infty$, je-li $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ (nevadí, je-li $a_n = 0$ pro *konečný* počet hodnot n, viz cvičení 2).

13. Je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, je $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$. Naopak: je-li $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ a jsou-li všechna a_n pro $n > n_1$ kladná nebo všechna záporná, existuje nevlastní $\lim a_n$. Omezení o znaménku je nutné: pro $a_n = (-1)^n \cdot n$ neexistuje $\lim a_n$, ač $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

14. Je-li $\lim a_n = 0$, nemusí být $\lim \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = +\infty$ $\left(\text{příklad: } a_n = 0 \text{ pro všechna } n, \dfrac{1}{a_n} \text{ nemá smyslu}\right)$. Platí však: budiž $\lim a_n = 0$; je-li $a_n \neq 0$ pro $n > n_1$, je $\lim \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = +\infty$; je-li $a_n > 0$ pro $n > n_1$, je $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$; je-li $a_n < 0$ pro $n > n_1$, je $\lim \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

15. Buďte dána čísla $A_0, A_1, \ldots, A_k$, k celé kladné, $A_0 \neq 0$. Potom je $\lim (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \ldots + A_{k-1} n + A_k) = +\infty$ pro $A_0 > 0$, $= -\infty$ pro $A_0 < 0$ (návod: vytkněte n^k a užijte cvičení 9).

16. Buďte k, l celá nezáporná čísla, $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$. Stanovte

$$\lim \frac{A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \ldots + A_k}{B_0 n^l + B_1 n^{l-1} + \ldots + B_l};$$

vyjde $\dfrac{A_0}{B_0}$ pro $k = l$, 0 pro $k < l$, $+\infty$ nebo $-\infty$ (podle toho, zda A_0, B_0 mají stejná či různá znamení) pro $k > l$.

17. Existuje-li číslo $\delta > 1$ a přirozené číslo n_1 tak, že pro každé $n \geqq n_1$ je

$$a_n > 0\,, \quad \sqrt[n]{a_n} > \delta\,,$$

je $\lim a_n = +\infty$ (důkazy v cvičení 17 až 20 jsou obdobné jako v § 2, cvičení 5 až 8).

18. Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ (po příp. $= +\infty$), je $\lim a_n = +\infty$.

19. Existuje-li číslo $\delta > 1$ a přirozené n_1 tak, že $a_{n_1} > 0$ a že pro $n \geqq n_1$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \delta$, je $\lim a_n = +\infty$[12].

20. Je-li $a_n > 0$ pro $n > n_1$, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, je $\lim a_n = +\infty$.

21. Kdybychom ve cvičení 19 místo $a_{n_1} > 0$ psali $a_{n_1} < 0$, dostali bychom $\lim a_n = -\infty$. Kdybychom podmínku $a_{n_1} > 0$ vynechali a místo $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \delta$ psali $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \delta$, dostali bychom $\lim |a_n| = +\infty$.

22. Je-li $\lim (a_{n+1} : a_n) < -1$, je $\lim |a_n| = +\infty$, ale $\lim a_n$ neexistuje (ani nevlastní).

23. $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$. (Návod: budiž $A > 0$; podle § 2, cvičení 9 je $A^n < n!$ pro $n > n_0$; utvořte n-tou odmocninu).

24. Budiž k celé; podle § 2, cvičení 11 je $\lim n^k x^n = 0$ pro $|x| < 1$. Vyšetřete ještě ostatní hodnoty x. Pro $x = 1$ vyjde limita $+\infty, 1, 0$, podle toho, zda $k > 0, = 0, < 0$. Pro $x > 1$ je limita $+\infty$. Pro $x = -1$, $k < 0$ je limita 0. Pro $x = -1$, $k = 0$ limita (ani nevlastní) neexistuje, ale $\lim |n^k x^n| = 1$.

V ostatních případech ($x = -1$, $k > 0$ nebo $x < -1$) neexistuje limita (ani nevlastní), ale $\lim |n^k x^n| = +\infty$.

§ 4. **Monotónní posloupnosti.** Jestliže v posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{43}$$

je $a_n < a_{n+1}$ pro každé n, tj. je-li každý následující člen větší než předcházející, říkáme, že posloupnost (43) je *rostoucí*; v takové posloupnosti je tedy $a_1 < a_2 < < a_3 < \ldots$ Mnohé úvahy, platné pro rostoucí posloupnosti, platí i tehdy, nahradíme-li znamení $<$ znamením $\leqq$. Proto dáváme takovým posloupnostem zvláštní jméno: je-li $a_n \leqq a_{n+1}$ pro každé n, říkáme, že posloupnost (43) je *neklesající*. Každá rostoucí posloupnost je neklesající, ale ne naopak. Obdobně: je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé n, říkáme, že posloupnost (43) je *klesající*; je-li $a_n \geqq a_{n+1}$ pro každé n, říkáme, že posloupnost (43) je *nerostoucí* (každá posloupnost klesající je ovšem nerostoucí, ale ne naopak). Posloupnostem neklesajícím a posloupnostem nerostoucím dáváme společný název: *posloupnosti monotónní*. Na názvy právě zavedené nutno dát trochu pozor: posloupnost, která není „rostoucí", nemusí být proto ještě „nerostoucí"; např. posloupnost

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots \left(a_{2n-1} = \frac{1}{2n},\quad a_{2n} = \frac{1}{2n-1}\right) \tag{3}$$

[12]) V předpokládané nerovnosti $a_{n+1} : a_n > \delta$ je obsažen (nevyslovený) předpoklad, že pro $n \geqq n_1$ je $a_n \neq 0$; jinak by totiž levá strana nerovnosti neměla smysl. Obdobně je třeba rozumět takovým výrokům v podobných případech: vyslovím-li někde předpoklad (nebo tvrzení), že je např. $A = B$, předpokládám (popř. tvrdím) tím, že předně oba výrazy A, B mají smysl a za druhé, že si jsou rovny.

není ani rostoucí

$$\left(\text{neboť např. } 1 > \frac{1}{4}, \quad \text{obecně } a_{2n} = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)} = a_{2n+1}\right)$$

ani nerostoucí

$$\left(\text{neboť např. } \frac{1}{2} < 1, \text{ obecně } a_{2n-1} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} = a_{2n}\right).$$

Všechny monotónní posloupnosti tvoří jen zcela speciální, ale velmi důležitou třídu posloupností. Z posloupností (2) až (11) v § 1 jsou (2), (7) klesající, (6), (10) rostoucí, (5) nerostoucí a současně neklesající (pro každé n je $a_n = a_{n+1} = 2$, tedy $a_n \geqq a_{n+1}$ a současně $a_n \leqq a_{n+1}$), kdežto (3), (4), (8), (9), (11) vůbec nejsou monotónní.

Pro monotónní posloupnosti dokážeme nyní dvě svrchovaně důležité věty. Budiž předně (43) posloupnost neklesající; potom je zdola omezená (neboť a_1 je její nejmenší člen, takže $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n = a_1$); může také, ale nemusí být shora omezená (viz (10), (6)). „Shora omezená" znamená tedy pro neklesající posloupnosti totéž jako „omezená". Platí pak tato věta:

Věta 63. *Posloupnost* (43) *budiž neklesající. Není-li shora omezená, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Je-li shora omezená, má vlastní limitu*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1,2,\ldots} a_n . \tag{44}$$

Důkaz. I. Není-li (43) shora omezená, existuje ke každému A přirozené číslo n_0 tak, že $a_{n_0} > A$ (tj.: aspoň jeden člen posloupnosti je větší než A). Ježto posloupnost je neklesající, platí pro $n > n_0$ nerovnost $a_n \geqq a_{n_0}$, tedy $a_n > A$. Tedy je $\lim a_n = +\infty$.

II. Budiž (43) shora omezená; položme $G = \sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. Je tedy předně $a_n \leqq G$ pro všechna n. Za druhé: je-li $\varepsilon > 0$, existuje v posloupnosti aspoň jeden člen větší než $G - \varepsilon$, tj. existuje přirozené číslo n_0 tak, že $a_{n_0} > G - \varepsilon$. Pro $n > n_0$ je $a_n \geqq a_{n_0}$, tedy $G - \varepsilon < a_n \leqq G < G + \varepsilon$, tj. $|a_n - G| < \varepsilon$. Tedy je $\lim a_n = G$.

Důsledek. *Je-li posloupnost* (43) *neklesající a shora omezená, je* $a_k \leqq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pro každé přirozené* k; to je zřejmé podle (44), neboť je jistě

$$a_k \leqq \sup_{n=1,2,\ldots} a_n .$$

Podobně: je-li posloupnost (43) nerostoucí, je vždy shora omezená (největší člen $= a_1 = \sup a_n$); zdola omezená být může, ale nemusí (viz (2), (7) v § 1). Platí pak

Věta 64. *Posloupnost* (43) *budiž nerostoucí. Není-li zdola omezená, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. *Je-li zdola omezená, má vlastní limitu*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n=1,2,\dots} a_n\,. \tag{45}$$

Důsledek. *Je-li posloupnost* (43) *nerostoucí a zdola omezená, je* $a_k \geqq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pro každé přirozené k.*

Důkaz, který je zcela obdobný důkazu věty 63, přenechávám čtenáři. Viz též cvičení 1. Z vět 63, 64 plyne ihned

Věta 65. *Monotónní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li omezená.*

Že každá konvergentní posloupnost je omezená, víme (věta 54). Víme však také, že omezená posloupnost *nemusí* být konvergentní (např. posloupnost (4) v § 1). Ale *monotónní* omezená posloupnost *je vždy* konvergentní.

Věty 63 až 65 jsou základního významu. Představme si, že chceme podle definice 6 zjistit, zda nějaká posloupnost $a_1, a_2, \dots$ je konvergentní; k tomu cíli sestrojíme výraz $|a_n - a|$; zjistíme-li, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, je posloupnost konvergentní a má limitu a. Abychom však tohoto postupu mohli užít, musíme napřed nějak uhodnout, *které* číslo a by mohlo být limitou posloupnosti, neboť jinak bychom výraz $|a_n - a|$ nemohli sestrojit.

U *monotónní* posloupnosti však stačí zjistit, že je omezená: potom je jistě konvergentní, i když nemáme na první pohled vůbec ponětí, jakou hodnotu by limita vyšetřované posloupnosti mohla mít; v tom je význam vět 63 až 65. Když jsme zjistili, že posloupnost má limitu (jejíž hodnotu třeba prozatím neznáme), naskýtá se ovšem další úkol: totiž nalézt postup, kterým lze hodnotu této limity s libovolně malou chybou vypočíst; tímto úkolem se budeme později též v mnohých případech zabývat (viz též příklad 3 v tomto §); ale první úkol, totiž zjistit *existenci* limity, se často řeší přímým použitím věty 65.

Důkaz vět 63 až 65 spočívá na pojmu „supremum a infimum posloupnosti"; tento pojem spočívá (viz počátek § 2) přímo na pojmu „supremum a infimum množiny"; a tento pojem spočívá na základních větách 39, 40. Vidíte, že věty 63 až 65 souvisejí úzce s větami 39, 40; bližší o tom viz v cvičení 12.

Následující příklady jsou velmi důležité v matematice.

Příklad 1. *Posloupnost, jejíž n-tý člen je* $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, *je konvergentní.* Pišme $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; limitu $\lim a_n$, jejíž existenci dokážeme, budeme vždy značit e; a naopak písmeno e bude vždy značit toto číslo. Číslo e je velmi důležité, jak poznáme později.

Důkaz. Položme $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; tvrdím, že posloupnost $b_1, b_2, \dots$ je klesající, tj. že $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$. Tato nerovnost (kterou máme dokázat) platí tehdy a jen tehdy, platí-li

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}, \quad \text{tj.} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n},$$

tj.

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{tj.} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n},$$

neboť $(n + 1)^2 = n(n + 2) + 1$.

Pro $h > 0$, $k > 1$, k celé je $(1 + h)^k > 1 + kh$; levá strana poslední nerovnosti je tedy větší než $1 + (n + 2) \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$. Tím je poslední nerovnost dokázána, takže posloupnost $b_1, b_2, \dots$ je klesající a ovšem zdola omezená (neboť $b_n > 0$); tedy existuje $\lim b_n = A$ a tedy

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = A\,.$$

Tím je důkaz proveden; A je právě číslo, jež jsme se rozhodli označit písmenem e. Tedy je

$$\lim a_n = e = \lim b_n\,, \quad \text{tj.} \quad \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Příklad 2. *Pro každé n je* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (tj. $a_n < e < b_n$, podržíme-li označení z příkl. 1).

Důkaz. Ježto $b_1, b_2, \dots$ je klesající posloupnost, $\lim b_n = e$, je podle důsledku věty 64 $b_n > b_{n+1} \geqq e$. Dokážeme-li, že $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost rostoucí, bude podle důsledku věty 63 $a_n < a_{n+1} \leqq e$. Podle binomické věty je

$$a_n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{n^n},$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$(46) \qquad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Píšeme-li zde $n + 1$ místo n, dostáváme

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$(47) \qquad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ je $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$; každý člen v (46) – od třetího počínaje[13]) – je tedy menší než stejnolehlý člen v (47); mimoto vystupuje v (47) ještě další nový kladný člen, totiž

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Tedy je vskutku $a_n < a_{n+1}$.

Příklad 3. Příklad 2 nám dává možnost počítat číslo e s libovolnou přesností, tj. s libovolně malou chybou. Je totiž $a_1 = 2$, $b_1 = 4$ a pro $n > 1$ je $2 < a_n < e < < b_n < 4$, $b_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \frac{1}{n}a_n$. Zvolíme-li určité n a vypočteme $a_n = = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, bude číslo a_n vyjadřovat číslo e s chybou[14]) menší než $b_n - a_n = = \frac{1}{n}a_n < \frac{4}{n}$. Zvolíme-li n dosti velké, můžeme tuto chybu učinit libovolně malou. Např. zvolím-li $n = 4000$, bude chyba menší než $\frac{1}{1000}$. Vidíte, že by tento postup byl velmi namáhavý: k dosažení této poměrně malé přesnosti bychom musili vypočíst $(1 + \frac{1}{4000})^{4000}$.[15]) Později si odvodíme jiný postup, který nám umožní nesrovnatelně

[13]) Pro $n = 1$ vystupují ovšem jen první dva členy: $a_1 = 1 + 1$.

[14]) „Chybou" rozumíme zde ovšem číslo $|e - a_n|$.

[15]) Ježto $a_n < 4$, vyšel by pro číslo $\frac{1}{n}a_n$ o něco lepší odhad než $\frac{4}{n}$; ale ne o mnoho lepší, neboť $a_n > 2$ a tedy $\frac{1}{n}a_n > \frac{2}{n}$.

pohodlnější výpočet (kdo by již nyní chtěl tento postup poznat, nechť si probere cvičení 11).

Příklad 4. Budiž $x > 0$; potom existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Důkaz. Jde o posloupnost s n-tým členem $a_n = n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

I. Pro $x = 1$ je $\sqrt[n]{x} = 1$, $a_n = 0$, $\lim a_n = 0$.

II. Budiž $x > 1$, tedy též $\sqrt[n]{x} > 1$, $a_n > 0$, takže posloupnost je zdola omezená. Stačí tedy ještě dokázat, že je klesající, tj. že $a_n > a_{n+1}$, tj. že

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) > (n + 1)(\sqrt[n+1]{x} - 1). \tag{48}$$

To nyní dokážeme. Položme $y = \sqrt[n(n+1)]{x}$, takže y je ono kladné číslo, pro něž je $y^{n(n+1)} = x$. Tedy $(y^n)^{n+1} = x$, tj. $y^n = \sqrt[n+1]{x}$, $(y^{n+1})^n = x$, tj. $y^{n+1} = \sqrt[n]{x}$. Nerovnost (48), kterou máme dokázat, lze psát též takto:

$$n(y^{n+1} - 1) > (n + 1)(y^n - 1); \tag{49}$$

ježto $x > 1$, je $y > 1$. Jak okamžitě zjistíte (a jak ostatně znáte ze školy), jest

$$y^n - 1 = (y - 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1),$$
$$y^{n+1} - 1 = (y - 1)(y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1).$$

Dělíte-li nerovnost (49) kladným číslem $y - 1$, vidíte: (49) – a tedy též (48) – platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnost

$$n(y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1) >$$
$$> (n + 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1)$$

a tuto nerovnost lze psát ve tvaru (odečtu na obou stranách $n(y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots$ $\ldots + y + 1)$)

$$ny^n > y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1. \tag{50}$$

Tuto nerovnost máme tedy dokázat. Ale nerovnost (50) plyne vskutku okamžitě sečtením nerovností $1 < y^n$, $y < y^n, \ldots, y^{n-1} < y^n$, jež jsou správné, neboť $y > 1$.

III. Budiž $0 < x < 1$; položme $z = \frac{1}{x}$, tedy $z > 1$. Jest

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{z}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{z}} - 1\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{z}} \cdot n(\sqrt[n]{z} - 1).$$

Podle bodu II existuje vlastní limita $\lim n(\sqrt[n]{z} - 1)$, podle příkladu 4 v § 2 je $\lim \sqrt[n]{z} = 1$; podle (31) existuje též vlastní limita $\lim a_n$.

Dokažme ještě jednu větu, kterou budeme potřebovat v následující kapitole.

Věta 66. *Ke každému reálnému číslu x existuje neklesající posloupnost racionálních čísel mající limitu x.*

Důkaz. Ke každému přirozenému n najděme celé číslo k_n tak, že

$$\frac{k_n}{2^n} \leqq x < \frac{k_n + 1}{2^n}; \tag{51}$$

takové celé číslo k_n vskutku existuje, a to jen jedno; neboť nerovnosti (51) znamenají, že má být $k_n \leqq 2^n x < k_n + 1$ a těmto nerovnostem vyhovuje podle věty 46 právě jedno celé číslo k_n, totiž $k_n = [2^n x]$. Tím dostáváme posloupnost racionálních čísel

$$\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2^2}, \frac{k_3}{2^3}, \ldots, \frac{k_n}{2^n}, \ldots \tag{52}$$

Srovnejme n-tý člen této posloupnosti s $(n + 1)$-vým členem. Podle (51) je

$$\frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} \leqq x < \frac{k_{n+1} + 1}{2^{n+1}},$$

tedy $2k_n < k_{n+1} + 1$, tedy $2k_n \leqq k_{n+1}$,[16]) a tedy $\frac{k_n}{2^n} = \frac{2k_n}{2^{n+1}} \leqq \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}$, takže posloupnost (52) je *neklesající.* Dále je podle (51)

$$x - \frac{1}{2^n} < \frac{k_n}{2^n} \leqq x;$$

ježto $\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} x = x$, je podle věty 61 též $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} = x$. Tím je věta dokázána.

Věta 66 je možná čtenáři příjemná z tohoto důvodu: naše definice reálných čísel pomocí řezů se snad leckomu zdála trochu abstraktní. Teď máme trochu konkrétnější vyjádření reálných čísel: každé reálné číslo lze vyjádřit jako limitu posloupnosti racionálních čísel; dokonce mají ta racionální čísla ve jmenovateli pouze mocniny čísla 2. Kdybychom místo 2 psali 10 a kdybychom věc sledovali podrobněji, dospěli bychom k vyjádření reálných čísel nekonečnými desetinnými zlomky; vrátím se k této otázce ke konci kapitoly IV.

Cvičení

1. Odvoďte větu 64 z věty 63 tím, že přejdete k posloupnosti $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots$

2. Posloupnost nemůže být současně rostoucí a nerostoucí ani klesající a neklesající; může však být nerostoucí a současně neklesající; kdy to nastane?

3. Jestliže existuje přirozené číslo n_1 tak, že pro $n \geqq n_1$ je $a_n \leqq a_{n+1}$, platí: je-li $a_1, a_2, \ldots$ shora omezená, existuje vlastní $\lim a_n$; není-li shora omezená, je $\lim a_n = +\infty$. Nemusí však být $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1,2,\ldots} a_n$. Příklad: pro posloupnost $5, 3, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \left(a_n = \frac{n}{n+1} \text{ pro } n \geqq 3\right)$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=3,4,5,\ldots} a_n = 1$, ale $\sup_{n=1,2,\ldots} a_n = 5$.

[16]) Uvažte: jsou-li a, b celá, $a < b + 1$, je $a \leqq b$.

4. K důsledku věty 63: je-li $a_1, a_2, \dots$ *rostoucí* a shora omezená, je dokonce $a_k < \lim_{n\to\infty} a_n$ pro každé k. Obdobně pro klesající.

5. Dokažte novým způsobem, že $\lim a^n = 0, 1, +\infty$ pro $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ (příkl. 3, § 2 a 8, § 3). Návod pro $0 < a < 1$: $a, a^2, a^3, \dots$ je klesající zdola omezená; existuje $\lim a^n = \alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq a < 1$. Vybraná posloupnost $a^2, a^3, a^4, \dots$ (n-tý člen $a \cdot a^n$) má limitu α, současně však $a\alpha$; tedy $\alpha = a\alpha$, $\alpha = 0$.

6. Dokažte novým způsobem, že $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ pro $x > 0$ (viz příklad 4, § 2). Návod pro $x > 1$: posloupnost je klesající, má vlastní limitu $a \geqq 1$. Je $\sqrt[n]{x} > a$, $a^n < x$; tedy je $a, a^2, a^3, \dots$ shora omezená, tedy $a \leqq 1$ (cvičení 5), tedy $a = 1$.

7. Budiž k přirozené číslo; potom je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty$. Návod: jde o rostoucí posloupnost; kdyby bylo $\sqrt[k]{n} < A$ pro všechna n, bylo by $n < A^k$ — spor.

8. Dokažte novým způsobem, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (cvičení 4, § 2). Návod: od 4. členu posloupnost klesá $\left(\text{podle příkl. 2 je } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \leqq n \text{ pro } n \geqq 4, \text{tedy } (n+1)^n < n^{n+1}, \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}\right)$. Existuje $\lim \sqrt[n]{n} = \alpha \geqq 1$. Též (vybraná posloupnost) $\lim \sqrt[2n]{2n} = \alpha$, a tedy $\lim \sqrt[n]{2n} = \alpha^2$. Ale $\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \alpha$ (cvičení 6). Tedy $\alpha \geqq 1$, $\alpha^2 = \alpha$, tedy $\alpha = 1$.

9. $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ $\left(\text{návod: za znamením lim stojí } \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)$.

10. Z výsledku příkladu 2 odvoďte $\lim n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

11. Odvodíme pohodlný postup pro výpočet čísla e. Zvolme prozatím pevně přirozené číslo $k \geqq 3$. Položme

$$c_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Pro $n > k$ vzniká c_n z a_n (str. 98) tím, že ve výrazu (46) podržím vpravo z $n + 1$ sčítanců pouze prvních $k + 1$ sčítanců, takže

$$a_n > c_n \quad \text{pro} \quad n > k. \tag{53}$$

Ježto $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \dots = \lim \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$, je

$$\lim c_n = \alpha_k, \text{ kde } \alpha_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}. \tag{54}$$

Ježto $\lim a_n = e$, je podle (53) a podle věty 60

$$e \geqq \alpha_k. \tag{55}$$

Nahraďme za druhé ve výrazu (46) všechny činitele $1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{n-1}{n}$ číslem 1; tím se výraz zvětší, takže pro $n > k$ bude

$$a_n \leqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \alpha_k + \lambda_{k,n}, \tag{56}$$

$$\lambda_{k,n} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(n-1)n}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{1}{(k+1)^m}.$$

Položíme-li $\frac{1}{k+1} = q$, je $(q + q^2 + \ldots + q^{n-k})(1-q) = q - q^{n-k+1} < q$, tedy $\lambda_{k,n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{q}{1-q} = \frac{1}{k\,.\,k!}$. Podle (56) je tedy $a_n \leqq \alpha_k + \frac{1}{k\,.\,k!}$ [17]) a tedy (viz pozn. 4 v § 2) též $e \leqq \alpha_k + \frac{1}{k\,.\,k!}$. Pro každé celé $k \geqq 3$ je tedy (viz (55))

$$\alpha_k \leqq e \leqq \alpha_k + \frac{1}{k\,.\,k!} \text{ tj. } 0 \leqq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) \leqq \frac{1}{k\,.\,k!}. \tag{57}$$

Ježto pro větší hodnoty k je $\frac{1}{k\,.\,k!}$ velmi blízko nule, lze takto číslo e velmi pohodlně počítat. Např. $\frac{1}{10\,.\,10!} < \frac{3}{10^8}$; odtud vypočteme e s chybou menší než 10^{-7} (jest $|e - 2{,}7182818| < 10^{-7}$). Přirozeně dostáváme z (57) též nové vyjádření čísla e limitou:

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right). \tag{58}$$

12. Základem, na němž budujeme, je aritmetika reálných čísel a věta 40. Uvědomte si, že jsme při důkazu vět 51 až 62 vůbec věty 40 neužívali.[18]) Teprve k důkazu vět 63 až 65 jsme užili vět 39, 40. Ukážeme naopak: z aritmetiky reálných čísel a z věty 63 plyne věta 40. Návod: budiž M neprázdná, zdola omezená množina číselná. Každému n lze tedy přiřadit číslo k_n tak, že k_n je největší celé číslo takové, že žádné číslo z M není menší než $\frac{k_n}{2^n}$; existuje tedy aspoň jedno číslo v M, jež je menší než $\frac{k_n + 1}{2^n}$. Snadno zjistíte, že posloupnost $\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2^2}, \ldots, \frac{k_n}{2^n}, \ldots$ je shora omezená a neklesající, takže podle věty 63 existuje $\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{2^n} = g$. Snadno zjistíte, že číslo g má vlastnosti uvedené ve větě 40.

[17]) Vtip je v tom, že pro *všechna* čísla a_n od $(k+1)$—vého počínaje, tj. pro $a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots$, dostáváme *touž* nerovnost, neboť pravá strana nezávisí na n.

[18]) Užili jsme jí ovšem při definici pojmů „supremum a infimum posloupnosti" na začátku § 2, ale těchto pojmů jsme v § 2, 3 vůbec dále neužili; ovšem v oněch příkladech, kde se vyskytuje odmocnina, bylo použito věty 40, neboť důkaz existence n-té odmocniny (věta 43) spočíval na větě 40. Věta 39 je ovšem důsledkem věty 40, jak víme.

Odtud je vidět základní význam vět 63 až 65: vedle aritmetiky reálných čísel jsme mohli místo věty 40 vzít za základ větu 63; byli bychom ovšem musili podat přímý důkaz věty 63, opřený o teorii řezů, tj. o úvahy I. kapitoly, což provedeme v následujícím cvičení.

13. Budiž $\alpha_n = (A_n/B_n)$; budiž $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ posloupnost řezů 1. nebo 3. druhu taková, že $\alpha_1 \succeq \alpha_2 \succeq \alpha_3 \succeq \ldots$ a že existuje řez λ tak, že je $\lambda \prec \alpha_n$ pro všechna n. (Znak $\alpha \succeq \beta$ značí ovšem: je buďto $\alpha \succ \beta$ nebo $\alpha = \beta$.) Definujme řez $\gamma = (C/D)$ tak, že do D dáme všechna racionální čísla, jež patří do některé skupiny B_n. Zjistíte: je $\gamma \preceq \alpha_n$ pro každé n; je-li však $\gamma' \succ \gamma$, existuje aspoň jedno n tak, že $\alpha_n \prec \gamma'$.[19]) Přejdete-li od řezů k reálným číslům (podle vzoru kap. I, § 7), dostanete snadno větu 64 a odtud změnou znamení větu 63.

[19]) Celá tato úvaha se ovšem jen nepodstatně liší od důkazu věty 40.