

# Historie Fermatových kvocientů (Fermat – Lerch)

---

## Životopis Pierra de Fermat

In: Karel Lepka (author): Historie Fermatových kvocientů (Fermat – Lerch). (Czech). Praha: Prometheus, 2000. pp. 7–13.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401886>

### Terms of use:

© Lepka, Karel

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Kapitola 1

## Životopis Pierra de Fermat

Tato kapitola je věnována osobnosti francouzského matematika Pierra de Fermat. Kromě životopisných údajů jsou zde uvedeny nejdůležitější výsledky jeho vědecké práce, především z teorie čísel. Životopisné údaje jsou čerpány zejména z monografie [Ma]; údaje o Fermatově životě a díle lze nalézt i v publikacích [By], [Ed], [Ri1], [Ri2] a [We].

Ačkoliv Pierre de Fermat patří k největším matematikům všech dob a jeho dílo se stalo inspirací pro celé generace matematiků, jeho život byl svým způsobem velice prostý a jednotvárný. Fermat se narodil v roce 1601 v Beaumontu de Lomagne, v malém městě na jihu Francie nedaleko Toulouse v provincii Languedoc. Přesné datum jeho narození není známo, pokřtěn byl 20. srpna 1601.<sup>1</sup> Jeho otec Dominique byl prosperující obchodník s kůžemi, jeho matka Claire, rozená de Longová, patřila k tzv. „noblesse de robe“, což znamená, že její rodina získala šlechtický titul díky tomu, že její členové byli státními úředníky. Základní a střední vzdělání zřejmě získal ve františkánském klášteře v Grandseve. Vzhledem k otcovu bohatství a společenskému postavení matčiny rodiny bylo přirozené, že se mladý Fermat rozhodl pro právnickou dráhu. Někdy před rokem 1631 mu byl udělen titul bakaláře civilního práva na universitě v Orléans. Před rokem 1631 strávil určitý čas, snad i několik roků, v Bordeaux. 14. května 1631 mu byl udělen titul soudního rady a začal působit u provinčního soudu v Toulouse. Úřad soudního rady zastával až do své smrti. Na základě této skutečnosti byl později svými současníky titulován „Monsieur de Fermat“.<sup>2</sup>

1. června 1631 se oženil s Luisou de Long, což byla vzdálená příbuzná jeho matky. Měl dva syny a tři dcery. Starší syn Samuel se stal úředníkem a podobně jako jeho otec byl jmenován soudním radou v Toulouse. Zajímal se také o matematiku, ale neměl otcovo nadání. Vděčíme mu však za to, že zachoval podstatnou část otcova díla pro příští generace. Mladší syn Jean se stal kanovníkem kated-

---

<sup>1</sup>O přesné datum Fermatova narození včetně roku probíhají diskuse, které však dle autorova názoru nemají podstatný význam pro Fermatovo dílo.

<sup>2</sup>Fermat si tento úřad zakoupil, tak jak bylo ve Francii až do roku 1789 zvykem, od vdovy po svém předchůdci za 43 000 liber. Tato částka ukazuje, že Fermat byl velmi bohatý a na rozdíl od některých jiných velíkáňů vědy nikdy neměl existenční starosti a ani nebyl závislý na žádném mecenáši.

rály v Castres. Dcera Claire se provdala, Cathérine a Louise se staly jeptiškami. Fermatova služební činnost se odehrávala v Toulouse a v Castres, kde bylo sídlo „Chambre de l'Edit“ toulousského soudního dvora, což byla soudní instance zabývající se vztahy mezi katolíky a protestanty v provincii. Fermat zemřel v Castres 12. ledna 1665 během pobytu ve svém úřadě.

Fermat měl zřejmě výborné klasické vzdělání. Psal verše latinsky, řecky, italsky a španělsky a tato jeho schopnost psát verše ve více jazycích byla jeho současníky vysoce ceněna. Toto nadání po něm zdědil jeho syn Samuel. Fermat sbíral staré rukopisy a byl vyhledávaným poradcem při korekturách řeckých textů. V sedmáctém století člověk s takovými zájmy mohl uvažovat o cestě do Itálie; v jeho případě by mu vědecká činnost v této zemi a přítomnost takových osobností jako Galileo, Cavalieri, Ricci a Torricelli umožnila další růst. Někteří jeho nejlepší přátelé skutečně Itálii navštívili (Carcavi v roce 1634, Beaugrand 1635, Mersenne v letech 1644 a 1645). Není však znám žádný náznak toho, že by Fermat vůbec uvažoval následovat jejich příkladu. Fermat dokonce nenavštívil ani Paříž, ačkoliv v jednom ze svých prvních dopisů Mersennovi píše o „nalezení nějaké příležitosti strávit tři nebo čtyři měsíce v Paříži, kterýžto pobyt by mu poskytl příležitost dokončit jeho úvahy o geometrických tématech“, tato cesta se však nikdy neuskutečnila.

Na sklonku svého života, v roce 1660, se chtěl setkat s Pascalem „někde na poloviční cestě mezi Clermontem a Toulouse.“ Pascal však vzhledem k svému zdraví tuto cestu nemohl podniknout. Téhož roku navštívil Paříž Huygens, s nímž komunikoval o vědeckých problémech prostřednictvím Carcaviho. Fermat ve svých dopisech ujišťoval Huygense, že by jel do Paříže, aby se s ním setkal, jen kdyby mu to zdraví dovolilo. Zřejmě doufal, že Huygens tuto narážku pochopí a navštíví ho v Toulouse. Jeho očekávání se však nevyplnilo.

Nakonec Fermat zemřel, aniž se dostal dál než do Bordeaux. V roce 1631 je sice uveden v seznamu absolventů práv v Orléans, ale k získání tohoto diplomu nebyla jeho přítomnost v tomto městě nezbytně nutná. Jak ukazují jeho dopisy, prázdniny trávil pravidelně ve svém venkovském sídle.

Neexistuje žádný podklad, který by určil přesné datum, odkdy se Fermat začal věnovat matematice, muselo se to však stát nejpozději při jeho pobytu v Bordeaux koncem dvacátých let. Tam se setkal mimo jiné s Etiennem d'Espagnet, jenž byl také úředníkem, a brzy se stali důvěrnými přáteli. D'Espagnet byl o několik roků starší než Fermat, inklinoval k matematice a zdá se, že byl první, kdo si všiml Fermatova nadání a povzbuzoval ho v dalším studiu. Vlastnil některé nepublikované Viětovy spisy a uvědomil o tom i Fermata. Lze předpokládat, že měl víceméně kompletní sbírku Viětových prací, které byly v té době těžko dostupné, a je zřejmé, že je Fermat na počátku své kariéry, dlouho před tím než vyšlo van Schootenovo vydání Viětovy Opera mathematica v roce 1646, pečlivě studoval. D'Espagnet zůstal Fermatovým dlouholetým přítelem a udržoval s ním nejen osobní vztahy, ale také se zajímal o jeho matematické pokroky. V roce 1646 Mersenne požádal právě d'Espagneta, aby vykonával nátlak na Fermata a přiměl ho odejít na několik dní z Bergeracu, aby se mohli setkat v Bordeaux.

Dalším z matematiků, s nímž se Fermat v tomto období setkal a s nímž navázal přátelské vztahy, byl Jean de Beaugrand, „matematik H. H. Gastona d'Orleans“

(tento titul mohl znamenat cokoliv), který později zastával úřad královského sekretáře. De Beaugrand patřil mezi Viětovy obdivovatele a následovníky, kteří usilovali o rozšíření jeho metod. Právě aplikace Viětových metod přivedla Fermata k objevu analytické geometrie. Fermat sepsal tuto novou teorii v díle, které nazval *Ad locos planos et solidos isagoge*<sup>3</sup> [Fe2]. Kopii tohoto díla poslal do Paříže na přelomu let 1636 a 1637, krátce poté, co začal svoji korespondenci s ostatními vědeckými kolegy. V tomto období se Fermat rovněž zabýval kvadraturou křivek tvaru  $y = x^n$ , některými fyzikálními problémy a od roku 1636 také teorií čísel. Zatímco ostatním matematickým disciplínám se věnoval vždy jen v určitém období, v teorii čísel pracoval od tohoto roku prakticky nepřetržitě až do konce svého života.

V Toulouse se Fermat rovněž seznámil s Pierrem de Carcavim, jenž byl nejen jeho kolegou u soudního dvora, ale sdílel s ním i zájem o matematiku. Když byl Carcavi v roce 1636 přeložen do Paříže, řekl o svém talentovaném kolegovi reverendu Pierre Marinu Mersennovi. Tento známý kněz byl členem vědecké skupiny, kam patřil mimo jiné i Etienne Pascal, Roberval, Claude Hardy a další méně známí učenci. Mersenne byl jakýmsi tajemníkem této skupiny, organizoval její činnost, obracel se na její členy s těmi problémy, které mohli nejlépe řešit, uchovával jejich korespondenci apod. Mersenne oslovil Fermata (tento dopis je nyní už ztracen) a požádal ho, aby se k této skupině připojil. Fermat toto pozvání přijal a od té doby začala jeho intenzivní korespondence se členy této skupiny a skončila tak jeho relativní izolace. Fermatovo jméno se stalo známým nejen ve Francii, ale i v zahraničí. Období 1636 – 1643 patří v jeho životě k nejpłodnějšímu. Fermat se věnoval analytické geometrii, analýze (metoda minima a maxima a tečny ke křivce). Z této doby pocházejí i jeho velké objevy z teorie čísel, které jsou dnes uváděny jako Malá a Velká Fermatova věta.

V letech 1643–1654 jeho vědecká aktivita poklesla, ačkoliv se matematice nepřestal věnovat. Mimo jiné vyvinul novou metodu pro kvadraturu křivek tvaru  $y^q = ax^p$  a  $x^p y^q = a$ , věnoval svou pozornost teorii rovnic a v teorii čísel se zabýval řešením neurčité rovnice  $x^2 - py^2 = 1$  v oboru celých čísel.

V roce 1654 Fermat obnovil svoji vědeckou korespondenci. Mezi nejvýznamnější patří jeho korespondence se synem E. Pascala Blaisem, v níž položili základy nové matematické disciplíny – teorie pravděpodobnosti. Známa je i jeho výzva francouzským, holandským a anglickým matematikům, aby se podíleli na řešení dvou problémů z teorie čísel. První se týkal součtu dělitelů, druhý řešení tzv. *Pellovy rovnice*  $Nx^2 + 1 = y^2$ , kde  $N$  není druhá mocnina.

Měřeno dnešními očima, Fermat nebyl profesionálním matematikem. V 17. století bychom však našli jen málo učenců, pro něž by byla matematika zdrojem obživy. Styl Fermatovy práce vykazuje některé specifické rysy. Jedním z nich je skutečnost, že svoje výsledky prakticky nepublikoval. V tomto směru existuje jediná výjimka, za kterou vděčíme učitelu matematiky v toulousské jezuitské koleji, páteru Lalouvěremu. Jedná se o anonymní pojednání o rektifikaci křivek, které Lalouvěre připojil na konec své knihy o cykloidách. V tomto ohledu se musíme také zmínit o osmi anonymních stránkách, které objevil J. E. Hofman v roce 1943, připojených ke kopii Freniclovy neobyčejně vzácné brožurky z roku

<sup>3</sup>Úvod do studia rovinných a prostorových křivek.

1657, která pojednává o Pellově rovnici a dalších tématech [Ho]. Tyto stránky obsahují dopisy Freniclovi a jeden dopis Digbymu a musely být vytištěny pro soukromou potřebu bez Fermatova vědomí, neboť je zřejmě neznal ani Samuel Fermat, když připravoval *Varia Opera* [We].

Otázka publikace Fermatových prací vyvstala při několika příležitostech již za jeho života. Fermat vyslovil pevné odhodlání vydat své objevy z teorie čísel v knižní formě. V roce 1654 požádal Carcaviho a Pascala o spolupráci na mnohem ambicióznějším projektu. Chtěl, aby mu pomohli připravit řadu jeho matematických prací pro publikování. Pascal měl mít na starosti teorii čísel, nad kterou si Fermat zoufal, zda ji vůbec kdy dokončí. Toto úsilí přišlo nazmar, ale v roce 1656 se Carcavi zmiňuje o této záležitosti Huygensovi, činí tak ještě jednou v roce 1659, přes Fermatovy poněkud odrazující názory na publikaci jeho aritmetického díla. Nakonec se do jeho smrti nic v této záležitosti neudělalo.

Je však nutné vzít v úvahu, že v těch dobách nebylo pro matematiky jednoduché dát svou práci do tisku. Aby tiskař mohl udělat poměrně slušnou práci, musel být neustále ve styku s autorem nebo s někým, kdo znal autorův styl a notaci, ale to nebylo vše. Až příliš často se kniha ihned po vydání stávala terčem uštěpačných útoků, které obvykle neměly konce. Proto se nelze Fermatovi divit, že kdykoliv vyvstala otázka publikování, trval především na anonymitě. Navíc měl i těžkosti s dokončením důkazů tak, aby je bylo možné publikovat, zejména v teorii čísel, neboť neměl k dispozici žádný vzor, ani starý, ani nový, kterým by se mohl řídit.

Fermat si nikdy nedělal těžkou hlavu s uschováváním kopií své vědecké korespondence. Úkol shromáždit tuto roztroušenou korespondenci co možná nejlépe připadl až po Fermatově smrti jeho synu Samuelovi. Ten začal v roce 1670, když znovu vydal Bachetova Diofanta z roku 1621 a v něm uveřejnil plný text poznámek zapsaných tam otcem na okrajích výtisku. K tomuto svazku připojil dřívější Bachetův přítel a učitel matematiky v Dijonu, jezuitský mnich Jacques de Billy, šestatřicetistránkovou esej *Doctrinae Analyticae Inventum Novum*, jež je psána podle řady Fermatových dopisů (nyní s výjimkou prvního z roku 1659 ztracených), v níž podrobně popisuje Fermatovy metody řešení diofantických rovnic prvního řádu a v níž poněkud naivně a nekriticky vynáší Fermatovy zásluhy nad zásluhy Diofanta, Viëta a Bacheta. Další publikací byla *Varia Opera* v roce 1679. V této knize jsou zahrnuty Fermatovy práce z geometrie, algebry, diferenciálního a integrálního počtu spolu s dopisy, které si vyměňoval s Mersennem, Robervallem, E. Pascalem, Freniclem, B. Pascalem, Carcavim, Digbym a Gasendim. Řada z nich, včetně těch, které se týkají teorie čísel, zde však zahrnuta není, zřejmě proto, že jejich adresáti je Samuelovi Fermatovi neposlali a tudíž jsou do dnešní doby neznámy.

Kompletní Fermatovo dílo, tak jak bylo známo, bylo vydáno ve čtyřech svazcích P. Tannerym a Ch. Henrym [Fe2] a dále k tomu musíme připojit několik fragmentů v Mersennově *Correspondance*. Všechny tyto publikace představují celé Fermatovo dílo, i když, jak se zdá, neúplné.

Dalším významným rysem Fermatovy vědecké práce byla skutečnost, že většinu svých výsledků uváděl bez důkazů, ačkoliv je nade vše pochybnost, že všechna svá tvrzení dokazoval nebo se alespoň o to pokoušel. Způsob Fermatova uvažování

v tomto ohledu výstižně dokumentuje citát z jeho dopisu Mersennovi z roku 1636: *Myslím, že připustíte, že tyto výsledky jsou hezké, ale já mám málo příležitostí zapsat jejich důkazy, které patří k nejobtížnějším a k nejkomplexnějším v matematice, takže jsem velice spokojen, že jsem objevil pravdu a mám prostředky ji dokázat, kdykoliv mám volný čas se tomu věnovat. Pokud se najde nějaká příležitost, abych mohl jet do Paříže a strávit tam několik měsíců, využiji ji k tomu, abych sepsal všechny své objevy, k nimž bezpochyby přispěla i vaše činnost.*

Zvláštní postavení zaujímá ve Fermatově díle teorie čísel. Fermat původně zamýšlel obnovit aritmetiku tak, jak ji chápal Platon, tj. jako nauku o celých číslech a jejich vlastnostech. Navzdory svému obdivu Diofantovy *Aritmetiky*, kterou studoval, později popřel většinu jejích závěrů, neboť Diofantos směřoval spíše k racionálnímu než k celočíselnému řešení. Použitím metod z ostatních oborů jeho hledání číselně-teoretických metod vedlo nakonec k teorii, která má málo společného s klasickou aritmetikou a která byla plně doceněna až dalšími generacemi matematiků. Na rozdíl od ostatních oborů Fermat nenalezl mezi svými vrstevníky rovnocenného partnera a ani pokračovatele.

Fermat se věnoval zejména dvěma okruhům problémů. Prvním z nich bylo tvoření pythagorejských trojic, které vyhovovaly různým podmínkám. Mezi výsledky, k nimž Fermat dospěl v této oblasti, patří mj. tvrzení, že prvočísla tvaru  $4k + 1$  lze vyjádřit jako součet druhých mocnin, kdežto prvočísla tvaru  $4k - 1$  takto vyjádřit nelze a především známá Velká Fermatova věta o nemožnosti řešení neurčité rovnice  $x^n + y^n = z^n$  v oboru přirozených čísel pro  $n > 2$ , kterou zapsal jako poznámku na okraji stránky ve svém výtisku Diofantovy *Aritmetiky* [Df1].<sup>4</sup> Otázka č. 8 druhé knihy se týkala rozdělení druhé mocniny na součet dvou druhých mocnin a Fermat zde připsal následující poznámku: *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem fane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*<sup>5</sup> Hledání tohoto neuvedeného důkazu vedlo o dvě století později k objevení teorie ideálů německým matematikem Ernstem Kummerem. Svou teorii publikoval v práci [Ku1], kde oznamuje nové výsledky, a v práci [Ku2], kde připojuje další podrobnosti včetně důkazů. V této souvislosti je nutno se zmínit o metodě *Descende infinie*, čili nekonečného sestupu, kterou Fermat objevil a kterou často v teorii čísel používal. Tato metoda je vlastně matematickou indukcí „naruby“ a lze ji formulovat následujícím způsobem:

**Věta 1.1** *Nechť  $V(n)$  je vlastnost pro každé přirozené číslo  $n$ . Jestliže jsme z předpokladu, že přirozené číslo  $p$  má vlastnost  $V(p)$ , dokázali existenci přirozeného čísla  $q < p$  majícího vlastnost  $V(q)$ , potom žádné přirozené číslo nemá vlastnost  $V(n)$ .*

Vzhledem k tomu, že v 17. století neexistovala výstavba přirozených čísel tak jako dnes, je téměř jisté, že Fermat tuto metodu objevil intuitivně a nemohl

<sup>4</sup>Kniha, do které Fermat psal své poznámky je ztracena. Velká Fermatova věta je známa až z nového vydání [Df1], o které se přičinil S. Fermat; viz [Ri1].

<sup>5</sup>Nelze rozdělit krychli na dvě krychle, bikvadrát na dva bikvadráty a obecně žádnou mocninu vyšší než dvě na dvě mocniny téhož stupně. Pro tuto skutečnost jsem nalezl podivuhodný důkaz, tento okraj je však příliš úzký.

ji dokázat. Řečeno současnou terminologií, tato metoda využívá skutečnosti, že množina přirozených čísel je *dobře uspořádaná*, tj. každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Jak se domnívá Mahoney ([Ma], str. 355), právě tato metoda by mohla být oním podivuhodným důkazem o němž se Fermat zmiňuje ve své marginálii. Podle Mahoneyho právě úspěšné použití této metody pro speciální případy  $n = 3$  a  $n = 4$  mohlo vést Fermata k zobecnění tohoto důkazu, které však, jak ukázal další vývoj, nebylo správné.<sup>6</sup>

Druhý okruh problémů se týkal součtu dělitelů čísel (*aliquot parts*, jak je Fermat nazýval). Výzkumy v tomto směru vyvrcholily tzv. Malou Fermatovou větou, o které je podrobně pojednáno v druhé kapitole.

Osobnost Pierra de Fermat patří mezi nejpozoruhodnější v dějinách matematiky vůbec. Jeho mimořádné nadání, intuice a širší záběr ho předurčily k tomu, že se stal jedním ze zakladatelů moderní matematiky. Jeho poněkud svérázný přístup k prezentaci svých objevů navíc způsobil, že se jeho dílo, zejména z teorie čísel, stalo zdrojem inspirace pro generace matematiků, kteří se snažili jeho tvrzení dokázat či vyvrátit. Velká Fermatova věta, která patřila mezi nejznámější problémy matematiky,<sup>7</sup> byla dokázána až v roce 1995 britským matematikem Andrew Wilesem, jako poslední dosud nedokázané Fermatovo tvrzení. Důkaz byl publikován v [Wl]; mezera v tomto důkaze byla vzápětí odstraněna a doplněný důkaz byl publikován v [TW].

Wilesův důkaz je však daleko za hranicemi Fermatových možností, takže vlastně „pouze“ dokazuje platnost Velké Fermatovy věty, neřeší však problém ztraceného Fermatova důkazu. Přestože zpráva o dokázání této věty proběhla i sdělovacími prostředky, neustávají pokusy tuto větu dokázat elementárními metodami, jak je možno se přesvědčit např. v síti Internet. Fermatovo dílo bude zřejmě inspirací i výzvou pro další generace matematiků.

Jak již bylo řečeno, Fermat se zabýval nejen matematikou, ale i fyzikou, zejména mechanikou a optikou. Fyzika a matematika měly k sobě v 17. století mnohem blíže než nyní. Jako důkaz stačí uvést jen dvě další jména, a sice Fermatova současníka B. Pascala a o několik desítek let mladšího I. Newtona. Patrně nejznámějším Fermatovým fyzikálním objevem je princip, který popisuje šíření světla v prostoru a který můžeme formulovat následujícím způsobem: *Světlo se šíří v prostoru z jednoho bodu do druhého po takové dráze, že doba potřebná k proběhnutí této dráhy má extrémní hodnotu.* Jinými slovy, po všech možných sousedních drahách spojujících dva body na téměř světelném paprsku by se světlo šířilo buď delší, nebo kratší dobu, případně by doba zůstávala stejná. Z Fermatova principu ihned vyplývá, že se světlo v homogenním a izotropním prostředí šíří přímočaře, neboť přímka je nejkratší spojnicí dvou bodů a k překonání této vzdálenosti potřebuje světlo nejkratší dobu.

Fermatovo úmrtí bylo v časopise *Journal des Sçavans* oznámeno následujícími slovy, které výstižně charakterizují jeho osobnost: *S hlubokým zármutkem jsm*

---

<sup>6</sup>Obdobné nesprávné generalizace se Fermat dopustil i v případě tzv. Fermatových čísel  $2^{2^n} + 1$ .

<sup>7</sup>Toto tvrzení podporuje i skutečnost, že Česká pošta zvolila tuto větu jako námět příležitostné známky, která byla vydána 31. května 2000 ke světovému roku matematiky. Autorem námětu je Zdeněk Ziegler, rytcem Miloš Ondráček. Viz obrazovou přílohu č. XXXXXXXXXXXXXXXX

*se dozvěděli o úmrtí pana de Fermat, rady Parlamentu v Toulouse. Byl jedním z nejpodivuhodnějších mozků tohoto století, génius tak univerzální a tak širokých zájmů, že kdyby všichni učené mužové nepodali svědectví o jeho mimořádných zásluhách, těžko by bylo možno věřit všemu, co je nutné říci, aby jeho význam byl doceněn.*