Kniha patnáctá.

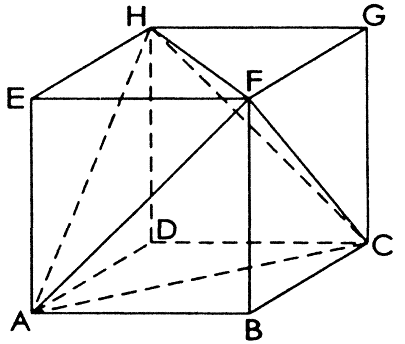
A o tělesech pátá.

Někteří mají za to, že též tuto knihu napsal Euklid, jiní však, jsouce pravdě bližší, nazvali ji:

Hypsikla Alexandrinského „o pěti tělesech" kniha druhá.

Věta 1. Úloha.

V danou krychli nechť se vepíše jehlan.[6] (Obr. 477.).

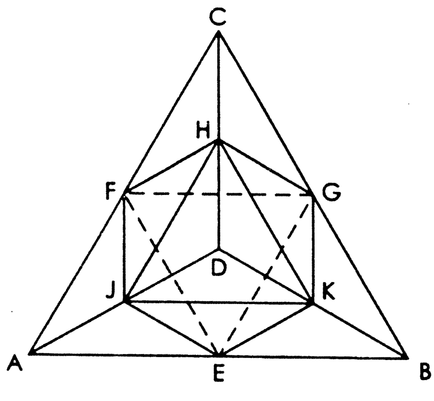


Obr. 477.

V danou krychli ABCDEFG nechť se vepíše jehlan.
Veďme AC, AH, AF, CH, CF, CH. Trojúhelníky ACH, AFH, ACF, CFH jsou, jak patrno, stejnostranné, poněvadž strany jejich jsou úhlopříčné čtverců, které omezují krychli. Z té příčiny jest jehlan ACFH omezen čtyřmi stejnostrannými trojúhelníky a vepsán jest v danou krychli (XI.vým.26.).

Věta 2. Úloha.

V daný jehlan nechť se vepíše osmistěn. (Obr. 478.).



Obr. 478.

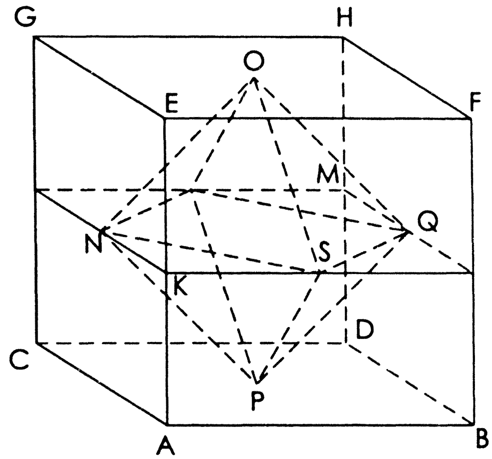
[6] πυραμίς; vlastně čtyřstěn, jak už prvé se kladlo, a též v následujícím se klade jehlan místo čtyřstěnu.

Budiž dán jehlan ABCD; půlme jeho hrany v bodech E, F, G, H, J, K a veďme HJ, HK, EF, EG a ostatní.

Poněvadž jest AC dvojnásobné přímky HJ, GE, jest HJ = GE, a mimo to jsou vespolek rovnoběžné. Podobně se ukáže, že též GH = EJ a že jsou vespolek rovnoběžné, z čehož jde, že jest EGHJ stejnostranný rovnoběžník. A tvrdí se, že jest též pravoúhelný. Neboť vedeme-li z téže JK kolmice na roviny FEBG, FECG, FEHG, HJEG podobně se ukáže, které ve čtverci HJEG jsou stejnostranné; jak se státi mělo.[7]

Věta 3. Úloha.

V danou krychli nechť se vepíše osmistěn. (Obr. 479.).



Obr. 479.

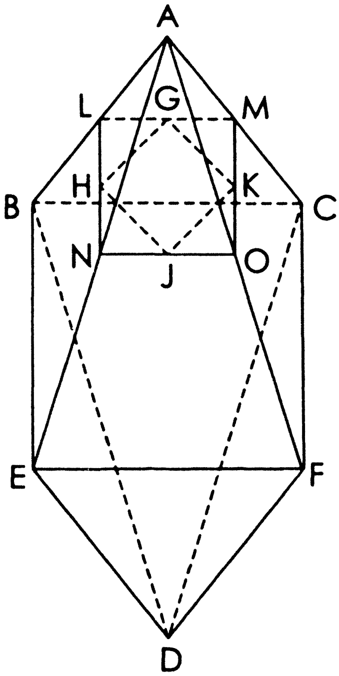
Budiž dána krychle ABCDEFGH, středy čtverců nechť jsou N, S, Q, R; tvrdí se NSQR jest čtverec.

Body N, S, Q, R veďme JK || AC, KL || AB, ML || BD, JM || CD. Poněvadž se JK = 2 KN, KL = 2 KS a JK = KL, jest KN = KS, pročež $NS^2 = 2\ KS^2$ (I.47.). Z téže příčiny se $QS^2 = 2\ LS^2$ a $NS^2 = 2\ QS^2$, nebo NS = QS a proto jest obrazec NSQR stejnostranný avšak též pravoúhelný. Nazveme-li v protilehlých čtvercích AD, EH středy P, O a vedeme-li PN, PR, PS, PQ, ON, OR, OS, OQ, dostaneme osm trojúhelníků stejnostranných a sobě rovných, z čehož jde, že omezují osmistěn, který jest vepsán do dané krychle.

[7] David Gregorius poznamenal: Celá tato kniha patnáctá jest nad míru znešvařena ... V této větě žádaná úloha provede se takto: Poněvadž AD, CD půleny byly v bodech J, H, jest HJ polovice AC, rovněž jest HK polovice BC, pak JF, GK jsou polovice CD, a rovněž HF, HG, FG, JK, EK, EJ dokuď se týče jsou polovice AD, BD, AB. Avšak šest hran čtyřstěnu jest ve spolek rovných, pročež se rovnají ve spolek AB, AC, BC, AD, BD, CD, a proto jsou vespolek rovny též přímky HJ, HK, HF, HG, HC, FE, JE, EK, EG, GK, FJ, FG. Každý z trojúhelníků HJK, HJF, HFG, HGK, EFG, EFJ, EGK, EJK, jest stejnostranný, a proto těleso EJKFHG jest osmistěn, jehož šesti úhlů vrcholy E, J, K, G, H, F leží uprostřed šesti hran čtyřstěnu.

Věta 4. Úloha.

V daný osmistěn nechť se vepíše krychle. (Obr. 480.).



Obr. 480.

Budtež G, H, J, K středy kruhů, které opsati lze kolem trojúhelníků ABC, ABE, ACF, AEF, a veďme GH, HJ, JK, GK; tvrdí se: GHJK jest čtverec.

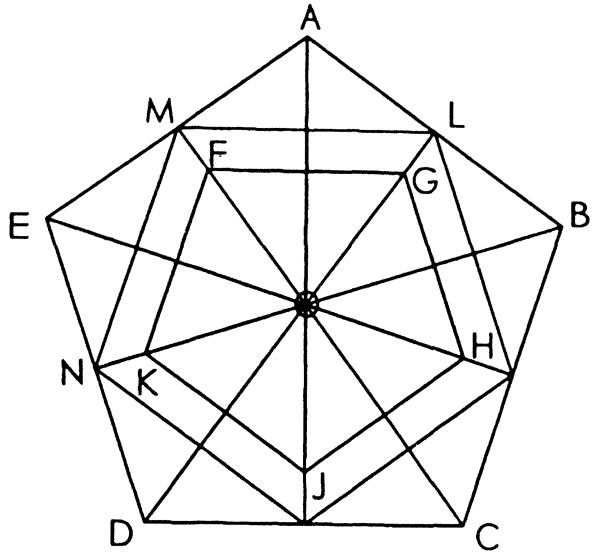
Body G, H, J, K veďme LM || AB, LN || BE, MO || CF a NO || EF.

Poněvadž jest △ ABC stejnostranný, vedeme-li z bodu A do středu H kruhu jejž kolem △ku ABE opsati lze, přímku, bude tato půliti ∠ BAE, a proto HL = HN (I.4.); z téže příčiny se GL= GM. A poněvadž se LN = LM, LM = MO, jest též HN = GL, HL = GM a LG = KM a úhlové GLH, GMK jsou praví, pročež GH = GK (I.4.), a též ostatní strany jsou si rovny, tak že rovnoběžník GHJK jest v téže rovině (XI.7.); a poněvadž pak ∠ HGL = KGM = 1/2 R, jest ∠ HGK = R (I.13.), a rovněž i ostatní úhlové, takže GHJK jest čtverec.

Podobně bychom vyhledati mohli středy kruhů též v ostatních trojúhelnících, které osmistěn omezují, čímž bychom dostali jiné čtverce, které by vesměs byly samé strany krychle vepsané v daný osmistěn.

Věta 5.

V daný dvacetistěn nechť se vepíše dvanáctistěn. (Obr. 481.).



Obr. 481.

Budiž dán pětiúhelník dvacetistěnu ABCDE s vrcholem O; a vyhledejme středy kruhů, které opsati lze kolem △△ AOB, BOC, COD, DOE, AOE totiž F, G, H, J, K (IV.5.), veďme FG, GH, HJ, JK, FK a spojivše OG, OF, OK, atd. protáhněme je do L, M, N atd. Tím jsme půlili AB, AE, DE v bodech L, M, N a proto má se

$$\underline{ML} : \underline{MN} = \underline{FG} : \underline{FK} \text{ (VI.4.)},$$

a poněvadž ML = MN, jest FG = FK, a podobně ukázati lze, že i ostatní strany pětiúhelníku FGHJK vespolek se rovnají. Avšak tvrdí se: pětiúhelník ten jest o stejných úhlech.

Neboť ML, MN jest rovnoběžná s FG, FK, a ostatní se rozumí samo sebou. Mysleme si ve vrcholu O vztýčenou kolmici na rovinu pětiúhelníku ABCDE, a tato zajisté procházeti bude středem kruhu, který kolem téhož pětiúhelníku opsati můžeme. Vedeme-li k tomuto středu kruhu z bodu M přímku a z bodu F s ní rovnoběžnou, dopadne tato do některého bodu téže kolmice z O. A kdyby se z bodu L, N atd. vedly jednak přímky k témuž středu kruhu, jednak pak z bodu G, K, J, H s nimi rovnoběžné, dopadly by tyto vesměs na kolmici vedenou z O a tvořily by s ní pravé úhly, z čehož jde, že pětiúhelník ABCDE jest v téže rovině.

Věta 6.

Nechť se vyhledají pěti těles hrany a úhlové.[8]

Každý dvacetistěn jest omezen dvaceti trojúhelníky, každý z těchto má tři strany, z čehož jde, že jest všech stran šedesát, a poněvadž po dvou dopadají v jednu, má dvacetistěn třicet hran.

Dvanáctistěn omezuje dvanáct pětiúhelníků, které mají dohromady šedesát stran, a tyto po dvou spadají v jednu, pročež má dvanáctistěn též třicet hran.

Podobným způsobem vyšetří se počet hran krychle, čtyř- a osmistěnu. Počet úhlů omezujících stran těles pěti vyšetří se rovněž pomocí rovin, které se sbíhají v jediný roh. Poněvadž tedy roh dvacetistěnu omezuje pět trojúhelníků dělme předešlý počet hran jeho pěti; t. j. šedesát děleno pěti dává dvanáct rohů dvacetistěnu.

V dvanáctistěnu sbíhají se v jeden roh tři pětiúhelníky, dělme tedy předešlých šedesát hran třemi a dostaneme dvacet, t. j. dvacet rohů má dvanáctistěn; a tak podobně u těles ostatních.

Věta 7.

Nechť se vyšetří u pěti těles sklon jednotlivých rovin k sobě.

Z rovin, které omezují kterékoli z pěti těles, je-li jedna známa, nechť se vyšetří její sklon k sousední rovině. Veliký učitel náš Isidor takto se o tom pronáší:

V krychli jsou čtverce ji omezující k sobě nakloněny v úhlu pravém.

V jehlanu (čtyřstěnu) vysaďme jednu rovinu t. j. stejnostranný trojúhelník, z každého jeho vrchole opíše se kruh poloměrem, jenž se rovná výšce téhož trojúhelníku. Tři tyto kruhy protínají se po dvou, a vedeme-li z průsečného bodu toho přímky k příslušným vrcholům co středům těch kruhů, udává úhel ten sklon rovin omezujících jehlan.

V osmistěnu sestrojme na straně jednoho trojúhelníku čtverec, veďme v tomto úhlopříčnou, a z její konečných bodů co středů opišme kruhy poloměrem, který se rovná výšce téhož trojúhelníku. Spojíme-li společný průsek obou kruhů s jich středy, dostaneme úhel, jenž se rovná sklonu rovin omezujících osmistěn.

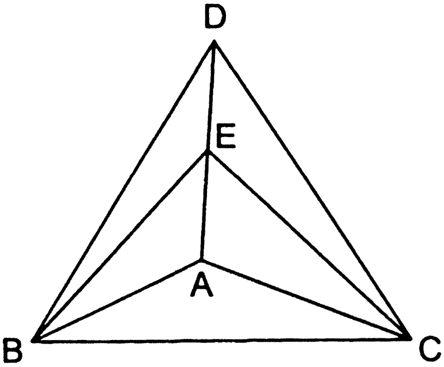
V dvacetistěnu sestrojme na straně jeho trojúhelníku pětiúhelník o stejných stranách a úhlech, v tomto veďme úhlopříčnou a z konečných její bodů opišme kruhy poloměrem, jenž se rovná výšce téhož trojúhelníku. Spojíme-li průsečný bod kruhů obou s oběma středy jich, dostaneme úhel, který udává sklon rovin dvacetistěnu.

---

[8] T. j. počet hran a rohů.

V dvanáctistěnu vysadí se pětiúhelník jej omezující, v tomto se vede úhlopříčná a z konečných její bodů co středů opíšou se kruhy poloměrem, který dostaneme, když onu úhlopříčnou půlíme, u z tohoto půlícího bodu vedeme kolmici na protější stranu pětiúhelníku, která jest rovnoběžná s onou úhlopříčnou. Spojíme-li průsečný bod obou kruhů s oběma jich středy, dostaneme úhel, který udává sklon rovin dvanáctistěnu.

Takto nejvzácnější muž ten vykládal, a patrné bylo celé toho sestrojení. Já pak totéž znázorním počínaje s jehlanem.[9]



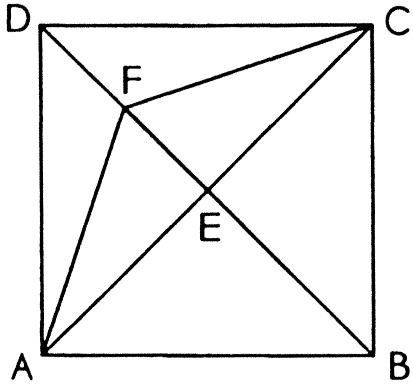
Obr. 482.

Budiž ABCD jehlan (čtyřstěn), půdice ABC a vrchol D (Obr. 482.). Půlme AD v bodu E, a veďme BE, CE. Poněvadž jsou △ △ ABD, ACD stejnostranné a strana AD jest v bodu E půlena, bude BE, CE kolmo na AD (I.8.), a tvrdí se: ∡ BEC jest ostrý. Neboť $AC = 2\ AE$, pročež $AC^2 = 4\ AE^2$, avšak $AC^2 = AE^2 + CE^2$ (I.47.), a proto má se

$$AC^2 : CE^2 = 4 : 3,$$

a $CE = BE$, tedy AC^2 nebo $BC^2 < BE^2 + CE^2$, z čehož jde, že ∡ BEC < R, čili že jest ostrý (II.13.). Mají tedy roviny ABD, ACD společný průsek AD, v bodu E tohoto průseku sbíhají se kolmice BE, CE, a tyto tvoří ostrý ∡ BEC, pročež úhel ten udává sklon obou jmenovaných rovin (XI.vým.6.), a sklon tento jest vyšetřen. Neboť dána jest strana BC, a každá z kolmic BE, CE z vrcholů daných vésti se může na společný obou rovin průsek (nebo na protější stranu △ BCD); tou neb onou z nich co poloměrem opsati lze z bodů B, C na rovině BDC kruhy, které se protnou v bodu E, a ∡ BEC udává sklon, jak praveno bylo. Ostatně patrno, že oba kruhy opsané z bodů B, C poloměrem, který se rovná výšce △ku BCD čili poloměrem BE, (CE), séci se musejí, neboť kdyby se každý poloměr ten rovnal polovici BC, dotýkaly by se pouze, kdyby každý z nich menší byl polovice téže BC, ani by se nedotýkaly, avšak BE, CE jest větší nežli polovice BC, a proto se oba kruhy séci musejí. Tím jest u jehlanu vyšetřen úhel sklonu dvou stěn.

[9] Vykládá Hypsikles, co Isidor vypravoval.



Obr. 483.

Sestrojme na čtverci ABCD co půdici jehlan s vrcholem E, který tedy omezen jest mimo půdici čtyřma stejnostrannými trojúhelníky; bude pak jehlan EABCD polovice osmistěnu (Obr. 483.). Půlme hranu DE v dobu F a veďme AF, CF, které tedy se vespolek rovnají a jsou na DE kolmo. Tvrdí se: ∡ AFC jest tupý. Vedeme-li totiž úhlopříčnou čtverce AC, jest $AC^2 = 2\ CD^2$, a $CD^2 : CF^2 = 4 : 3$, pročež $AC^2 : CF^2 = 8 : 3$, a $CF = AF$, tedy

$$AC^2 > CF^2 + AF^2,$$

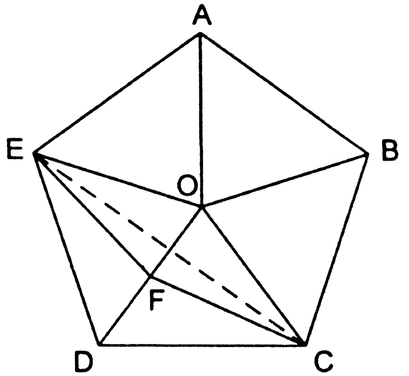
z čehož plyne, že jest ∡ AFC tupý (II.12.). A poněvadž dvou rovin ADE, CDE společný průsek jest DE, a k témuž bodu F na těch rovinách vedeny jsou kolmice AF, CF, poznačuje tupý ∡ AFC úhel sklonu jmenovaných rovin (XI.vým.6.), tak že kdyby tento ∡ AFC znám byl, též znám bude sklon obou rovin. A skutečně dán jest trojúhelník omezující osmistěn, jeho strana CD; na této lze sestrojiti čtverec ABCD a vésti v něm úhlopříčnou AC, a též kolmice na DE z bodů A, C spustiti můžeme, z kteréž příčiny ∡ AFC jest určen. Neboť vedeme-li ve čtverci sestrojeném na straně daného stejnostranného trojúhelníku úhlopříčnou AC, a opíšeme-li z bodů A, C poloměrem, jenž se rovná výšce daného trojúhelníku, kruhy, sekou se tyto v bodu F. Spojíme-li pak bod F se středy oněch kruhů A, C, dostaneme ∡ AFC, který udává sklon dvou stěn osmistěnu. Ostatně patrno, že jest AF, CF větší nežli polovice úhlopříčné AC, jak býti musí, aby se ony kruhy protínaly.

Neboť $AC^2 : CF^2 = 8 : 3$, a $AC^2 = 4\ AE^2$, kde $AE = 1/2\ AC$ (VI.20.), tedy

$$4\ AE^2 : CF^2 = 8 : 3, \text{ nebo}$$

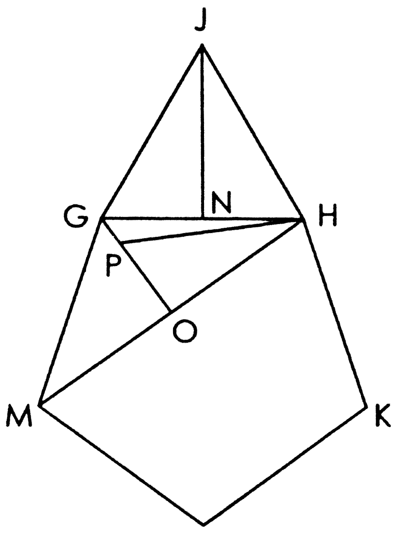
$$3\ AE^2 = 2\ CF^2, \text{ t. j. } CF > AE \quad \text{j. b. t.}$$

V dvacetistěnu vysaďme stejnostranný pětiúhelník ABCDE (Obr. 484.), nad ním myslíme si jehlan s vrcholem O, jehož stěny jsou stejnostranné trojúhelníky; půlme stranu OD v bodu F a veďme EF, CF, které na OD budou kolmo; tvrdí se: ∡ CFE jest tupý. Neboť vedeme-li v pětiúhelníku CE, podpíná tato tupý úhel pětiúhelníku totiž CDE; avšak ∡ CFE > ∡ CDE poněvadž na společné přímce CE jsou dva trojúhelníky CED, CEF, a CF, EF menší jsou nežli CD, DE (I.21.).



Obr. 484.

Avšak ∡ CFE udává sklon dvou stěn dvacetistěnu, a proto jsou-li uvedené podmínky známy, jest úhel tento určen. Totiž, na straně stejnostranného trojúhelníku, který omezuje dvacetistěn sestrojí se stejnostranný pětiúhelník, vede se CE, která podpíná úhel pětiúhelníku, v daném trojúhelníku se vede výška CF a touto se z obou bodu C, E opíšou kruhy, které se v bodu F sekou. Spojíme-li bod F s C, E dostaneme ∡ CFE, jenž udává sklon dvou stěn dvacetistěnu. Že jest každá CF, EF větší polovice úhlopříčné CE dokazuje se takto: Budiž dán stejnostranný △ GHJ (Obr. 485.); na straně GH sestrojme stejnostranný pětiúhelník GHKLM o stejných úhlech, veďme HM a JN ⊥ GH; tvrdí se: JN > 1/2 HM, která podpíná spolu úhel sklonu dvou stěn.



Obr. 485.

Veďme GO $\perp$ HM. Poněvadž $\measuredangle$ GHM větší jest nežli třetina pravého úhlu čili $\measuredangle$ GJN, udělejme $\measuredangle$ OHP $=$ $\measuredangle$ GJN, bude jak HO výška v stejnostranném trojúhelníku (jehož polovice jest pravoúhelný $\triangle$ PHO, poněvadž $\measuredangle$ PHO $= 1/3$ pravého úhlu tedy $\measuredangle$ HPO $= 2/3$ R), a jeho strana bude PH, z čehož plyne, že se má

$PH^2 : OH^2 = 4 : 3$, avšak $GH > PH$, pročež

GH^2 má k OH^2 větší poměr nežli $4 : 3$, a

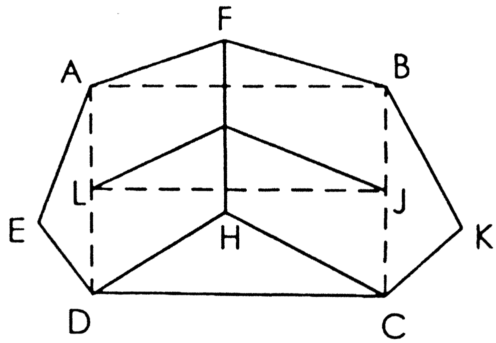
$GH^2 : JN^2 = 4 : 3$, tedy

strana GH má k polovici HM čili OH větší poměr nežli k výšce JN, a proto jest

$JN > OH$ (V.10.).

Položíme-li místo JN buď CF nebo EF, místo OH polovici CE atd.

V dvanáctistěnu totéž se ukazuje takto:



Obr. 486.

Budiž ABCD čtverec krychle (Obr. 486.) na němž sestrojiti lze část dvanáctistěnu (XIII.17.), a dva pětiúhelníky co stěny dvanáctistěnu buďtež AFHDE, BFHCK; tvrdí se: tím jest dán úhel sklonu dvou stěn dvanáctistěnu.

Půlme společný průsek obou FH v bodě G a vztyčme v něm na FH kolmice GL, GJ; $\measuredangle$ JGL jest tupý. Neboť kolmice spuštěná z bodu G na daný čtverec (co rovinu) rovná se polovici strany pětiúhelníku (XIII.17.)[10], avšak AB nebo JL větší jest nežli strana pětiúhelníku, pročež její polovice totiž $1/2$ JL $>$ oné kolmice, a tedy proti ní ležící $\measuredangle$ JGL $>$ R čili $\measuredangle$ JGL jest tupý. A tamtéž ukázáno (XIII.17.), že se $GJ^2 = (1/2\ JL)^2 + (1/2\ FH)^2$, nebo $GJ^2 > (1/2\ JL)^2$ čili $GJ = GL > 1/2\ JL$, tak že, je-li $\measuredangle$ JGL znám, též úhel sklonu dvou stěn, který jest s ním totožný, znám bude.[11]

[10] XIII.17. v obrazci jest $MN = NQ$, a pak tamtéž důsledek: seče-li se strana krychle v poměru vnějším a středním, rovná se větší její část polovici strany pětiúhelníku.

[11] V témže obrazci XIII.17. jest $ML^2 = LN^2 + NM^2$, poněvadž $\measuredangle$ LNM $=$ R.

Jest však dán čtverec ABCD, strana jeho AB podpíná úhel dvou pětiúhelníků čili úhel sklonu jich, a rovnoběžná s AB nebo CD jest přímka JL, která čtverec ABCD půlí; z bodu J, L vedou se kolmice na společný průsek FH, který jest rovnoběžný s AD, BC, a proto znám jest též $\measuredangle$ JGL. Pěkně tedy totéž pověděl Isidor řka: V daném pětiúhelníku (n. p. BKCHF) přepnou se přímkou dvě strany (BC) a přímka ta bude hrana krychle; z obou její konců co středu (B, C) opíšou se kruhy poloměrem, jenž se rovná kolmici spuštěné ze středu společného průseku (G) na onu hranu krychle (BC, tedy GJ); průsečný bod obou kruhů spojí se s oběma středy a úhel ten jest roven úhlu skonu obou pětiúhelníků, jež omezují dvanáctistěn. Že jest v $\triangle$ JGL strana GJ, LG $> 1/2$ JL už povědíno, a tím dovoděno, že se ony dva kruhy séci musejí.